**SEGMENTOS DIRIGIDOS - VECTORES LIBRES**

*Q*

**Segmentos dirigidos**

Segmento:

*P*

Un segmento es una porción de recta determinada por sus dos puntos extremos. Un segmento de extremos *PQ* se denota $\overbar{PQ}$.

*P*

*Q*

Segmento dirigido:

Un segmento dirigido es un segmento con sus extremos dados en un cierto orden: un extremo es el origen y el otro extremo es la extremidad. Un segmento dirigido de origen *P* y extremidad *Q* se denota $\vec{PQ}$.

Los segmentos dirigidos quedan caracterizados por:

* Su longitud: está dada por la medida, o el tamaño, o la extensión, del segmento dirigido.
* Su dirección: está dada por la recta en la que está contenido, de modo tal que segmentos dirigidos contenidos en rectas paralelas tienen igual dirección y segmentos dirigidos contenidos en rectas no paralelas tienen distinta dirección.
* Su sentido: dos segmentos dirigidos, contenidos en rectas paralelas no coincidentes, tienen igual sentido si uniendo con sendos segmentos las extremidades y los orígenes de ambos, queda definido un cuadrilátero. Tienen sentidos opuestos si uniendo los orígenes y las extremidades de ambos con sendos segmentos, éstos últimos se intersecan. Dos segmentos dirigidos contenidos en la misma recta, tienen igual sentido si uniendo los orígenes y extremidades de ambos con el origen y extremidad de un tercer segmento dirigido, contenido en otra recta paralela a la anterior, quedan definidos dos cuadriláteros. Dos segmentos dirigidos contenidos en la misma recta, tienen sentidos opuestos si uniendo los orígenes y extremidades de ambos con un tercer segmento dirigido contenido en una recta paralela y no coincidente con la anterior, queda definido un único cuadrilátero.

Segmentos dirigidos de igual sentido:

Segmentos dirigidos de igual sentido, contenidos en la misma recta

Segmentos dirigidos de igual sentido contenidos en rectas paralelas no coincidentes.

Segmentos dirigidos de sentidos opuestos:

Segmentos dirigidos de sentidos opuestos contenidos en rectas paralelas no coincidentes.

Segmentos dirigidos de sentidos opuestos contenidos en la misma recta.

Segmento dirigido nulo:

Es un segmento dirigido cuyo origen coincide con su extremidad.

* Longitud del segmento dirigido nulo: 0.
* La dirección del segmento dirigido nulo es la misma que la dirección de todo otro segmento dirigido.
* No se le asigna sentido al segmento dirigido nulo.

**Segmentos dirigidos equipolentes**

Dos segmentos dirigidos no nulos son equipolentes si tienen igual longitud, dirección y sentido. Los segmentos dirigidos nulos son equipolentes entre sí.

Si $\vec{PQ}$ es equipolente a $\vec{RS}$ se escribe: $\vec{PQ} \~ \vec{RS}$.

Propiedades de la relación de equipolencia:

* $\vec{PQ}\~\vec{PQ}$ Reflexividad
* $\vec{PQ}\~\vec{RS}⇒ \vec{RS}\~\vec{PQ}$ Simetría
* $\vec{PQ}\~\vec{RS} ∧ \vec{RS}\~\vec{TU} ⇒\vec{PQ}\~\vec{TU}$ Transitividad

Números de dirección de un segmento dirigido:

S

y

$$s\_{2}-r\_{2}$$

R

$$s\_{1}-r\_{1}$$

$$q\_{2}-p\_{2}$$

$$q\_{2}-p\_{2}$$

Q

P

$$q\_{1}-p\_{1}$$

x

O

Sean los puntos del plano *P=(p1, p2); Q=(q1,q2); R=(r1, r2) y S=(s1,s2)* tales que $\vec{PQ} \~ \vec{RS}$.

Entonces *Q – P = ( q1-p1 , q2-p2 ) y S – R = ( s1-r1 , s2-r2 ) .*

Los pares ordenados *(* *q1-p1 , q2-p2 )*y*( s1-r1 ,s2-r2 )*son los pares ordenados de los números de dirección de $\vec{PQ}$ y $\vec{RS}$, respectivamente.

Por ser equipolentes los segmentos dirigidos y por las propiedades de los triángulos semejantes se tiene que

*( q1-p1 , q2-p2 )* = *(s1-r1 , s2-r2)*

Segmentos dirigidos equipolentes tienen los mismos pares ordenados de números de dirección.

Vector libre *u* asociado a un segmento dirigido $\vec{AB}$ (se puede decir vector libre *u* o simplemente vector *u*):

Es el conjunto de todos los segmentos dirigidos equipolentes a $\vec{AB}$.

$u=\left\{\vec{PQ}/ \vec{PQ}∼\vec{AB}\right\}$ el vector *u* asociado al segmento dirigido $\vec{AB}$ es el conjunto de todos los segmentos dirigidos $\vec{PQ}$, tales que dichos segmentos dirigidos son equipolentes al segmento dirigido $\vec{AB}$.

Cualquier segmento dirigido $\vec{PQ}\in u$ es un representante del vector *u*.

En todo punto del plano o del espacio existe un segmento dirigido que representa a un vector *u* .

*Un vector queda caracte*rizado por

* Su módulo, que es la longitud de uno cualquiera de sus representantes. El módulo del vector nulo es 0.
* Su dirección, que está dada por la dirección de uno cualquiera de sus representantes. La dirección del vector nulo es igual a la de cualquier otro vector.
* Su sentido, que está dado por el sentido de uno cualquiera de sus representantes. Al vector nulo no se le asigna sentido.

Vectores colineales:

Son vectores de igual dirección. También se dice que son paralelos.

Todo vector, junto con el vector nulo, constituyen un sistema de vectores colineales.

Vectores coplanares:

Son vectores cuyos representantes con igual origen están contenidos en el mismo plano.

Todo par de vectores junto con el vector nulo constituyen un sistema de vectores coplanares.

Componentes de un vector:

Sea *u* un vector asociado al segmento dirigido $\vec{PQ}$, con $P=(p\_{1},p\_{2})$ y $Q=(q\_{1},q\_{2})$.

Entonces $Q-P=\left(q\_{1}, q\_{2}\right)-\left(p\_{1},p\_{2}\right)=\left(q\_{1}-p\_{1}, q\_{2}-p\_{2}\right)$

Los números $\left(q\_{1}-p\_{1}, q\_{2}-p\_{2}\right)$ son los números de dirección de todos los segmentos dirigidos que pertenecen al vector *u*.

Llamamos a los números $u\_{1}=q\_{1}-p\_{1}$ y $ u\_{2}=q\_{2}-p\_{2}$ “componentes del vector *u* “.

Estos números definen, determinan, caracterizan unívocamente al vector *u*. A su vez, dado un sistema de coordenadas, a cada vector *u*, le corresponde un único par (o terna) ordenado de componentes. Por lo que podemos escribir

$$u=(u\_{1},u\_{2})$$

En $R^{3}$: $u=Q-P=\left(q\_{1}-p\_{1}, q\_{2}-p\_{2}, q\_{3}-p\_{3}\right)=\left(u\_{1}, u\_{2}, u\_{3} \right)$

En resumidas cuentas, dado un vector *u*, las componentes de *u*, son iguales a los números de dirección de uno cualquiera de sus representantes. Conocidos las componentes de un vector, o los números de dirección de uno cualquiera de sus representantes, quedan determinados el módulo, la dirección y el sentido del vector; y se puede representar el vector en un punto cualquiera del plano o del espacio mediante uno de sus segmentos dirigidos. En cada punto del plano ($R^{2}$) o del espacio ($R^{3}$) se tiene un representante del vector *u*.

**Operaciones con vectores**

Suma de vectores

Sean u y v vectores.

Si en un punto cualquiera *A* se dibuja un representante de *u*, $\vec{AB}$, y en *B* se dibuja un representante de *v*; $\vec{BC}$, entonces el segmento dirigido $\vec{AC}$ representa al único vector *u+v* , llamado suma de *u* y *v*.

$$v$$

$$u$$

$$B$$

$$u+v$$

$$C$$

$$A$$

Si $u=\left(u\_{1}, u\_{2}\right)$ y $v=\left(v\_{1}, v\_{2}\right)$ son vectores de $R^{2}$,

entonces, $u+v=\left(u\_{1}+v\_{1}, u\_{2}+v\_{2}\right)$.

Si $u=\left(u\_{1}, u\_{2}, u\_{3}\right)$ y $v=\left(v\_{1}, v\_{2,}, v\_{3}\right)$ son vectores de $R^{3}$,

entonces, $u+v=\left(u\_{1}+v\_{1}, u\_{2}+v\_{2}, u\_{3}+v\_{3} \right)$.

Propiedades:

Sean $u, v, w $vectores.

1. $u+\left(v+w\right)=\left(u+v\right)+w$ Asociatividad
2. $ u+v=v+u$ Conmutatividad
3. $u+0=u$ Existe elemento neutro, el vector nulo, denotado 0.
4. $u+\left(-u\right)=0$ Para cada vector *u*, existe elemento opuesto, - *u,* tal que *u+(-u)* es el vector nulo.

Multiplicación de un vector por un escalar

Sea *u≠0* un vector, *k≠0* un número real.

El producto *ku* es un vector tal que

* $\left‖ku\right‖=\left|k\right|\left‖u\right‖$.
* $u$ y $ku$ tienen la misma dirección.
* Si $k>0$, $u$ y $ku$ tienen el mismo sentido. Si $k<0$, $u$ y $ku$ tienen sentidos opuestos.

Si $u=\left(u\_{1}, u\_{2}\right)$ es un vector de $R^{2}$ y $k\in R$, entonces $ku=\left(ku\_{1}, ku\_{2}\right)$.

Si $u=\left(u\_{1}, u\_{2}, u\_{3}\right)$ es un vector de $R^{3}$ y $k\in R$, entonces $ku=\left(ku\_{1}, ku\_{2}, ku\_{3}\right)$.

Propiedades:

Sean $u, v $vectores; $k, k\_{1}, k\_{2}\in R$.

1. $k\left(u+v\right)=ku+kv$ Distributividad con respecto a la suma de vectores.
2. $ \left(k\_{1}+k\_{2}\right)u= k\_{1}u+k\_{2}u$ Distributividad con respecto a la suma de escalares.
3. $k\_{1}\left(k\_{2}u\right)=\left(k\_{1}k\_{2}\right)u=k\_{2}\left(k\_{1}u\right)$ Homogeneidad.
4. $1u=u$ Existe elemento identidad, el número 1.

Módulo de un vector:

Sea $u=\left(u\_{1}, u\_{2}\right)$ un vector de $R^{2}$ y $\vec{OP}$ un representante de *u*.

El módulo del vector u, se expresa $\left‖u\right‖$, es la longitud de una cualquiera de sus representantes.

Obtendremos la fórmula de cálculo de $\left‖u\right‖$.

En primer lugar lo haremos para un vector de $R^{2}$.

Sea $\vec{OP}$, un representante de $u$ con origen en el origen del sistema de coordenadas.

 Componentes de *u* :

y

 $P-O=\left(p\_{1}-0,p\_{2}-0\right)=\left(u\_{1},u\_{2}\right)$

$$\left‖u\right‖$$

$$u\_{1}$$

$$u\_{2}$$

P

O

x

 Por el teorema de Pitágoras:

 $\left‖u\right‖=\sqrt{u\_{1}^{2}+u\_{2}^{2}}$

Ahora, deduciremos el módulo de un vector de $R^{3}$.

Sea $\vec{OP}$, un representante de $u$ con origen en el origen del sistema de coordenadas.

Componentes de *u:*

$$P-O=\left(p\_{1}-0,p\_{2}-0, p\_{3}-0\right)=\left(u\_{1},u\_{2},u\_{3}\right)$$

O

z

$$u\_{3}$$

$$p\_{3}$$

$$u\_{3}$$

$$p\_{2}$$

$$u\_{1}$$

$$p\_{1}$$

$$\left‖Q-O\right‖$$

$$u\_{2}$$

Q

P

$$\left‖u\right‖$$

x

y

R

El triángulo OPQ es un triángulo rectángulo con ángulo recto en el vértice Q. El segmento $\vec{OP}$, de longitud $\left‖u\right‖$, es la hipotenusa y sus catetos son los segmentos $\vec{OQ}$, de longitud $\left‖Q-O\right‖$, y $\vec{QP}$, de longitud $u\_{3}$.

Entonces, por el teorema de Pitágoras:

$\left‖u\right‖=\sqrt{\left‖Q-O\right‖^{2}+u\_{3}^{2}}$ (1)

Por otra parte, el triángulo ORQ también es rectángulo. El ángulo recto es el del vértice R. Su hipotenusa es el segmento $\vec{OQ}$, de longitud $\left‖Q-O\right‖$, y sus catetos son los segmentos $\vec{OR}$, de longitud $u\_{1}$ y $\vec{RQ}$, de longitud $u\_{2}$. Por lo que, aplicando nuevamente el teorema de Pitágoras,

$\left‖Q-O\right‖^{2}=u\_{1}^{2}+u\_{2}^{2}$, lo que reemplazado en la expresión (1), da lugar a:

$$\left‖u\right‖=\sqrt{u\_{1}^{2}+u\_{2}^{2}+u\_{3}^{2}}$$

Ángulo entre vectores

Sean los vectores no nulos $u, v$. El ángulo entre los vectores es el ángulo menor o igual a π que definen sus representantes con igual origen.

Q

P

θ

θ`

O

El ángulo entre los vectores *u* y *v* es

$ang\left(u,v\right)=θ / 0\leq θ\leq π$.