**Ejercicio 1:**

Encontrar el vector director de la recta que pasa por los puntos P1=(2,1,1) y P2=(3,5,4):

**Respuesta:**

v= P1 - P2=(2,1,1)-(3,5,4)=(-1,-4,-3); vector director de la recta.

**Ejercicio 2**:

Obtenga en R3 todas las ecuaciones de una recta definida por dos puntos.

**Respuesta**

Sean P, Q ∈ R3 puntos no coincidentes.

Q

X

r

P

X pertenece a la recta definida por los puntos P y Q si y solo si los vectores X-P y Q-P son paralelos:

X∈R3⇔X-P=λ(Q-P)

En esta ecuación: λ: parámetro. Para cada valor del parámetro λ se obtiene un punto de la recta r.

 v=Q-P=(v1,v2,v3) es el vector director de la recta r.

Pasamos P al segundo miembro:

X=P+ λ(Q-P) ecuación paramétrica vectorial de la recta.

Con cada una de las coordenadas escribimos una ecuación:

**** Ecuaciones paramétricas escalares de la recta en R3**

Si v1v2v3≠0 (v no tiene ninguna componente nula) despejamos λ de cada una de las ecuaciones escalares y luego igualamos:

**** ecuaciones cartesianas (forma simétrica)**

Tomando dos igualdades (de las tres que se tienen):

**v2(x-p1)=v1(y-p2)**

**v3(y-p2)=v2(z-p3)**

**v2x - v1y - v2p1 + v1p2 = 0**

**v3y - v2z - v3p2 + v2p3 = 0**

En estas ecuaciones se tiene un coeficiente multiplicando a cada coordenada y un término independiente, por lo que se pueden escribir:

**ax+by+cz=d**

**a`x+b`y+c`z=d` ecuaciones cartesianas de la recta en R3.**

**Ejercicio 3:**

Para los siguientes pares de planos de R3, determine si son paralelos (coincidentes o no) o se intersectan. En este último caso dé la ecuación paramétrica vectorial de la recta intersección.

1. π1: X=(-2,7,1)+s(3,5,-2)+t(-1,1,0)

 π2: X=(0,0,1)+α(2,1,2)+β(4,4,-2)

**Respuesta**

Ecuación cartesiana de π1:

 u x v (vectores directores de π1) : ******

# u x v es un vector perpendicular al plano π1,sus componentes son los coeficientes de la ecuación cartesiana de π1. Se puede tomar, para mayor simplicidad, un vector paralelo, el vector (1,1,4).

 π1: x + y + 4z = d

Para obtener el término independiente d, utilizamos un punto cualquiera P del plano.

Las coordenadas de P deben verificar la ecuación del plano.

El punto P lo obtenemos de la ecuación paramétrica de π1, P=(-2,7,1).

 (-2)+(7)+4(1)=9

 π1: x + y + 4z = 9

π1 ∩π2: Reemplazamos en la ecuación cartesiana de π1 las coordenadas x, y, z de la ecuación paramétrica de π2:

 x + y + 4z = 9

 (2α+4β)+(α+4β)+4(1+2α-2β)=9

 11α+0β=5

El sistema resolvente que corresponde a esta última ecuación es:

 1 α+ 0β=5/11

La solución es (α,β)=(5/11,0) + λ(0,1) reemplazamos la incógnita no principal β por el parámetro λ.

Reemplazamos la solución en la ecuación paramétrica de π2: X=(0,0,1)+(5/11)(2,1,2)+λ(4,4,-2)=

 X=( 10/11, 5/11, 21/11 )+λ(4,4,-2)

Como la intersección es la ecuación de una recta, los planos se cortan.

**Ejercicio 4**:
Sea la recta r: (x,y,z)=k(1,-1,1) y el punto A=(0,1,1).

Se pide: a) El punto de la recta más próximo al punto A.

b) La distancia entre el punto A y la recta r.

A

Q

r

π

1. Punto de la recta *r* más próximo a *A*:
	1. Trazamos un plano π por el punto *A* perpendicular a la recta *r*.

 Las componentes del vector director de la recta *r* (es decir el vector *v=(1,-1,1)*)

 son los coeficientes de la ecuación cartesiana del plano π.

 π: *x -y +z = d*

 Para hallar el término independiente *d*, reemplazamos en la ecuación del plano las coordenadas de un punto del plano (el punto *A*).

 *(0)-(1)+(1)=0⇒ d=0*

 *π: x -y +z = 0*

* 1. Ahora buscamos la intersección de la recta con el plano.

Para esto reemplazamos las coordenadas de la ecuación paramétrica de la recta en la ecuación cartesiana del plano.

r∩π: *(k) - (-k) + (k) = 0*

Resolvemos la ecuación:

*k = 0.*

Para hallar el punto *Q*, punto de *r* más cercano al punto *A*, reemplazamos el valor de *k* hallado en la ecuación paramétrica de la recta *r*:

*Q=0(1,-1,1)= (0,0,0)* este es el punto de *r* más cercano a *A*.

1. Distancia entre *A* y *r*:

$$d\left(A,Q\right)=\left‖Q-A\right‖=\left‖\left(0,0,0\right)-\left(0,1,1\right)\right‖=\left‖\left(0,-1,-1\right)\right‖=\sqrt{\left(-1\right)^{2}+\left(-1\right)^{2}}=\sqrt{2}$$

**Ejercicio 5:**

Considere el plano en R3 dado por la ecuación π : (x,y,z)= (-6,1,0,) +s(-1,1,3) +t(2,0,-5). Para la recta L1: (x,y,z)= (5,-2,0) +t(1,2,-1); determine si es paralela al plano (contenida o no) o si se intersecta al plano en un punto, en cuyo caso debe indicar el punto.

**Respuesta:**

π: X=(-6,1,0,) +s(-1,1,3) +t(2,0,-5)

L1: X=(5,-2,0) +t(1,2,-1)

Para determinar si el plano y la recta son paralelos (la recta está contenida en el plano o es paralela y no está contenida en el plano) o si se intersectan, buscamos la intersección entre ambos.

Si la intersección fuera un solo punto, entonces la recta y el plano se intersectan en un punto.

Si la intersección fuera un conjunto de infinitos puntos, entonces la recta está contenida en el plano.

Si la intersección fuera el conjunto vacío, entonces la recta es paralela al plano y no está contenida en él.

Para resolver más sencillamente el problema, a partir de la ecuación paramétrica vectorial del plano obtendremos la ecuación cartesiana.

Ecuación cartesiana de π:

Vectores directores de π: u=( -1,1,3), v=(2,0,-5)

 uxv=(-5,1,-2) este vector es perpendicular a π.

Los componentes de uxv son los coeficientes de la ecuación cartesiana de π.

-5x+y-2z=d

Para determinar el término independiente d, reemplazamos en la ecuación cartesiana de π las coordenadas de un punto del plano. Para esto utilizamos el punto (-6,1,0) que se obtiene de la misma ecuación paramétrica vectorial del plano.

-5(-6) + (1) - 2(0) = 31⇒ d=31

π: -5x + y - 2z = 31

Ahora buscaremos la intersección de la recta con el plano.

Reemplazaremos las coordenadas de la ecuación paramétrica de la recta en la ecuación cartesiana del plano. X=(5,-2,0) +t(1,2,-1)

-5 (5+t) + (-2+2t) - 2(-t)= 31

t=58/21

Q=(5,-2,0) + (58/21) (1,2,-1)

Resolviendo esta última expresión se obtienen las coordenadas del único punto intersección. Esto significa que la recta y el plano se intersectan en un punto.

**Ejercicio 6:**

Escriba la ecuación cartesiana de una recta que pasa por el punto (1,2,-1) y es perpendicular
al plano π: 2x+y-2z=3.

**Respuesta:**

Ecuación paramétrica vectorial de una recta:

X=P+tu

Para escribir esta ecuación se requiere un punto cualquiera P de la recta y un vector director u.

P puede ser el punto por el que debe pasar la recta, el punto (1,2,-1), pues este punto debe pertenecer a la recta.

P=(1,2,-1)

El vector director u es un vector perpendicular al plano p, pues u tiene la misma dirección de la recta.

Las componentes de u se pueden obtener de la ecuación cartesiana de p, ya que los coeficientes de esta ecuación son las componentes de un vector perpendicular al plano. Entonces

u=(2,1,-2)

La ecuación de la recta finalmente es

X=(1,2,-1) + t(2,1,-2)

**Ejercicio 7:**

Halle la ecuación del plano paralelo a p: 5x - y + 4 = 0 que pasa por el punto P=(1,0,-3).

Respuesta:

Todos los planos paralelos a uno dado tienen los coeficientes de x, y, z de sus ecuaciones cartesianas, proporcionales a los respectivos coeficientes de x, y, z, de la ecuación cartesiana del plano dado. En particular, una ecuación cartesiana de un plano paralelo a otro, tiene sus respectivos coeficientes de x, y, z; iguales a los de la ecuación cartesiana del plano dado.

Entonces un plano paralelo a p es:

5x - y = d

Para hallar d reemplazamos las coordenadas de P en la ecuación:

5 (1) - (0) = d = 5, es decir que d = 5, por lo que la ecuación del plano paralelo a p que pasa por el punto P es

5x - y = 5

**Ejercicio 8:**

Sean la recta $r:\left\{\begin{matrix}y+3z=0\\2x-y=1\end{matrix}\right.$ y el plano $π:X=\left(1,0,2\right)+t\left(-1,3,2\right)+k(0,2,1)$ .

Halle la intersección entre ambos, $r∩π$.

**Respuesta:**

Introducimos las coordenadas de la ecuación paramétrica en las ecuaciones cartesianas.

$$\left\{\begin{matrix}(3t+2k)+3(2+2t+k)=0\\2(1-t)-(3t+2k)=1\end{matrix}\right.$$

Haciendo las operaciones el sistema queda así:

$$\left\{\begin{matrix}9t+5k=-6\\-5t-2k=-1\end{matrix}\right.$$

Resolviendo el sistema se obtiene: $S=\left(t,k\right)=(\frac{17}{7},-\frac{39}{7})$

Reemplazamos los valores de t y k en la ecuación paramétrica del plano y se obtiene:

$Q=\left(-\frac{10}{7},\frac{51}{7},\frac{9}{7}\right)$ Punto intersección entre la recta y el plano.