**SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES**

Preguntas y actividades:

Trataremos de resolver:

¿Qué es resolver un sistema?

Sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

¿Qué es una solución?

Para ello utilizaremos:

¿Qué ventajas tiene el método de eliminación?

Método de eliminación.

Para abreviar la notación:

¿Cómo se llaman las matrices A, X y H?

Expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales: AX=H.

Detalle los pasos a seguir para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Definición de matriz escalón reducida por filas.

Definición de sistema resolvente.

Para obtener la matriz escalón reducida por filas utilizamos:

Defina cada tipo de operación elemental de filas. Notación.

Operaciones elementales de filas

Para cada tipo de operación elemental de filas, e, especifique su operación elemental inversa.

Teorema: Para cada operación elemental de filas, e, existe una operación elemental de filas, e-1, del mismo tipo, que restituye la matriz original.

Demuestre las propiedades de la relación de equivalencia.

Definición: matrices equivalentes por filas.

Propiedades de la relación de equivalencias.

Enumere los pasos para obtener la matriz escalón reducida por filas de una matriz.

La validez del método empleado para resolver sistemas de ecuaciones lineales está dada por los siguientes dos teoremas.

Teorema: Si [AH] f [A´H´], entonces los sistemas AX=H y A´X=H´ tienen las mismas soluciones.

¿Es posible que dos alumnos obtengan distintos conjuntos solución al resolver un sistema de ecuaciones lineales? ¿ Por qué?

Teorema: Toda matriz a elementos en un cuerpo es equivalente por filas a una única matriz escalón reducida por filas.

Definición: rango de fila de una matriz.

¿Qué relación hay entre r(A) y la cantidad de incógnitas principales?

Definiciones: Columna principal. Incógnita principal.

Ejemplifique sistemas con una única solución, con infinitas soluciones, e incompatible. Escriba la solución general como combinación lineal de n-uplas. Escriba una solución particular.

¿Puede ser un sistema homogéneo incompatible?

¿Qué es la solución trivial?

Definición: Sistema homogéneo.

Teorema de Rouché - Frobenius:

AX=H tiene solución ⇔ r(A)=r(AH).

Aplique el teorema a un sistema homogéneo.

¿Se puede aplicar el teorema y su corolario a un sistema no homogéneo?

Teorema: El sistema AX=0, de m ecuaciones con n incógnitas, tiene otras soluciones además de la trivial si y solo si r(A)< n.

Corolario: El sistema AX=0, con m<n, siempre admite otras soluciones además de la trivial.

**Matrices**

Definición: Suma de matrices.

Ejemplifique las propiedades de las operaciones suma, multiplicación por escalar y multiplicación de matrices.

Propiedades de la suma de matrices.

Definición: Producto por escalar.

Propiedades del producto por escalar.

Definición de combinación lineal de matrices.

Ejemplifique combinaciones lineales de columnas, de filas, de n-uplas.

Definición: Multiplicación de matrices.

Indique si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas:

AB=BA

AB=0 ⇒ A=0 ó B=0.

AB=AC ⇒ B=C

AI=A; IA=A con I matriz identidad (suponiendo que los productos están definidos).

Propiedades de la multiplicación de matrices.

Definición: Matriz elemental.

Teorema: e(A)=EA.

f

Teorema: A  B ⇔ B=PA, con P un producto de matrices elementales.

Definición: Matriz inversible.

Teorema: A es inversible ⇒ A-1 es única. Demuéstrelo.

Teorema: A es inversible ⇒ (A-1)-1 = A

Demuestre con un ejemplo que una matriz que no es inversible no es simplificable.

¿Sería válido demostrar con un ejemplo que si A es inversible, entonces A es simplificable?

Teorema: A es inversible ⇒ A es simplificable.

Teorema: Sean A, B inversibles.

Entonces AB es inversible y (AB)-1= B-1 A-1. Demuéstrelo.

Extienda el enunciado del teorema a un conjunto de n matrices inversibles.

Teorema: Sea E matriz elemental. E es inversible y su inversa es una matriz elemental.

Teorema: Los siguientes enunciados son equivalentes.

1. A es inversible.
2. A **** I.
3. A es un producto de matrices elementales.

f

Teorema: Los siguientes enunciados son equivalentes.

1. A es inversible.
2. A X =0 tiene única solución. Demuestre i⇒ii.
3. A X=H tiene única solución para cada matriz H ∈ Rnx1

Enumere los pasos para determinar si una matriz es inversible y para hallar su inversa.

Obtención de la inversa.