**MATRICES ELEMENTALES**

Sea E∈ Rnxn.

E es una matriz elemental si se obtiene de la matriz In (matriz identidad de orden n) mediante una sola operación elemental de filas.

**Teorema:** Sea e una operación elemental de filas tal que E=e(I).

Entonces, ∀A ∈ Rmxn: e(A)=EA.

**Teorema**: Sean A,B ∈ Rmxn.

f

A B ⇔ B=PA con P un producto de matrices elementales.

**MATRIZ INVERSIBLE**

Sea A ∈ Rnxn.

Si ∃B ∈ Rnxn/ AB=BA=In. Entonces se dice que A es inversible y que B es su inversa.

**Teorema**: Sea A ∈ Rnxn.

Si A es inversible ⇒ A-1 es única.

**Teorema**: Si A es inversible ⇒ (A-1)-1=A.

**Teorema:** Sean A,B ∈ Rnxn.

Si A y B son inversibles, entonces:

1. A es simplificable.
2. AB es inversible y (AB)-1=B-1A-1.

**Corolario:** Si A1 , A2 , …, Ar son inversibles, entonces el producto (A1 A2…Ar) es inversible y (A1 A2 … Ar)-1=  (Ar)-1 (Ar-1)-1 … (A2)-1(A1)-1.

Observaciones:

1. Si una matriz tiene una fila nula, entonces no es inversible.
2. Una matriz cuadrada, escalón reducida por filas es inversible, si y solo si es la matriz identidad.

**Teorema:** Toda matriz elemental es inversible y su inversa es una matriz elemental.

**Teorema:** Sea A ∈ Rnxn . Los siguientes enunciados son equivalentes.

1. A es inversible.

f

1. A In.
2. A es un producto de matrices elementales.

**Teorema:** Sea A ∈ Rnxn . Los siguientes enunciados son equivalentes.

1. A es inversible.

1. AX=0 tiene única solución.
2. AX=H tiene única solución para cada matriz H∈ Rnx1.

Obtención de la inversa de una matriz:

Sea A ∈ Rnxn.

Dispondremos los cálculos en una tabla de dos columnas.

En la columna de la derecha colocaremos la matriz A nxn y en la de la izquierda la matriz identidad de orden n.

Sobre la matriz A aplicaremos una sucesión de operaciones elementales de filas e1, e2, …,er que nos permita obtener su matriz escalón reducida por filas, R. La misma sucesión e1, e2, …,er , aplicaremos a la matriz In.

|  |  |
| --- | --- |
| In | Anxn |
| E1 | A1=E1 A |
| E2 E1 | A2=E2 E1 A |
| ⇣ | ⇣ |
| Er … E2 E1 = P | Ar=Er …E2 E1 A =PA=R |
| P | P A |

e1

e2

e3

er

e1

e3

er

e2

Al aplicar la primera operación e1 sobre la matriz In se obtendrá una matriz elemental E1, por definición de matriz elemental: *“Es una matriz que se obtiene de una matriz identidad mediante una sola operación elemental de filas”*.

La misma operación e1 sobre la matriz A dará por resultado una matriz A1=E1 A, de acuerdo con el teorema cuyo enunciado dice: *“Sea e operación elemental de filas tal que E=e(I). Entonces para toda matriz Amxn, se cumple: e(A)=EA”.* Es decir, cada operación elemental de filas practicada sobre una matriz equivale a realizar una multiplicación por la matriz elemental correspondiente.

Al aplicar la operación e2 a las matrices E1 y E1A, por el mismo teorema mencionado anteriormente se tendrán matrices E2E1 (en la primera columna) y E2E1A (en la segunda columna), con E2=e2(In).

Con la última operación elemental de filas se tendrán las matrices: P=Er…E2 E1 (en la primera columna) y R=P A = Er …E2 E1 A (en la segunda columna). R es la matriz escalón reducida por filas de A.

Si la matriz R fuera la matriz identidad de orden n, se tendría In=PA. Recordemos que toda matriz identidad es una matriz escalón reducida por filas; pero no toda matriz escalón reducida por filas es una matriz identidad.

Luego podemos hacer otra tabla de dos columnas, en la columna de la derecha escribimos la matriz P y en la de la izquierda la matriz In. Al aplicar a estas dos matrices la sucesión de operaciones elementales de filas inversas, se obtendría sobre la columna de la derecha, la matriz In y sobre la columna de la izquierda la matriz A.

|  |  |
| --- | --- |
| In=PA | P |
|  |  |
| ⇣ | ⇣ |
|  |  |
| A | In=AP |
|  |  |

e1-1

er-1

e1-1

er-1

De la misma forma que en la primera tabla se tenía PA=R, en esta segunda tabla, el producto AP es igual a In, AP=In.

Siempre que en la primera tabla se obtenga la matriz identidad a partir de la matriz A (la reducida por filas de A es la identidad), en la segunda tabla se obtendrá, a partir de In, la matriz A y a partir de P la identidad. Esto es así porque las operaciones elementales de filas inversas restituyen las matrices originales. Por consiguiente no es necesario construir la segunda tabla dado que los resultados se conocen de antemano.

En definitiva, si al construir la primera tabla, la escalón reducida por filas de A es la matriz identidad, se cumplirá que PA=AP=I, lo que implica que P es la inversa de A, P= A-1, por definición de matriz inversible.

Se puede concluir que para hallar la matriz inversa de A, en el caso de que exista tal matriz, se procede de la siguiente manera:

1. Se construye una tabla con dos columnas. En la columna de la izquierda se escribe In y en la de la derecha A.

e2(1/5))

e21(-1)

e31(-2))

1. Se reduce por filas la matriz A mediante una sucesión de operaciones elementales de filas. En la columna de la derecha se obtiene la matriz R, matriz escalón reducida por filas de A. Esta misma sucesión de operaciones elementales de filas se aplica a la matriz In. En la columna de la izquierda se obtiene una matriz P tal que PA=R.
2. Si la reducida por filas de A es la matriz identidad In, R=In, entonces A es inversible, puesto que en ese caso PA=AP=In. La inversa de A es la matriz que se obtiene en la primer columna de la tabla, es decir P=A-1.

Elemplo:

Sea la matriz . Hallar la inversa de la matriz A, si fuera la matriz A inversible.

e12(2))

e12(2))

e32(-3))

e32(-3))

e1(-1))

e21(-1)

e31(-2))

e1(-1))

e2(1/5))

|  |  |
| --- | --- |
| I3 | A |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

e12(2))

e12(2))

e3(-5/3))

e23(-1/5))

e3(-5/3))

e23(-1/5))

Dado que la matriz escalón reducida por filas de la matriz A resultó ser la matriz identidad de orden 3, se concluye que la matriz A tiene inversa y que la matriz obtenida en la columna de la izquierda es la inversa de la matriz A.

Para comprobar la exactitud de las operaciones, se puede multiplicar A-1A y comprobar que el resultado sea la matriz identidad.