

Física de las ondas

Física de las ondas

Héctor Alzate López

Rector de la Universidad de Antioquia
Alberto Uribe Correa

Vicerrector de Docencia
Óscar Sierra Rodríguez

Coordinador del Programa de Educación Ude@
Guillermo León Ospina Gómez

Autor
Héctor Alzate López

Corrector de estilo
Daniel Aldana Estrada

ISBN 978-958-714-432-1
Primera edición, junio 2007

Todos los derechos reservados. No se permite la reproducción, archivo o transmisión total o parcial de este texto mediante ningún medio, ya sea electrónico, mecánico, óptico, de fotorreproducción, memoria o cualquier otro sin permiso de los editores Ude@.

© Universidad de Antioquia

Impreso en Medellín (Colombia)

Sobre el autor

Héctor Alzate López

Graduado en Física de la Universidad de Antioquia, se ha desempeñado como docente en la misma universidad en los cursos básicos de física y sus laboratorios.

Cómo usar este libro

Como estudiante del programa de Educación a Distancia de la Universidad de Antioquia, Ude@, usted es el centro del modelo educativo y puede controlar el proceso de aprendizaje mediante la organización del tiempo alrededor de sus intereses. La autonomía, la disciplina, la creatividad y el trabajo en equipo son características que le ayudarán en su formación para solucionar problemas reales de la sociedad, recurriendo al método de la ingeniería.

Los cursos Ude@ permiten fortalecer estas características mediante el desarrollo de diferentes actividades:

- Estudio individual, apoyado en diferentes medios (impresos, audiovisuales, multimedia).
- Estudio en grupo y acompañamiento del profesor a través del aula virtual.
- Tutorías presenciales, cuya finalidad es apoyar el aprendizaje y afianzar los temas estudiados.

El texto Ude@

En el modelo Ude@ los contenidos educativos son aportados por cada medio teniendo en cuenta las fortalezas propias de cada uno de ellos. Desde el punto de vista pedagógico, el texto impreso es por tradición un medio idóneo para los procesos educativos ya que facilita el aprendizaje de hechos, la comprensión de principios generalizados o abstractos y el desarrollo del razonamiento lógico. En estos aspectos, el texto Ude@ es un medio muy eficaz para desarrollar y adquirir tales destrezas.

Estructura del texto

El texto *Física de las ondas* ha sido desarrollado como parte del material educativo de los estudiantes del programa; sin embargo, su contenido puede ser de gran utilidad para cualquier persona que desee estudiar este tema. La estructura del texto es lineal, con una progresión gradual de cada tema, lo cual hace más fácil la transmisión del contenido de una manera lógica.

La división del texto está dada por capítulos que, a su vez, agrupan módulos o temas. Al empezar cada capítulo se encuentra un contenido breve que muestra el número y el título de los módulos que componen el capítulo. Por su parte cada módulo contiene, en su primera página, una introducción, los objetivos de aprendizaje, unas preguntas básicas (relacionadas con los conocimientos

previos requeridos) y el índice temático del contenido, que le guiarán en el proceso de aprendizaje sobre el tema en particular de cada sesión de clase.

Sugerencias para los estudiantes

En la lectura del libro:

- Antes de iniciar el estudio de un capítulo, lea el contenido breve y la presentación.
- Trate de resolver las preguntas básicas de cada módulo; estas preguntas están diseñadas para ayudarle a comprender los conceptos o temas presentados a lo largo del mismo.
- Lea los ejemplos intercalados en los bloques de texto y trate de resolver los ejercicios con el fin de mejorar sus habilidades en la solución de problemas reales.
- Complemente la lectura del libro con las herramientas de comunicación que posee en el aula virtual y en su correo electrónico.
- Recuerde que sobre el tema que está estudiando en el módulo impreso también existe material disponible en otros medios, y que ese material representa valor agregado puesto que el contenido de los diferentes formatos no se repite sino que se complementa.

En el aula virtual:

- Aprenda cómo funcionan las herramientas indispensables para participar en un curso por red: sistema de correo electrónico, sistema de chat, grupos de discusión, búsquedas en Internet, consulta en bases de datos especializadas, entre otras.
- Revise el correo electrónico todos los días.
- Visite con relativa frecuencia el sitio Ude@ y la plataforma donde se publica el curso en Internet para enterarse de cualquier nueva información. Apóyese en la red como un sistema de consulta y establezca criterios para seleccionar la información requerida.
- Introduzca sus datos personales en el aula virtual para que sus tutores y compañeros tengan acceso a ellos.
- Desarrolle, en la primera semana, las actividades preparativas para el curso indicadas en el aula virtual.

- Dedique al menos tres horas semanales por cada crédito asignado al curso para leer los módulos, realizar trabajos, participar en los foros de discusión y presentar evaluaciones, de acuerdo con lo establecido en el cronograma.
- Planee su agenda personal para participar activamente en cada curso y entregar oportunamente sus tareas. En caso de algún imprevisto, debe comunicarse inmediatamente con el tutor.
- Participe de las actividades propuestas para realizar en forma individual y en grupos de trabajo. Haga parte de grupos de trabajo conformados con sus compañeros de curso y en ningún caso pretenda realizar todas las actividades sin ayuda de los demás.
- Manifieste oportunamente a sus compañeros y al profesor las dificultades que se le presentan con las actividades propuestas.
- Elabore su propio horario de trabajo independiente para el curso y cumpla con el cronograma propuesto.
- Realice con honradez las actividades de evaluación, autoevaluación y coevaluación que encuentre programadas en el curso.
- Durante su proceso de aprendizaje trate de adquirir autonomía con el conocimiento, es decir, intente construir nuevos conocimientos recurriendo a fuentes de información bibliográfica y a sus habilidades de comparación, análisis, síntesis y experimentación.
- Mantenga una actitud de colaboración con compañeros, tutores y monitores, y esté siempre dispuesto a realizar las actividades de aprendizaje.
- Relaciónese de manera respetuosa y cordial con los demás estudiantes, con el tutor y con los monitores.

Prólogo

El presente libro expone los fundamentos de la física de las ondas a un nivel apropiado para estudiantes de una carrera de ciencias o de ingenierías.

En el primer capítulo, “Ondas elásticas”, se exponen la mayoría los conceptos básicos aplicables a cualquier tipo de onda y cubre cerca de un tercio de todo el libro. Por la importancia del sonido se da especial énfasis a la descripción de las ondas sonoras. Las ecuaciones de onda en diferentes medios, como una cuerda tensa, el aire o una barra, se obtienen a partir de las leyes de Newton.

El segundo capítulo, “Ondas electromagnéticas”, halla las ecuaciones de onda para los campos eléctricos y magnéticos en el vacío a partir de las leyes de Maxwell y trata sobre la energía, la presión y la polarización de las ondas electromagnéticas; este tema de la polarización se trata con mayor detalle que en “Ondas elásticas”, donde solo se menciona.

El tercer capítulo, “Reflexión y refracción”, trata sobre cómo cambian algunas características de las ondas reflejada y transmitida respecto a una onda incidente.

El cuarto capítulo, “Óptica geométrica”, expone las bases para la comprensión física de la visión humana y de otros instrumentos ópticos, como espejos, lentes, microscopios y telescopios.

Los capítulos quinto y sexto, “Interferencia” y “Difracción”, comprenden el tema de *óptica física* y examinan el fenómeno de superposición de varias ondas electromagnéticas.

A lo largo del libro se encuentran ejemplos resueltos con gran detalle, ya que el objetivo no es hallar tanto una respuesta sino promover la comprensión conceptual de los fenómenos físicos por parte del estudiante. Al final de cada capítulo están los problemas en cuya solución se espera que el estudiante se valga de los conceptos adquiridos y no de una aplicación ciega de fórmulas o recetas.

Este libro es el resultado de las notas que he puesto a disposición de mis estudiantes en el curso de *Física III* y su respectivo laboratorio que he enseñado durante muchos años en la Universidad de Antioquia; por ello mis estudiantes han sido correctores de innumerables errores y les estoy inmensamente agradecido. A ellos les dedico el presente texto.

Agradezco al equipo de Ude@ por la elaboración de algunas figuras y el montaje de las fotos, y a Daniel Aldana por la revisión cuidadosa del texto.

Héctor Alzate López

Contenido

Capítulo 1 Ondas elásticas	1
Módulo 1 Ondas armónicas y periodicidad	3
1.1 Descripción matemática de las ondas	5
1.2 Periodicidades de una onda armónica	7
1.2.1 Periodicidad espacial	7
1.2.2 Periodicidad temporal	8
Módulo 2 Fase. Ecuación de onda	9
2.1 Fase	11
2.1.1 Desfase	11
2.1.2 Rapidez de fase	13
2.2 Crítica a la onda armónica	14
2.3 La ecuación de onda	14
Módulo 3 Ondas en una barra	17
3.1 Ondas longitudinales	19
3.2 Medida del módulo de Young	21
3.3 Ondas transversales	22
Módulo 4 Ondas en un fluido	25
4.1 Ondas en un fluido	27
4.2 Dependencia de la rapidez con la temperatura	31
4.3 Ondas sísmicas	32
Módulo 5 Ondas en una cuerda	39
5.1 Ondas transversales en una cuerda ideal	41
5.1.1 Polarización	42
5.2 Reflexión y transmisión en una cuerda compuesta	43
5.2.1 Casos particulares de los coeficientes	46
5.3 La rapidez de una onda y las propiedades del medio	47
Módulo 6 Energía del movimiento ondulatorio	49
6.1 Propagación de energía en una onda	51
6.2 Audición binaural	53
Módulo 7 Ondas en tres dimensiones	63
7.1 Ondas en varias dimensiones	65
7.1.1 Ondas planas	65
7.1.2 Ondas esféricas	66
7.2 El principio de superposición y la ecuación de onda	67

Módulo 8 Ondas estacionarias	69
8.1 Ondas estacionarias en una cuerda semiinfinita	71
8.2 Ondas estacionarias en una cuerda finita	73
8.3 Ondas estacionarias y condiciones de frontera	75
Módulo 9 Ondas estacionarias en un tubo. Efecto Doppler	79
9.1 Tubo abierto en ambos extremos	81
9.2 Tubo con un extremo abierto y el otro cerrado	82
9.3 La voz	84
9.4 Efecto Doppler	88
9.4.1 Ondas de choque	89
Módulo 10 Análisis de Fourier. Velocidades de fase y de grupo	93
10.1 Análisis de Fourier	95
10.2 Velocidad de fase y velocidad de grupo. Pulsos	97
<i>Problemas del capítulo 1</i>	103
Capítulo 2 Ondas electromagnéticas	109
Módulo 11 La ecuación de onda en el vacío	111
11.1 Las ecuaciones de onda en el vacío	113
11.2 Algunos comentarios a raíz de las ecuaciones de onda	115
11.2.1 Breve historia de algunos símbolos	117
Módulo 12 Ondas planas	119
12.1 Solución en ondas planas	121
12.2 El espectro electromagnético	122
12.3 Rango de validez de las leyes	124
Módulo 13 Energía de una onda electromagnética	125
13.1 Conservación de la energía	127
13.2 Las leyes de Maxwell y la conservación de la energía	127
13.3 Fuerza de una onda sobre una carga	129
Módulo 14 Polarización. Presión de radiación	131
14.1 Polarización	133
14.1.1 Componentes en fase	133
14.1.2 Componentes en cuadratura	134
14.1.3 Componentes en contrafase	134
14.1.4 Componentes con otros desfases	135
14.1.5 Componentes con desfase aleatorio	135
14.1.6 Intensidad	135
14.2 Presión de radiación	136
<i>Problemas del capítulo 2</i>	143
Capítulo 3 Reflexión y refracción	145
Módulo 15 Leyes de reflexión y refracción	147
15.1 Principio de Huygens	149

15.2	Definiciones	149
15.2.1	Plano de incidencia. Ángulos de incidencia, reflexión y refracción	149
15.2.2	Índice de refracción	150
15.3	Leyes de reflexión y refracción	150
Módulo 16	Prueba de las leyes de reflexión y refracción	153
16.1	Prueba basada en un modelo ondulatorio	155
16.1.1	Propagación de la luz en la materia	156
16.1.2	Reflexiones especular y difusa	156
16.2	Ángulo crítico	156
16.3	Principio de Fermat	156
Módulo 17	Reflexión y transmisión electromagnéticas	161
17.1	Coefficientes de Fresnel	163
17.2	Interpretación de los signos de los coeficientes	166
17.3	Ángulo de polarización. Ley de Brewster	171
	<i>Problemas del capítulo 3</i>	173
Capítulo 4	Óptica geométrica	175
Módulo 18	Convención de signos. Objeto e imagen	177
18.1	Convención de signos	179
18.2	Concepto de objeto	179
18.3	Concepto de imagen	180
Módulo 19	Formación de una imagen por reflexión	183
19.1	Reflexión en una superficie esférica	185
19.2	Aumentos	186
Módulo 20	Formación de una imagen por refracción	191
20.1	Refracción en una superficie esférica	193
20.2	Focos de un sistema óptico. Aumento	194
Módulo 21	Formación de una imagen por un sistema compuesto: lentes	197
21.1	Lentes delgadas en aire	199
21.2	Principio de reversibilidad óptica	201
Módulo 22	El ojo. Descomposición de la luz	205
22.1	El ojo humano	207
22.1.1	Los puntos cercano y lejano	208
22.2	Descomposición de la luz: el prisma, el arco iris	209
Módulo 23	Instrumentos ópticos	219
23.1	La lupa	221
23.2	El microscopio	222
23.3	El telescopio refractor	223
	<i>Problemas del capítulo 4</i>	225

Capítulo 5 Interferencia	231
Módulo 24 Desfase entre campos	233
24.1 La interferencia y el desfase	235
24.1.1 Incoherencia: dependencia temporal del desfase	236
24.1.2 Coherencia: independencia temporal del desfase	236
24.1.3 Plan para analizar la interferencia de dos campos	236
24.2 El principio de superposición y la ecuación de onda	237
24.3 Desfase entre dos puntos en un mismo rayo	237
Módulo 25 Interferencia de ondas de dos fuentes	239
25.1 Desfase entre las ondas	241
25.2 Patrón de interferencia	242
25.3 Máximos y mínimos de intensidad	243
25.4 Intensidad debida a dos ondas incoherentes	245
Módulo 26 Interferencia de ondas de más de dos fuentes	249
26.1 Patrón de interferencia	251
26.2 Máximos y mínimos de intensidad	252
Módulo 27 Interferencia en películas delgadas	257
27.1 Máximos y mínimos en la reflexión y la refracción	259
27.2 Recubrimientos reflectivos y antirreflectivos	261
<i>Problemas del capítulo 5</i>	269
Capítulo 6 Difracción	271
Módulo 28 Difracción por una rendija	273
28.1 Consideraciones generales	275
28.2 Difracción de Fraunhofer por una rendija	276
28.3 Poder de resolución	279
Módulo 29 Abertura circular. Experimento de Young	281
29.1 Difracción de Fraunhofer por una abertura circular	283
29.2 Experimento de Young	285
Módulo 30 Difracción por más de dos rendijas	289
30.1 La rejilla de difracción	291
30.2 Poder de resolución	292
<i>Problemas del capítulo 6</i>	295
<i>Respuestas a los problemas</i>	298
<i>Bibliografía</i>	303



La riqueza sonora de la música tiene como base material la vibración de los distintos componentes de los instrumentos y del aire, que obedecen leyes precisas de la física.

Presentación

Vivimos sumergidos en un mar de ondas: los seres humanos adquirimos la mayor parte de la información sobre el mundo a través del sonido y de la luz; convivimos con millones de ondas electromagnéticas provenientes de las estrellas, de emisoras, de teléfonos celulares... Entender el fenómeno ondulatorio es esencial para una comprensión del mundo físico, ya sea la comprensión de los instrumentos musicales, la propagación de una señal eléctrica en un conductor, o la estructura del átomo.

En este primer capítulo centramos la atención en las ondas que son la vibración de un medio, llamadas ondas mecánicas o elásticas, de las cuales el sonido es el ejemplo más notable; las ondas elásticas nos servirán para entender las características generales de cualquier onda. Los demás capítulos están dedicados a otra clase de ondas, las electromagnéticas, que no son la vibración de un medio material.

Las ondas, además de clasificarse como mecánicas y no mecánicas, admiten otras clasificaciones: viajeras, estacionarias, longitudinales, transversales, periódicas, no periódicas, planas, cilíndricas, esféricas, ... Una onda puede tener varios de los anteriores adjetivos simultáneamente.

Los principales parámetros de una onda son su amplitud, su frecuencia y su fase. Exploraremos cómo cambian cuando las propiedades del medio cambian, por ejemplo, cuando la onda en una cuerda llega a uno de sus

Capítulo 1

Ondas elásticas

Contenido

Módulo 1

Ondas armónicas y periodicidad

Módulo 2

Fase. Ecuación de onda

Módulo 3

Ondas en una barra

Módulo 4

Ondas en un fluido

Módulo 5

Ondas en una cuerda

Módulo 6

Energía del movimiento ondulatorio

Módulo 7

Ondas en tres dimensiones

Módulo 8

Ondas estacionarias

Módulo 9

Ondas estacionarias en un tubo.
Efecto Doppler

Módulo 10

Análisis de Fourier. Velocidades de fase y de grupo

extremos o cuando un sonido pasa del aire al agua. Es importante, en este contexto, indagar qué ocurre con la energía de las ondas; introduciremos varias cantidades que nos permitan hablar de la energía de las ondas, como la potencia, la densidad de energía, la intensidad, la reflectancia y la transmitancia. También veremos cómo representar cualquier onda, sin importar lo complicada que sea, en términos de ondas sencillas.

La mayor parte del curso anterior de física giró alrededor de campos estáticos, esto es, de cantidades físicas definidas en una región del espacio que pueden cambiar de punto a punto, pero que no cambian con el tiempo. El campo eléctrico alrededor de un cuerpo estático cargado eléctricamente depende de la posición pero no del tiempo; su estudio se llama **electrostática**. El campo magnético alrededor de un cuerpo magnetizado estático tampoco depende del tiempo; su estudio se llama **magnetostática**. Pero si tales cuerpos se mueven los campos entran a depender del tiempo y esta dependencia no se manifiesta instantáneamente en *todo* el espacio, sino que va llegando con determinada velocidad a los distintos puntos a partir de la fuente —el cuerpo que se mueve—. Por ejemplo, cuando la corriente eléctrica en un conductor cambia, se halla que el campo magnético empieza a cambiar en un punto a una distancia r de la corriente un tiempo $t = r/v$ después de que la corriente haya cambiado, en donde v es la velocidad de la luz en el medio en que se encuentren el conductor y el punto. Cuando un cuerpo cae en un estanque, la perturbación no se siente en todo el estanque instantáneamente, sino que se va propagando con determinada rapidez hasta alcanzar cualquier punto del estanque. Cuando un campo depende del tiempo, como en estos ejemplos, entramos en el campo de las ondas, que es el objetivo de este curso.

Módulo ①

Ondas armónicas y periodicidad

Contenido

- 1.1 Descripción matemática de las ondas
- 1.2 Periodicidades de una onda armónica
 - 1.2.1 Periodicidad espacial
 - 1.2.2 Periodicidad temporal

Objetivos

- 1. Diferenciar entre velocidad de un punto del medio y velocidad de propagación.
- 2. Definir una onda de desplazamiento y una onda viajera.
- 3. Definir una onda armónica.
- 4. Identificar las periodicidades de una onda armónica.
- 5. Comprender qué es una función de dos variables: la posición de equilibrio y el tiempo.

Preguntas básicas

- 1. ¿Qué es una onda?
- 2. ¿Qué es una onda periódica y qué es una onda no periódica?
- 3. ¿Qué son la amplitud, la longitud de onda, el período?

Introducción

El cambio que produzcamos en un campo en un punto del espacio no se queda confinado en ese punto sino que dicho cambio provoca cambios en los puntos vecinos y estos en sus vecinos y así sucesivamente. Decimos que se ha generado una onda. Cuando palmoteamos producimos cambios en la presión y densidad del aire, cambios que se van propagando a partir de las manos con la velocidad del sonido. Debemos distinguir entre la rapidez con que se mueve el aire y la rapidez con que se propaga la onda sonora. Suponemos que el movimiento de los diferentes elementos de volumen del aire y los cambios de presión y de densidad se pueden obtener a partir de una función matemática, llamada **función de onda** ξ . Iniciemos el estudio de las ondas cuando los cambios son periódicos.



Las ondas en la superficie del agua son un ejemplo visible de que las ondas elásticas son la perturbación de un medio.

Algunas convenciones sobre notación

El tipo de letra utilizado en un escrito impreso se llama redondo o normal si no tiene ninguna inclinación en especial, y es el más común; se llama *cursivo* si está inclinado hacia la derecha. Si el carácter se destaca por ser más negro, se dice que está en **negrilla**.

En este curso se sigue la convención de escribir las variables escalares con letra *cursiva* o *itálica*, p. ej., m, x, t, F, v (no se escribe: m, x, t, F, v), mientras que los vectores se denotan con letra redonda y **negrilla**, p. ej., \mathbf{F}, \mathbf{v} (no se escribe: F, v). Las funciones $\text{sen}, \text{tan}, \text{log}, \text{etc.}$, siempre se escriben con minúsculas redondas, p. ej., $\text{sen } x, \text{tan } y, \text{log } 100, \text{arc cos } \theta, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ (no se escribe: $\text{Sen } x, \text{sen } x$). Los números deben ir en letra redonda: 1, 2, 3, ...

 Es indispensable, cuando se escribe a mano, diferenciar entre vectores y escalares escribiendo una flecha sobre los vectores, p. ej., \vec{F} ; cuando el vector es unitario, se debe escribir, en su lugar, un 'gorro', p. ej., \hat{u}_x, \hat{k} .

1.1 Descripción matemática de las ondas

En la figura 1.1 la línea horizontal representa una cuerda estática, con sus puntos en sus respectivas posiciones de equilibrio, caracterizadas por el vector posición \mathbf{r} . Una fuente de ondas en el extremo izquierdo oscila verticalmente y produce una perturbación que avanza horizontalmente con cierta rapidez, haciendo que cada punto se mueva alrededor de su posición de equilibrio.

La línea curva representa la sección de la cuerda que ha sido perturbada, en cierto instante. En *ondas elásticas*, por el vector \mathbf{r} no indicamos la posición de un punto del medio, sino la posición de equilibrio del punto. Lo que un punto se separa de su posición de equilibrio lo denotamos con la letra ξ ,¹ que es un vector dependiente de \mathbf{r} y t . La posición \mathbf{R} de un punto del medio es, así, su posición de equilibrio más lo que se haya apartado de él,

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \xi(\mathbf{r}, t). \tag{1.1}$$

ξ es un campo (vectorial) por estar definido en toda una región del espacio, y lo llamamos **campo de desplazamiento**. Más generalmente, \mathbf{r} especifica el punto del espacio donde se calcula un campo; por ejemplo, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ es el campo eléctrico en el punto \mathbf{r} . En resumen,

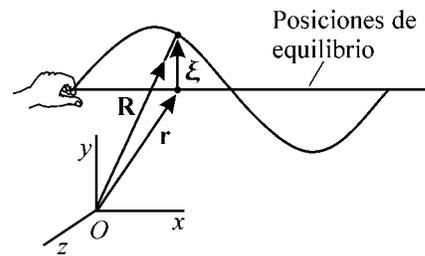


Figura 1.1 Definición de ξ .

$\xi(\mathbf{r}, t)$ es lo que un punto del medio con posición de equilibrio \mathbf{r} se ha separado de esa posición de equilibrio en el instante t .

La velocidad de un punto del medio, \mathbf{v}_p , es, entonces,

$$\mathbf{v}_p(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \xi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \tag{1.2}$$

y no $\mathbf{v}_p = d\mathbf{r}/dt$. La aceleración es

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} = \frac{\partial^2 \xi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}. \tag{1.3}$$

¹ ξ es una letra del alfabeto griego que corresponde a la x del latino; pronúnciese *csi*.

Debemos distinguir claramente entre velocidad de la onda, v , y velocidad de un punto del medio, v_p . La onda en la cuerda de la figura se propaga hacia la derecha con v constante, mientras que un punto del medio se mueve de una forma mucho más compleja, aproximadamente a 90° respecto a v , con movimiento armónico simple.

Mientras que la onda avanza a lo largo de la cuerda, sin importar su longitud, cualquier punto de ella ejecuta pequeñas oscilaciones alrededor de su posición de equilibrio, sin que haya transporte de masa. Una onda transporta energía, momento lineal y momento angular pero no masa; en un temblor de tierra, la onda avanza a partir del **foco**² del temblor con una rapidez cercana a 20 000 km/h y recorre centenares o miles de kilómetros, mientras que los lugares por donde va pasando solo oscilan algunos centímetros; ¡las ruinas que produzca el temblor no recorren kilómetros! Aquí distinguimos claramente entre velocidad de la onda y velocidad de un punto del medio. De igual manera, cuando escuchamos el ruido de un avión es el aire en contacto con nuestro tímpano el que nos produce el sonido, no el aire que ha estado en contacto con el avión.

Además de clasificar las ondas en elásticas y no elásticas, se pueden clasificar de acuerdo al ángulo que formen el campo y la velocidad de propagación de la onda. Cuando son perpendiculares, la onda es **transversal**; cuando son paralelos, es **longitudinal**. El ejemplo más notable de ondas transversales es la luz y de ondas longitudinales es el sonido. Hay ondas que no son transversales ni longitudinales, como las ondas en la superficie del agua, ya que tienen ambas componentes.

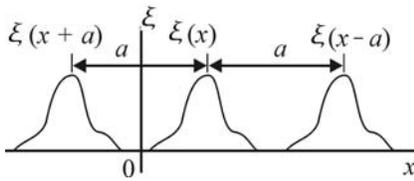


Figura 1.2 Traslación de la onda.

Para simplificar el tratamiento matemático, consideremos una onda que se propaga en una sola dirección, y llamemos x esa dirección; las partículas del medio en que avanza la onda pueden moverse de cualquier otra manera. En cierto instante, al campo de desplazamiento $\xi(x, t)$ le corresponde la curva central $\xi(x)$ de la figura 1.2. *De esta figura no se puede saber la dirección de ξ* , pues sería la misma para una onda longitudinal o transversal. Sin embargo, para tener una imagen concreta podemos imaginar que corresponde a un pulso de onda que avanza por una cuerda tensionada, o a una ola en el mar. La curva de la derecha corresponde al pulso cuando ha avanzado una distancia a ($a > 0$) y la de la izquierda si ha avanzado la misma distancia pero hacia la izquierda. Las curvas de los extremos son iguales a la curva central, son una mera *traslación* de la curva central una distancia a , lo que quiere decir que la curva no cambia su perfil a medida que se propaga, situación que es irreal: la ola en el mar, la onda en la cuerda o un sonido en el aire se van desvaneciendo a medida que se propagan. Además de ser una mera traslación, supongamos también que la onda avanza con rapidez constante v , y entonces se cumple que $a = vt$, con $v > 0$. La velocidad de propagación, v , es un vector; a su módulo, v , lo llamamos **rapidez de la onda**, y es un escalar.

Para una onda que avanza hacia la derecha, sin cambios y con rapidez constante, la ecuación es

$$\xi(x, t) = \xi(x - vt), \quad v > 0;$$

cuando avanza hacia la izquierda es

$$\xi(x, t) = \xi(x + vt), \quad v > 0.$$

Las dos últimas familias de funciones se llaman **ondas viajeras**, porque

² El **epicentro** es el punto más cercano sobre la superficie terrestre al lugar donde se origina el temblor, o **foco**; con frecuencia se confunde epicentro con foco.

describen ondas o perturbaciones que avanzan sin cambio, *indefinidamente*, en la misma dirección.

El número de funciones que tienen como argumento a $(x \pm vt)$ es infinito. Escojamos la función seno o coseno, que son funciones periódicas (la función de la figura 1.2 no lo es). No escribimos $\text{sen}(x - vt)$ porque no existe el seno de una longitud y debemos multiplicar primero por una constante k de dimensión L^{-1} a $(x - vt)$; además, $[\xi] = L$, y el seno es adimensional, por lo que debemos multiplicar por una constante ξ_0 de dimensión L el seno,

$$\xi(x, t) = \xi_0 \text{sen } k(x - vt). \quad (1.4)$$

Las ondas que se describen mediante las funciones seno o coseno se llaman **ondas armónicas**. ξ_0 se denomina **amplitud de la onda**, k es el **número de onda** (no confundir con el *número de ondas*, en plural). La ecuación en un x en particular, $x = x_0$, es

$$\xi(t) = \xi_0 \text{sen } k(x_0 - vt) = \xi_0 \text{sen}(kx_0 - kv t).$$

Esta es la ecuación de un oscilador armónico simple con constante de fase $\alpha = kx_0$ y frecuencia angular $\omega = kv$,

$$\xi(t) = \xi_0 \text{sen}(\alpha - \omega t).$$

De $\omega = kv$ despejemos la rapidez de propagación,

$$v = \omega/k.$$

Una onda armónica es un conjunto infinito de osciladores armónicos simples acoplados, cada uno con una constante de fase distinta, pero todos con la misma amplitud. ξ es la **elongación**, su máximo valor es la amplitud ξ_0 y su mínimo valor es $-\xi_0$. (*Mantenga presente la diferencia entre elongación y amplitud*). Es claro que el instante en que la elongación es máxima depende de x ya que α también depende de x ; cuando un punto de la cuerda está en su máximo, otro está en su mínimo, o es cero, o cualquier otro valor entre ξ_0 y $-\xi_0$, dependiendo de la coordenada x .

Adoptemos la ecuación 1.4 como expresión estándar para una onda armónica,

$$\xi(x, t) = \xi_0 \text{sen}(kx - \omega t), \quad \text{con } \omega = kv. \quad (1.5)$$

1.2 Periodicidades de una onda armónica

La función seno es periódica,

$$\xi(x, t) = \xi_0 \text{sen}(kx - \omega t) = \xi_0 \text{sen}(kx - \omega t + 2m\pi); \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.6)$$

1.2.1 Periodicidad espacial

Agrupemos a $2m\pi$ con la variable espacial x ,

$$\xi(x, t) = \xi_0 \text{sen}[k(x + 2m\pi/k) - \omega t].$$

El miembro derecho es el campo evaluado en $x + 2m\pi/k$ en el instante t ,

$$\xi(x, t) = \xi(x + 2m\pi/k, t), \quad (1.7)$$

lo que nos dice que en el mismo instante t el campo se repite cuando x se cambia en $2m\pi/k$. El mínimo cambio se obtiene con $m = \pm 1$: la mínima

distancia en que se puede cambiar a x sin que el campo cambie es $\pm 2\pi/k$. Se denomina **periodicidad espacial** o, más comúnmente, **longitud de onda** λ a $2\pi/k$;

$$\lambda = 2\pi/k.$$

Reemplacemos en la ecuación 1.7,

$$\xi(x, t) = \xi(x + m\lambda, t); \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.8)$$

Si en cierto punto con abscisa x_0 (figura 1.3) la cuerda se ha separado de su posición de equilibrio 1 mm, cuando avanzamos o retrocedemos λ encontramos que los puntos respectivos están separados también 1 mm de la posición de equilibrio.

Vimos que $\omega = vk$; además, $\omega = 2\pi\nu$ y $k = 2\pi/\lambda$. Reemplazando las dos últimas ecuaciones en la primera obtenemos

$$v = \lambda\nu. \quad (1.9)$$

Despejemos la longitud de onda: $\lambda = v/\nu = vP$; esto nos dice que la longitud de onda es el espacio que la onda recorre en un período.

1.2.2 Periodicidad temporal

En la ecuación 1.6 agrupemos a $2m\pi$ con la variable temporal t ,

$$\xi(x, t) = \xi_0 \text{sen}[kx - \omega(t + 2m\pi/\omega)].$$

El miembro derecho es el campo evaluado en $t + 2m\pi/\omega$ en el punto x ,

$$\xi(x, t) = \xi(x, t + 2m\pi/\omega). \quad (1.10)$$

La ecuación nos dice que en el punto x el campo se repite cuando t cambia en $2m\pi/\omega$. El menor cambio se obtiene con $m = \pm 1$: el mínimo tiempo que tarda el campo en repetirse, con x fijo, es $\pm 2\pi/\omega$. Se denomina **periodicidad temporal** o **período** P a $2\pi/\omega$;

$$P = 2\pi/\omega.$$

Reemplacemos en la ecuación 1.10,

$$\xi(x, t) = \xi(x, t + mP); \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.11)$$

Si en un instante t_0 (figura 1.4) cierto punto de la cuerda está a 1 mm de su posición de equilibrio, entonces un tiempo P antes o después de t_0 el campo fue o será, en el mismo lugar de la cuerda, 1 mm.

Resumen

Aunque en una onda mecánica los puntos del medio vibren alrededor de sus posiciones de equilibrio, no hay transporte de masa; la onda puede recorrer grandes distancias comparadas con la amplitud de vibración. Existen infinitas funciones para describir una onda, pero las funciones seno y coseno se destacan entre ellas. Estas tienen una longitud de onda y un período.

La velocidad de un punto del medio y la velocidad de propagación son muy diferentes; aquella cambia con el tiempo mientras que esta es constante.

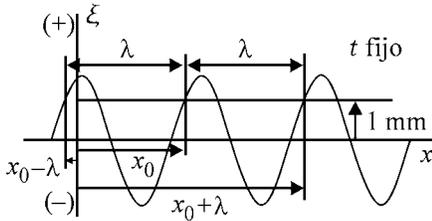


Figura 1.3 Periodicidad espacial de una onda armónica.

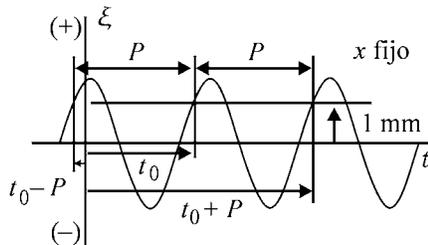


Figura 1.4 Periodicidad temporal de una onda armónica.

Módulo 2

Fase. Ecuación de onda

Contenido

- 2.1 Fase
 - 2.1.1 Desfase
 - 2.1.2 Rapidez de fase
- 2.2 Crítica a la onda armónica
- 2.3 La ecuación de onda

Objetivos

1. Definir la fase y el desfase.
2. Definir qué es estar en fase, en contrafase o en cuadratura dos variables.
3. Mostrar que la onda armónica es una idealización.
4. Deducir la ecuación lineal de onda.

Preguntas básicas

1. ¿El desfase es un ángulo entre dos vectores?
2. ¿Por qué a la rapidez con que se propaga una onda armónica, monocromática, se le llama *rapidez de fase*?
3. ¿Se puede obtener una onda armónica en el laboratorio?
4. ¿Por qué la ecuación de onda que deduciremos es lineal?

Introducción

Además de la posición, un campo dinámico, no estático, depende del tiempo. El campo se puede expresar en función de una nueva variable, *la fase*, que a su vez es función de la posición y del tiempo. *La fase es un concepto tan fundamental en la física de las ondas, que a menudo el análisis de un fenómeno ondulatorio lo reducimos a una discusión de fases.*

Estudiar una situación física se puede ver como una tarea consistente en hallar la ecuación diferencial que la rige y en su posterior solución. Hallaremos la ecuación diferencial de onda para ondas que se propagan en una sola dirección, en condiciones ideales sin pérdida de energía y en medios continuos.



Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), filósofo y científico francés, publicó en el *Traité de dynamique* su famoso *principio de D'Alembert*. Inició la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales y la aplicó al problema de la cuerda vibrante, para la que halló la ecuación diferencial de onda; encontró, además, una explicación para la precesión de los equinoccios y estudió las perturbaciones gravitacionales y los fluidos.

2.1 Fase

El campo de una onda que se propaga paralelo al eje x depende de x y de t . En el caso particular que estas variables estén acopladas a través de una suma o de una resta, $\xi(x, t) = \xi(x \pm vt)$, la onda se llama **viajera** por razones ya expuestas.

Introduzcamos el concepto de **fase**, esencial en la física de las ondas:

La fase ϕ de una onda armónica es el argumento de la función seno cuando su coeficiente es positivo.

Según la ecuación 1.5,

$$\phi(x, t) = kx - \omega t. \quad (2.1)$$

La ecuación de la onda de desplazamiento la podemos escribir como

$$\xi = \xi(\phi). \quad (2.2)$$

A menudo no interesa saber qué valores en particular de x y de t corresponden a tal valor de ξ ; importa, más bien, saber el valor de la combinación de ellos llamada *fase* ϕ ; se debe hacer lo posible por hablar de ϕ antes que de x y de t . Otros textos definen la fase como el argumento del coseno.

Reinterpretando lo dicho sobre periodicidades, decimos que el campo se repite cuando la fase cambia en $2m\pi$. El mínimo cambio, $\pm 2\pi$, cuando se asocia a t , con x fijo, lleva al concepto de período P ; cuando se asocia a x , con t fijo, lleva al concepto de longitud de onda λ . Se puede imaginar, cuando decimos *t fijo*, que tomamos una fotografía o instantánea al sistema ondulatorio.

Ejemplo 2.1 Halle la fase de la onda de desplazamiento $\xi = \xi_0 \cos(kx - \omega t)$.

Solución. Con la identidad $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$ se prueba que $\xi = \xi_0 \cos(kx - \omega t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \pi/2)$; según la definición de fase, $\phi(x, t) = kx - \omega t + \pi/2$. Concluimos que *escribir coseno en lugar de seno equivale a un cambio de $\pi/2$ en la fase.*

Ejemplo 2.2 Halle la fase de la onda $\xi = -\xi_0 \sin(kx - \omega t)$.

Solución. $\xi = -\xi_0 \sin(kx - \omega t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t \pm \pi)$; de donde $\phi(x, t) = kx - \omega t \pm \pi$. Concluimos que *escribir (-) antes de la amplitud equivale a un cambio de $\pm \pi$ en la fase.*

2.1.1 Desfase

El desfase $\Delta\phi$ es una resta entre dos fases.

Podemos preguntarnos por el desfase entre el valor del campo en un punto y el valor del campo en otro punto, con posiciones de equilibrio separadas Δx , en un intervalo Δt . Si $\phi = kx - \omega t + \beta$, con β constante, aplicando el operador Δ a esta ecuación obtenemos

$$\Delta\phi = k \Delta x - \omega \Delta t. \quad (2.3)$$

En un mismo instante, $\Delta t = 0$ y $\Delta\phi = k \Delta x = (2\pi/\lambda) \Delta x$. Evaluemos este desfase para algunos valores de Δx ,

$$\Delta\phi = \begin{cases} (2\pi/\lambda)(\pm\lambda/4) = \pm\pi/2 = \pm 90^\circ, & \Delta x = \pm\lambda/4; \\ (2\pi/\lambda)(\pm\lambda/2) = \pm\pi = \pm 180^\circ, & \Delta x = \pm\lambda/2; \\ (2\pi/\lambda)(\pm\lambda) = \pm 2\pi = \pm 360^\circ, & \Delta x = \pm\lambda. \end{cases}$$

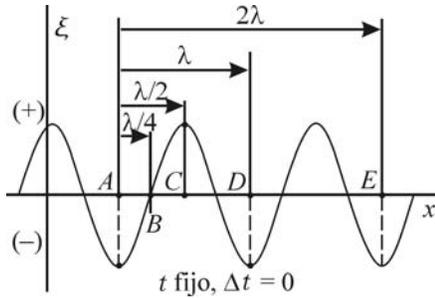


Figura 2.1 Desfase con t fijo.

Cuando $\Delta\phi = \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \pm5\pi/2, \dots$, decimos que los campos están en **cuadratura**; cuando $\Delta\phi = \pm\pi, \pm3\pi, \pm5\pi, \dots$, decimos que están en **contrafase** entre sí; cuando $\Delta\phi = 0, \pm2\pi, \pm4\pi, \dots$, decimos que están en **fase** entre sí.

Estar en fase quiere decir que ambos campos (el campo en un punto y el campo en el otro punto) se hacen cero simultáneamente, esto es, cuando un punto pasa por su posición de equilibrio, el otro también; ambos alcanzan su mínimo o su máximo simultáneamente. En la figura 2.1, A, D y E están en fase entre sí.

Estar desfasados $\pm\pi$ significa que cuando un campo es máximo el otro es mínimo, y viceversa; ambos se hacen cero simultáneamente. A está en contrafase con C , y C está en contrafase con D (vea el ejemplo 2.2).

Estar desfasados $\pi/2$ o 90° , o en cuadratura, quiere decir que cuando un campo es máximo o mínimo, el otro es cero. A está en cuadratura con B , y B está en cuadratura con C . Si el campo en un punto se describe con la función $\text{sen}(kx - \omega t)$, en el otro punto con el que está en cuadratura se describe con la función $\text{cos}(kx - \omega t)$; el desfase entre seno y coseno es 90° (vea el ejemplo 2.1). En lugar de definir la fase como el argumento del seno, se puede definir como el argumento del coseno; quien así proceda, el valor que reporte de una fase diferirá en $\pi/2$ de quien haya optado más bien por seno, suponiendo que ambos toman el mismo sistema de referencia.

En la misma posición de equilibrio x (x fijo), $\Delta x = 0$ y el desfase tiene una interpretación puramente temporal. Según la ecuación 2.3, $\Delta\phi = -\omega \Delta t = -(2\pi/P)\Delta t$. Evaluemos el desfase para varios Δt ,

$$\Delta\phi = \begin{cases} (2\pi/P)(\pm P/4) = \pm\pi/2 = \pm 90^\circ, & \Delta t = \pm P/4; \\ (2\pi/P)(\pm P/2) = \pm\pi = \pm 180^\circ, & \Delta t = \pm P/2; \\ (2\pi/P)(\pm P) = \pm 2\pi = \pm 360^\circ, & \Delta t = \pm P. \end{cases}$$

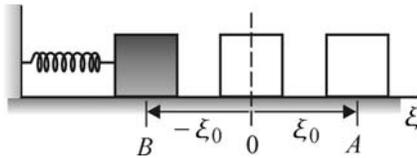


Figura 2.2

Ejemplo 2.3 La elongación de un bloque (figura 2.2) es $\xi(t) = \xi_0 \text{sen}(\omega t + \alpha)$. Halle el desfase entre (a) la elongación y la velocidad, (b) la elongación y la aceleración.

Solución

(a) Según la anterior ecuación, la fase de la elongación es $\phi_\xi = \omega t + \alpha$. La velocidad del bloque es

$$v = d\xi(t)/dt = \omega\xi_0 \cos(\omega t + \alpha) = \omega\xi_0 \text{sen}(\omega t + \alpha + \pi/2);$$

la fase de la velocidad es $\phi_v = \omega t + \alpha + \pi/2$; el desfase entre v y ξ es

$$\Delta\phi_{v\xi} = \phi_v - \phi_\xi = (\omega t + \alpha + \pi/2) - (\omega t + \alpha) = \pi/2.$$

Cuando una variable es la derivada de otra, y esta se expresa con seno o coseno, ya se sabe que el desfase entre ambas es $\pm\pi/2$, debido a que la derivada del seno es el coseno, y del coseno es $-\text{seno}$. Un desfase de 90° (más generalmente, un desfase de $(\pi/2) \pm m\pi, m$ entero) entre dos variables (figura 2.3) significa que cuando una es máxima o mínima, la otra está en su valor central, que generalmente es cero: cuando el bloque pasa por la posición de equilibrio, moviéndose hacia la derecha, v es máxima, $v = \omega\xi_0$, y $x = 0$; cuando el bloque pasa por la posición de equilibrio, moviéndose hacia la izquierda, v es mínima, $v = -\omega\xi_0$, y $x = 0$. En el punto de retorno A , ξ es máxima, $\xi = \xi_0$, y $v = 0$; en B , ξ es mínima, $\xi = -\xi_0$, y $v = 0$.

(b) La aceleración es

$$a = dv(t)/dt = -\omega^2\xi_0 \text{sen}(\omega t + \alpha) = \omega^2\xi_0 \text{sen}(\omega t + \alpha \pm \pi);$$

la fase de la aceleración es $\phi_a = \omega t + \alpha \pm \pi$; el desfase entre a y ξ es

$$\Delta\phi_{a\xi} = \phi_a - \phi_\xi = (\omega t + \alpha \pm \pi) - (\omega t + \alpha) = \pm\pi.$$

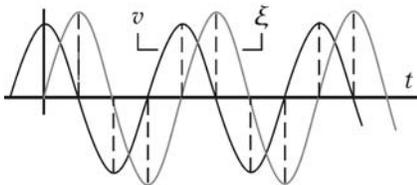


Figura 2.3

Un desfase de 180° (de forma más general, un desfase de $\pi \pm 2m\pi$, m entero) entre dos variables (figura 2.4) significa que cuando una es máxima la otra es mínima, y ambas se hacen cero simultáneamente: cuando el bloque llega a A , a es mínima, $a = -\omega^2 \xi_0$, y ξ es máximo, $\xi = \xi_0$; cuando está en B , a es máxima, $a = \omega^2 \xi_0$, y ξ es mínima, $\xi = -\xi_0$.

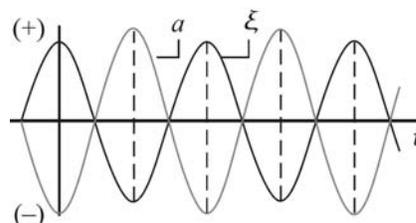


Figura 2.4

No se debe confundir *ángulo entre dos campos vectoriales* con *desfase entre ellos*. Las líneas L_1 y L_2 de la figura 2.5 forman un ángulo arbitrario de 60° entre ellas; el campo ξ_1 está en la dirección de L_1 , el campo ξ_2 está en la dirección de L_2 . El desfase en la figura 2.5a es 0° , en b es 90° , en c es 180° , en d es 45° .

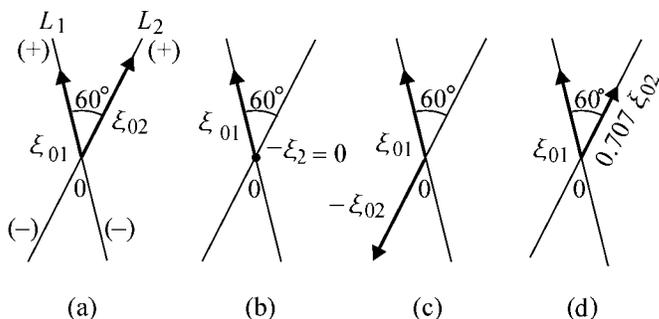


Figura 2.5 El desfase y el ángulo entre los campos son independientes.

2.1.2 Rapidez de fase

La figura 2.6 representa una ola que se acerca a la playa; cuando la ola pasa por determinado lugar, el agua allí presente se desplaza de su posición de equilibrio y regresa a ella una vez haya pasado; no hay transporte de masa. Fijémonos en el punto x de la figura con $\xi = 1\text{ m}$ en cierto instante. Como $\xi = \xi(\phi)$, a un valor particular de ξ le corresponde cierto valor de la fase. Nos podemos preguntar con qué rapidez avanza el campo de 1 m, o equivalentemente, con qué rapidez se propaga la fase que hace que el campo valga 1 m. Como $\xi = 1\text{ m}$ es constante, entonces el ϕ respectivo también es constante. Sea $\phi = kx - \omega t + \beta$, con β constante. Como ϕ es constante su derivada es cero,

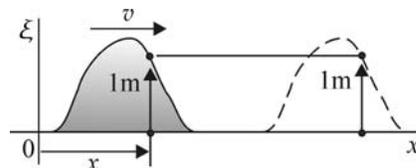


Figura 2.6 Rapidez de fase.

$$\frac{d\phi}{dt} = k \frac{dx}{dt} - \omega \frac{dt}{dt} + 0 = 0;$$

de donde

$$\frac{\omega}{k} = \frac{dx}{dt} = v.$$

La rapidez de fase, v , es la rapidez con que la perturbación u onda va llegando a los distintos puntos de equilibrio, x . También se puede ver como la rapidez con que se propaga una fase constante; de ahí su nombre **rapidez de fase** o, más comúnmente, **velocidad de fase**. El que la propagación de un valor del campo se vea como la propagación de una fase constante no quiere decir que donde llega cierto valor de la fase allí se mantenga ese valor, pues el tiempo sigue transcurriendo, y aunque x sea constante, la fase sigue cambiando, siguen llegando al mismo punto otros valores del campo.

Estrictamente, por velocidad nos debemos referir a un vector y no a un escalar, pero el uso de la palabra *velocidad* se ha generalizado en este contexto para referirse al escalar v .

Ejemplo 2.4 Con base en lo expuesto sobre rapidez de fase, halle en qué sentido se propagan las ondas (a) $\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$, (b) $\xi = \xi_0 \sin(\omega t - kx)$ y (c) $\xi = \xi_0 \sin(kx + \omega t)$.

Solución. Como v es la rapidez con que se propaga ϕ constante (o su respectivo ξ constante) centremos el análisis en ϕ . Lo primero de importancia en el análisis es comprender que t siempre crece.

(a) $\phi = kx - \omega t$; como t crece, x debe crecer para que ϕ se mantenga constante; lo que nos dice que la onda se propaga hacia la derecha, en sentido de x creciente.

(b) $\phi = \omega t - kx$; igual sustentación que en (a).

(c) $\phi = kx + \omega t$; como t crece, x debe disminuir para que ϕ se mantenga constante; lo que nos dice que la onda se propaga hacia la izquierda, en sentido de x decreciente.

2.2 Crítica a la onda armónica

La función monocromática¹

$$\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t) \quad (2.4)$$

está definida para $x \in (-\infty, +\infty)$ y $t \in (-\infty, +\infty)$; pero *ninguna* onda, de ningún tipo, existe en todo el universo desde $x = -\infty$ hasta $x = +\infty$, ni ha existido ni existirá por siempre desde $t = -\infty$ hasta $t = +\infty$ (figura 2.7a). En consecuencia, tal función (igual se puede decir del coseno) no puede representar una onda en la naturaleza, pues una onda en el mundo físico empieza a existir en algún momento, y ocupa una región finita del espacio (figura 2.7b), así sea muy grande.

Aunque un ciclo de la figura 2.7a sea idéntico a uno de la figura 2.7b, se puede demostrar² que se necesitan infinitas ondas del tipo de la ecuación 2.4, cada una con su frecuencia y amplitud, para representar la onda, o mejor **tren de onda finito**, de la figura 2.7b; de esto se ocupa el **análisis de Fourier**. Por consiguiente, cuando se habla de una onda de una única frecuencia, nos referimos a la onda imposible expresada por la ecuación 2.4, y cuando se habla de velocidad de fase también nos referimos es a esa onda. ¿Por qué en un curso de física darle tanta importancia a la onda de la ecuación 2.4, sabiendo que no representa ninguna onda física? La respuesta es doble: porque es la base para representar ondas que sí existen y, además, algunas ondas reales se pueden representar, *aproximadamente*, mediante ella.

La relatividad especial (Einstein, 1905) predice que *en la naturaleza* no se presentan velocidades mayores que la de la luz, c . No hay contradicción con esta predicción que para *una* onda armónica (ecuación 2.4) su rapidez de fase, $v = \omega/k$, sea mayor que c ya que, a fin de cuentas, estrictamente una onda armónica no existe. Tengamos presente que cuando decimos *una onda armónica* estamos hablando de *una sola frecuencia*.

2.3 La ecuación de onda

Continuamos en esta sección restringidos a una onda que tiene una sola dirección de propagación, identificada con el eje x .

¹ Monocromática quiere decir una sola frecuencia.

² George Arfken y Hans Weber, *Mathematical methods for physicists*, 5ª ed., Academic Press, San Diego, 2001, p. 913.

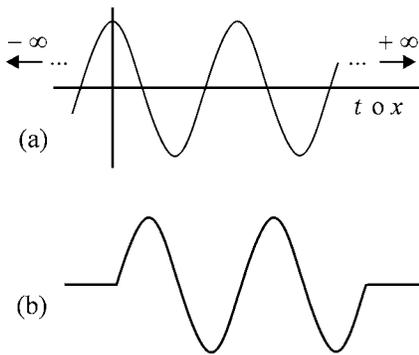


Figura 2.7 (a) Onda no existente, (b) onda real.

Cuando encontramos la ecuación diferencial $(d^2y/dt^2) + \omega^2y = 0$, reconocemos inmediatamente que y corresponde al oscilador armónico simple $y = y_0 \text{sen}(\alpha + \omega t)$. A continuación hallaremos una ecuación diferencial para ξ (puede ser otra variable), llamada **ecuación de onda**, tal que cuando la encontremos inmediatamente sabemos que su solución es la *función de onda* $\xi = \xi(x \pm vt)$. Esta es una onda viajera que se propaga con rapidez uniforme v , sin cambios, como una mera traslación de la función $\xi = \xi(x)$. Quiere decir que si el medio está en reposo y en algún lugar de él producimos una perturbación $\xi(x)$, la perturbación no se queda donde la produjimos, sino que empieza a viajar con rapidez constante y sin cambios a través del medio. Ejemplos: cuando un guitarrista perturba en algún punto una cuerda de su guitarra, la perturbación no se queda en ese punto sino que se propaga a lo largo de la cuerda; cuando lanzando una piedra perturbamos la superficie quieta de un estanque lleno de agua, la perturbación no se queda en el lugar donde cayó la piedra sino que se propaga en todas las direcciones en la superficie del estanque; cuando con nuestras cuerdas vocales producimos una compresión del aire, esa perturbación no se queda en nuestra boca, sino que se propaga como sonido en todas las direcciones, con una rapidez de 340 m/s (realmente, con una rapidez que depende de la temperatura). Pero si hacemos una depresión en un pedazo de plastilina, esta depresión no viaja a través de ella; en la plastilina no se cumple la ecuación de onda por hallar.

Para el oscilador armónico simple, y depende solo de una variable, t ; su ecuación diferencial es ordinaria, esto es, únicamente contiene derivadas totales, y su solución es una función en particular. En cambio ξ , cuando se propaga únicamente en la dirección x , depende de dos variables, x y t ; su ecuación diferencial contiene derivadas parciales respecto a x y a t , y su solución no es una función en particular, sino la familia de funciones con argumento $(x - vt)$ o $(x + vt)$, compuesta por infinito número de funciones.

Sea

$$u \equiv x \pm vt.$$

Con esta definición, $\xi(x, t) = \xi(x \pm vt) = \xi(u)$. Derivemos a ξ respecto a x con la regla de derivación en cadena,

$$\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \xi(u)}{\partial x} = \frac{\partial \xi(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Pero $\partial \xi(u)/\partial u = d\xi(u)/du$ y $\partial u/\partial x = 1$;

$$\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} = \frac{d\xi(u)}{du}.$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{d^2 \xi(u)}{du^2}. \quad (2.5)$$

Derivemos respecto a t ,

$$\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial \xi(u)}{\partial t} = \frac{\partial \xi(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Pero $\partial \xi(u)/\partial u = d\xi(u)/du$ y $\partial u/\partial t = \pm v$,

$$\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} = \pm v \frac{d\xi(u)}{du}.$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 \xi(u)}{du^2}.$$

Reemplazando la ecuación 2.5 en la anterior ecuación obtenemos la **ecuación de onda unidimensional** para el desplazamiento,

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2}. \quad (2.6)$$

Esta ecuación la halló, por primera vez, Jean le Rond d'Alembert en 1747 para las ondas en una cuerda, aunque con una notación diferente.³ La solución que él planteó, $\xi(x, t) = \xi_1(x - vt) + \xi_2(x + vt)$, se llama **solución de D'Alembert**. Cuando se rasga una cuerda de una guitarra en un punto, se producen, *simultáneamente*, una onda hacia la derecha $\xi_1(x - vt)$, y otra hacia la izquierda $\xi_2(x + vt)$.

A continuación hallamos la ecuación de onda unidimensional para varios medios continuos: una barra, un gas y una cuerda. Por medio continuo queremos decir un medio donde no tenemos en cuenta su constitución discontinua, atómica, tratamiento que es válido mientras λ sea mucho mayor que la separación promedio entre los átomos o moléculas del medio. Para hallar la ecuación nos basamos en la segunda ley de Newton, $F = ma$: la suma de fuerzas externas sobre un cuerpo es igual al producto de su masa por su aceleración. La relación entre la segunda ley de Newton y la ecuación de onda se consigue con la aceleración, pues esta es el miembro izquierdo de la ecuación 2.6.

Resumen

El campo de una onda armónica es función de la fase; esta nos dice la dirección de propagación de la onda, pero no la dirección del campo. Cuando ϕ sufre un cambio de $2m\pi$, con m entero, el campo se repite, ya sea espacial o temporalmente, en cuyo caso hablamos de periodicidad espacial λ o temporal P , respectivamente.

Un desfase $\Delta\phi$ entre dos variables es la resta entre sus respectivas fases. Los desfases más notables son: cuando es un par por π las variables están en fase, cuando es un impar por π están en contrafase, cuando es un impar por $\pi/2$ están en cuadratura.

La onda armónica es una idealización; su rapidez se llama rapidez de fase, y es la rapidez con que se propaga un valor fijo de la fase, o un valor fijo del campo al que le corresponde esa fase.

Una función de onda ξ que es solo una traslación con rapidez constante v de la función se llama **onda viajera** y cumple la ecuación de onda lineal (ecuación 2.6).

³ Elizabeth Garber, *The language of physics. The calculus and the development of theoretical physics*, Ed. Birkhäuser, Boston, 1999, p. 32: $d \frac{dy}{dt^2} = \frac{T}{\rho} d \frac{dy}{ds^2}$.

Módulo 3

Ondas en una barra

Contenido

- 3.1 Ondas longitudinales
- 3.2 Medida del módulo de Young
- 3.3 Ondas transversales

Objetivos

1. Obtener las ecuaciones de onda para las ondas longitudinales y transversales en una barra sólida con la segunda ley de Newton y una relación simple entre la deformación y la causa que la produce (ley de Hooke).
2. Diseñar un método experimental para medir el módulo de Young de una barra.

Preguntas básicas

1. ¿Cuáles son las principales variables para estudiar la propagación de ondas en una barra?
2. ¿Por qué las ondas longitudinales se propagan más rápidamente que las transversales?
3. ¿Qué significa el que un material sea más rígido que otro?
4. ¿Qué aproximaciones se hacen en el modelo físico utilizado para estudiar las ondas en una barra?

Introducción

Cuando dejamos de presionar con la mano una mesa, aparece una fuerza neta recuperadora sobre las moléculas de la mesa que habían dejado sus posiciones de equilibrio, y se aceleran hacia ellas. El tiempo que tardan en alcanzarlas depende de la rigidez de la mesa y de su densidad. En su movimiento alteran el equilibrio de moléculas vecinas y así se propaga una perturbación por toda la mesa. En un sólido se propagan ondas longitudinales y transversales, a diferencia de un fluido homogéneo e ideal como un gas o un líquido, en el que solo se propagan ondas longitudinales. Un estudio riguroso de la propagación ondulatoria en un sólido real y de cualquier tamaño y forma es muy complejo; para iniciarlo es necesario restringirlo a una barra, donde la propagación es solo en la dirección de la barra y las fuerzas deformantes se pueden expresar con ecuaciones muy simples. Una vez entendido este caso sencillo, se pueden estudiar casos más complejos, como las ondas en un bloque sólido, en libros de elasticidad más avanzados.



Thomas Young (1773-1829), médico y físico inglés, hizo trabajos para medir el tamaño de las moléculas y la tensión superficial en los líquidos. En reconocimiento a su trabajo en elasticidad se llama *módulo de Young* Y a una cantidad que mide la rigidez de una barra. Estableció la naturaleza ondulatoria de la luz con su importantísimo experimento de la doble rendija, calculó la longitud de onda de varios colores y propuso que la luz era una onda transversal.

3.1 Ondas longitudinales

Cuando golpeamos un sólido, a través suyo se propagan ondas longitudinales y transversales. Para su estudio dinámico adoptamos un modelo muy simple sobre el tipo de fuerza que se genera a medida que la onda avanza. Una suposición fundamental es que se generan fuerzas longitudinales independientes de las transversales, situación que nunca se presenta. Se deben utilizar tensores¹ para describir más fielmente el fenómeno de la propagación en sólidos. Aquí trabajaremos con una relación lineal entre la deformación y la fuerza recuperadora, o ley de Hooke. A pesar de lo simple, el modelo es muy útil para ahondar en la comprensión de las ondas; además, muchas situaciones reales se aproximan a sus predicciones teóricas.

En la figura 3.1 se ilustra una barra de sección transversal constante A , dividida en elementos de volumen de grosor Δx . Cuando nos referimos a un elemento en particular, nos referimos es a su centro de masa. Por la acción de un golpe en el extremo izquierdo, el primer elemento se comprime un poco y su centro de masa se desplaza hacia la derecha. Al separarse de su posición de equilibrio, sobre el elemento aparecen fuerzas recuperadoras que lo regresan a su situación inicial, pero en el proceso transfiere al segundo elemento el momento lineal \mathbf{p} que le fue dado con el golpe. Después el segundo elemento le hace al tercero, lo que el primero le hizo a él, y así sucesivamente ... la onda se va propagando hacia la derecha. Si ante una deformación no se generaran fuerzas recuperadoras, el primer elemento se quedaría comprimido sin regresar a su posición inicial, y no se propagaría una onda. Para la propagación es necesario que el medio sea elástico, esto es, que se generen fuerzas recuperadoras; lo contrario a **elástico** es **plástico**, y como ejemplo de material plástico tenemos a la plastilina. Por lo anterior, a las ondas en los medios materiales se les llama **ondas elásticas**, u **ondas mecánicas** por seguir las leyes de la mecánica de Newton.

En la figura 3.2 se amplifica, sin perspectiva, el primer elemento de volumen de la barra. El punto 1 es el centro de masa antes de que la barra sea golpeada, el punto 2 es el centro de masa del elemento comprimido por el golpe a lo largo del eje de la barra. El segmento 1-2 es ξ ; este campo de desplazamiento se propaga con una rapidez v que depende de las propiedades físicas de la barra. La onda avanza en sentido $+x$, y ξ^2 está en dirección x , lo que define a estas ondas como **longitudinales**; con notación vectorial, $\mathbf{v} = \mathbf{u}_x v$ y $\xi = \mathbf{u}_x \xi$. La velocidad \mathbf{v} siempre está dirigida hacia la derecha; en cambio ξ está dirigido hacia la derecha o hacia la izquierda, dependiendo de x y de t .

La fuerza sobre una cara de un elemento de volumen varía a lo largo de la barra y siempre actúa sobre toda el área A . Definimos el **esfuerzo de tensión** o **esfuerzo normal**, S_l , como la fuerza perpendicular al área, dividida por el área,

$$S_l = F/A. \tag{3.1}$$

El esfuerzo tiene unidades de presión, $[S_l] = \text{N/m}^2$.

En la figura 3.3 se muestra un elemento de volumen de grosor Δx con su cara izquierda en la posición de equilibrio x y la derecha en la posición de equilibrio $x + \Delta x$; también se muestra la posición del mismo elemento un poco más tarde, en el tiempo t . Bajo la acción de fuerzas, la cara

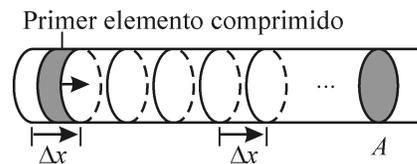


Figura 3.1 Barra dividida en elementos de volumen.

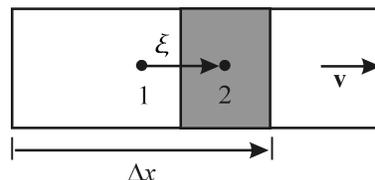


Figura 3.2 ξ del primer elemento.

¹ William Elmore y Mark Heald. *Physics of waves*, Dover Publications, Nueva York, 1969, caps. 3 y 7.

² Note que ξ está en negrilla, y por lo tanto es un vector. Al escribir a mano, en lugar de negrilla, para los vectores se debe utilizar una flecha, y para los vectores unitarios un gorro.

izquierda se desplaza $\xi(x, t)$ y la derecha $\xi(x + \Delta x, t)$; si estos valores fueran iguales, no habría onda sino una simple traslación de la barra en la cantidad ξ . Por ejemplo, cuando empujamos una mesa de largo L , el lado donde empujamos y el lado opuesto se trasladan, aproximadamente, la misma cantidad, y así la mesa permanece inalterada, sin comprimirse ni expandirse: $\xi(x, t) = \xi(x + L, t)$. Pero una onda elástica es precisamente la propagación de deformaciones, de compresiones y expansiones: cuando uno mueve un bolígrafo que tiene *sobre* la mano, todos sus puntos experimentan *el mismo* ξ y no hay onda a través de él.

El nuevo grosor del elemento por fuera de su posición de equilibrio es $\Delta x + \Delta\xi$, donde Δx es el grosor inicial y la deformación es $\Delta\xi = \xi(x + \Delta x, t) - \xi(x, t)$. La deformación por unidad de longitud o **deformación por tensión**, ϵ_l , es, entonces,

$$\epsilon_l = \frac{\Delta\xi}{\Delta x} = \frac{\xi(x + \Delta x, t) - \xi(x, t)}{\Delta x}. \quad (3.2)$$

Vemos que $\epsilon_l > 0$ implica que $\Delta\xi > 0$ y $\xi(x + \Delta x, t) > \xi(x, t)$, y por lo tanto el elemento de volumen a la derecha en la figura 3.3 está expandido a lo largo del eje x ; $\epsilon_l < 0$ quiere decir que está comprimido.

Tomando el límite en la ecuación 3.2 cuando $\Delta x \rightarrow 0$, notamos que el miembro derecho es la definición de $\partial\xi/\partial x$,

$$\epsilon_l = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\xi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\xi(x + \Delta x, t) - \xi(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial\xi}{\partial x}. \quad (3.3)$$

La deformación por tensión es causada por el esfuerzo de tensión. Supongamos que la relación entre ellos es lineal, esto es, supongamos que se cumple la ley de Hooke en la barra, $S_l \propto \epsilon_l$. La constante de proporcionalidad es el **módulo de Young**, Y , de la barra,

$$S_l = Y\epsilon_l \quad \text{o} \quad \frac{F}{A} = Y \frac{\partial\xi}{\partial x}. \quad (3.4)$$

La anterior ecuación nos da el tipo de fuerza que actúa sobre el elemento de masa y podemos proceder a aplicarle la segunda ley de Newton al elemento: la fuerza neta es la fuerza $F' = F(x + \Delta x, t)$ que la sección derecha de la barra le ejerce, menos la fuerza $F = F(x, t)$ que le ejerce la sección izquierda; la masa m es la densidad ρ por el elemento de volumen $\Delta V = A \Delta x$; la aceleración a es $\partial^2\xi/\partial t^2$ (ecuación 1.3, p. 5),

$$\sum F_{\text{externa}} = F' - F = ma = F(x + \Delta x, t) - F(x, t) = (\rho A \Delta x) \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.$$

Cuando $\Delta x \rightarrow 0$, $F' - F = dF$ y $\Delta x = dx$,

$$dF = (\rho A dx) \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.$$

Como ξ depende de x y t , es claro que F también, y su diferencial total es

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial t} dt.$$

Las dos últimas ecuaciones son iguales,

$$(\rho A dx) \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial t} dt.$$

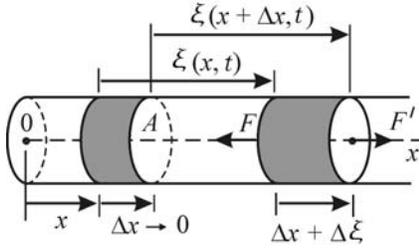


Figura 3.3 Deformación de un elemento.

Como el desplazamiento de las caras derecha e izquierda es medido en el mismo t en la figura 3.3, a la cual hemos referido la segunda ley de Newton, entonces $dt = 0$ y cancelamos dx ,

$$\rho A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x}. \quad (3.5)$$

Despejemos a F de la ecuación 3.4 y derivemos respecto a x ,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(AY \frac{\partial \xi}{\partial x} \right). \quad (3.6)$$

Cuando aplicamos una fuerza a un sólido, el cambio relativo de volumen es muy bajo, es muchísimo menor que 1; para un gas o un líquido, en las mismas condiciones que el sólido, el cambio relativo es mucho mayor. En la figura 3.3 el volumen del elemento inicial y del elemento deformado son, con muy buena aproximación, iguales, aunque por claridad en la figura no lo sean. Como el grosor de ambos elementos es distinto, entonces sus secciones transversales también lo son. Estrictamente, el área depende de x : $A = A(x, t)$; la deformación longitudinal conlleva una deformación transversal. Vamos a suponer deformaciones muy bajas, donde *bajas* quiere decir $\Delta \xi \ll \Delta x$, esto es, $\epsilon_l \ll 1$ (ecuación 3.2). (Por supuesto que la deformación en la figura citada está exagerada; vea el ejemplo 3.1, p. 23). En este caso de *baja deformación*, podemos tratar a A como constante y sacarla de la derivada. Como estamos desarrollando la física para un material homogéneo, Y tampoco depende de x y la ecuación 3.6 toma la forma

$$\frac{\partial F}{\partial x} = AY \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Igualemos esta ecuación a la ecuación 3.5, cancelemos A y despejemos la aceleración,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (3.7)$$

Esta ecuación (compárela con la ecuación 2.6, p. 16) nos dice que la perturbación ξ de la figura 3.2 no se queda en el sitio donde se produjo, sino que viaja con rapidez v constante,

$$v = \sqrt{Y/\rho}. \quad (3.8)$$

En la tabla 4.1, p. 29, se da el módulo de Young de algunos materiales. El valor predicho por la ecuación anterior se cumple bastante bien en una barra delgada, pero es notablemente inferior a la rapidez con que se propagan las ondas longitudinales en un bloque, pues las fuerzas recuperadoras ya no se pueden expresar de una forma tan sencilla como hicimos en la ecuación 3.4.

3.2 Medida del módulo de Young

Para medir el módulo de Young de un material, se suspende de un soporte fijo ($x = 0$ en la figura 3.4) un alambre de longitud L_0 y diámetro o sección transversal A conocida (figura 3.4a). Luego se le suspende una masa M , mucho mayor que la masa del alambre, y se mide el estiramiento ℓ (figura 3.4b).

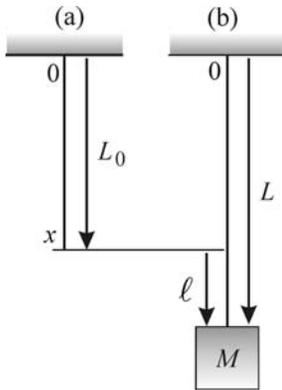


Figura 3.4 Medición de Y .

Recuerde que x no indica la posición de un punto de la cuerda, sino la posición de equilibrio de un punto de ella. Homologando³ la figura 1.1, p. 5, con la figura 3.4, en aquella hacemos coincidir el eje x con la cuerda, el origen de coordenadas con el punto de suspensión, y $\xi(x)$ lo hacemos paralelo al eje x en lugar de perpendicular.

La posición de equilibrio varía entre $x = 0$ y $x = L_0$. La posición de equilibrio $x = L_0 + \ell$ no existe, ya que en la figura 3.4b todos los puntos están desplazados de su posición de equilibrio respecto a la figura 3.4a. Como la cuerda sigue unida al punto de suspensión cuando se le agrega la carga M , quiere decir que el punto $x = 0$ no se desplaza de ese sitio: $\xi(0) = 0$. En cambio el punto con $x = L_0$ sufre el máximo desplazamiento de esta posición de equilibrio, $\xi(L_0) = \ell$.

La tensión es mayor en $x = 0$ que en el resto de la cuerda, ya que por debajo del origen está la masa de la cuerda más la carga; pero como $m_{\text{cuerda}} \ll M$, es buena aproximación tomar como tensión en la cuerda solo el peso de M . Sea F la tensión del alambre, $F = Mg$.

Despejemos a F de la ecuación 3.4 y multipliquemos por dx ,

$$F dx = AY \frac{\partial \xi}{\partial x} dx. \quad (3.9)$$

ξ depende de x y de t , y su diferencial total es $d\xi(x, t) = (\partial \xi / \partial x) dx + (\partial \xi / \partial t) dt$. Pero t es fijo, $dt = 0$; esto quiere decir que en el instante en que medimos $\xi(0)$ en la figura 3.4b, también medimos a $\xi(L_0)$ y $d\xi(x, t) = (\partial \xi / \partial x) dx$. Reemplacemos esta ecuación en la ecuación 3.9,

$$F dx = AY d\xi.$$

Integrando, F sale de la integral, al igual que A y Y . Realmente A debe disminuir cuando el alambre se alarga, pero en un experimento real un alambre de 2 m de longitud se puede alargar solo 0.5 mm, de modo que el cambio del diámetro del alambre es despreciable respecto a su valor inicial,

$$F \int_0^{L_0} dx = AY \int_0^{\ell} d\xi, \quad (3.10)$$

$$FL_0 = AY\ell,$$

de donde

$$Y = \frac{FL_0}{A\ell}. \quad (3.11)$$

Las cuatro cantidades F , L_0 , A y ℓ son fácilmente medibles, y así se puede averiguar en el laboratorio el módulo de Young del material del que está hecho el alambre. Note que de varias muestras de materiales distintos, pero con iguales F , L_0 y A , el que menos se alargue es el de mayor Y . Por ejemplo, como Y del hierro es mayor que Y del aluminio, quiere decir que en igualdad de condiciones, ante una fuerza igual, se deforma más la muestra de aluminio que la de hierro; otra manera de verlo es así: *ante una misma deformación, la fuerza recuperadora que aparece en el hierro es mayor que en el aluminio.*

3.3 Ondas transversales

En la figura 3.5 se ilustra una sección de una barra horizontal sin perturbar. En el extremo izquierdo, mediante una fuerza perpendicular al eje de

³ Homologar: equiparar, poner en relación de igualdad dos cosas.



Vea en el multimedia de *Física de las ondas* la experiencia *Medida del módulo de Young.*

la barra, se producen ondas que, cuando llegan al elemento de grosor Δx , desplazan *transversalmente* su cara izquierda en $\xi(x, t)$ y su cara derecha en $\xi(x + \Delta x, t)$. Mientras que la onda avanza horizontalmente, los diferentes elementos de masa se desplazan transversalmente; con notación vectorial, $\mathbf{v} = \mathbf{u}_x v$ y $\xi = \mathbf{u}_y \xi$. Esto corresponde a una *onda transversal*. Las fuerzas son perpendiculares al eje de la barra, y por esta razón se les llama **fuerzas de corte o de cizalladura**. Las deformaciones y fuerzas son, en la realidad, más complejas que lo dicho y mostrado en la figura; sin embargo, este modelo da buenos resultados en muchas situaciones prácticas.

El **esfuerzo de corte o de cizallamiento** S_t se define como la fuerza paralela o tangencial a las caras sobre el área transversal de la barra (compare con la ecuación 3.1),

$$S_t = F/A. \tag{3.12}$$

La **deformación de corte o de cizallamiento** ϵ_t es

$$\epsilon_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \xi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\xi(x + \Delta x, t) - \xi(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \tag{3.13}$$

Matemáticamente esta ecuación es idéntica a la ecuación 3.3; la diferencia es física: en la primera, los ξ están en la dirección x ; en la última, los ξ son perpendiculares a x , tal vez con componentes y y z .

Dentro de los límites elásticos del material, se cumple la ley de Hooke,

$$S_t = S\epsilon_t, \quad \text{o} \quad \frac{F}{A} = S \frac{\partial \xi}{\partial x}. \tag{3.14}$$

S se llama **módulo de corte** del material; en la tabla 4.1, p. 29, se da el módulo de corte de algunas sustancias. Ante una deformación longitudinal igual a una deformación transversal, siempre es mayor la fuerza recuperadora en el primer caso, ya que $Y > S$.

Según la segunda ley de Newton, $dF = (dm)a$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx = (\rho A dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Cancelemos dx ,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Despejemos a F de la ecuación 3.14, derivemos respecto a x , igualemos a la anterior ecuación y cancelemos A para obtener

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{S}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \tag{3.15}$$

Esta ecuación nos dice que la perturbación ξ de la figura 3.5 no se queda en el sitio donde se produjo en la barra, sino que viaja con rapidez v constante igual a

$$v = \sqrt{S/\rho}. \tag{3.16}$$

Como siempre $Y > S$, la rapidez de las ondas longitudinales siempre es mayor que la de las transversales en un mismo material.

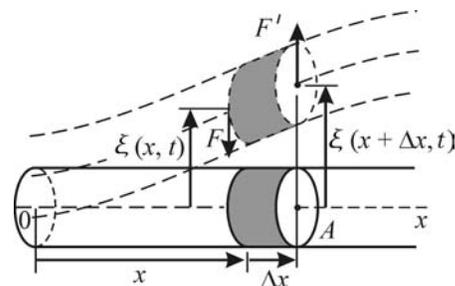


Figura 3.5 Onda transversal en una barra.

Ejemplo 3.1 Una esfera de hierro de 10.0 kg se une a un extremo de un alambre de acero de 3.00 m de longitud; el otro extremo se suspende del techo, y se hace oscilar el péndulo así formado con una amplitud de 60.0° (figura 3.6). La sección transversal del alambre es de 1.00 mm^2 , $\rho_{\text{acero}} = 7.80 \text{ g/cm}^3$ y $Y_{\text{acero}} = 2.0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$. Halle el estiramiento del alambre cuando pasa por la posición más baja.

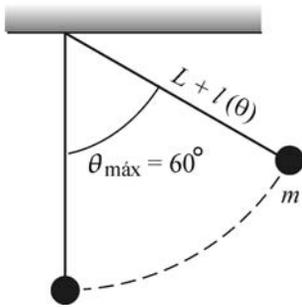


Figura 3.6 La longitud depende de θ .

Solución. Cuando una barra se somete a una tensión longitudinal T , el estiramiento l se despeja de la ecuación 3.11, reemplazando a F por T . La tensión depende del ángulo y $l(\theta) = T(\theta)L/YA$. En el punto más bajo,

$$l(0^\circ) = \frac{T(0^\circ)L}{YA}. \quad (3.17)$$

Sea m la masa de la esfera. Se podría pensar que $T(0^\circ) = mg$, pero la posición más baja no es de equilibrio, puesto que la esfera se mueve en un arco de circunferencia, y la aceleración centrípeta, v^2/r , es diferente de cero; la aceleración tangencial sí es cero en $\theta = 0$. El estudiante debe comprobar que el radio de la esfera ($\rho_{\text{hierro}} \approx \rho_{\text{acero}}$) es cerca de 6.7 cm y que $m_{\text{alambre}} \approx 23$ g. Podemos entonces despreciar, respecto a L , a r_{esfera} ; respecto a m podemos despreciar a m_{alambre} . También debe demostrar que $1 \text{ mm}^2 = 10^{-6} \text{ m}^2$.

Con base en el anterior párrafo, y puesto que el problema es especialmente de dinámica y no de ondas, el estudiante debe demostrar que si $\theta_{\text{máx}} = 60^\circ$, entonces $T(0^\circ) = 2mg$. Reemplazando en la ecuación 3.17 obtenemos

$$l(0^\circ) = \frac{2mgL}{YA} = \frac{2(10 \text{ kg})(9.76 \text{ m/s}^2)(3 \text{ m})}{(2.0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2)(10^{-6} \text{ m}^2)} \approx 3 \times 10^{-3} \text{ m} = 3 \text{ mm}.$$

El alambre en su posición más baja se estira una milésima de su longitud inicial y mide $3 \text{ m} + 3 \text{ mm}$.

Resumen

En una barra podemos utilizar la aproximación de que las deformaciones longitudinales y transversales son independientes. Planteamos una ley de Hooke para ambas; mientras más baja la deformación, más cercanas están las predicciones teóricas a los resultados experimentales. Las ecuaciones de onda 3.7 y 3.15 son matemáticamente idénticas a la ecuación 2.6.

La ley de Hooke, ecuación 3.4, es una **definición operacional** del módulo de Young. Se llama *operacional* porque a partir de ella podemos diseñar las operaciones experimentales necesarias para cuantificarlo, diseño que hicimos en la sección 3.2: se suspende una masa M de un alambre de longitud L_0 y área transversal A , se mide el estiramiento ℓ causado por el peso de M y se aplica la ecuación 3.11.

Módulo 4

Ondas en un fluido

Contenido

- 4.1 Ondas en un fluido
- 4.2 Dependencia de la rapidez con la temperatura
- 4.3 Ondas sísmicas

Objetivos

1. Determinar la ley de Hooke para un fluido.
2. Hallar la relación entre las ondas de desplazamiento, presión y densidad en un fluido.
3. Encontrar la dependencia de la rapidez del sonido en un gas con la temperatura.
4. Comprender por qué una onda de desplazamiento genera ondas de presión y de densidad.

Preguntas básicas

1. ¿Cómo se propaga el sonido en el aire?
2. ¿Son independientes entre sí las diferentes ondas en un fluido, o son diferentes aspectos de un solo proceso?
3. ¿Qué significan *amplitud de presión* y *amplitud de densidad*?
4. ¿Por qué a mayor temperatura de un medio mayor la rapidez de las ondas en él?
5. ¿Qué significa que la onda de desplazamiento esté desfasada 90° con las de densidad y de presión y estas estén en fase entre sí?

Introducción

Una diferencia muy notable entre un sólido y un fluido, como un gas o un líquido, es la compresibilidad. Consideraremos fluidos ideales, esto es, no viscosos. En condiciones comunes de presión y temperatura, los resultados que obtendremos con el tratamiento teórico que haremos coincide muy bien, en especial para los gases, con medidas experimentales. Supondremos que el fluido está encerrado en un cilindro metálico de sección transversal A , lo que nos facilita el tratamiento teórico. Las relaciones que obtendremos entre desplazamiento, presión y densidad para el sonido en el aire, son iguales a si el aire está encerrado en un cilindro, o si el sonido se propaga en un espacio abierto.



Cuando alguien habla, produce fluctuaciones o perturbaciones en la presión y densidad del aire en su boca, las cuales se propagan en todas las direcciones con una rapidez que depende de las propiedades del aire, no de qué tan fuerte hable o de qué frecuencias tenga el sonido que pronuncie.

4.1 Ondas en un fluido

En la figura 4.1 se muestra un cilindro que se llena con un gas hasta una densidad ρ_0 y presión p_0 ; estos parámetros reciben el nombre de **densidad estática** o **de equilibrio** y de **presión estática** o **de equilibrio** respectivamente; en el lugar donde vivamos corresponden con la densidad y presión atmosféricas.¹

El sonido es fluctuaciones de la presión y la densidad alrededor de sus valores estáticos.

También se muestra un elemento de volumen, cuando no hay ondas, de grosor Δx , con presión y densidad, obvio, p_0 y ρ_0 . En la izquierda del cilindro se produce, con un pistón o un parlante, una perturbación que, cuando llega a tal elemento, lo saca de su posición de equilibrio x , lo lleva a una nueva posición un tiempo más tarde, cambiándole la presión a un nuevo valor p y la densidad a un valor ρ . Estos son los **valores absolutos o instantáneos de la presión y la densidad**, dependientes de x y de t . El *cambio* de presión y de densidad es lo que constituye el sonido; a $\Delta p = p - p_0$ se le llama **presión acústica** u **onda de presión**, a $\Delta \rho = \rho - \rho_0$ se le llama **densidad acústica** u **onda de densidad**.

Cuando la frecuencia con que Δp y $\Delta \rho$ cambian es de 440 Hz, al sonido se le llama **la central**, y corresponde al sonido que se escucha cuando levantamos el teléfono; cuando cambia a 261.6 Hz, se le llama **do central**. El oído humano normal escucha frecuencias en el rango 20-20 000 Hz.² En ecografías y exámenes de tejidos se utiliza ultrasonido de alrededor de 4 MHz; en un microscopio acústico las ondas sonoras pueden ser de 4 GHz. Con sonido se trazan mapas del fondo del mar, ya que no se pueden usar ondas electromagnéticas debido a que el agua salada las absorbe completamente a los pocos centenares de metros de profundidad. Ultrasonido de 35 kHz se utiliza en el agua para producir cambios de presión que provocan la aparición de pequeñas cavidades de vapor que al sufrir implosión limpian las superficies de los cuerpos sumergidos; a este fenómeno de formación de cavidades o burbujas se le llama **cavitación**.

Iniciemos la tarea de encontrar la ecuación de onda para el fluido (ecuación 2.6, p. 16): como la densidad de un gas cambia notablemente ante un cambio de presión, no la podemos aproximar a una constante como hicimos con la barra. La masa del elemento en su posición de equilibrio (figura 4.1) es igual a la masa fuera de ella,

$$\begin{aligned} \rho_0 V_0 &= \rho V, \\ \rho_0 (A \Delta x) &= \rho [A(\Delta x + \Delta \xi)]. \end{aligned}$$

Cancelemos A . En el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, hacemos $\Delta x = dx$ y $\Delta \xi = d\xi$,

$$\rho_0 dx = \rho(dx + d\xi). \tag{4.1}$$

Como t es fijo, esto es, en el instante en que medimos a $\xi(x, t)$ también medimos a $\xi(x + dx, t)$, entonces $dt = 0$ y $d\xi = (\partial \xi / \partial x) dx$. Después de reemplazar en la ecuación 4.1 y cancelar a dx obtenemos que la densidad instantánea es

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \partial \xi / \partial x} = \rho_0 (1 + \partial \xi / \partial x)^{-1}. \tag{4.2}$$

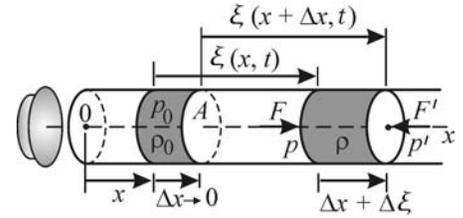


Figura 4.1 Onda en un gas.

¹ En Medellín, $p_{atm} = p_0 = 640 \text{ mm Hg}$, $\rho_{atm} = \rho_0 \approx 1.0 \text{ kg/m}^3$.

² Algunos rangos de audición: perro 60 Hz-45 kHz, gato 40 Hz-60 kHz, vaca 20 Hz-35 kHz, caballo 50 Hz-33 kHz, rata 200 Hz-76 kHz, murciélago 2 kHz-140 kHz, ballena beluga 1 kHz-125 kHz, atún 50 Hz-1.1 kHz, pollo 120 Hz-2 kHz.

Suponemos que la onda transporta bajas energías, donde *bajas* quiere decir que el volumen del elemento no perturbado difiere muy poco del volumen del elemento perturbado; gráficamente, en la figura 4.1 esto quiere decir que $\Delta\xi \ll \Delta x$. Tomando el límite,

$$\begin{aligned} d\xi &\ll dx, \\ (\partial\xi/\partial x) dx &\ll dx. \end{aligned}$$

Cancelando dx , obtenemos que *bajas* deformaciones o *bajas* energías quiere decir

$$\partial\xi/\partial x \ll 1.$$

Con el binomio de Newton se puede probar que cuando $a \ll 1$, $(1 + a)^{-1} \approx 1 - a$. Aplicando esta aproximación a la ecuación 4.2, con $a = \partial\xi/\partial x$, obtenemos

$$\rho = \rho_0(1 - \partial\xi/\partial x).$$

Despejemos la onda de densidad,

$$\Delta\rho = \rho - \rho_0 = -\rho_0 \partial\xi/\partial x. \quad (4.3)$$

Esta ecuación inmediatamente implica que el desfase entre las ondas de desplazamiento y de densidad es $\pi/2$, ya que si una de ellas está expresada con seno, la otra lo está con coseno, debido a que ξ y $\Delta\rho$ están relacionadas a través de una derivada, y la derivada de seno es coseno, y de coseno es $-\text{seno}$. Para $\xi(x, t) = \xi_0 \text{sen}(kx - \omega t)$,

$$\Delta\rho = -\rho_0 \xi_0 k \cos(kx - \omega t). \quad (4.4)$$

El coeficiente del coseno se llama **amplitud de densidad**, \mathcal{R}_0 ,

$$\mathcal{R}_0 = k\xi_0\rho_0.$$

La densidad acústica es

$$\Delta\rho = -\mathcal{R}_0 \cos(kx - \omega t).$$

La máxima densidad acústica se obtiene con $\cos(kx - \omega t) = -1$,

$$\Delta\rho_{\text{máx}} = (\rho - \rho_0)_{\text{máx}} = \mathcal{R}_0.$$

De donde

$$\rho_{\text{máx}} = \rho_0 + \mathcal{R}_0.$$

La densidad mínima es

$$\rho_{\text{mín}} = \rho_0 - \mathcal{R}_0.$$

La densidad varía entre $\rho_{\text{máx}}$ y $\rho_{\text{mín}}$, fluctuando alrededor del valor ρ_0 (figura 4.2). En la vida cotidiana (por ejemplo, cuando hablamos), ρ_0 es la densidad atmosférica y \mathcal{R}_0 puede tener un valor cercano a 10^{-5} kg/m^3 , ¡y esto es unas cien mil veces menor que ρ_0 !; realmente el sonido es *pequeñas* fluctuaciones de la densidad (*pequeñas* quiere decir $\Delta\rho/\rho_0 \ll 1$, o sea cambios *relativos* pequeños).

Procedamos a obtener la ley de Hooke para el gas: la presión es función de la densidad, $p = p(\rho)$.³ Como el sonido es pequeñas fluctuaciones de p y ρ , es útil expresar a p en series de Taylor alrededor de ρ_0 ,

$$p(\rho) = p(\rho_0) + (\rho - \rho_0) \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\rho_0} + \frac{1}{2}(\rho - \rho_0)^2 \left(\frac{d^2p}{d\rho^2} \right)_{\rho_0} + \dots$$

³ Para la atmósfera, que se comporta muy aproximadamente como un gas ideal, $pV = nRT$; de esta ecuación se puede obtener una relación entre p y ρ .

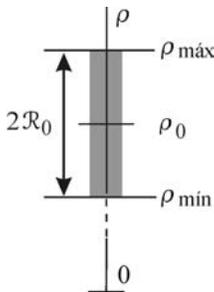


Figura 4.2 Variación de ρ .

Tabla 4.1 Densidad y módulos de algunas sustancias.

Material	ρ (10^3 kg/m ³)	Y (10^{10} Pa)	S (10^{10} Pa)	B (10^{10} Pa)
Agua	1.0			0.21
Acero	7.8	20	7.5	16
Aluminio	2.7	7.0	2.5	7.5
Cobre	8.9	11	4.4	14
Latón	8.6	9.0	3.5	6.0
Hierro	7.8	21	7.7	16
Mercurio	13.6			2.8
Plomo	11.3	21	7.8	17

Cuando la densidad es ρ_0 la presión es p_0 , $p(\rho_0) = p_0$. Reemplacemos $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ en la anterior expansión y multipliquemos y dividamos por ρ_0 a partir del segundo término del miembro derecho para obtener

$$p = p_0 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \rho_0 \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\rho_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \right)^2 \rho_0^2 \left(\frac{d^2p}{d\rho^2} \right)_{\rho_0} + \dots$$

Para cambios *relativos* pequeños de la densidad, $\Delta\rho/\rho_0 \ll 1$, $(\Delta\rho/\rho_0)^2 \ll 1 \dots$ y en la anterior expansión conservamos solo hasta el segundo término,

$$p = p_0 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \rho_0 \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\rho_0}$$

El **módulo volumétrico** del fluido es $B = \rho_0 (dp/d\rho)_{\rho_0}$,

$$p = p_0 + (B/\rho_0)\Delta\rho.$$

Por definición, $\Delta p = p - p_0$. Llegamos así a la ecuación que nos relaciona la onda de presión con la onda de densidad,

$$\Delta p = (B/\rho_0)\Delta\rho.$$

Esta ecuación nos dice que la onda de presión está en fase con la de densidad; si $\Delta\rho$ se expresa con seno, Δp se expresa con la misma función. Reemplacemos en la anterior ecuación la ecuación 4.3,

$$\Delta p = p - p_0 = -B\partial\xi/\partial x. \tag{4.5}$$

La anterior ecuación corresponde a la ley de Hooke para un fluido. Con $\xi = \xi_0 \text{sen}(kx - \omega t)$,

$$\Delta p = -Bk\xi_0 \cos(kx - \omega t).$$

El coeficiente del coseno se llama **amplitud de presión**, \mathcal{P}_0 ,

$$\mathcal{P}_0 = Bk\xi_0. \tag{4.6}$$

La presión acústica es

$$\Delta p = -\mathcal{P}_0 \cos(kx - \omega t).$$



Vea en el multimedia de *Física de las ondas* la experiencia *Medida del módulo volumétrico del aire*.

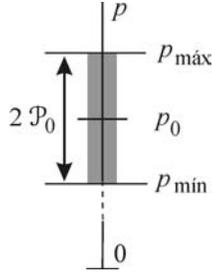


Figura 4.3 Variación de p .

La presión máxima es $p_{\text{máx}} = p_0 + \mathcal{P}_0$; la presión mínima es $p_{\text{mín}} = p_0 - \mathcal{P}_0$. La presión varía entre $p_{\text{máx}}$ y $p_{\text{mín}}$, fluctuando alrededor de p_0 (figura 4.3).

Estar en fase la presión y la densidad significa que en los puntos e instantes cuando la presión es máxima, la densidad también lo es. El que estén en fase está de acuerdo con nuestra experiencia cotidiana: cuando aumentamos la presión sobre un cuerpo, disminuye su volumen y en consecuencia aumenta la densidad.

En nuestro objetivo de hallar la ecuación de onda aún nos falta aplicar la segunda ley de Newton al elemento de masa de la figura 4.1: como un gas tiende a ocupar el máximo volumen, sobre la cara derecha actúa una fuerza compresiva F' dirigida hacia la izquierda, $F' = -p'A$; sobre la cara izquierda actúa otra fuerza F compresiva dirigida hacia la derecha, $F = pA$. La fuerza resultante es $F' + F = -p'A + pA = A(p - p')$; esta resta de presiones es la presión en la cara izquierda menos la presión en la cara derecha, y por lo tanto es $-\Delta p$, ya que el Δ de una función se define como la función evaluada a la derecha menos la función evaluada a la izquierda: la fuerza neta es $-\Delta pA$; la masa es $\rho_0 A \Delta x$ y la aceleración es $\partial^2 \xi / \partial t^2$. Según la segunda ley de Newton, cuando $\Delta x \rightarrow 0$,

$$-A dp = (\rho_0 A dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (4.7)$$

La presión depende de x y t . Para t fijo, $dt = 0$ y el diferencial total de p es $dp = (\partial p / \partial x) dx$. Reemplazando en la ecuación 4.7 y cancelando A y dx obtenemos

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (4.8)$$

Según la ecuación 4.5, $\Delta p = p - p_0 = -B \partial \xi / \partial x$; derivemos respecto a x , y tengamos en cuenta que p_0 es constante a lo largo del tubo,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -B \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Igualemos esta ecuación a la ecuación 4.8 y despejemos la aceleración,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (4.9)$$

Esta ecuación de onda nos informa que cuando perturbamos un fluido, la perturbación no se queda en el sitio que se produce, sino que se propaga ondulatoriamente con rapidez⁴

$$v = \sqrt{B/\rho_0}. \quad (4.10)$$

También se puede demostrar que la presión y la densidad cumplen las ecuaciones de onda,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}.$$

⁴ La expresión $v = \sqrt{B/\rho_0}$ la obtuvo Newton, pero utilizó un valor de B que corresponde a un proceso isotérmico, cuando a frecuencias audibles el sonido en el aire es un proceso adiabático, y por lo tanto el valor que predijo para la rapidez del sonido es considerablemente inferior al valor real. Solo en 1816 Laplace trató correctamente como adiabática la propagación sonora.

Como p_0 y ρ_0 son constantes, sus derivadas espaciales y temporales son cero y podemos reemplazar a p por $p - p_0 = \Delta p$ y a ρ por $\rho - \rho_0 = \Delta \rho$,

$$\frac{\partial^2 \Delta p}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho_0} \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \Delta \rho}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho_0} \frac{\partial^2 \Delta \rho}{\partial x^2}.$$

Es claro que en el fluido se propagan, simultáneamente, ondas de desplazamiento longitudinales, de presión y de densidad, desfasadas entre sí (figura 4.4) y con rapidez $v = \sqrt{B/\rho}$.

Si no hay fuerzas recuperadoras ante una deformación, no hay ondas. Como un fluido ideal, o sea no viscoso, no puede transmitir esfuerzos transversales ni deformaciones transversales, entonces tampoco es posible que en él se propaguen ondas transversales. *En un fluido solo se propagan ondas longitudinales.* Veámoslo así: una lámina tapa el extremo izquierdo de un tubo lleno de un fluido, como aire o agua (figura 4.5). Con la intención de producir una deformación transversal, movemos hacia arriba la lámina, pero el fluido sigue inalterado, como si la lámina estuviera quieta. En cambio, si en lugar del tubo hubiera una barra, al mover la lámina, por mera fricción, los átomos en contacto con la lámina se desplazarían ligeramente de su posición de equilibrio, generándose una fuerza recuperadora ante tal deformación, y dando origen a una onda transversal.

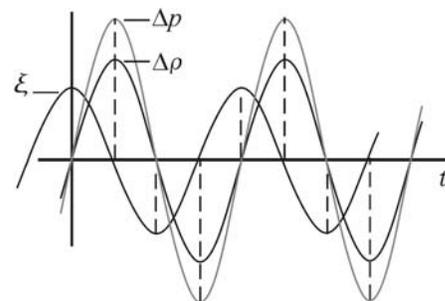


Figura 4.4 Ondas de desplazamiento, presión y densidad.

4.2 Dependencia de la rapidez con la temperatura

La gran mayoría de ondas elásticas en un gas, en particular en el aire, tienen frecuencias inferiores a 10^9 Hz. Hasta esta frecuencia el proceso de propagación ondulatoria es un fenómeno adiabático, por encima de ella es un proceso isotérmico.⁵

En la aproximación adiabática, $B = \gamma p_0$, donde $\gamma = C_p/C_V$ (C_p es la capacidad calorífica molar a presión constante y C_V es a volumen constante),

$$\gamma = \begin{cases} 1.67, & \text{gases monoatómicos,} \\ 1.40, & \text{gases diatómicos,} \\ 1.33, & \text{gases poliatómicos.} \end{cases}$$

Reemplacemos $B = \gamma p_0$ en la ecuación 4.10,

$$v = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}. \tag{4.11}$$

La presión del gas de la figura 4.6 es p_0 , el volumen es V , el número de moles es n , la temperatura es T , la masa total es m . La ecuación de estado para un gas ideal es

$$p_0 V = nRT,$$

donde $R = 8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ es la constante universal de los gases ideales. Dividamos por m ,

$$\frac{p_0}{m/V} = \frac{RT}{m/n}.$$

La densidad es $\rho_0 = m/V$ y la masa molar es $M = m/n$,

$$\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{RT}{M}.$$

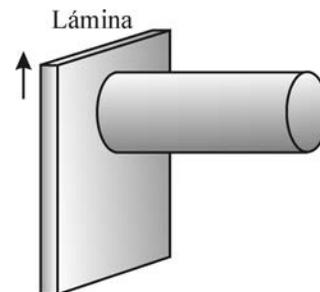


Figura 4.5 Un fluido no transporta esfuerzos transversales.

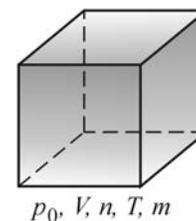


Figura 4.6 Un cubo de gas.

⁵ Allan Pierce, *Acoustics*, Acoustical Society of America, Nueva York, 1994, p. 36.

Por lo tanto $p_0 = \rho_0 RT/M$. Reemplacemos en la ecuación 4.11 y cancelamos ρ_0 ,

$$v = \sqrt{\gamma RT/M} = \sqrt{(\gamma R/M)T}.$$

R es constante, γ solo depende del número de átomos de cada molécula; la masa molar M sí es característica de cada gas. Definamos para un gas en particular la constante α ,

$$\alpha_{\text{gas}} = \sqrt{\gamma R/M_{\text{gas}}}. \quad (4.12)$$

La penúltima ecuación la expresamos como

$$v = \alpha_{\text{gas}} \sqrt{T}.$$

Aunque la densidad de la atmósfera disminuye notablemente con la altura, su composición porcentual es muy uniforme hasta poco menos de los 100 km: el aire está compuesto de 78% de N_2 , 21% de O_2 , 1% de agua, argón, dióxido de carbono y otros compuestos menos abundantes. La temperatura también decrece rápidamente hasta una altura de 17 km (compare con la altura del Everest: 8748 m).

Vemos que el aire está compuesto en un 99% por gases diatómicos, por lo que $\gamma_{\text{aire}} = 1.40$. Su masa molar equivalente es $M_{\text{aire}} \approx 0.78M_{N_2} + 0.21M_{O_2} = 0.78 \times 0.028 + 0.21 \times 0.032 \approx 0.029 \text{ kg/mol}$. Reemplacemos en la ecuación 4.12,

$$\alpha_{\text{aire}} = \sqrt{\frac{\gamma R}{M_{\text{aire}}}} = \sqrt{\frac{1.40(8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})}{0.029 \text{ kg/mol}}} = 20 \text{ m/s} \cdot \text{K}^{1/2}.$$

La rapidez del sonido en el aire es

$$v_{\text{aire}} = \alpha_{\text{aire}} \sqrt{T}, \quad \text{con } \alpha_{\text{aire}} = 20 \text{ m/s} \cdot \text{K}^{1/2}. \quad (4.13)$$

Hasta una altura cercana a los 100 km en la atmósfera, la concordancia de las predicciones de esta ecuación teórica con las medidas experimentales es excelente.

4.3 Ondas sísmicas

Cuando golpeamos un sólido, se propagan en él ondas longitudinales (l) y ondas transversales (t). Solo si el sólido tiene la forma de una barra delgada, la rapidez está dada por las ecuaciones $v_l = \sqrt{Y/\rho}$ y $v_t = \sqrt{S/\rho}$. Para un bloque, el estudio de las ondas es más complejo que el visto aquí, de una barra, pero se sigue cumpliendo que $v_l > v_t$.

En el *foco* A (la figura 4.7 representa a la Tierra y no está a escala) de un terremoto se producen ondas longitudinales y ondas transversales. A las longitudinales se les llama **ondas P** y a las transversales **ondas S**. A un punto en la superficie terrestre, como al *epicentro* C , llegan primero las ondas P (P de *primero*) que las S (S de *segundo* o del inglés *shear*, que significa *cortar*). Conociendo la diferencia de tiempo en la llegada de las dos ondas, se puede saber la distancia del foco.

Las ondas sísmicas P se propagan con $v \approx 6 \text{ km/s}$ o poco más de 20 000 km/h (diámetro terrestre $\approx 13\,000 \text{ km}$). Note que 20 000 km/h es un número cercano a la rapidez de las ondas L en una barra de hierro o de aluminio.

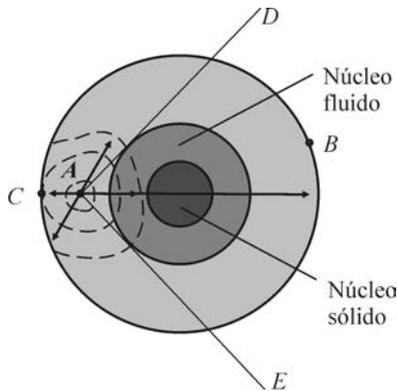


Figura 4.7 Interior de la Tierra.

Además de conocer la distancia del foco al lugar de recepción de las ondas, también se puede saber su dirección. Se ha notado que en la dirección de A a un punto B situado sobre la superficie entre el arco DE , nunca se propagan ondas transversales sino longitudinales. Como vimos, esto es característico de un fluido, por lo que se ha concluido que hay un núcleo fluido en el interior de nuestro planeta. Las líneas AD y AE son tangentes a dicho núcleo.

Ejemplo 4.1 Combinando las ecuaciones

$$p = p_0 - B \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

obtenga la ecuación de onda para la presión en una columna de gas.

Solución. Tomemos la segunda derivada respecto al tiempo de la primera ecuación y conmutémosla con la derivada espacial,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -B \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right).$$

Despejemos a $\partial^2 \xi / \partial t^2$ de la segunda ecuación y reemplacemos en la anterior,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -B \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{B}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

Ejemplo 4.2 Con este ejemplo queremos ilustrar el proceso de producción de sonidos al tocar (a) una flauta, (b) una trompeta.⁶

(a) En la figura 4.8a, correspondiente a un corte transversal, la presión dentro de la flauta es la presión atmosférica p_0 , la corriente de aire producida por el músico da sobre la boquilla y entra con máxima velocidad a la flauta. Definamos como cero la fase ϕ de la presión en su interior.

En la figura 4.8b ha transcurrido un cuarto de período, la presión llega al máximo $p_{\text{máx}} = p_0 + \mathcal{P}_0$ (\mathcal{P}_0 : amplitud de presión), deja de entrar aire y un instante después empieza a salir aire por la boquilla. La fase vale $\pi/2$.

En la figura 4.8c ha transcurrido otro cuarto de período, la presión ha mermado hasta p_0 , el aire sale con máxima velocidad. La fase vale π .

En la figura 4.8d ha transcurrido un cuarto de período más, la presión llega al mínimo $p_{\text{mín}} = p_0 - \mathcal{P}_0$, el aire deja de salir y un instante después empieza a entrar. La fase vale $3\pi/2$.

Entre las figuras 4.8d y 4.8a transcurre otro cuarto de período, la presión aumenta hasta p_0 , el aire entra al máximo, la fase vale 2π y se completa un ciclo. Cuando el músico toca un *la* central, este proceso se repite 440 veces en un segundo. Compare la figura 4.8 con la figura 4.4.

(b) En la figura 4.9a, inicio de un ciclo, definimos la fase como cero, los labios están cerrados y dan contra la boquilla de la trompeta. La presión del aire sobre los labios es máxima.

En la figura 4.9b ha transcurrido un cuarto de período, la fase es 90° , los labios están abiertos, y debido a su inercia continúan abriéndose hasta un máximo que se alcanza otro cuarto de período más tarde, figura 4.9c; la fase es 180° . La rapidez del aire a través de los labios es máxima y, de acuerdo con la ecuación de Bernoulli, la presión es mínima. Al ser máxima la separación entre los labios la fuerza muscular que tiende a cerrarlos también es máxima porque están sometidos al mayor esfuerzo, y se inicia el proceso de cierre de los labios.

En la figura 4.9d ha transcurrido un cuarto de período más y los labios están parcialmente cerrados; la fase vale 270° .

Entre d y a transcurre el último cuarto de período, los labios se cierran, la presión se hace máxima. La fase vale 360° y se completa un ciclo que se repite según

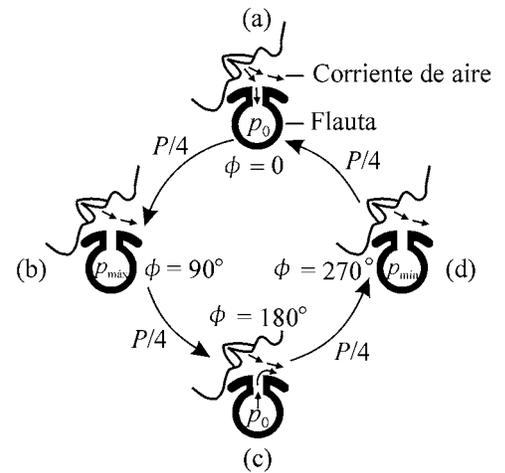


Figura 4.8 Un ciclo de la emisión de una nota.

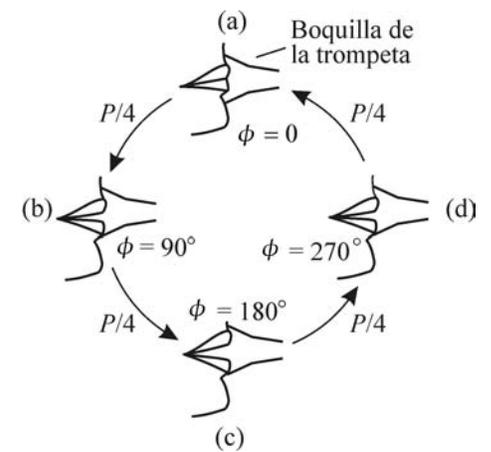


Figura 4.9 Un ciclo de la emisión de una nota.

⁶ Harry Olson, *Music, physics and engineering*, Dover Publications, Nueva York, 1967, pp. 133-134, 161-162.

la frecuencia de la nota emitida. La onda producida por los labios se asemeja a una señal diente de sierra y no a una función armónica. Si fuera un *do* central los labios vibrarían con una frecuencia de 261.6 Hz y, en consecuencia, la presión del aire también cambiaría con igual frecuencia. El músico puede variar ν modificando la tensión de los labios.

Ejemplo 4.3 Suponga que las ondas de presión en una columna de gas tienen la forma

$$\Delta p = p - p_0 = \mathcal{P}_0 \sin(kx - \omega t). \quad (4.14)$$

(a) Usando las ecuaciones 4.3, p. 28, y 4.5, obtenga la expresión para la onda de desplazamiento. (b) Muestre que las ondas de desplazamiento y de presión están desfasadas entre sí un cuarto de longitud de onda, e interprete físicamente y en la representación gráfica de esas ondas, el desfase. (c) Obtenga la expresión para la onda de densidad y muestre que está en fase con la onda de presión. (d) Encuentre la relación entre la amplitud de la onda de densidad y la amplitud de la onda de presión, y entre las amplitudes de densidad y de desplazamiento.

Solución

(a) Iguaemos la ecuación 4.5 a la ecuación 4.14 y multipliquemos por dx ,

$$-B(\partial \xi / \partial x), dx = \mathcal{P}_0 \sin(kx - \omega t) dx. \quad (4.15)$$

El diferencial de $\xi(x, t)$ es $d\xi = (\partial \xi / \partial x) dx + (\partial \xi / \partial t) dt$. En un t fijo, $dt = 0$, y $d\xi = (\partial \xi / \partial x) dx$. Introduzcamos este diferencial en la ecuación 4.15 e integremos,

$$-B \int d\xi = -B\xi = \mathcal{P}_0 \int \sin(kx - \omega t) dx = -(\mathcal{P}_0/k) \cos(kx - \omega t).$$

Despejemos la onda de desplazamiento,

$$\xi(x, t) = \frac{\mathcal{P}_0}{Bk} \cos(kx - \omega t) = \xi_0 \cos(kx - \omega t). \quad (4.16)$$

La amplitud de las oscilaciones es $\xi_0 = \mathcal{P}_0/Bk$. Reemplazando a $B = v^2 \rho_0$, y a $k = 2\pi\nu/v$, la amplitud toma la forma

$$\xi_0 = \frac{\mathcal{P}_0}{2\pi v \rho_0 v}. \quad (4.17)$$

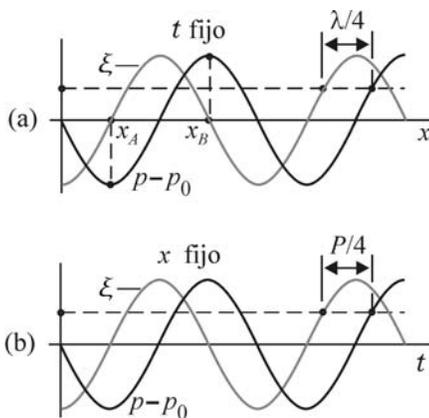


Figura 4.10 Desfase de $\pi/2$ entre las ondas de desplazamiento y de presión. (a) Interpretación espacial, (b) interpretación temporal.

(b) La onda de presión, ecuación 4.14, está expresada en términos de la función seno, mientras que la onda de desplazamiento, ecuación 4.16, está expresada con coseno. Puesto que el desfase entre ambas funciones es $\pi/2$, este también es el desfase entre dichas ondas. *Un desfase se expresa, estrictamente, en radianes*, pero como la mínima distancia Δx , con t fijo, entre un mismo valor arbitrario de las funciones seno y coseno es $\lambda/4$ (figura 4.10a), se dice a veces, hablando sin total rigor, que el desfase es $\lambda/4$, con unidades de longitud.

El desfase se puede ver también en términos temporales en lugar de espaciales como en el anterior párrafo. Es válido darlo con unidades de tiempo, y decir que es $P/4$, ya que en un punto fijo x hay que esperar un tiempo mínimo de $P/4$ (figura 4.10b) para que un valor arbitrario de la función seno sea igual al de la función coseno.

Un desfase de $\pi/2$ (o $\lambda/4$ o $P/4$ según se prefiera) entre dos variables, quiere decir, según las familiares gráficas del seno y del coseno (figura 4.10a), que en el instante en que en ciertos puntos del espacio una de las variables es máxima o mínima, en ese mismo instante y en esos mismos puntos la otra variable vale cero, y viceversa: el elemento de aire en x_A está en su posición de equilibrio, $\xi(x_A) = 0$, y allí la presión es máxima, $p(x_A) = p_0 + \mathcal{P}_0$. El elemento de aire en x_B está en su posición de equilibrio, $\xi(x_B) = 0$, y allí la presión es mínima, $p(x_B, t) = p_0 - \mathcal{P}_0$.

Que la presión sea máxima o mínima en los puntos del medio que están en su posición de equilibrio se ve fácilmente interpretando la gráfica de $\xi(x, t)$, figura 4.11. El campo ξ en los puntos vecinos a x_A y a su derecha es positivo, lo que se interpreta como que esas porciones de aire se han alejado de sus respectivas posiciones de equilibrio hacia la derecha, como se indica con la flechita dirigida

hacia la derecha y encima de x_A (vea la definición de ξ en la figura y el recuadro de la p. 5). El campo ξ en los puntos vecinos a x_A y a su izquierda es negativo, lo que se interpreta como que esas porciones de aire se han alejado de sus respectivas posiciones de equilibrio hacia la izquierda. Esto implica que en x_A la presión y la densidad son mínimas. En la vecindad de x_B ocurre todo lo contrario, y es un punto de máximas densidad y presión. Visto analíticamente, la pendiente en x_A es positiva, $(\partial\xi/\partial x)_{x_A} > 0$, y según la ecuación 4.5, $p - p_0 < 0$ o $p < p_0$. Por supuesto, en x_B , $p > p_0$.

En los puntos donde ξ es máxima o mínima, $\partial\xi/\partial x = 0$, y según la ecuación 4.5, $p = p_0$, esto es, la onda de presión ($p - p_0$) vale cero.

(c) Al dividir la ecuación 4.3 por la ecuación 4.5 y reemplazar $B = \rho_0 v^2$ obtenemos

$$\Delta\rho = \Delta p/v^2. \tag{4.18}$$

Si la onda de presión Δp se expresa con la función seno, también la onda de densidad $\Delta\rho$ se expresa con la misma función, y como $v^2 > 0$, entonces las ondas están en fase entre sí: ellas alcanzan su máximo, se hacen cero o se vuelven mínimas simultáneamente. Ello era de esperarse, pues sabemos, según la experiencia común y la ley de los gases ideales, que a mayor presión mayor es la densidad.

Reemplacemos la ecuación 4.14 en la ecuación 4.18 para obtener la onda de densidad en función de x y t ,

$$\Delta\rho = (\mathcal{P}_0/v^2) \text{sen}(kx - \omega t). \tag{4.19}$$

(d) Designemos \mathcal{R}_0 a la amplitud de la onda de densidad. De la ecuación 4.19,

$$\mathcal{R}_0 = \mathcal{P}_0/v^2.$$

Despejemos a \mathcal{P}_0 de la ecuación 4.17 y reemplacemos,

$$\mathcal{R}_0 = \frac{2\pi v \rho_0 v \xi_0}{v^2} = \frac{2\pi \rho_0 \xi_0}{v/\nu} = 2\pi \rho_0 \frac{\xi_0}{\lambda} = k\xi_0 \rho_0. \tag{4.20}$$

Los sonidos que escuchamos son variaciones, con ciertas frecuencias, de la presión y densidad atmosféricas alrededor de los valores de equilibrio p_0 y ρ_0 , que en Medellín valen 640 mm Hg y 1.0 kg/m³, respectivamente. En el agua los valores son distintos.

Ejemplo 4.4 Halle la condición que se debe cumplir para que los cambios de densidad (y de presión) se puedan llamar *pequeños*.

Solución. La ecuación 4.9, p. 30, para las ondas en una columna de gas, se obtuvo para *cambios pequeños* en la densidad, esto es, para una densidad instantánea ρ que se aparta poco del valor de equilibrio ρ_0 , lo que implica que $\mathcal{R}_0 \ll \rho_0$. En esta desigualdad reemplacemos \mathcal{R}_0 (ecuación 4.20), $k\xi_0 \rho_0 \ll \rho_0$; cancelemos ρ_0 ,

$$\begin{aligned} k\xi_0 &\ll 1, \\ (2\pi/\lambda)\xi_0 &\ll 1, \\ \xi_0 &\ll \lambda. \end{aligned}$$

Cambios pequeños implica $\xi_0 \ll \lambda$, y viceversa (hemos despreciado el 2π en la última relación). Esta desigualdad, gráficamente, corresponde más con la curva de baja amplitud de la figura 4.12, donde las variaciones del campo son *suaves*, esto es, la pendiente $\partial\xi/\partial x \ll 1$, que con la curva de mayor amplitud; para esta, $\xi_0/\lambda \approx 0.3$ y, en general, $\partial\xi/\partial x \ll 1$.

Ejemplo 4.5 (Este ejemplo es una continuación del ejemplo 4.3). A partir de la onda de desplazamiento dentro de un tubo, muestre, gráficamente, la distribución de densidad.

En la figura 4.13a se dibuja una porción del tubo dividida en 37 elementos de masa, enumerados de $i = -3$ a $i = 33$. El punto negro en el centro de cada rectángulo representa su centro de masa (c. m.). El origen de coordenadas se ha hecho coincidir con el c. m. del elemento $i = 0$. Todavía no hay onda, y así cada elemento está en su posición de equilibrio, esto es, $\xi(x_i, t) = 0$. Se muestra la posición

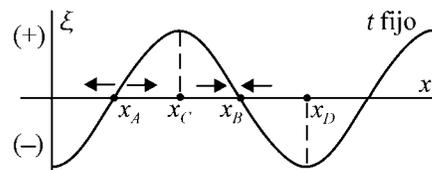


Figura 4.11 Onda de desplazamiento $\xi(x, t)$. Examinando el entorno de los puntos del medio se sabe si son de máxima o de mínima presión.

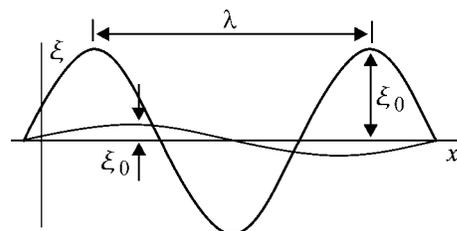


Figura 4.12 El calificativo de **grande** o **pequeño** depende de la relación ξ_0/λ .

de equilibrio de los elementos séptimo y decimotercero. La densidad del aire es uniforme a lo largo del tubo.

La figura 4.13b corresponde a la onda armónica de desplazamiento ξ en cierto instante t . Las flechitas son el desplazamiento ξ en función de x_i ; se señala el desplazamiento de su posición de equilibrio de los elementos séptimo y decimotercero, ξ_7 y ξ_{13} respectivamente.

Como las ondas en un fluido, en este caso aire, son longitudinales, los ξ_i van paralelos al eje x , que es la dirección de avance de la onda. En la figura c los $\xi_i > 0$ se han rotado 90° respecto a la figura b, de manera que apunten hacia la derecha de su posición de equilibrio; los $\xi_i < 0$ se han rotado de manera que apunten hacia la izquierda. La posición de equilibrio x_i se indica con una línea vertical a trazos que empieza en la figura a, pasa sobre cada flecha de la figura b y termina en la cola de la flecha de la figura c. En la cabeza de esta última empieza otra línea vertical que desciende hasta terminar en la figura d, en el c. m. del elemento i , pero desplazado ξ_i de su posición de equilibrio.

En la figura d se aprecian claramente las variaciones de densidad a la largo del tubo.

Ejemplo 4.6 Halle la rapidez del sonido en el aire a (a) 0°C , (b) 25°C .

Solución. Basta con reemplazar la temperatura, en grados kelvin, en la ecuación 4.13.

$$(a) v = 20\sqrt{273 + 0} = 330 \text{ m/s.}$$

$$(b) v = 20\sqrt{273 + 25} = 345 \text{ m/s.}$$

Ejemplo 4.7 Encuentre el cambio de la rapidez del sonido en el aire por unidad de cambio de la temperatura a 25°C .

Solución. Nos piden hallar a Δv cuando $\Delta T = 1^\circ\text{C}$ y $T = 25^\circ\text{C} \approx 298 \text{ K}$. Un cambio de 1°C equivale a un cambio de 1 K (demostrarlo).

Como $1 \text{ K} \ll 298 \text{ K}$, podemos aproximar $\Delta T \approx dT$ y $\Delta v \approx dv$. Derivemos la ecuación 4.13,

$$\frac{dv}{dT} \approx \frac{\Delta v}{\Delta T} = \frac{\alpha}{2\sqrt{T}} = \frac{10 \text{ m/s} \cdot \text{K}^{1/2}}{\sqrt{298 \text{ K}}} = 0.58 \frac{\text{m/s}}{^\circ\text{C}}.$$

Si la temperatura pasa de 25°C a 26°C o 24°C , la rapidez aumenta o disminuye, según el caso, en 0.58 m/s .

Ejemplo 4.8 Halle la rapidez del sonido en (a) una barra de hierro, (b) una barra de aluminio, (c) el agua.

Solución. Cuando nos preguntan por el sonido en un material, generalmente nos preguntan por las ondas longitudinales en él, debido a que en el aire el sonido es una onda longitudinal. En la tabla 4.1, p. 29, aparecen las cantidades necesarias para hacer los cálculos. Para el hierro y el aluminio, que son sólidos, utilizamos la ecuación 3.8; para el agua, que es un fluido, utilizamos la ecuación 4.10.

(a) Para el hierro $Y = 21 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,

$$v = \sqrt{\frac{21 \times 10^{10} \text{ N/m}^2}{7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}} = 5189 \text{ m/s} = 18700 \text{ km/h.}$$

La rapidez del sonido en una barra de hierro es cerca de quince veces la rapidez en el aire, $5189/345 \approx 15$; estos valores dependen de la temperatura.

(b) Para el aluminio $Y = 7.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\rho = 2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,

$$v = \sqrt{\frac{7.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2}{2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}} = 5091 \text{ m/s} = 18300 \text{ km/h.}$$

(c) Para el agua a 10°C , $B = 0.21 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$,

$$v = \sqrt{\frac{0.21 \times 10^{10} \text{ N/m}^2}{1000 \text{ kg/m}^3}} = 1449 \text{ m/s} = 5200 \text{ km/h.}$$

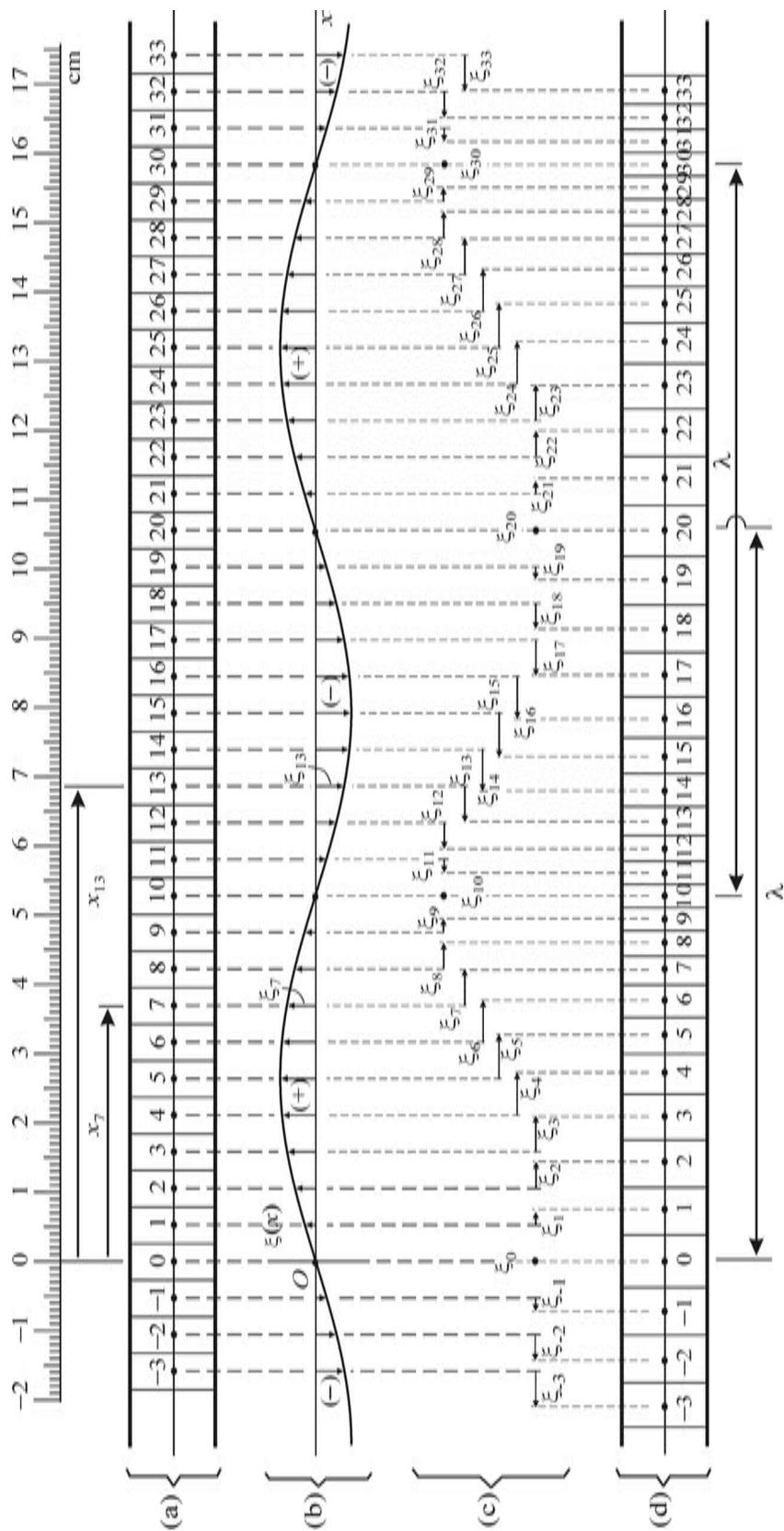


Figura 4.13 La onda de desplazamiento en *b* y *c* explica, gráficamente, las ondas de presión y densidad en *d*.

A $25\text{ }^\circ\text{C}$, $B = 0.227 \times 10^{10}\text{ N/m}^2$ y $\rho = 998\text{ kg/m}^3$,⁷ lo que da $v = 1508\text{ m/s} = 5400\text{ km/h}$. En el agua el sonido se propaga, aproximadamente, 4.4 veces más rápido que en el aire, $1508/345 \approx 4.4$.

La primera medida de la rapidez del sonido en el aire la hizo Marin Mersenne cerca de 1635; en el agua la hizo Jean Colladon en 1826. Ole Römer calculó en 1676 que la luz tardaba 11 minutos en llegar del Sol a la Tierra; con este dato Christian Huygens estimó en 1680 en $200\,000\text{ km/s}$ la velocidad de la luz.

Resumen

Por un fluido se propagan, simultáneamente, ondas de desplazamiento, presión, densidad, fuerza, potencia, . . . Mediante la conservación de la masa, hallamos la ecuación que relaciona las ondas de desplazamiento y de densidad (ecuación 4.3, p. 28); con una expansión de Taylor hallamos, para bajas deformaciones, la que relaciona la onda de presión y la de desplazamiento (ley de Hooke, ecuación 4.5). A continuación, con la segunda ley de Newton, hallamos la ecuación de onda para el desplazamiento (ecuación 4.9, p. 30). Por último, con la ley de los gases ideales, transformamos la ecuación que da la rapidez del sonido en un fluido (ecuación 4.10), para que sea función de la temperatura y un coeficiente α que depende del gas.

El hecho de que un fluido no transporte ondas transversales, aplicado a los terremotos, da información útil sobre el interior de nuestro planeta.

⁷ Allan Pierce, *Acoustics*, Acoustical Society of America, Nueva York, 1994, capítulo 1.

Módulo 5

Ondas en una cuerda

Contenido

- 5.1 Ondas transversales en una cuerda ideal
 - 5.1.1 Polarización
- 5.2 Reflexión y transmisión en una cuerda compuesta
 - 5.2.1 Casos particulares de los coeficientes
- 5.3 La rapidez de una onda y las propiedades del medio

Objetivos

1. Encontrar la rapidez de propagación de una perturbación en una cuerda tensa.
2. Introducir el concepto de polarización.
3. Utilizar condiciones de frontera en la solución del problema de las ondas en una cuerda compuesta de dos secciones diferentes.
4. Iniciar el estudio de los fenómenos que se presentan cuando las propiedades del medio cambian bruscamente.

Preguntas básicas

1. ¿De qué depende la rapidez de una onda?
2. ¿Qué aproximaciones se utilizan en el tratamiento teórico de la propagación de una onda en una cuerda?
3. ¿Es posible generar ondas puramente transversales en una cuerda, esto es, sin que se presenten ondas longitudinales?
4. ¿Qué ocurre cuando una onda se encuentra con una discontinuidad repentina en el medio?
5. ¿Cómo se hallan la amplitud, la longitud de onda, la frecuencia, la fase y la energía de las ondas reflejada y transmitida, conocidas estas cantidades para la onda incidente y las propiedades de los medios?

Introducción

Cuando pulsamos una cuerda se generan fuerzas recuperadoras hacia la posición de equilibrio de la sección perturbada. Esta sección a su vez perturba a la vecina generándose una onda que avanza con una rapidez que depende de la tensión de la cuerda y de su inercia.

Hasta el momento hemos tratado solo con ondas que se propagan indefinidamente en un sentido —ondas viajeras—, pero es obvio que una onda solo dispone de un espacio finito para propagarse, y en algún momento y lugar se encontrará con que se termina el material en que se propaga, o que



Las vibraciones están presentes donde haya materia. Las vibraciones de una cuerda de un instrumento musical inician una sucesión de vibraciones que se transmiten de un medio a otro hasta llegar a nuestros oídos, donde generan pulsos eléctricos que el cerebro interpretará como música.

el medio cambia: cuando hablamos, la voz llegará al piso o a una pared; las cuerdas de un violín o una guitarra son finitas; la luz del Sol pasa del aire al agua o a un vidrio ... Iniciamos el acercamiento a la situación importantísima de ondas en medios finitos estudiando qué ocurre en el punto de unión de dos cuerdas diferentes.

5.1 Ondas transversales en una cuerda ideal

El estudio de las ondas en una cuerda es de alta complejidad, y para iniciarlo son necesarias muchas aproximaciones. En tratamientos más avanzados se usan menos aproximaciones, o estas son menos severas.

La fuerza recuperadora que se genera cuando presionamos una mesa se debe a la rigidez intrínseca de la mesa. Cuando pulsamos una cuerda, la fuerza recuperadora se debe, ante todo, a la tensión de la cuerda, que es de origen externo a ella, ya sea por un peso suspendido a la cuerda, o por la tensión dada por la clavija en un instrumento musical. Pero una cuerda real también tiene rigidez intrínseca, no solo la que le da la tensión de origen externo.

Definimos como **cuerda ideal** aquella que no tiene rigidez intrínseca: esta cuerda puesta transversalmente sobre una cuchilla formaría, debido a la gravedad, un ángulo $\alpha = 0^\circ$ (figura 5.1); no habría ningún espacio entre cuchilla y cuerda. El caso opuesto, también ideal, es el de rigidez absoluta, de no deformación ante una fuerza, en el que $\alpha = 90^\circ$; la realidad está entre estos dos extremos. En una cuerda de una guitarra o de un piano se presentan fuerzas recuperadoras debidas a la rigidez intrínseca y a la tensión de la cuerda.

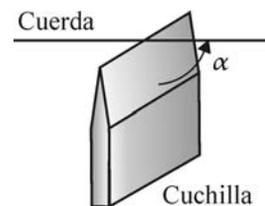


Figura 5.1 Rigidez de una cuerda.

En un primer acercamiento al problema de estudiar qué ocurre cuando producimos una deformación en un lugar de una cuerda no tenemos en cuenta su rigidez, sino únicamente la tensión. Para la rapidez con que la deformación se propaga hallaremos una expresión que cumple la ecuación 5.14, donde v no depende de las características de la onda. Cuando se tiene en cuenta la rigidez intrínseca de la cuerda, v depende de ν .

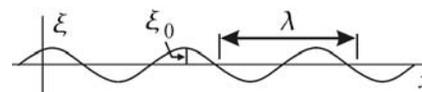


Figura 5.2 Onda en una cuerda.

La línea horizontal de la figura 5.2 representa la cuerda cuando no hay una onda, y la definimos como el eje x ; la línea curva es una porción de la cuerda pero ya transportando una onda o vibrando. Supondremos que con o sin onda la tensión no cambia, lo que equivale a suponer que la longitud de la cuerda no cambia; para que esta aproximación sea aceptable, debe haber poca diferencia entre la cuerda vibrando y no vibrando. La pendiente de la cuerda estática es $\partial\xi/\partial x = 0$, y vibrando su pendiente en todo x y t se debe apartar poco de cero, o sea $|\partial\xi/\partial x| \ll 1$: esta desigualdad es la que hemos llamado *baja* deformación que, como vimos, equivale a $\xi_0 \ll \lambda$.

En la figura 5.3 mostramos un elemento de masa de ancho Δx desplazado transversalmente de su posición de equilibrio. También es una suposición considerar que ξ es perpendicular a x , o sea suponer una onda puramente transversal; de entrada damos por un hecho esta posibilidad, pero realmente siempre hay un desplazamiento horizontal y simultáneamente con la onda transversal se presentan dos ondas longitudinales que son de capital importancia para explicar el transporte de momento lineal en la cuerda.¹ Como el presente curso es introductorio a la física de las ondas, supondremos una onda puramente transversal. Una vez el estudiante haya comprendido los fundamentos conceptuales de las ondas, puede consultar la bibliografía que se ha citado para ahondar en situaciones más cercanas a la realidad. Por fortuna, a pesar de tantas aproximaciones nece-

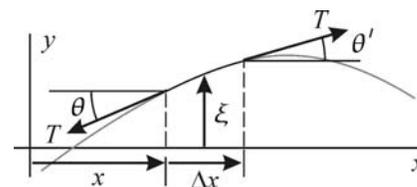


Figura 5.3 Fuerzas sobre un elemento de masa.

¹ William Elmore y Mark Heald, *Physics of waves*, Dover Publications, Nueva York, 1985, p. 45.

Aunque la transmisión de ondas en una cuerda tensa se está estudiando analíticamente desde 1747 (D'Alembert), aún en 1998, mediante simulaciones numéricas en computador con MATHEMATICA, se estaba aclarando el difícil problema de la propagación del momento lineal. El siguiente artículo es importante para comprender la propagación de ondas en una cuerda, pero está por encima del nivel de este curso: David Rowland y Colin Pask, "The missing wave momentum mystery", *American Journal of Physics*, mayo de 1999.

sarias para hacer accesible el estudio de las ondas, se encuentran muchas situaciones en la realidad que se pueden comprender mediante los modelos idealizados que utilizamos en todo momento.

Sea μ la masa por unidad de longitud o **densidad lineal de masa**; la masa del elemento es $\Delta m = \mu \Delta x$. La fuerza a cada lado del elemento es tangencial e igual a la tensión T de la cuerda; el ángulo a la derecha es θ' y a la izquierda es θ . Como la pendiente es *pequeña*, $|\partial\xi/\partial x| \ll 1$ implica que $\theta \ll 1$, y el seno lo aproximamos a tangente. Sumemos las fuerzas en y ,

$$F'_y - F_y = T(\text{sen } \theta' - \text{sen } \theta) \approx T(\tan \theta' - \tan \theta).$$

La resta de fuerzas es ΔF_y y la resta entre paréntesis es $\Delta \tan \theta$. Cuando $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta F_y = dF_y$ y $\Delta \tan \theta = d \tan \theta$,

$$dF_y = T d \tan \theta.$$

En el instante en que se miden las variables a la izquierda del elemento se miden también a la derecha, lo que quiere decir que $dt = 0$ (t fijo) y los diferenciales totales de F_y y $\tan \theta$ solo dependen de dx ,

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} dx = T \frac{\partial \tan \theta}{\partial x} dx.$$

Cancelemos dx ; la pendiente es $\tan \theta = \partial\xi/\partial x$,

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = T \frac{\partial(\partial\xi/\partial x)}{\partial x} = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (5.1)$$

El infinitesimal de fuerza en y es igual al infinitesimal de masa $dm = \mu dx$ por la aceleración $a_y = \partial^2 \xi / \partial t^2$,

$$dF_y = \frac{\partial F_y}{\partial x} dx = (\mu dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Cancelemos dx ,

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Igualemos esta ecuación a la ecuación 5.1 y despejemos la aceleración,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (5.2)$$

Esta ecuación de onda, idéntica a la ecuación 2.6, p. 16, nos dice que cuando perturbamos una cuerda, la perturbación no se queda en el sitio que se produce sino que se propaga con rapidez

$$v = \sqrt{T/\mu}. \quad (5.3)$$

El miembro izquierdo de la ecuación 5.2 es la aceleración y el signo de $\partial^2 \xi / \partial x^2$ da la concavidad de la cuerda; como $T/\mu > 0$, entonces los segmentos de la cuerda cóncavos hacia arriba tienen aceleración positiva y los cóncavos hacia abajo negativa.

5.1.1 Polarización

Hemos supuesto que el desplazamiento transversal ocurre paralelo al eje y , pero no tiene que ser así, pues además puede tener componente z y

seguir siendo una onda transversal, o sea que ξ está en un plano perpendicular al eje x , o lo que es igual, en un plano paralelo al plano yz : $\xi(x, t) = \xi_y(x, t) + \xi_z(x, t)$. Hablamos de **polarización de la onda** según la trayectoria que un punto del medio siga en tal plano: si es un segmento rectilíneo, la polarización es **rectilínea**; o puede ser **circular** o **elíptica**. En la sección 14.1, p. 133, analizamos con más detalle estas polarizaciones pero para las ondas electromagnéticas.

Ejemplo 5.1 Para una cuerda uniforme, halle la relación entre la densidad lineal de masa μ y la densidad volumétrica de masa ρ (figura 5.4).

Solución. Sea m la masa total de la cuerda, L la longitud, A el área transversal y V el volumen. Por la definición de μ , $m = \mu L$; por la definición de ρ , $m = \rho V = \rho AL$. Igualemos las dos expresiones para m , $\mu L = \rho AL$. Cancelemos L ,

$$\mu = \rho A. \tag{5.4}$$

Vemos que las dimensiones se cumplen, $M L^{-1} = M L^{-3} L^2$.

Ejemplo 5.2 Una cuerda uniforme de longitud L y masa M cuelga libremente del techo. Sea x la distancia a partir del punto inferior de la cuerda (figura 5.5).

(a) Demuestre que la velocidad de propagación de un pulso de onda transversal a lo largo de la cuerda es \sqrt{gx} . (b) Determine el tiempo t que tarda un pulso transversal en recorrer la longitud de la cuerda.

Solución

(a) La densidad lineal de masa es $\mu = M/L$. La masa del tramo de cuerda de longitud x es $m = \mu x = Mx/L$. Dicho tramo ejerce una tensión en la sección determinada por x , $T = mg = Mgx/L$. La velocidad en x es

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{Mgx/L}{M/L}} = \sqrt{gx}. \tag{5.5}$$

(b) La velocidad de propagación del pulso de onda es $v = dx/dt$. Igualemos con la ecuación 5.5, $v = dx/dt = \sqrt{gx}$. Despejemos: $dx/\sqrt{x} = \sqrt{g} dt$. Integremos el miembro izquierdo entre 0 y L y el derecho entre 0 y t ,

$$\begin{aligned} \int_0^L x^{-1/2} dx &= \sqrt{g} \int_0^t dt; \\ \frac{x^{1/2}}{1/2} \Big|_0^L &= \sqrt{g} t \Big|_0^t; \\ 2\sqrt{L} &= \sqrt{g} t; \\ t &= 2\sqrt{L/g}. \end{aligned}$$

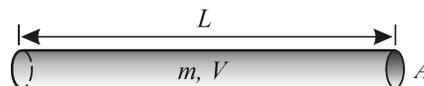


Figura 5.4 Cuerda de sección uniforme.

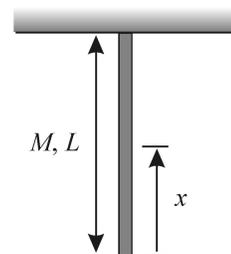


Figura 5.5 La velocidad depende de x .

5.2 Reflexión y transmisión en una cuerda compuesta

Hasta ahora hemos hablado de ondas que se propagan en un solo sentido, lo que requiere un medio infinito. Pero tal medio no existe, y en algún momento la onda se encuentra con una discontinuidad, con un cambio del medio. Consideremos dos medios en contacto, cada uno de ellos homogéneo e infinito. A la superficie de contacto la llamamos **interfaz**, y generalmente ubicamos en ella el origen de coordenadas. Definimos como **medio 1** al medio donde está la onda que se acerca a la interfaz, y a la onda la llamamos **onda incidente**, ξ_i ; el otro medio es el **medio 2**. En la interfaz

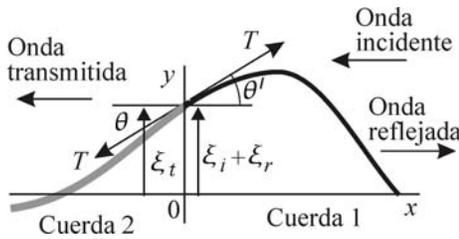


Figura 5.6 Ondas en una cuerda compuesta.

se producen dos ondas, ambas alejándose de ella: la que permanece en el medio 1 se denomina **onda reflejada**, ξ_r , y la que se propaga en el medio 2 es la **onda transmitida** o **refractada**, ξ_t . Sean los medios dos cuerdas con densidad lineal de masa μ_1 y μ_2 respectivamente (figura 5.6).

Surgen algunas preguntas importantes: conocidas la amplitud y la potencia de la onda incidente, ¿cuál es la amplitud y la potencia de las ondas reflejada y transmitida? A continuación hacemos el análisis matemático y físico para responder, pero esperamos de antemano que la respuesta dependa solamente de la amplitud que la fuente de las ondas imponga sobre ξ_{0i} , y de las características de las cuerdas μ_1 y μ_2 .

Consideremos las ondas armónicas

$$\begin{aligned}\xi_i &= \xi_{0i} \text{sen}(\omega_i t + k_i x), \\ \xi_r &= \xi_{0r} \text{sen}(\omega_r t - k_r x), \\ \xi_t &= \xi_{0t} \text{sen}(\omega_t t + k_t x).\end{aligned}\quad (5.6)$$

Definimos los **coeficientes de reflexión**, R , y de **transmisión**, T , para la amplitud,

$$R \equiv \frac{\xi_{0r}}{\xi_{0i}}, \quad T \equiv \frac{\xi_{0t}}{\xi_{0i}}. \quad (5.7)$$

Entonces, por definición,

$$\xi_{0r} = R\xi_{0i}, \quad \xi_{0t} = T\xi_{0i}.$$

No hay onda reflejada si $\xi_{0i} = 0$ (obvio, si no hay onda incidente no existen las otras) o si $R = 0$; no hay onda transmitida cuando $T = 0$.

Tenemos dos incógnitas, R y T , que las obtendremos de dos ecuaciones dadas por dos condiciones de frontera (deben existir dos condiciones independientes dado que la ecuación de onda es de segundo orden):

Primera condición de frontera: el campo en la interfaz es continuo. Condición evidente, ya que solo expresa el hecho de que la cuerda no está rota en la interfaz: en todo instante, lo que la cuerda se separa de su posición de equilibrio da igual si se mide en el medio 1 o en el medio 2, cuando $x \rightarrow 0$. Expresado con lenguaje simbólico,

$$\xi|_{x \rightarrow 0^+} = \xi|_{x \rightarrow 0^-}$$

A la derecha de la interfaz la cuerda obedece simultáneamente a dos ondas; el desplazamiento observado ξ es la superposición o suma de los desplazamientos parciales ξ_i y ξ_r ; a la izquierda solo está ξ_t . La última ecuación es

$$(\xi_i + \xi_r)_{x \rightarrow 0} = \xi_t|_{x \rightarrow 0}.$$

Reemplacemos las ecuaciones 5.6 en la anterior ecuación,

$$\xi_{0i} \text{sen } \omega_i t + \xi_{0r} \text{sen } \omega_r t = \xi_{0t} \text{sen } \omega_t t.$$

Como esta igualdad se tiene que cumplir en todo instante, $\omega_i = \omega_r = \omega_t$, y cancelamos las funciones seno,

$$\xi_{0i} + \xi_{0r} = \xi_{0t}. \quad (5.8)$$

Note que no hay una ley de conservación de la amplitud; si así fuera, en lugar de la anterior ecuación tendríamos $\xi_{0i} = \xi_{0r} + \xi_{0t}$. Como las frecuencias angulares son iguales, no hablaremos de la frecuencia de la onda incidente o reflejada o transmitida, sino simplemente de la frecuencia angular ω ; la igualdad de las ω implica la igualdad de las v : la frecuencia no

cambia por reflexión ni por transmisión. Es obvio que esto sea así, pues no es imaginable que las cuerdas 1 y 2 permanezcan unidas y que a la vez vibren con frecuencias diferentes; las frecuencias no pueden diferir ni en un infinitesimal.

La rapidez de propagación solo depende de las propiedades de la cuerda T y μ , por lo que no es apropiado hablar de la rapidez de la onda incidente o reflejada, sino únicamente de v_1 , o de v_2 para la onda transmitida. Como $k = \omega/v$, entonces

$$k_i = \frac{\omega}{v_i} = \frac{\omega}{v_r} = \frac{\omega}{v_1} = k_r = k_1 \quad \text{y} \quad k_t = \frac{\omega}{v_2} = k_2.$$

Las ecuaciones 5.6 las reescribimos como

$$\begin{aligned} \xi_i &= \xi_{0i} \text{sen}(\omega t + k_1 x), \\ \xi_r &= \xi_{0r} \text{sen}(\omega t - k_1 x), \\ \xi_t &= \xi_{0t} \text{sen}(\omega t + k_2 x). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Dividamos por ξ_{0i} la ecuación 5.8 (vea las ecuaciones 5.7),

$$1 + R = T. \tag{5.10}$$

Ya tenemos una ecuación con las incógnitas R y T ; hallemos la otra.

Segunda condición de frontera: la fuerza en y es continua en la interfaz. Condición que es consecuencia de la tercera ley de Newton; de no ser así, la fuerza sobre un infinitesimal de masa en la interfaz sería finita y la aceleración infinita.

$$F_y|_{x \rightarrow 0^+} = F_y|_{x \rightarrow 0^-}.$$

Como de costumbre, hacemos el análisis para $\xi_0 \ll \lambda$, lo que implica una pendiente mucho menor que 1 y la validez de las aproximaciones $\text{sen } \theta \approx \tan \theta = \partial \xi / \partial x$,

$$T \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x \rightarrow 0^+} = T \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x \rightarrow 0^-}.$$

Cancelando T vemos que la continuidad de F_y equivale a la continuidad de la pendiente. Nuevamente, a la derecha hay dos ondas y a la izquierda solo una,

$$\left. \frac{\partial(\xi_i + \xi_r)}{\partial x} \right|_{x \rightarrow 0} = \left. \frac{\partial \xi_t}{\partial x} \right|_{x \rightarrow 0}.$$

Introduzcamos las ecuaciones 5.9, derivemos respecto a x , hagamos $x = 0$ y cancelemos $\cos \omega t$,

$$k_1 \xi_{0i} - k_1 \xi_{0r} = k_2 \xi_{0t}.$$

Dividamos por ξ_{0i} ,

$$k_1 - k_1 R = k_2 T.$$

Despejemos a R y T de esta ecuación y de la ecuación 5.10,

$$R = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad T = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}. \tag{5.11}$$

El número de onda depende de las características de la cuerda,

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1} = \frac{\omega}{\sqrt{T/\mu_1}}, \quad k_2 = \frac{\omega}{v_2} = \frac{\omega}{\sqrt{T/\mu_2}}.$$

Reemplacemos en la ecuación 5.11 y cancelemos ω y T ,

$$R = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}, \quad T = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}. \quad (5.12)$$

Definamos la **densidad lineal relativa de masa** del medio 2 respecto al medio 1 como

$$\mu_{21} \equiv \mu_2/\mu_1.$$

Dividiendo las ecuaciones 5.12 por μ_1 obtenemos

$$R \equiv \frac{\xi_{0r}}{\xi_{0i}} = \frac{1 - \sqrt{\mu_{21}}}{1 + \sqrt{\mu_{21}}}, \quad T \equiv \frac{\xi_{0t}}{\xi_{0i}} = \frac{2}{1 + \sqrt{\mu_{21}}}. \quad (5.13)$$

5.2.1 Casos particulares de los coeficientes

1. Cuando la densidad relativa es 1, $R = 0$ y $T = 1$. Este valor de R dice que no hay onda reflejada, $\xi_{0r} = R\xi_{0i} = 0 \times \xi_{0i} = 0$. Por conservación de la energía, toda la energía se transmite, $\xi_{0t} = T\xi_{0i} = 1 \times \xi_{0i} = \xi_{0i}$.
2. R es negativo para $\mu_2 > \mu_1$; lo expresamos como $R = -|R|$, y la amplitud reflejada es $\xi_{0r} = R\xi_{0i} = -|R|\xi_{0i}$. Esto parece decirnos que una amplitud es positiva y la otra negativa, pero las amplitudes son positivas, y la interpretación de $R < 0$ es más bien la siguiente:

La onda reflejada es

$$\begin{aligned} \xi_r &= \xi_{0r} \text{sen}(\omega t - k_1 x) = -|R|\xi_{0i} \text{sen}(\omega t - k_1 x) \\ &= |R|\xi_{0i} \text{sen}(\omega t - k_1 x \pm \pi); \end{aligned}$$

su fase es $\phi_r = \omega t - k_1 x \pm \pi$; en la interfaz ($x = 0$), $\phi_r = \omega t \pm \pi$. La fase de la onda incidente es $\phi_i = \omega t + k_1 x$; en la interfaz, $\phi_i = \omega t$. El desfase entre ambas ondas es $\Delta\phi_{r,i} = \phi_r - \phi_i = (\omega t \pm \pi) - \omega t = \pm\pi$.

En resumen, cuando $\mu_2 > \mu_1$ las ondas incidente y reflejada están en contrafase en la interfaz ya que su desfase es 180° , lo que implica que un pulso de onda que llegue por encima, se devuelve por debajo (figura 5.7); la reflexión cambia la fase en $\pm\pi$. En dicha figura la pared a la que está fija la cuerda se puede tratar como una segunda cuerda con $\mu_2 \gg \mu_1$.

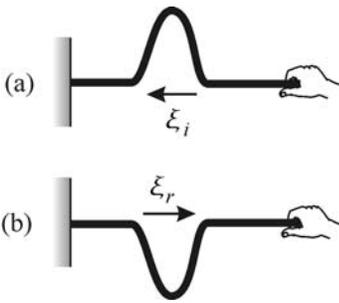


Figura 5.7 Desfase de π en la reflexión.

3. Si $\mu_2 \gg \mu_1$, entonces $\mu_{21} \gg 1$ y

$$R = \frac{1 - \sqrt{\mu_{21}}}{1 + \sqrt{\mu_{21}}} \approx \frac{-\sqrt{\mu_{21}}}{\sqrt{\mu_{21}}} = -1, \quad T = \frac{2}{1 + \sqrt{\mu_{21}}} \approx \frac{2}{\sqrt{\mu_{21}}} \ll 1.$$

El significado del signo negativo de R lo acabamos de analizar; el que sea 1 quiere decir que la amplitud reflejada es, aproximadamente, igual a la incidente. $T \ll 1$ significa que la amplitud transmitida es despreciable frente a la incidente, o que casi toda la energía se refleja. En la figura 5.7 la cuerda transfiere poca energía a la pared en cada reflexión.

4. Cuando $\mu_1 > \mu_2$, la amplitud transmitida es mayor que la incidente (no existe una ley de conservación de la amplitud): $\mu_{21} < 1$ y, en consecuencia, $T > 1$ ya que el numerador de T (ecuación 5.13) es mayor

que el denominador. Tal desigualdad implica que $\xi_{0t} > \xi_{0i}$, y decimos que la amplitud transmitida se ha amplificado. Cuando un temblor de tierra alcanza un poblado construido sobre tierras húmedas, con densidad menor que el promedio de las tierras que las rodea, la amplitud del movimiento telúrico aumenta. Con ondas electromagnéticas se puede presentar una situación análoga donde el campo eléctrico transmitido sea mayor que el incidente.

5. La siguiente es una característica general de las ondas transmitidas: como siempre se cumple que $T > 0$ (¿por qué?), en la interfaz las ondas incidente y transmitida siempre están en fase; cuando una es (+) la otra también lo es, ambas se hacen cero simultáneamente; cuando una es (−) la otra también.

5.3 La rapidez de una onda y las propiedades del medio

Cuando presionamos sobre una mesa, se produce una deformación que depende de la magnitud de la fuerza ejercida sobre ella y de sus propiedades físicas. Al liberar la presión, la parte deformada regresa a su posición de equilibrio, transmitiendo en el proceso la energía y el momento lineal a la región vecina, y así sucesivamente se va propagando una onda. A mayor densidad, más tiempo tarda en regresar la parte deformada a su posición de equilibrio, lo que se traduce en una rapidez menor de propagación. Note que en las expresiones halladas para v en diferentes medios ($v = \sqrt{Y/\rho}$, $v = \sqrt{S/\rho}$, $v = \sqrt{B/\rho}$, $v = \sqrt{T/\mu}$), la densidad se encuentra en el denominador, mientras que el parámetro indicativo (Y , S o B) de la magnitud de la fuerza recuperadora (o sea de la rigidez del medio) está en el numerador. En los medios ideales, continuos, siempre se cumple que

$$v = \sqrt{\text{rigidez del medio/inercia del medio}}. \quad (5.14)$$

En todas las deducciones de la ecuación de onda supusimos pequeñas deformaciones, $\partial\xi/\partial x \ll 1$. Para una onda armónica, esta desigualdad dice que $\xi_0 k \cos(kx - \omega t) \ll 1$. Como la desigualdad se debe cumplir en todo x y t , hacemos $\cos(kx - \omega t) = 1$ y la desigualdad queda $\xi_0 k \ll 1$. Reemplazando a k , $(2\pi/\lambda)\xi_0 \ll 1$. Despreciando el factor 2π llegamos a que *pequeñas* quiere decir

$$\xi_0 \ll \lambda.$$

El que la rapidez de la onda dependa de las dos características mencionadas era de esperarse con base en la segunda ley de Newton: para un elemento de masa del medio, $a = F/m$. A mayor fuerza recuperadora (o sea a mayor Y o S de una barra), mayor aceleración del elemento y más rápido regresa a su posición de equilibrio, transfiriéndoles más rápido su energía a los elementos vecinos, lo que quiere decir mayor v . Pero a mayor masa del elemento (o sea a mayor ρ), menor la aceleración ... y menor v . En la tabla 4.1, p. 29, $Y_{\text{Fe}} > Y_{\text{Al}}$, por lo que se esperaría $v_{\text{Fe}} > v_{\text{Al}}$, pero el hierro también tiene mayor densidad que el aluminio, que contrarresta la influencia del mayor Y , dando como resultado que el sonido se propaga casi con igual rapidez en el aluminio y en el hierro (vea el ejemplo 4.8).

La rapidez de propagación solo depende de las características del medio, no de la onda: el zumbido de un insecto se propaga con la misma rapidez que un

trueno, aunque la amplitud de la onda que aquel produce sea menor que la de este.

Hay situaciones en las que la rapidez sí depende de las características de la onda: cerca de una explosión, $\partial\xi/\partial x \ll 1$ y el sonido tiene una rapidez notablemente mayor que la predicha por la ecuación 4.13; cuando se tiene en cuenta la viscosidad del medio, se halla que la rapidez depende de la frecuencia; las ondas superficiales en el agua de gran longitud de onda, por el contrario, no dependen de las características del medio, sino únicamente de la longitud de onda y de la gravedad g .² El estudio que hicimos para las ondas en un fluido es para un fluido homogéneo, y las ondas superficiales en el agua no están en un medio homogéneo, ya que de la interfaz para abajo el medio es agua y para arriba es aire.

Resumen

Para una cuerda ideal, esto es, perfectamente flexible, sin pérdidas por fricción entre las moléculas de la propia cuerda ni con el medio circundante, que no emita ondas al aire, que sea continua (esto es, que se pueda pasar por alto que está constituida por átomos, aproximación válida para ondas con una amplitud mucho mayor que la separación promedio interatómica)... se halla que la rapidez solo depende de dos propiedades del medio: la tensión y la densidad lineal de masa.

En una cuerda se propagan ondas longitudinales y transversales. En una primera aproximación a su estudio despreciamos la importancia de las longitudinales, aunque realmente sean esenciales.

Cuando una onda llega a una interfaz, se producen una onda reflejada y otra transmitida; la energía incidente se reparte entre ellas dos. Las condiciones de frontera dan como consecuencia que la frecuencia no cambie por reflexión ni por transmisión, pero esto implica que la longitud de onda sí. No existe una conservación de la amplitud, pero sí de la energía.

² Marcelo Alonso y Edward Finn, *Física*, Addison-Wesley, capítulo "Movimiento ondulatorio"; $v = \sqrt{g\lambda/2\pi}$.

Módulo 6

Energía del movimiento ondulatorio

Contenido

- 6.1 Propagación de energía en una onda
- 6.2 Audición binaural

Objetivos

- 1. Definir algunas variables fundamentales para cuantificar la propagación de energía de una onda: potencia instantánea, potencia promedio, densidad de energía e intensidad.
- 2. Definir la escala de decibeles para el nivel de intensidad.
- 3. Describir la curva de sensibilidad del oído humano.
- 4. Bosquejar el proceso humano de ubicación de una fuente sonora.

Preguntas básicas

- 1. ¿Cómo hace trabajo una sección de una cuerda sobre otra sección?
- 2. ¿Cuál es la diferencia entre potencia instantánea y potencia promedio?
- 3. ¿Qué es la intensidad y qué es el nivel de intensidad?
- 4. ¿Cómo se halla la energía ondulatoria en un volumen del espacio?

Introducción

El concepto más maltratado por personas que no son especialistas en física es el de energía. Para quien quiera aplicarle un barniz de seriedad a una afirmación, parece que le bastara con meter la palabra "energía" en su discurso, sin importar qué tan disparatado resulte su uso. Pero la energía es un concepto definido con rigor, que sigue una ley de conservación y es susceptible de cuantificar de manera objetiva.

Veremos la utilidad de algunos conceptos que conllevan el concepto de energía, como potencia, densidad de energía e intensidad.

El oído humano no responde linealmente a los estímulos auditivos y detecta sonidos dentro de un rango amplísimo de intensidades; por esto es útil introducir el *nivel de intensidad*, que es una escala logarítmica para describir la sensibilidad del oído. También describimos el modo como detectamos la posición de una fuente sonora, mediante desfase o diferencia de intensidades en ambos oídos, dependiendo de la frecuencia de la fuente.



Dadas las condiciones apropiadas, es posible que un cuerpo, en esta ilustración una lámina de vidrio, absorba tanta energía de una onda que la amplitud de las vibraciones que llega a adquirir produzca su ruptura.

6.1 Propagación de energía en una onda

Es claro que las ondas transportan energía: las embarcaciones se mecen al vaivén de las olas, el sonido hace vibrar nuestros tímpanos, la luz solar provoca la fotosíntesis en las plantas y evapora el agua... Obtendremos algunas relaciones generales para cantidades que conllevan el concepto de energía, como la intensidad, la potencia y la densidad de energía, valiéndonos de las ondas transversales en una cuerda ideal.

En la figura 6.1a se muestran las fuerzas que actúan sobre una sección de la cuerda; según la ley de acción reacción, son opuestas y de igual magnitud, y corresponden con la tensión. En la figura 6.1b se muestran la parte derecha de la cuerda y la fuerza T que sobre ella ejerce la parte izquierda. Como el punto de aplicación de T se mueve verticalmente, F_y hace trabajo sobre la parte derecha a un ritmo que es la rapidez con que fluye hacia la derecha la energía de la onda, o sea la potencia,

$$P = \frac{\partial W}{\partial t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_p = (-\mathbf{u}_x T_x - \mathbf{u}_y T_y) \cdot (\mathbf{u}_y v_p) = -T_y v_p = (-T \sin \theta) \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Para pequeñas deformaciones, $\xi_0 \ll \lambda$ implica que $\theta \ll 1$ y podemos hacer la aproximación $\sin \theta \approx \tan \theta = \partial \xi / \partial x$,

$$P = -T \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Para la onda armónica $\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$ las anteriores derivadas son $\partial \xi / \partial x = \xi_0 k \cos(kx - \omega t)$ y $\partial \xi / \partial t = -\omega \xi_0 \cos(kx - \omega t)$,

$$P(x, t) = +Tk\omega \xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t).$$

De la ecuación 5.3, $T = \mu v^2 = \rho A v^2$ (vea la ecuación 5.4 del ejemplo 5.1); además, $k = \omega / v$ y así $Tk\omega = v\rho A \omega^2$,

$$P(x, t) = Av\rho \omega^2 \xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t).$$

Esta es una función de $(x - vt)$ y por lo tanto cumple la ecuación de onda,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2};$$

también podemos decir que por la cuerda se propaga una onda de potencia. $P(x, t)$ se llama **potencia instantánea** por depender de t . En un x fijo igual a x_0 ,

$$P(t) = Av\rho \omega^2 \xi_0^2 \cos^2(kx_0 - \omega t) = P_{\text{máx}} \cos^2(kx_0 - \omega t),$$

donde

$$P_{\text{máx}} = Av\rho \omega^2 \xi_0^2. \tag{6.1}$$

El máximo de la potencia se da cuando $\cos^2(kx_0 - \omega t) = 1$ y es $P = P_{\text{máx}}$. En la figura 6.2 se grafica la potencia instantánea, que varía entre 0 y $P_{\text{máx}}$, y la potencia promedio definida más adelante. Cuando por la sección de la cuerda (o sea por un corte *transversal* a ella) determinada por $x = x_0$ fluye cierta potencia, por ejemplo, 0.1 W, en *ese mismo instante* en otro punto puede ser 0 W o 0.5 W, pero nunca un valor negativo, ya que la última ecuación siempre es mayor o igual que cero, lo que quiere decir que la energía fluye en el sentido en que la onda se propaga, en nuestro caso, hacia la derecha, aunque el elemento de masa se mueva hacia la izquierda ($v_p < 0$) o esté a la izquierda de su posición de equilibrio ($\xi < 0$).

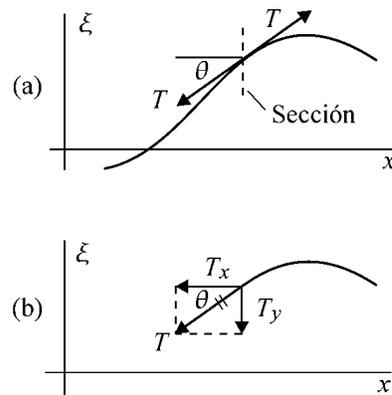


Figura 6.1 Fuerzas en una sección de la cuerda.

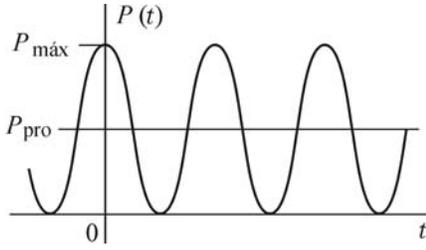


Figura 6.2 Onda de potencia.

En un ciclo las funciones seno y coseno toman una sola vez el valor 1, mientras que coseno cuadrado lo hace dos veces, lo que nos dice que la frecuencia de la onda de potencia (o de energía) es el doble que la de las otras que se expresan con seno o coseno sin elevarlos al cuadrado. O con otras palabras: la periodicidad de seno y coseno es 2π , de seno cuadrado y coseno cuadrado es π .

Las ondas audibles tienen frecuencias entre 20-20 000 Hz y las visibles cerca de 10^{15} Hz. Nuestros ojos y oídos no detectan variaciones con estas frecuencias, la aguja o la pantalla de otros detectores tampoco tienen la capacidad de responder a ellas; en todos los casos lo que se percibe es un promedio temporal de la potencia. Como el coseno cuadrado es una función periódica, basta con hallar el promedio [*pro*: promedio por período de la potencia instantánea $P(x, t)$; no confunda la P de potencia con la P de período],

$$\begin{aligned} [P(x, t)]_{\text{pro}} = P_{\text{pro}} &= \frac{1}{P} \int_t^{t+P} Av\rho\omega^2\xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t) dt \\ &= Av\rho\omega^2\xi_0^2 \frac{1}{P} \int_t^{t+P} \cos^2(kx - \omega t) dt \quad (6.2) \\ &= Av\rho\omega^2\xi_0^2 \left(\frac{1}{2}\right) = Av\left(\frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2\right). \end{aligned}$$

Según esta ecuación y la ecuación 6.1,

$$P_{\text{máx}} = 2P_{\text{pro}}.$$

El que el promedio no dependa de x significa que aunque en una sección particular de la cuerda la potencia instantánea sea diferente que en otra, la potencia promedio es igual. Si P_{pro} fuera 0.8 W, por cualquier sección de la cuerda cada segundo pasaría 0.8 J ($1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$).

La energía total de un oscilador masa-resorte es $\frac{1}{2}m\omega^2\xi_0^2$; el resultado da en J. De comparar esta expresión con el último paréntesis de la ecuación 6.2, se concluye que las unidades de este son J/m^3 , ya que mientras en la expresión del oscilador está la masa, en la de la potencia está la densidad de masa. Definimos, entonces, la **densidad de energía promedio**, E , como

$$E = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2. \quad (6.3)$$

Reemplacemos en la ecuación 6.2,

$$P_{\text{pro}} = AvE. \quad (6.4)$$

En la figura 6.3 se muestra un medio material de área variable. La energía promedio y por unidad de tiempo, o sea P_{pro} , que pasa a través de A_1 es igual a la que pasa a través de A_2 . No puede pasar más, pues la energía se conserva, y no tenemos una fuente de energía extra entre las dos áreas. Como hemos despreciado fuerzas de fricción internas en el medio, o sea un medio no disipativo, la onda no le transfiere energía al medio, no le aumenta su temperatura, y por A_2 no pasa menos potencia que por A_1 . En la realidad sí pasa menos, porque las pérdidas por fricción son inevitables. La misma energía pasa por ambas áreas, pero como $A_1 < A_2$, por cada unidad de área de A_2 pasa menos energía que por unidad de área de A_1 (cuando lo mismo se distribuye entre más, lo que corresponde disminuye). La cantidad que nos dice cuánta energía pasa por unidad de tiempo y unidad de área es la **intensidad**, I . Las áreas a las que nos referimos son perpendiculares a la dirección de propagación. Según la ecuación 6.4,

$$I \equiv P_{\text{pro}}/A = vE = \frac{1}{2}\rho v\omega^2\xi_0^2. \quad (6.5)$$

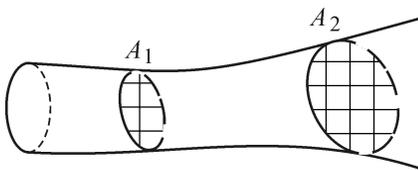


Figura 6.3 La potencia a través de las áreas es constante, la intensidad es diferente.

Vemos que la intensidad depende de dos parámetros de la onda: la amplitud de desplazamiento, ξ_0 , y la frecuencia, ν ($\nu = \omega/2\pi$), y de dos parámetros del medio: la densidad de masa, ρ , y la rapidez de propagación, v .

Un sonido puede que no lo escuchemos, ya sea por su baja amplitud o porque su frecuencia esté por fuera del rango auditivo. Cuando un sonido tiene la mínima intensidad que lo hace audible decimos que se encuentra en el **umbral de audición**, el cual depende de manera muy marcada de la frecuencia (figura 6.4); somos casi sordos para sonidos cerca de 20 o de 20 000 Hz, independiente de su amplitud; por fuera de este rango no los escuchamos cualquiera sea ξ_0 . Cerca de 4 kHz es cuando el oído es más sensible porque es aquí donde se presenta la mínima amplitud audible de una onda armónica: cerca de 10^{-12} m, dimensión que es el orden de una centésima de un diámetro atómico.

Cuando la intensidad de un sonido cambia, en el habla cotidiana decimos que su *volumen* cambia. Pero nuestra percepción no es lineal, y a un cambio relativo en I no le corresponde el mismo cambio relativo de *volumen*. Es útil definir el **nivel de intensidad**, β , de un sonido con intensidad I como

$$\beta = (10 \text{ dB}) \log \frac{I}{I_0}, \quad \text{con } I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2, \quad (6.6)$$

donde dB quiere decir decibel (una décima de Bell, en honor a Alexander Bell, inventor del teléfono). $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ es, aproximadamente, el umbral de audición a 1000 Hz y se toma como referencia para comparar otras intensidades en la escala de decibeles. Un sonido es apenas audible cerca de 0 dB (recalcamos que el umbral depende de la frecuencia), y empieza a ser molesto por su intensidad después de los 100 dB. (Hay un paralelo con la temperatura del agua: se congela a 0°C y hierve a 100°C ; estos valores dependen de la presión). En el umbral de audición, un sonido de 20 Hz tiene una intensidad más de cien millones de veces superior a otro de 1 a 5 kHz.

Opuesto al umbral de audición está el **umbral de dolor**, que es la máxima intensidad a la que la sensación auditiva se empieza a transformar en dolor, y ocurre cerca de los 125 dB *para todas las frecuencias*. Aun exposiciones cortas a sonidos de más de 100 dB pueden dañar permanentemente el oído.

6.2 Audición binaural

Para localizar un objeto son indispensables ambos ojos; por la separación entre ellos, la vista que se obtiene con uno es un poco diferente de la del otro; con tales diferencias el cerebro compone un cuadro tridimensional. Cerrando un ojo por breve tiempo, el cerebro nos sigue proveyendo la sensación tridimensional, pero quienes solo usan un ojo durante largo tiempo no aprecian si un objeto está más cercano que otro o no; para ellos el mundo es plano. A la visión con ambos ojos se le llama **visión estereoscópica**. De manera análoga, a la audición con ambos oídos se le llama **audición binaural**, y es indispensable para ubicar la posición de una fuente sonora; quienes disponen de un solo oído no lo pueden hacer, su universo sonoro es plano.

Hasta cierta frecuencia el cerebro utiliza el desfase entre el sonido en ambos oídos para detectar la ubicación de la fuente que los genera. El desfase es causado por la diferencia entre los tiempos, $t_1 - t_2$, que el sonido tarda en llegar a los respectivos oídos o **diferencia de tiempos interaural**.

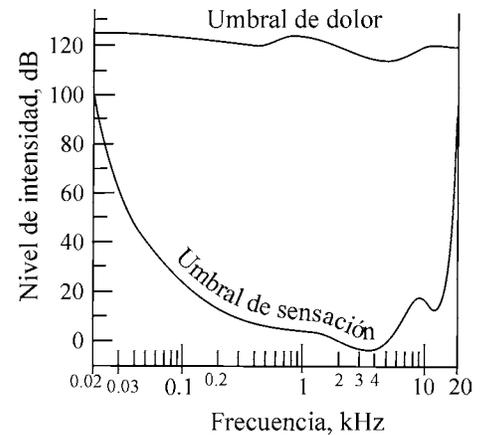


Figura 6.4 Rango auditivo promedio del oído humano.

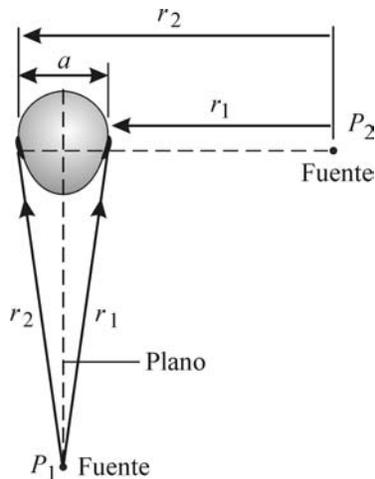


Figura 6.5 El desfase depende de la posición de la fuente.

En un oído, $\xi_1 = \xi_{01} \sin(kr_1 - \omega t)$; en el otro, $\xi_2 = \xi_{02} \sin(kr_2 - \omega t)$ (figura 6.5). La variable t no es el tiempo que tarda el sonido en ir de la fuente a cada oído, sino el instante en el que se calculan ξ_1 y ξ_2 . El desfase es

$$\delta = k(r_2 - r_1) = (2\pi/\lambda)(r_2 - r_1) = (2\pi/\lambda)(vt_2 - vt_1) = (2\pi v/\lambda)(t_1 - t_2).$$

Sea a la separación entre los oídos; para un adulto, $a \approx 11$ cm. Cuando la fuente está en P_1 , en un plano perpendicular a la recta determinada por ambos oídos y en su punto medio, el sonido que llega a uno de ellos recorre el mismo camino que el que llega al otro, dando un desfase de cero y en consecuencia nos es difícil ubicar fuentes en tal plano; en tal caso, simplemente rotamos la cabeza para producir un desfase y facilitar su ubicación.

La situación opuesta de máximo desfase se presenta cuando la fuente está en línea recta con los oídos, en P_2 , donde $r_2 - r_1 = a$ y $\delta = 2\pi a/\lambda$. Como un desfase de 0° es físicamente equivalente a 2π , entonces para $\delta = 2\pi$ se vuelve a presentar dificultad para localizar la fuente así se esté en P_2 . Veamos para qué valores de λ y v el desfase es 2π : $\delta = 2\pi = 2\pi a/\lambda$. Despejemos,

$$\lambda = a \approx 11 \text{ cm.}$$

Esto nos dice que cuando la distancia entre los oídos es igual a una longitud de onda y se está en la posición óptima P_2 , el desfase es como si se estuviera en P_1 y nos es difícil ubicar la fuente. Suponiendo una rapidez del sonido de 345 m/s, obtenemos que para una frecuencia cercana a 3 kHz ($\nu = v/\lambda = 345/0.11 = 3136$ Hz) hay dificultad para ubicar la posición de una fuente sonora; para frecuencias menores hay menor dificultad. Para $\delta > 2\pi$ hay ambigüedad debido a la periodicidad de la función seno.

Para sonidos con $\lambda < a$ el sonido que llega al oído más alejado de la fuente lo hace a través del aire, rodeando la cabeza (esto es una manifestación del fenómeno de *difracción*, que es el objetivo del último capítulo de este libro). A mayor ν respecto a 3 kHz (es decir, a menor λ respecto a 0.11 m), la difracción va perdiendo importancia y la cabeza bloquea eficazmente el sonido que llega al oído más alejado de la fuente, dando como resultado una mayor intensidad en el oído más cercano; note que en este oído la intensidad es mayor no porque esté más cerca de la fuente, sino porque para el otro oído la cabeza bloquea el sonido. La habilidad para localizar la fuente empieza a mejorar para $\nu > 3$ kHz, pero ya se logra con la diferencia en intensidades y no con desfase.¹

En conclusión, cuando queremos localizar visualmente una fuente sonora, antes que empezar a buscarla con la vista primero rotamos la cabeza con el fin de producir un desfase si la frecuencia está por debajo de 3 kHz, o para cambiar la intensidad en un oído respecto al otro (**diferencia de intensidades interaural**) con el bloqueo que hace la cabeza a un oído si la frecuencia está por encima de los 3 kHz.

Ejemplo 6.1 Una cuerda de acero de un piano está sometida a una tensión de 200 N, tiene un diámetro de 1 mm y una longitud de 80 cm. Suponga que por la cuerda avanza una onda transversal viajera y armónica, con polarización lineal, de amplitud 0.5 mm y longitud de onda de 40 cm. Halle (a) la densidad lineal de masa, (b) la rapidez de las ondas transversales, (c) la frecuencia angular y el número de ciclos por segundo con que vibra un punto del medio, (d) la función de onda, (e) la

¹ Encyclopædia Britannica.

Robert Beyer, *Sounds of our times*, Ed. Springer-Verlag, Nueva York, 1999, pp. 275-276.

rapidez máxima de un punto de la cuerda, (f) la densidad volumétrica y la densidad lineal de energía, (g) la energía promedio en toda la cuerda, (h) el promedio del flujo de energía por unidad de tiempo a través de cualquier sección de la cuerda, (i) la potencia mínima de la fuente (el pianista) que produce las ondas.

Solución. El objetivo de este problema es fundamentalmente didáctico; en la realidad en una cuerda no se propagan ondas viajeras en un solo sentido, sino que debido a la reflexión en los extremos de la cuerda hay ondas viajeras en sentido opuesto y se presenta interferencia entre las ondas en ambos sentidos, dando lugar a ondas estacionarias que tienen una descripción diferente a la del presente ejemplo.

En una cuerda se presentan fuerzas recuperadoras de diferente origen. Una de ellas se debe a la tensión, las otras a la rigidez intrínseca de la cuerda, considerada como una barra rígida delgada, y cuantificadas por los módulos Y y G . Al excitar la cuerda se producen ondas debido al comportamiento de la cuerda como una cuerda tensa y como una barra rígida delgada, cada una con su velocidad característica. El sonido que escuchamos se debe primordialmente a la onda transversal de la cuerda tensa, con amplitud ξ_0 y con rapidez $v = \sqrt{T/\mu}$. Esta expresión de v es una buena aproximación, pues la rigidez intrínseca de la cuerda hace que la expresión sea mucho más compleja y que dependa de la frecuencia, esto es, que la cuerda sea dispersiva.

Los datos numéricos del problema son: $\rho_{\text{acero}} = 7.8 \text{ g/cm}^3 = 7800 \text{ kg/m}^3$, $T = 200 \text{ N}$, $r = \frac{1}{2} \text{ mm} = 5 \times 10^{-4} \text{ m}$, $L = 80 \text{ cm} = 0.80 \text{ m}$, $\xi_0 = 0.5 \text{ mm} = 5 \times 10^{-4} \text{ m}$, $\lambda = 40 \text{ cm} = 0.40 \text{ m}$.

$$(a) \quad \mu = \rho A = \pi r^2 = \pi(7800 \text{ kg/m}^3)(5 \times 10^{-4} \text{ m})^2 = 0.00613 \text{ kg/m}.$$

$$(b) \quad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{200 \text{ N}}{0.00613 \text{ kg/m}}} = 181 \text{ m/s}.$$

(c) La frecuencia angular es

$$\omega = kv = \frac{2\pi}{\lambda}v = \frac{2\pi}{0.4 \text{ m}} 181 \text{ m/s} = 2838 \text{ s}^{-1} \text{ o rad/s}.$$

El número de ciclos por segundo es

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{\lambda} = \frac{181 \text{ m/s}}{0.40 \text{ m}} = 452 \text{ Hz}.$$

Las unidades de ω son $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ o también s^{-1} , las de ν son Hz o s^{-1} ; un Hz equivale a un ciclo por segundo. *Es un error expresar en Hz a ω .*

(d) Escojamos al eje x coincidente con la cuerda estática. Como es transversal, entonces ξ es perpendicular al eje de propagación x . Como la polarización es lineal, ξ no cambia de dirección; definamos a esta dirección como el eje y . Como es armónica, el campo ξ se expresa con seno o coseno (longitud en m, tiempo en s),

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= \xi_0 \text{sen}(kx - \omega t)\mathbf{u}_y = \xi_0 \text{sen} \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\mathbf{u}_y \\ &= 5 \times 10^{-4} \text{sen} \frac{2\pi}{0.40}(x - 181t)\mathbf{u}_y. \end{aligned} \quad (6.7)$$

(e) El *vector* velocidad de un punto del medio, \mathbf{v}_p , es la derivada de la ecuación 6.7 respecto al tiempo,

$$\mathbf{v}_p = \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} = -\omega \xi_0 \cos(kx - \omega t)\mathbf{u}_y.$$

La rapidez es máxima cuando $\cos(kx - \omega t) = -1$, y se presenta cuando el punto pasa por la posición de equilibrio;

$$v_p|_{\text{máx}} = \left. \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} \right|_{\text{máx}} = \omega \xi_0 = (2838 \text{ s}^{-1})(5 \times 10^{-4} \text{ m}) = 1.42 \text{ m/s}.$$

(f) La densidad volumétrica promedio de energía, o número de joules por metro cúbico, es

$$\epsilon = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2 = \frac{1}{2}(7800 \text{ kg/m}^3)(2838/\text{s})^2(5 \times 10^{-4} \text{ m})^2 = 7854 \text{ J/m}^3.$$

La densidad lineal de energía, ϵ_l , o número de joules por cada metro lineal de cuerda, es la energía total de la cuerda dividida por su longitud L ,

$$\epsilon_l = \frac{E}{L} = \frac{\epsilon V}{L} = \frac{\epsilon AL}{L} = \epsilon A = \pi\epsilon r^2,$$

ecuación que es análoga a la que relaciona las densidades de masa lineal y volumétrica, $\mu = \rho A$. Reemplazando los valores numéricos obtenemos

$$\epsilon_l = \pi(7854 \text{ J/m}^3)(5 \times 10^{-4} \text{ m})^2 = 0.00617 \text{ J/m}.$$

(g) Mediante la densidad volumétrica de energía,

$$E = \epsilon V = \epsilon\pi r^2 L = \pi(7854 \text{ J/m}^3)(5 \times 10^{-4} \text{ m})^2(0.8 \text{ m}) = 0.00493 \text{ J};$$

o mediante la densidad lineal de energía,

$$E = \epsilon_l L = (0.00617 \text{ J/m})(0.8 \text{ m}) = 0.00493 \text{ J}.$$

(h) Suponemos que la cuerda no es disipativa, esto es, no hay conversión de energía ondulatoria en calor por fricción entre los átomos o moléculas del medio. Por conservación de la energía, la medida que un observador haga de la energía promedio que en un segundo pasa a través de una sección transversal de la cuerda no depende de la posición de esa sección; en la figura 5.4, p. 43, la energía promedio (no la energía instantánea) por unidad de tiempo que atraviesa la cara de la izquierda es la misma que la de la derecha. La energía promedio por unidad de tiempo es la potencia promedio,

$$P = IA = v\epsilon A = (181 \text{ m/s})(7854 \text{ J/m}^3)\pi(5 \times 10^{-4} \text{ m})^2 = 1.11 \text{ J/s} = 1.11 \text{ W}.$$

(i) Por conservación de la energía, la fuente (el pianista) debe tener como mínimo la misma potencia de las ondas que produce. Decimos como mínimo, porque la propia fuente y la cuerda disipan energía.

$$P_{\text{fuente}} = P_{\text{onda}} = 1.11 \text{ W}.$$

Ejemplo 6.2 Desde la sección izquierda de la cuerda compuesta de la figura 6.6 incide sobre la interfaz de separación una onda $\xi_i = \xi_{0i} \sin(\omega t - k_1 x)$, y se producen una onda reflejada $\xi_r = \xi_{0r} \sin(\omega t + k_1 x)$ y una onda transmitida $\xi_t = \xi_{0t} \sin(\omega t - k_2 x)$. (a) Compruebe que la potencia promedio incidente es igual a la suma de la potencia promedio reflejada y la potencia promedio transmitida. (b) R y T son los coeficientes de reflexión y transmisión para la amplitud, respectivamente. Los coeficientes de reflexión y transmisión para la potencia se conocen como **reflexancia**, \mathcal{R} , y **transmitancia**, \mathcal{T} . Halle, en términos de R y T , expresiones para \mathcal{R} y \mathcal{T} . (c) Si la onda incidente tiene una potencia de un milivatio (1 mW), y la densidad lineal de masa donde está la onda transmitida es cuatro veces la densidad donde está la onda incidente, halle la potencia reflejada y la potencia transmitida.

Solución. En las funciones ξ_i , ξ_r y ξ_t no hemos escrito ω_i ni ω_r ni ω_t sino ω , puesto que la condición de frontera de que la cuerda es continua en todo instante (no está rota en la interfaz) exige que la frecuencia con que vibra la sección izquierda de la interfaz sea igual a la frecuencia con que lo hace la sección derecha.

La frecuencia no cambia por reflexión ni por transmisión.

Por definición, el subíndice 1 se refiere al medio donde está la onda incidente, y el subíndice 2 donde está la onda transmitida.

(a) Como las ondas reflejada y transmitida provienen de la incidente, es obvio, por conservación de la energía, que la energía de la onda incidente debe ser igual a la suma de la energía de la onda reflejada y la transmitida,

$$E_i = E_r + E_t.$$

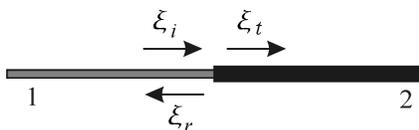


Figura 6.6 Reflexión y transmisión de ondas.

Esta igualdad se cumple cuando las energías se miden en el mismo intervalo de tiempo,

$$\frac{dE_i}{dt} = \frac{dE_r}{dt} + \frac{dE_t}{dt}.$$

Cada uno de los términos es la potencia respectiva,

$$P_i = P_r + P_t. \quad (6.8)$$

La ley de conservación de la energía asume así la forma de conservación de la potencia, no de la intensidad. Se puede comprobar que la intensidad se conserva, $I_i = I_r + I_t$, solo si $A_1 = A_2$.

Antes de comprobar la ecuación 6.8, hallemos una nueva expresión para la potencia,

$$P = IA = vEA = v\frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2A = \frac{1}{2}v(\rho A)\omega^2\xi_0^2 = \frac{1}{2}\sqrt{T/\mu}\mu\omega^2\xi_0^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\mu T}\omega^2\xi_0^2. \quad (6.9)$$

Apliquemos esta expresión en la ecuación 6.8, pero con un signo de interrogación sobre el signo igual, pues apenas vamos a comprobar que la igualdad se cumple:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\mu_1 T}\omega^2\xi_{0i}^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}\sqrt{\mu_1 T}\omega^2\xi_{0r}^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\mu_2 T}\omega^2\xi_{0t}^2.$$

Simplifiquemos,

$$\sqrt{\mu_1}\xi_{0i}^2 \stackrel{?}{=} \sqrt{\mu_1}\xi_{0r}^2 + \sqrt{\mu_2}\xi_{0t}^2.$$

Dividamos por $\sqrt{\mu_1}\xi_{0i}^2$,

$$1 \stackrel{?}{=} \left(\frac{\xi_{0r}}{\xi_{0i}}\right)^2 + \sqrt{\mu_{21}}\left(\frac{\xi_{0t}}{\xi_{0i}}\right)^2.$$

El primer paréntesis es el coeficiente de reflexión de la amplitud, R , y el segundo el de transmisión, T ,

$$1 \stackrel{?}{=} R^2 + \sqrt{\mu_{21}}T^2.$$

Según las ecuaciones 5.13,

$$1 \stackrel{?}{=} \left(\frac{1 - \sqrt{\mu_{21}}}{1 + \sqrt{\mu_{21}}}\right)^2 + \sqrt{\mu_{21}}\left(\frac{2}{1 + \sqrt{\mu_{21}}}\right)^2.$$

El estudiante debe desarrollar el álgebra del miembro derecho y demostrar que se reduce a 1. Así queda comprobado que se cumple la ecuación 6.8 y podemos quitar la interrogación del signo igual.

(b) Según la definición de \mathcal{R} y \mathcal{T} , $\mathcal{R} = P_r/P_i$ y $\mathcal{T} = P_t/P_i$. Apliquemos la ecuación 6.9,

$$\mathcal{R} = \frac{P_r}{P_i} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\mu_1 T}\omega^2\xi_{0r}^2}{\frac{1}{2}\sqrt{\mu_1 T}\omega^2\xi_{0i}^2} = \left(\frac{\xi_{0r}}{\xi_{0i}}\right)^2 = R^2,$$

$$\mathcal{T} = \frac{P_t}{P_i} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\mu_2 T}\omega^2\xi_{0t}^2}{\frac{1}{2}\sqrt{\mu_1 T}\omega^2\xi_{0i}^2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\left(\frac{\xi_{0t}}{\xi_{0i}}\right)^2 = \sqrt{\mu_{21}}T^2.$$

Para la reflexión y la transmisión, la ley de conservación de la energía se puede escribir como $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$.

(c) Según la información del ejemplo, $\mu_{21} = 4$. Apliquemos el literal anterior,

$$P_r = \mathcal{R}P_i = R^2P_i = \left(\frac{1 - \sqrt{\mu_{21}}}{1 + \sqrt{\mu_{21}}}\right)^2 P_i = \left(\frac{1 - \sqrt{4}}{1 + \sqrt{4}}\right)^2 P_i = \frac{1}{9}P_i = \frac{1}{9} \text{ mW}.$$

O sea que incide un milivatio y se refleja un noveno de milivatio; como la energía se conserva, se transmiten entonces ocho novenos de milivatio,

$$P_t = P_i - P_r = 1 \text{ mW} - \frac{1}{9} \text{ mW} = \frac{8}{9} \text{ mW}.$$

En porcentaje,

$$\% \text{ reflejado} = 100\% \frac{P_r}{P_i} = 100\% \frac{\frac{1}{9} \text{ mW}}{1 \text{ mW}} = 11.1\%,$$

$$\% \text{ transmitido} = 100\% \frac{P_t}{P_i} = 100\% \frac{\frac{8}{9} \text{ mW}}{1 \text{ mW}} = 88.9\%.$$

Ejemplo 6.3 Alambres de cobre y de aluminio de 1 mm de diámetro se unen formando una cuerda larga (figura 6.7). En el cobre está la onda incidente polarizada linealmente en y , con una frecuencia de 220 Hz (nota la) y una amplitud de 1 mm. La tensión es de 100 N. (La densidad del cobre es 8.9 g/cm^3 , la del aluminio es 2.7 g/cm^3). Halle (a) los coeficientes de reflexión y transmisión para la amplitud, (b) la amplitud de las ondas reflejada y refractada (o transmitida), (c) la rapidez de las ondas en el acero y en el cobre, (d) la longitud de onda en ambas secciones de la cuerda, (e) las ecuaciones de las ondas incidente, reflejada y refractada, (f) la intensidad y la potencia de estas ondas.

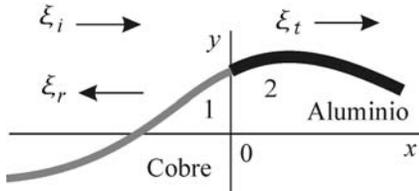


Figura 6.7 Reflexión y transmisión en una cuerda.

Solución. Los datos del ejemplo son: $r_1 = r_2 = r = 0.5 \text{ mm} = 5 \times 10^{-4} \text{ m}$, $\nu = 220 \text{ Hz}$; el cobre es el medio 1 por estar en él la onda incidente, $\rho_{\text{Cu}} = \rho_1$ y $\rho_{\text{Al}} = \rho_2$; $\xi_{0i} = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$, $T = 100 \text{ N}$.

(a) Hallemos primero la densidad lineal relativa,

$$\mu_{21} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\rho_2 A_2}{\rho_1 A_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{2.7 \text{ g/cm}^3}{8.9 \text{ g/cm}^3} = 0.303.$$

Reemplacemos en las ecuaciones 5.13,

$$R = \frac{1 - \sqrt{0.303}}{1 + \sqrt{0.303}} = 0.29, \quad T = \frac{2}{1 + \sqrt{0.303}} = 1.29.$$

(b) Despejemos las amplitudes de las ecuaciones 5.13,

$$\xi_{0r} = R\xi_{0i} = 0.29 \times 10^{-3} \text{ m},$$

$$\xi_{0t} = T\xi_{0i} = 1.29 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

Note que, paradójicamente, la amplitud transmitida es mayor que la incidente.

(c) Las ondas transversales del ejemplo se deben al comportamiento del cobre y del aluminio como una cuerda, no como una barra; por esto apliquemos la ecuación 5.3, p. 42, y no la ecuación 3.16, p. 23,

$$v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{T}{\pi\rho_1 r^2}} = \sqrt{\frac{100 \text{ N}}{\pi(8900 \text{ kg/m}^3)(5 \times 10^{-4} \text{ m})^2}} = 119.6 \text{ m/s},$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}} = \sqrt{\frac{T}{\pi\rho_2 r^2}} = \sqrt{\frac{100 \text{ N}}{\pi(2700 \text{ kg/m}^3)(5 \times 10^{-4} \text{ m})^2}} = 217.2 \text{ m/s}.$$

Estas cantidades son mucho menores que la rapidez de otras ondas que también transmiten el cobre y el aluminio, ecuación 3.16, p. 23, que es mayor de 3000 m/s.

(d) La frecuencia no varía con los cambios de medio, pero la velocidad sí ya que depende de las propiedades del medio,

$$\lambda_1 = \frac{v_1}{\nu} = \frac{119.6}{220} \approx 0.544 \text{ m},$$

$$\lambda_2 = \frac{v_2}{\nu} = \frac{217.2}{220} \approx 0.987 \text{ m}.$$

(e) Para las tres ondas utilicemos la función de onda $\xi = \xi_0 \sin 2\pi(t/P \pm x/\lambda)$, longitud en m y tiempo en s,

$$\xi_i(x, t) = 10^{-3} \sin 2\pi \left(220t - \frac{x}{0.544} \right),$$

$$\xi_r(x, t) = 0.29 \times 10^{-3} \sin 2\pi \left(220t + \frac{x}{0.544} \right),$$

$$\xi_t(x, t) = 1.29 \times 10^{-3} \sin 2\pi \left(220t - \frac{x}{0.987} \right).$$

Como las ondas incidente y transmitida se propagan hacia la derecha, se ha escrito el signo $(-)$ dentro del paréntesis de sus respectivas funciones; la onda reflejada se propaga hacia la izquierda, y se debe escribir el signo $(+)$.

(f) Según la ecuación 6.5,

$$I_i = \frac{1}{2} v_1 \rho_1 (2\pi\nu)^2 \xi_{0i}^2 = \frac{1}{2} (119.6 \text{ m/s}) (8900 \text{ kg/m}^3) (440\pi \text{ s}^{-1})^2 (10^{-3} \text{ m})^2 = 1.017 \times 10^6 \text{ W/m}^2,$$

$$I_r = \frac{1}{2} v_1 \rho_1 (2\pi\nu)^2 \xi_{0r}^2 = \frac{1}{2} (119.6 \text{ m/s}) (8900 \text{ kg/m}^3) (440\pi \text{ s}^{-1})^2 (0.29 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 0.085 \times 10^6 \text{ W/m}^2,$$

$$I_t = \frac{1}{2} v_1 \rho_2 (2\pi\nu)^2 \xi_{0t}^2 = \frac{1}{2} (217.2 \text{ m/s}) (2700 \text{ kg/m}^3) (440\pi \text{ s}^{-1})^2 (1.29 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 0.932 \times 10^6 \text{ W/m}^2.$$

El área transversal es $A = \pi r^2 = \pi(5 \times 10^{-4})^2 = 7.85 \times 10^{-7} \text{ m}^2$. La potencia de las ondas es

$$P_i = I_i A = (1.017 \times 10^6 \text{ W/m}^2)(7.85 \times 10^{-7} \text{ m}^2) = 0.798 \text{ W},$$

$$P_r = I_r A = (0.085 \times 10^6 \text{ W/m}^2)(7.85 \times 10^{-7} \text{ m}^2) = 0.067 \text{ W},$$

$$P_t = I_t A = (0.932 \times 10^6 \text{ W/m}^2)(7.85 \times 10^{-7} \text{ m}^2) = 0.731 \text{ W}.$$

Ejemplo 6.4 Un guitarrista pulsa una cuerda de su guitarra y le cede una energía E . La tensión de la cuerda es T , la densidad lineal de masa es μ y la longitud vibrante de la cuerda es L (figura 6.8). La longitud se mide entre el puente y el lugar de contacto de la cuerda con los trastes. La energía que la cuerda le transfiere a la caja de la guitarra se presenta casi únicamente en el puente (igual pasa en el violín y el piano), y podemos suponer que el coeficiente de reflexión en el traste es -1 ; en el puente es R . Sea $t_{1/2}$ el tiempo que tarda en transferirse la mitad de E a la caja.

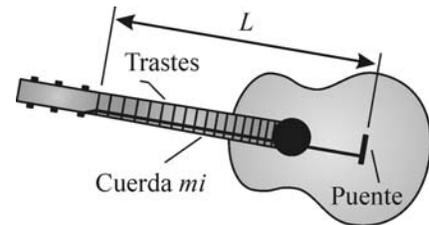


Figura 6.8

Los siguientes literales resuélvalos primero literalmente y evalúelos luego para la cuerda más gruesa de la guitarra que se afina a una frecuencia de 82.4 Hz (nota *mi*, figura 6.8), $T = 174 \text{ N}$, $\mu = 5.63 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$, $L = 0.67 \text{ m}$. Se quiere que en 2 s la cuerda entregue la mitad de su energía a la caja de resonancia de la guitarra. Halle (a) la rapidez de las ondas en la cuerda, (b) el tiempo entre dos reflexiones consecutivas en el puente, (c) R , (d) el número de reflexiones N que sufre la onda en $t_{1/2}$, (e) qué fracción de la amplitud inicial tiene la onda al cabo de $t_{1/2}$.

Solución

(a) La rapidez es

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{174 \text{ N}}{5.63 \times 10^{-3} \text{ kg/m}}} = 175.8 \text{ m/s}.$$

(b) La onda debe recorrer desde el puente hasta el traste y de regreso al puente una distancia $2L$ con rapidez v ; el tiempo es

$$t = \frac{2L}{\sqrt{T/\mu}} = \frac{2(0.67 \text{ m})}{175.8 \text{ m/s}} = 7.62 \times 10^{-3} \text{ s} = 7.63 \text{ ms}. \quad (6.10)$$

(c) Mirando las expresiones que involucran la energía (E , I , P) vemos que son proporcionales a ξ_0^2 . La energía total de la onda debe serlo también,

$$E = K \xi_{0i}^2. \quad (6.11)$$

K es un parámetro que depende de características de la onda y del medio, pero veremos que no necesitamos conocer su expresión.

Cuando la onda que llega al traste con amplitud ξ_{0i} se refleja, la amplitud cambia a $\xi_{0r} = R \xi_{0i}$. Esta será la nueva amplitud de la onda incidente cuando regrese después de la reflexión en el puente. Después de N reflexiones en el puente la amplitud es

$$\xi_{0r} = R^N \xi_{0i},$$

y la energía que queda en la cuerda es

$$E = K(R^N \xi_{0i})^2 = KR^{2N} \xi_{0i}^2. \quad (6.12)$$

Luego de dividir esta ecuación por la ecuación 6.11 e igualar a 1/2 obtenemos N cuando la energía se ha reducido a la mitad,

$$\frac{KR^{2N} \xi_{0i}^2}{K \xi_{0i}^2} = R^{2N} = \frac{1}{2}.$$

Despejemos,

$$N = -\frac{1}{2} \frac{\log 2}{\log R}. \quad (6.13)$$

Multiplicando por el tiempo entre dos reflexiones sucesivas (ecuación 6.10) obtenemos una expresión para $t_{1/2}$,

$$t_{1/2} = \frac{-L \log 2}{\sqrt{T/\mu} \log R}.$$

Despejemos el logaritmo del coeficiente de reflexión y reemplacemos $t_{1/2} = 2$ s,

$$\log R = \frac{-L \log 2}{\sqrt{T/\mu} t_{1/2}} = \frac{(-0.67 \text{ m}) \log 2}{(175.8 \text{ m/s})(2 \text{ s})} = -5.74 \times 10^{-4}.$$

Con el antilogaritmo obtenemos

$$R = 0.9987.$$

(d) Reemplacemos en la ecuación 6.13 el coeficiente de reflexión para la amplitud,

$$N = -\frac{1}{2} \frac{\log 2}{\log 0.9987} = 262.4.$$

Entre las reflexiones número 262 y 263 la energía de la cuerda se reduce a la mitad.

(e) Como la energía depende del cuadrado de la amplitud, la relación entre amplitudes es la raíz cuadrada de la relación entre energías; la fracción perdida es $\sqrt{1/2} = 0.707$.

El sonido que escuchamos de un instrumento de cuerda como la guitarra o el violín procede casi enteramente del cuerpo o caja de resonancia del instrumento, no de la cuerda. El área de la cuerda en contacto con el aire es 0.0024 m^2 y de la caja de la guitarra es 0.36 m^2 ; esto quiere decir que el área de la guitarra es 150 veces mayor que el de la cuerda. O sea que, comparada con la caja, la cuerda tiene muy baja capacidad de perturbar el aire. Si la cuerda no transmitiera energía a la caja ($R = 1$), escucharíamos un sonido muy débil durante largo tiempo, directamente de la cuerda a nuestros oídos. Si R fuera cero, en la primera llegada de la onda a la interfaz toda la energía pasaría de la cuerda a la caja, y escucharíamos un sonido muy fuerte pero muy corto, desde la caja a nuestros oídos. Ambos extremos son indeseables y el fabricante de instrumentos debe buscar un punto intermedio agradable para el oyente.

Ejemplo 6.5 Dos ondas sonoras de igual frecuencia tienen niveles de intensidad que difieren en 30 dB. Halle la relación entre sus intensidades y amplitudes de desplazamiento.

Solución. Para una onda, $\beta_1 = 10 \log I_1/I_0$; para la otra, $\beta_2 = 10 \log I_2/I_0$. Según la información del ejemplo, $\Delta B = 30 = 10(\log I_1/I_0 - \log I_2/I_0) = 10 \log I_1/I_2$. Por la definición del logaritmo de un número en base 10,

$$I_1/I_2 = 10^{30/10} = 10^3 = 1000.$$

Apliquemos la ecuación 6.5,

$$1000 = \frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{1}{2} v \rho \omega^2 \xi_{01}^2}{\frac{1}{2} v \rho \omega^2 \xi_{02}^2} = \frac{\xi_{01}^2}{\xi_{02}^2}.$$

Despejemos la relación pedida,

$$\xi_{01}/\xi_{02} = \sqrt{1000} = 31.6.$$

Ejemplo 6.6 Una persona hablando normalmente produce un nivel de intensidad de 65 dB a 1 m de distancia. La rapidez del sonido es 340 m/s, la densidad del aire (depende de la altura) 1.2 kg/m³ y la frecuencia promedio emitida 300 Hz. (a) Calcule la energía promedio que la persona emite en sonido cada segundo. (b) Discuta las aproximaciones hechas en la solución del primer literal. (c) Si la persona está dentro de un salón de dimensiones, en metros, 6 × 4 × 3, y la intensidad fuera uniforme e igual al valor a 1 m de la fuente, calcule la energía total que habría dentro del salón. (d) ¿Cada segundo, cuántos joules son absorbidos por los objetos dentro del salón, junto con los joules que salen por puertas, ventanas y por transmisión a través del techo, el suelo y las paredes? (e) Halle la amplitud de las vibraciones de un punto del medio (aire) debido a las ondas.

Solución

(a) Al pedirnos la energía por unidad de tiempo lo que nos están pidiendo es la potencia, y para esto debemos averiguar primero la intensidad. Según la definición del logaritmo de un número y la ecuación 6.6,

$$I = I_0 10^{\frac{\beta}{10}} = (10^{-12} \text{ W/m}^2) 10^{\frac{65}{10}} = 10^{-5.5} \text{ W/m}^2.$$

Pero el exponente de una respuesta nunca se expresa con decimales, sino con un entero, y aunque el anterior valor sea correcto, es indebido dejarlo así;

$$I(1 \text{ m}) = 10^{0.5} \times 10^{-6} \text{ W/m}^2 = 3.16 \times 10^{-6} \text{ W/m}^2 = 3.16 \mu\text{W/m}^2.$$

Los puntos a 1 m de la fuente forman una esfera de 1 m de radio. La potencia es entonces la intensidad a 1 m por el área de esa esfera,

$$P = AI = 4\pi r^2 I = 4\pi (1 \text{ m})^2 (3.16 \mu\text{W/m}^2) = 0.04 \text{ mW}.$$

(b) La figura 6.9 representa, mediante esferas concéntricas de radio r , los frentes de onda emitidos. El ángulo θ define un cono cuyo eje es perpendicular a la boca.

Hemos supuesto que la intensidad solo depende de r ; en la realidad, la intensidad sonora es máxima directamente en frente de la boca, esto es, en $\theta = 0$, y mínima detrás de la cabeza, en $\theta = 180^\circ$. Cuando dentro de un recinto normal hay una fuente sonora, la intensidad en un punto dentro de él se debe a las ondas que de la fuente llegan directamente a ese punto, y de las ondas reflejadas. Aquí no hemos tenido en cuenta a estas últimas, aunque pueden contribuir con un 50% de la intensidad. Las ondas reflejadas hacen que la intensidad se aparte mucho de una disminución como $1/r^2$ y que sea bastante uniforme. Además, cuando alguien habla, no solo emite sonido por la boca, sino que la cabeza y el tronco también son fuentes sonoras importantes y la persona está lejos de ser una fuente puntual, lo que lleva a que las ondas no sean esféricas cerca de la fuente.

(c) Puesto que conocemos el volumen del salón, para conocer la energía debemos calcular primero la energía por unidad de volumen, o sea la densidad de energía, ϵ , para multiplicarla por el volumen total, V ,

$$E = \epsilon V = \frac{I}{v} V = \frac{3.16 \mu\text{W/m}^2}{340 \text{ m/s}} (6 \text{ m})(4 \text{ m})(3 \text{ m}) = 0.7 \mu\text{J}.$$

(d) La energía en el salón es constante; la emisión de la fuente no está provocando un aumento de ella, ni las fugas de energía están produciendo una disminución. Concluimos entonces que cada segundo la energía emitida por la fuente iguala a la energía sonora que se pierde por absorción y por transmisión fuera del salón; según (a) es

$$\text{Ritmo de pérdida de energía del salón} = 0.04 \text{ mW}.$$

Una analogía puede ser útil: en un tanque que contenga una cantidad fija de agua, la cantidad de agua que sale de él, por segundo, iguala a la cantidad de agua que entra. En nuestro ejemplo, en lugar de agua se piensa en energía.

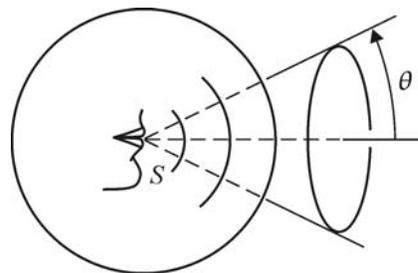


Figura 6.9

(e) De la ecuación 6.5,

$$\xi_0 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2I}{v\rho}} = \frac{1}{2\pi \times 300 \text{ s}^{-1}} \sqrt{\frac{2(3.16 \times 10^{-6} \text{ W/m}^2)}{(340 \text{ m/s})(1.2 \text{ kg/m}^3)}} = 6.6 \times 10^{-8} \text{ m}.$$

Hemos supuesto que la frecuencia emitida es de 300 Hz. En realidad, la composición de frecuencias de una voz —su análisis de Fourier— es muy compleja y es característica de cada individuo.

Resumen

La potencia instantánea es la rapidez con que fluye la energía de una onda; por lo tanto, sus unidades son J/s o W. La intensidad es tal rapidez por unidad de área, donde el área es perpendicular a la dirección de propagación; sus unidades son J/s · m² o W/m². La energía siempre se propaga en el sentido de avance de la onda, diferente a ξ que dependiendo del tiempo puede estar en sentido opuesto.

La escala logarítmica nivel de intensidad β es útil para describir la sensibilidad del oído, debido al alto rango en que detectamos intensidades: la intensidad máxima dividida por la intensidad mínima que detectamos es del orden de 10^{13} . Además, nuestra percepción del sonido no es lineal, queriendo decir con esto que si multiplicamos por un factor n una intensidad, nuestra apreciación del volumen no crece por el mismo factor.

Hasta poco más de 3 kHz el cerebro se vale del desfase en el sonido de una fuente en nuestros dos oídos para ubicar la posición de la fuente. Por encima de esa frecuencia la cabeza bloquea eficazmente el sonido que llega a un oído, causando una intensidad menor en él que en el oído más cercano a la fuente; con la diferencia de intensidades el cerebro ubica la fuente. Por debajo de los 3 kHz la intensidad en ambos oídos es casi igual, debido a que mediante el fenómeno de la difracción el sonido da la vuelta a la cabeza y llega al oído más alejado de la fuente, cosa que no ocurre para frecuencias más altas.

Módulo 7

Ondas en tres dimensiones

Contenido

- 7.1 Ondas en varias dimensiones
 - 7.1.1 Ondas planas
 - 7.1.2 Ondas esféricas
- 7.2 El principio de superposición y la ecuación de onda

Objetivos

1. Definir qué es un frente de onda.
2. Clasificar las ondas según la forma del frente de onda.
3. Obtener, para una onda esférica, la dependencia de la amplitud y la intensidad con la distancia a la fuente.
4. Plantear el principio de superposición para las ondas de desplazamiento y su relación con la ecuación de onda.

Preguntas básicas

1. ¿Cómo se expresa una onda que no se propague paralela a un eje cartesiano?
2. ¿Cuál es la ecuación de onda para una onda cuya dirección de propagación tiene componentes no nulas en los tres ejes cartesianos?
3. ¿En qué se diferencia una onda plana de una esférica?
4. ¿Cuándo podemos afirmar que el campo resultante de varios campos es la suma de ellos?

Introducción

Es común que una onda se propague en más de una dimensión: al hablar el sonido se propaga en todas las direcciones, igual que las perturbaciones en el agua producidas por una piedra que se arroje o la luz solar o las transmisiones radiales o de televisión. En este contexto pluridimensional es indispensable introducir el concepto esencial de *frente de onda*, lo que a su vez permite la clasificación de las ondas según la forma del frente. Centraremos la atención en las ondas planas y en las esféricas. Definimos el vector de onda, y por último mostramos la conexión fundamental existente entre el principio de superposición y la ecuación *lineal* de onda.



La onda se propaga en varias direcciones a partir de la fuente. En la figura los frentes de onda son circunferencias concéntricas cuyos puntos oscilan en fase.

7.1 Ondas en varias dimensiones

Definimos un **frente de onda** como la superficie alcanzada por una onda en el mismo instante o, más técnicamente, como la superficie conformada por aquellos puntos en los que el campo está en fase. Ambas definiciones son equivalentes, ya que el hecho de que la onda llegue en el mismo instante implica que tengan la misma fase. Una onda es plana si su frente de onda es plano; es esférica si el frente es esférico.

7.1.1 Ondas planas

La ecuación $x = b$ tiene diferentes significados: en una dimensión, representa la posición de un punto; en el plano representa una recta; en el espacio tridimensional representa un plano. Cuando decimos que $\xi(2\text{ m}, t) = 1\text{ mm}$ estamos afirmando que el (los) punto(s) con posición de equilibrio $x = 2\text{ m}$ está(n) a 1 mm de esa posición en el instante t . En la figura 7.1 ilustramos, con una onda longitudinal que se propaga hacia la derecha, dicha afirmación interpretada en (a) una dimensión, (b) dos dimensiones y (c) tres dimensiones (¿cómo cambiarían estas figuras para una onda transversal?).

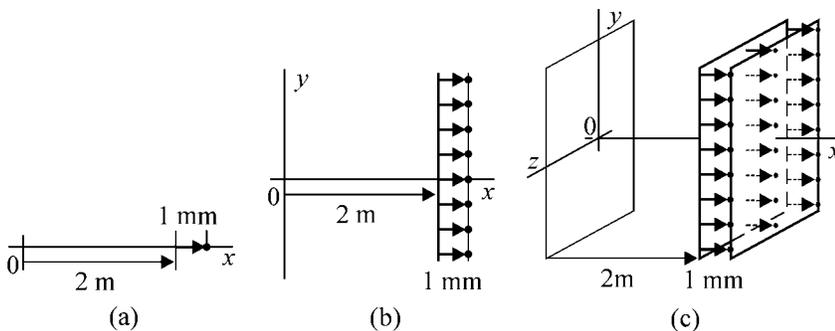


Figura 7.1 La misma función de onda interpretada en varias dimensiones.

La onda de la figura 7.1c es una onda plana, representada por los rectángulos a la derecha; cuando la onda llega a un punto del rectángulo, llega a todos los demás puntos en el mismo instante. A una onda plana le corresponden frentes de onda planos *infinitos*, aunque en la figura solo se dibuje una porción finita (un rectángulo) del frente de onda. La ecuación es

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \xi(x - vt) = \xi_0 \text{sen}(kx - \omega t). \quad (7.1)$$

Vemos que el miembro de la izquierda contiene el vector posición \mathbf{r} [$\mathbf{r} = \mathbf{u}_x x + \mathbf{u}_y y + \mathbf{u}_z z = (x, y, z)$]; los vectores unitarios en las direcciones $+x$, $+y$ y $+z$ son, respectivamente, \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y y \mathbf{u}_z , mientras que el de la derecha solo contiene x ; no aparecen y ni z : quiere decir que aunque las coordenadas (x, y, z) del punto donde calculamos el campo sean todas diferentes de cero, el campo solo depende de x , no es que y y z sean cero. En todos los puntos del plano especificado por el valor de x el campo es idéntico, están en fase. El valor de x es la distancia del plano en la que está el punto donde se calcula el campo, al origen.

En la figura 7.2 el frente de onda plano no es perpendicular a ningún eje cartesiano. La dirección de propagación la da el vector unitario \mathbf{u} perpendicular al frente, o sea que cuando la onda plana avanza paralela al eje

x , $\mathbf{u} = \mathbf{u}_x$. En la función de onda (ecuación 7.1) en lugar de x escribimos la distancia del plano al origen, que es $r \cos \alpha = \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}$,

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \xi(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - vt) = \xi_0 \text{sen}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t). \quad (7.2)$$

Definimos el **vector de onda** como

$$\mathbf{k} \equiv \mathbf{u}k.$$

Por definición, \mathbf{k} tiene la dirección de \mathbf{u} , que es la dirección de propagación. La ecuación 7.2 se reescribe como

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \xi(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - vt) = \xi_0 \text{sen}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = \xi_0 \text{sen}(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t). \quad (7.3)$$

Las componentes cartesianas de \mathbf{k} son k_x , k_y y k_z ; su magnitud es

$$k = \frac{\omega}{v} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}. \quad (7.4)$$

La ecuación de onda unidimensional (ecuación 2.6, p. 16), en tres dimensiones, cambia a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} &= v^2 \left[\frac{\partial^2 \xi(\mathbf{r}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi(\mathbf{r}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi(\mathbf{r}, t)}{\partial z^2} \right] \\ &= v^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \xi(\mathbf{r}, t) \\ &= v^2 \nabla^2 \xi(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

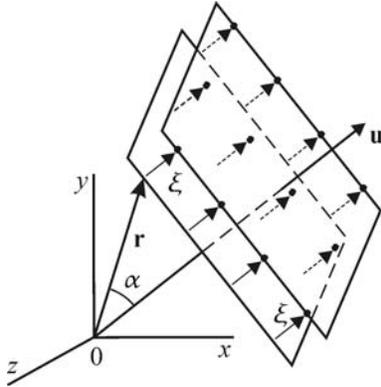


Figura 7.2 Onda plana longitudinal.

7.1.2 Ondas esféricas

Cuando una persona habla y el sonido que produce alcanza un punto a una distancia r al frente de su boca, también habrá alcanzado todos los demás puntos a la misma distancia debido a que el aire en la vecindad de la persona es isótropo. La superficie a la que llega el sonido en un mismo instante es una esfera concéntrica con la fuente (esfera de radio r en la figura 7.3), y decimos que la onda es esférica a causa de la forma del frente de onda. *Una fuente puntual, en un medio isótropo, emite ondas esféricas.*

Trataremos la boca como si fuera una fuente puntual. Los distintos elementos de volumen en la superficie del frente de onda oscilan, en fase entre sí, alrededor de su posición de equilibrio (la misma esfera de radio r). La circunferencia de radio mayor representa la esfera cuando $\xi = \xi_0$, la de radio menor cuando $\xi = -\xi_0$; ambas esferas están separadas por un tiempo de medio período. Esto es solo una aproximación, ya que la forma como cambia la amplitud de una onda esférica con la distancia a la fuente es un asunto más complejo. La vibración de los elementos en el mismo frente de onda se puede imaginar como una esfera pulsante entre los límites señalados. Como el sonido es una onda longitudinal, ξ es radial. Para una onda transversal esférica, ξ es tangencial a la esfera; este es el caso de la luz procedente de una fuente puntual, solo que en lugar de desplazamiento ξ se trata es de campos eléctrico y magnético.

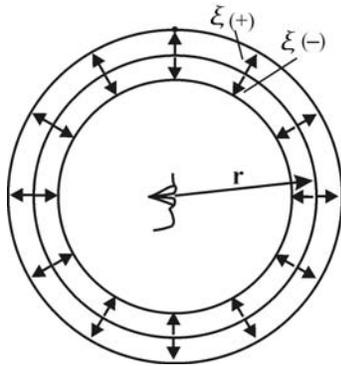


Figura 7.3 Onda esférica longitudinal.

La amplitud de una onda plana es constante, pero la amplitud y la intensidad de una onda esférica deben disminuir a mayor distancia a la fuente, como se deduce con base en consideraciones energéticas: en la figura 7.4 una fuente puntual F emite en ondas una energía promedio por unidad de tiempo P_F constante. Por conservación de la energía, esta potencia debe ser igual a la potencia promedio P_{pro} que pasa a través de *cualquier superficie*

cerrada que contenga la fuente. Imaginemos dos superficies concéntricas con la fuente. P_{pro} a través de la esfera menor debe ser igual que en la esfera mayor. Si no fuera así no se conservaría la energía, o habría una fuente adicional de ondas entre ambas esferas, o pérdida de energía entre ellas; descartando estas alternativas escribimos

$$P_F = P_{\text{pro}} = IA,$$

donde I es la intensidad a una distancia r de la fuente y A es el área de una esfera de radio r ;

$$P_F = I(r)(4\pi r^2).$$

Despejemos,

$$I(r) = P_F/4\pi r^2. \tag{7.5}$$

Esta ecuación nos dice que la intensidad de una onda esférica es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente, y la constante de proporcionalidad es $P_F/4\pi$. Lejos de la fuente la onda esférica se puede considerar localmente plana, y en una onda plana y armónica $I = vE = \frac{1}{2}v\rho\omega^2\xi_0^2$. Igualemos esta ecuación a la ecuación 7.5,

$$\frac{P_F}{4\pi r^2} = \frac{1}{2}v\rho\omega^2\xi_0^2.$$

Despejemos la amplitud de la onda de desplazamiento,

$$\xi_0 = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{P_F}{2\pi v\rho\omega^2}}.$$

Vemos que alejados de una fuente de ondas esféricas la amplitud y la distancia a la fuente son inversamente proporcionales; la constante de proporcionalidad es $\sqrt{P_F/(2\pi v\rho\omega^2)}$.

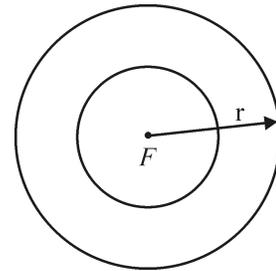


Figura 7.4 Los frentes de onda debidos a una fuente puntual en un medio homogéneo y en un medio isótropo son esféricos.

Ejemplo 7.1 Un observador está a una distancia D de una fuente puntual que emite ondas esféricas. Cuando se acerca 50 m a la fuente la intensidad se duplica. Halle D .

Solución. Según los datos del problema, $I(D - 50) = 2I(D)$. Sea P la potencia de la fuente. La anterior ecuación es, según la ecuación 7.5,

$$\frac{P_F}{4\pi(D - 50)^2} = 2 \frac{P_F}{4\pi D^2}.$$

Despejando, obtenemos $D = 170.7$ m.

7.2 El principio de superposición y la ecuación de onda

Supongamos que tenemos N funciones de onda que cumplen la ecuación de onda,

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^2 \xi_N}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi_N}{\partial x^2}.$$

Después de sumar estas ecuaciones, factorizar y agrupar, obtenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N) = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N).$$

Sea ξ la función resultante de la suma de las N funciones. La anterior ecuación se escribe

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Acabamos de demostrar que si N funciones son solución de la ecuación de onda, la suma de ellas también lo es. Esto se cumple porque la ecuación es lineal. Formulemos, entonces, el *principio de superposición*:

El campo resultante de la presencia de N campos ξ_i que cumplan la ecuación de onda es $\xi = \sum_{i=1}^N \xi_i$. El campo resultante también cumple la ecuación de onda y representa, por lo tanto, una situación física posible.

Cuando las deformaciones son muy altas como en una onda de choque o cerca de una explosión, la ecuación de onda no es lineal y no se cumple el principio de superposición. La presión y la densidad también cumplen el principio de superposición para bajas deformaciones.

Resumen

El concepto de frente de onda está estrechamente ligado al de fase; estos son dos de los conceptos más básicos de la física. Las ondas más importantes son las ondas planas y las esféricas; en aquellas la amplitud y las variables energéticas promedio —potencia, intensidad, densidad de energía— no dependen de la posición, mientras que en las esféricas sí, pues disminuyen con la distancia a la fuente: lejos de esta, la amplitud de una onda esférica es inversamente proporcional a la distancia, mientras que la intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Cuando la ecuación de onda es lineal se aplica el principio de superposición: los distintos sonidos presentes en una sala se propagan como si los demás no existieran; el cambio de presión en un punto debido a un sonido no se altera porque en ese punto halla otros sonidos y el cambio resultante es la suma de los cambios individuales: $\Delta p = \sum_{i=1}^N \Delta p_i$. Cuando los sonidos son muy intensos la ecuación de onda no es lineal y lo dicho en este párrafo no se aplica.

Módulo 8

Ondas estacionarias

Contenido

- 8.1 Ondas estacionarias en una cuerda semiinfinita
- 8.2 Ondas estacionarias en una cuerda finita
- 8.3 Ondas estacionarias y condiciones de frontera

Objetivos

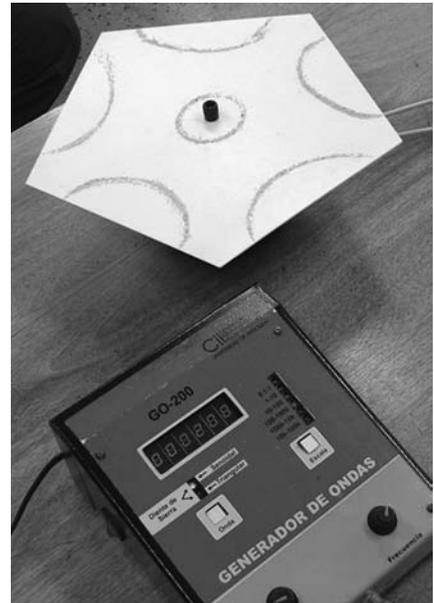
1. Estudiar la interferencia de dos ondas de igual frecuencia pero con sentidos opuestos de propagación.
2. Determinar los puntos de interferencia constructiva y destructiva de las dos ondas.
3. Resaltar que las frecuencias propias de un sistema dependen de las características geométricas y físicas del sistema.

Preguntas básicas

1. ¿Qué ocurre cuando hay más de una onda presente?
2. ¿En qué se diferencia una onda viajera de una estacionaria?
3. ¿Qué importancia tienen las dimensiones de un sistema respecto a las frecuencias con que puede vibrar?
4. ¿Cómo cambian las frecuencias naturales de un sistema cuando cambian sus propiedades físicas?
5. ¿Qué son un sobretono y un armónico?

Introducción

En una onda viajera un valor del campo se propaga indefinidamente en una dirección. Por ejemplo, una ola de un metro ($\xi = 1$ m) de altura que recorra el mar, dentro de nuestra idealización de las ondas, pasó o pasará por cualquier punto en la superficie del mar. Pero realmente en algún lugar se termina el medio en que avanza la onda, ya que no hay medios infinitos, y se produce una onda reflejada que interfiere con la onda que incide. El hecho de que el espacio en que se propaga una onda sea finito origina hechos muy notables, como el que el sistema no pueda vibrar, *libremente*, con cualquier frecuencia o longitud de onda. El sistema, una vez excitado, vibra con una o varias frecuencias de un conjunto predeterminado. Este hecho es esencial para entender un incontable número de fenómenos naturales, que van desde la música hasta la física de un átomo.



Con un generador de ondas se excitan ondas desde el centro de una placa pentagonal. Las ondas que recorren la placa dan origen a una *onda estacionaria*, presentándose *líneas nodales* donde la interferencia es destructiva, como lo revela la arena que originalmente se esparce de manera uniforme sobre la placa y que luego se acumula en tales líneas.

8.1 Ondas estacionarias en una cuerda semiinfinita

Las ondas estacionarias se producen por la interferencia de dos ondas viajeras de igual frecuencia pero con sentido opuesto de propagación. En la figura 8.1 una onda en una cuerda semiinfinita incide en un extremo fijo en una pared, donde se refleja e interfiere con la onda incidente.

Extremo fijo en el origen quiere decir $\xi(0, t) = 0$, lo que es una idealización, puesto que en la realidad el material donde termina la cuerda no es indeformable y por rígido que sea experimenta una pequeña deformación bajo la acción de la fuerza que le ejerce la cuerda; la cuerda hace trabajo sobre la pared y le cede parte de su energía. Estrictamente, no existe una cuerda con extremo fijo. Por la ley de acción-reacción, la pared le ejerce una fuerza a la cuerda haciendo que en la interfaz la onda reflejada tenga un campo de signo opuesto a la onda incidente, esto es, que estén en contrafase.

La expresión para la onda incidente es

$$\xi_i = \xi_{0i} \text{sen}(\omega t + kx); \tag{8.1}$$

para la onda reflejada es

$$\xi_r = \xi_{0r} \text{sen}(\omega t - kx).$$

El coeficiente de reflexión es -1 (literal 3 de la p. 46), y $\xi_{0r} = -\xi_{0i}$,

$$\xi_r = -\xi_{0i} \text{sen}(\omega t - kx) = \xi_{0i} \text{sen}(\omega t - kx \pm \pi). \tag{8.2}$$

Como cada una de las ondas en la cuerda cumple la ecuación de onda, la suma (o superposición o interferencia) de ellas también la cumple (sección 7.2), y el desplazamiento de los puntos de la cuerda está expresado por

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_i + \xi_r = \xi_{0i} \text{sen}(\omega t + kx) + \xi_{0r} \text{sen}(\omega t - kx) \\ &= \xi_{0i} [\text{sen}(\omega t + kx) - \text{sen}(\omega t - kx)]. \end{aligned}$$

Apliquemos la identidad $\text{sen } \alpha - \text{sen } \beta = 2 \text{sen } \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ con $\alpha = \omega t + kx$ y $\beta = \omega t - kx$, para obtener

$$\xi = 2\xi_{0i} \text{sen } kx \cos \omega t. \tag{8.3}$$

Definamos la **función de amplitud** como

$$f(x) = 2\xi_{0i} \text{sen } kx. \tag{8.4}$$

La ecuación 8.3 la reescribimos como

$$\xi = f(x) \cos \omega t. \tag{8.5}$$

Aunque esta onda sea la superposición de dos ondas viajeras $\xi_i(x + vt)$ y $\xi_r(x - vt)$ en sentidos opuestos, ella no es viajera puesto que no es una función de $(x \pm vt)$; las variables x y t están separadas, no acopladas a través de una suma o una resta como en una onda viajera. Los diferentes puntos de la cuerda son osciladores armónicos simples acoplados (o sea que no están aislados) que vibran con una amplitud $f(x)$ dependiente de x ; en una onda armónica viajera la amplitud es constante. Hay puntos de

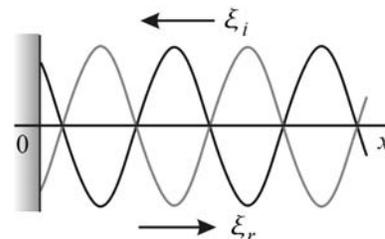


Figura 8.1 Ondas incidente y reflejada.

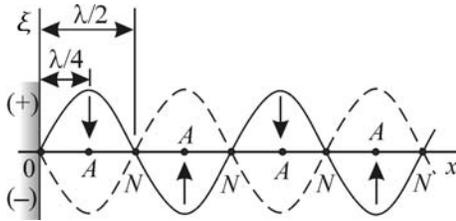


Figura 8.2 Nodos y antinodos de desplazamiento en una cuerda.

la cuerda, llamados **nodos de desplazamiento** (puntos N en la figura 8.2), donde las ondas incidente y reflejada interfieren destructivamente dando como resultado una amplitud cero. Esto explica el nombre de **onda estacionaria** para la función $\xi(x, t)$ de la ecuación 8.5, pues es obvio que no hay cierto valor del campo que se esté propagando a través del medio, como en una onda viajera. En la interferencia destructiva los campos son opuestos entre sí, están en contrafase y la suma da cero; para que estén en contrafase el desfase es un impar por π .

La fase de la onda incidente (ecuación 8.1) es $\phi_i = \omega t + kx$; la fase de la onda reflejada (ecuación 8.2) es $\phi_r = \omega t - kx \pm \pi$ y el desfase entre ellas es

$$\Delta\phi_{ir} = \phi_i - \phi_r = (\omega t + kx) - (\omega t - kx \pm \pi) = 2kx \pm \pi. \quad (8.6)$$

Cuando el desfase no depende del tiempo, como en la anterior ecuación, se dice que las ondas son **coherentes**. En los nodos la interferencia entre las ondas es destructiva, deben estar en contrafase,

$$\Delta\phi = \text{impar } \pi = (2m + 1)\pi = 2kx \pm \pi; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

El contador m no puede ser negativo porque x tampoco lo es. Escojamos $+\pi$ para poder cancelarlo, cancelamos luego el 2 y obtenemos que en los nodos

$$kx = m\pi; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (8.7)$$

Reemplacemos en la ecuación 8.4,

$$f(x) = 2\xi_{0i} \text{sen } m\pi = 2\xi_{0i} \times 0 = 0.$$

Da cero, como era de esperarse en un nodo. De la ecuación 8.7 despejemos la posición de los nodos N ,

$$x_N = \frac{m\pi}{k} = \frac{m\pi}{2\pi/\lambda} = m\frac{\lambda}{2} = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, 3\frac{\lambda}{2}, \dots \quad (8.8)$$

El primer nodo se obtiene con $m = 0$ en $x = 0$ donde la cuerda está fija a la pared. Para dos nodos *consecutivos*, $\Delta m = 1$; la separación entre ellos es $\lambda/2$: apliquemos el operador Δ a la ecuación 8.8,

$$\Delta x_N = \Delta(m\lambda/2) = (\lambda/2)\Delta m = \lambda/2.$$

Hay puntos de la cuerda que tienen la máxima amplitud, llamados **antinodos de desplazamiento** (puntos A en la figura 8.2), donde las ondas interfieren constructivamente; el desfase (ecuación 8.6) es un número par por π ,

$$\Delta\phi = \text{par } \pi = 2m\pi = 2kx \pm \pi = \frac{4\pi}{\lambda}x \pm \pi; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Despejemos la posición de los antinodos A ,

$$x_A = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}, \lambda + \frac{\lambda}{4}, 3\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}, \dots$$

Podemos obtener esta ecuación de la ecuación 8.4 sin necesidad de hacer consideraciones sobre interferencia constructiva: amplitud máxima implica que $\text{sen } kx = 1$, de donde $kx = (2\pi/\lambda)x = \text{impar}(\pi/2) = (2m + 1)(\pi/2)$. Al despejar x obtenemos la posición de los antinodos.

En la figura 8.2 la línea continua es la cuerda con todos sus puntos en la máxima elongación; la energía es únicamente potencial. La flecha vertical en la primera semilongitud de onda indica que durante el próximo cuarto de período todos sus puntos se estarán moviendo hacia abajo dirigiéndose a las respectivas posiciones de equilibrio. Todos los puntos de la cuerda alcanzan simultáneamente la posición de equilibrio y la cuerda está momentáneamente horizontal; la energía es solo cinética. Un cuarto de período más tarde la cuerda estará en la posición indicada con la línea a trazos. Durante el próximo medio período se reversa lo ocurrido en el primer semiperíodo y la cuerda estará en la posición inicial; se ha completado un ciclo. La frecuencia con que esto ocurre puede ser tal que veamos algo como la figura 8.3; iluminando la cuerda con un estroboscopio podemos verla *permanentemente* en la posición de la línea continua, a trazos u horizontal de la figura 8.2. Cualquier punto en un segmento de cuerda comprendido entre dos nodos consecutivos vibra en contrafase con cualquier otro punto en una semilongitud de cuerda vecina. Durante el proceso los puntos N permanecen en reposo y es la razón por la que la onda se llama estacionaria.

Cualquier longitud de onda es posible en la cuerda semiinfinita, $\lambda = v/\nu$; basta con cambiar como queramos la frecuencia y λ cambia inversamente; $v = \sqrt{T/\mu}$ es constante. La situación es muy distinta cuando la cuerda es finita.

El desfase entre las ondas que se propagan en sentidos opuestos y que originan la onda estacionaria, ecuación 8.6, solo depende de la posición x . Por consiguiente, para observar la transición de interferencia constructiva a destructiva nos debemos desplazar a lo largo de la cuerda. Por esto a las ondas estacionarias se les cita como un ejemplo de **interferencia espacial**, a diferencia de los pulsos (sección 10.2, p. 97), que se les cita como un caso de interferencia temporal.

8.2 Ondas estacionarias en una cuerda finita

Frecuencia libre de vibración de un sistema es la frecuencia con que vibra después de que un agente externo lo ha excitado o le ha cedido energía. Pero si el agente externo mantiene la interacción con el sistema, este vibra con la frecuencia de aquel y la vibración ya no es libre sino **forzada**. Por ejemplo, después de que se le cede energía, un péndulo simple oscila con frecuencia

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Como esta frecuencia depende solo de características del sistema (g es una característica física, l es una característica geométrica) la llamamos **frecuencia propia** o **normal** o **libre** de oscilación. Pero, como caso extremo, alguien puede forzar las oscilaciones e imponerle, con sus manos, un período de un ciclo por segundo, o por cada 10 minutos.

Cuando ambos extremos de la cuerda son nodos (o antinodos) no es posible cualquier longitud de onda, y en consecuencia tampoco es posible cualquier frecuencia. *Las frecuencias libres de vibración de un sistema finito están determinadas por su geometría y sus propiedades físicas.* Sea L la longitud de la cuerda. Como en $x = L$ hay un nodo (ecuación 8.7),

$$kL = (2\pi/\lambda)L = m\pi; \quad m = 1, 2, \dots$$

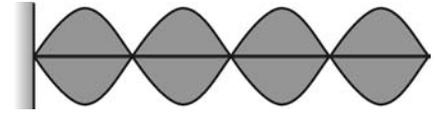


Figura 8.3 A simple vista no vemos las diferentes posiciones de una cuerda.



Vea en el multimedia de *Física de las ondas* la experiencia *Ondas en una cuerda finita*.

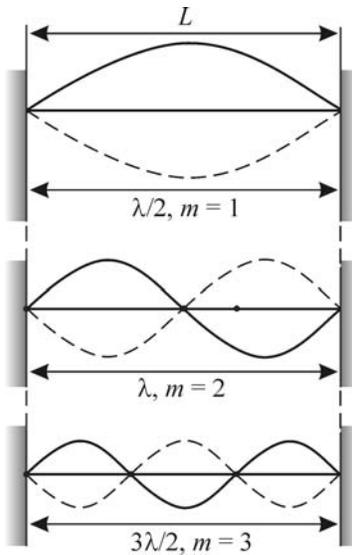


Figura 8.4 Tres primeras frecuencias de una cuerda.

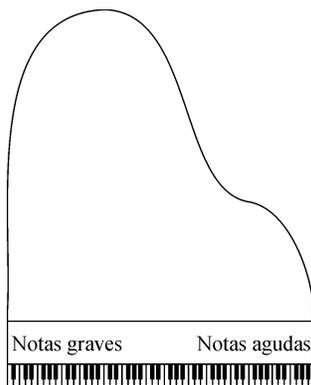


Figura 8.5 Las cuerdas de la izquierda son más largas que a la derecha.

Despejemos la longitud de onda,

$$\lambda = \frac{2L}{m} = 2L, L, \frac{2}{3}L, \frac{L}{2}, \dots \quad (8.9)$$

No tenemos en cuenta a $m = 0$ porque da $\lambda = \infty$, lo que interpretamos como ausencia de ondas. En la figura 8.4 mostramos la cuerda para las tres longitudes de onda más largas. La línea continua es la cuerda con todos sus puntos en la máxima elongación y la línea discontinua es la cuerda medio período más tarde.

Utilizando la ecuación 8.9 obtenemos las frecuencias propias,

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = m \frac{v}{2L} = m \frac{\sqrt{T/\mu}}{2L}; \quad m = 1, 2, \dots \quad (8.10)$$

A la frecuencia más baja de vibración *libre* de un sistema se le llama **frecuencia fundamental**, ν_f ; según la anterior ecuación,

$$\nu_f = \frac{v}{2L} = \frac{\sqrt{T/\mu}}{2L}. \quad (8.11)$$

La ecuación 8.10 podemos reescribirla como

$$\nu = m\nu_f = \nu_f, 2\nu_f, 3\nu_f, \dots \quad (8.12)$$

Cuando excitamos una cuerda y la dejamos vibrar, ella lo hace solo con una frecuencia o varias de las anteriores frecuencias, no con otras; no podemos hacer que vibre *libremente* con una frecuencia arbitraria que queramos. Denominamos **modo de vibración** de un sistema físico a la vibración del sistema con una de sus frecuencias libres, junto con la función de onda ξ que la describa. A los modos de vibración con frecuencia $\nu > \nu_f$ se les llama **sobretonos**. Cuando ν/ν_f es un entero m , se dice que el modo es el armónico de orden m . Vemos, entonces, que el fundamental siempre es el armónico de orden 1, el primer sobretono de la cuerda con extremos fijos es el armónico de orden 2, el segundo sobretono es el armónico de orden 3, y así sucesivamente.

La ecuación 8.10 muestra algunas características generales de cualquier sistema físico: *a mayor dimensión (a mayor L), menores las frecuencias propias o mayor el período*. Por ejemplo, Mercurio, que es el planeta más cercano al Sol, tiene un período de traslación de 88 días; Plutón, el más alejado, de 248 años. Para emitir tonos graves o bajos, esto es, de baja frecuencia, alargamos y relajamos las cuerdas vocales; para emitir tonos altos o agudos, esto es, de alta frecuencia, las acortamos y tensamos. Las cuerdas vocales de las mujeres son, en promedio, más cortas que las de los hombres, lo que explica su voz más aguda. En los **pianos verticales** las cuerdas son perpendiculares al piso; en los pianos de concierto las cuerdas son horizontales y se llaman **pianos de cola** (figura 8.5). Su forma nos revela que las cuerdas más largas están a la izquierda, y por lo tanto allí se producen las notas de menor frecuencia fundamental o **graves**; a la derecha están las cuerdas más cortas y generan las notas de mayor frecuencia fundamental o **agudas**. Los sonidos de un violonchelo son más graves que los de un violín por ser aquel más grande que este.

Las ondas estacionarias que hemos estudiado son el resultado de dos ondas viajeras con sentido opuesto de propagación pero de igual frecuencia. La potencia que una onda propaga en un sentido es igual a la potencia que la otra propaga en el sentido opuesto, dando como resultado un flujo

neto de energía cero. Pero no hemos tenido en cuenta las diferentes pérdidas de energía de la onda por fricción o porque la cuerda perturba el aire y emite sonido, o transmite ondas a la estructura que soporta la cuerda.

En el laboratorio se obtienen varios nodos como en la figura 8.4, conectando una fuente de ondas en un extremo de la cuerda; sin embargo, en la realidad, la cuerda pierde energía, la misma que se debe suplir si queremos mantener vibrando la cuerda durante largo tiempo, para lo que es necesario que haya un flujo neto de energía desde la fuente hacia el resto de la cuerda. Esto es imposible si hay puntos de la cuerda que no se desplacen, ya que no habría allí un trabajo W de la parte derecha de la cuerda sobre la parte izquierda; recuerde que $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$, donde \mathbf{d} es desplazamiento. Entonces, estrictamente, no hay nodos. Cuando decimos que hay un nodo, en el mundo físico nos referimos a los puntos donde la amplitud de vibración del campo es menor que en los otros puntos, pero sin ser cero porque por ellos debe pasar un flujo de energía para el resto del sistema, tal que compense las diferentes pérdidas.

Cualquier sistema físico tiene frecuencias de vibración que le son características, ya sea el Sol o un puente. Es célebre la destrucción del puente de Tacoma en 1940 por vientos de 67 km/h. Cuando el aire fluye alrededor de una lámina (o de una cuerda) se forman remolinos periódicos de aire que se alternan a uno y otro lado de la lámina, lo que origina una fuerza periódica perpendicular a ella (figura 8.6). En el caso del puente referido, la frecuencia de los remolinos coincidió con una de las suyas, entraron en resonancia, el puente adquirió una notable amplitud de oscilaciones verticales cuya energía, por medio de un comportamiento no lineal debido a la construcción del puente, pasó a ondas de torsión que causaron su destrucción.¹ Remolinos del mismo tipo son los responsables de la generación del sonido en los instrumentos de viento.²

Una onda en un espacio finito da lugar a ondas estacionarias, ya que en los límites del espacio debido a la onda incidente se origina una onda reflejada y la interferencia de ambas produce una onda estacionaria. Esto se presenta en el interior de un horno microondas; en los sitios nodales la cocción de los alimentos es pobre y por ello se deben poner sobre un plato rotatorio. Como dichas ondas son tridimensionales, en lugar de hablar de puntos nodales como en la cuerda, que es unidimensional, debemos hablar de planos nodales. Además, las microondas no son ondas elásticas sino electromagnéticas.

Pitágoras, hace cerca de 2500 años, notó que cuerdas vibrantes producen tonos armoniosos cuando la relación entre sus longitudes es un número racional, es decir, la relación entre dos enteros. Esto lo revela inmediatamente la ecuación 8.10, para cuerdas con iguales T y ρ . Dicha observación la generalizaron los pitagóricos hasta afirmar que todas las cosas son números.

8.3 Ondas estacionarias y condiciones de frontera

Las frecuencias posibles de vibración de una cuerda infinita, sección 8.1, forman un conjunto continuo, $\nu \in [0, \infty)$; o, con otras palabras, cualquier frecuencia es posible. Una condición de frontera es una condición que de-

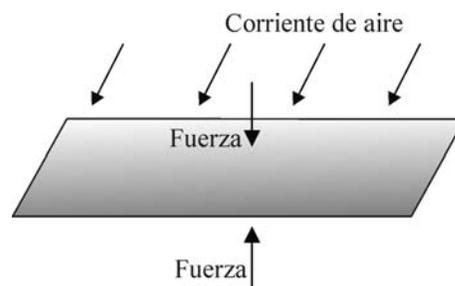


Figura 8.6 Fuerza periódica debida a un flujo continuo de un fluido.

¹Buscando *Tacoma bridge*, Lazer con Google se puede encontrar una explicación más amplia de este caso.

² James Jeans, *Science & Music*, Dover Publications, Nueva York, 1968, pp. 123-137.

be cumplir una función. En la sección 8.2 hacemos que la función de onda estacionaria en la cuerda sea cero en $x = 0$ y en $x = L$; estas dos condiciones inmediatamente tienen como consecuencia que las frecuencias dejen de pertenecer a un conjunto continuo y pasen a conformar un conjunto discontinuo $\{\nu_m\}$, cuyos infinitos elementos son enumerables con un entero m , $\nu \in \{\nu_m\} = \{m\nu_f\} = \{\nu_f, 2\nu_f, 3\nu_f, \dots\}$. Esto es característico de cualquier onda confinada a una región finita del espacio.

Un ejemplo notable de lo expuesto lo constituye un electrón de un átomo cualquiera. En las primeras décadas del siglo XX se comprendió que, en determinadas condiciones, lo que se considera una partícula exhibe un comportamiento ondulatorio. Y así, el electrón, por estar confinado a moverse en la vecindad de su núcleo atómico, cuando cambia de energía emite una onda con una frecuencia que hace parte de un conjunto discontinuo de frecuencias, como en el caso de la cuerda finita; el electrón no puede emitir cualquier frecuencia por las mismas razones que una cuerda de una guitarra (L , T y ρ constantes) tampoco puede hacerlo.

Pasemos a considerar las ondas sonoras que se propagan en un tubo.

Ejemplo 8.1 Las ondas en una cuerda se describen con la función vectorial de onda (longitud en m, tiempo en s)

$$\xi(\mathbf{r}, t) = 10^{-3} \cos(3\pi x + 4\pi y) \sin(10\,000\pi t) \mathbf{u}_z. \quad (8.13)$$

La cuerda, de extremos A y B , mide 50 cm y su densidad es 4 g/cm^3 ; el extremo A está en el origen. (a) Ubique la cuerda en un sistema cartesiano. (b) ¿Es viajera o estacionaria la onda? (c) ¿Es longitudinal o transversal? ¿Cómo está polarizada? (d) Halle si los extremos de la cuerda son fijos o libres. (e) Halle la rapidez de propagación de las ondas viajeras. (f) Encuentre la frecuencia fundamental y el orden del armónico descrito por la ecuación 8.13.

Solución

(a) Hallemos la dirección de propagación. En la ecuación 8.13 el coeficiente de x es k_x , el de y es k_y y el de z es k_z ,

$$k_x = 3\pi \text{ m}^{-1}, \quad k_y = 4\pi \text{ m}^{-1}, \quad k_z = 0.$$

La magnitud del vector de propagación es, ecuación 7.4, p. 66,

$$k = \sqrt{\pi^2(3^2 + 4^2 + 0^2)} \text{ m}^{-1} = 5\pi \text{ m}^{-1}.$$

\mathbf{k} no tiene componente z , lo que quiere decir que las ondas viajeras (una con vector \mathbf{k} y la otra con vector $-\mathbf{k}$) que dan lugar a la onda estacionaria se propagan paralelas al plano xy , con ángulos α (con el eje x), β (con el eje y) y γ (con el eje z) iguales a, según la ecuación 7.4,

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos^{-1} \frac{k_x}{k} = \cos^{-1} \frac{3\pi \text{ m}^{-1}}{5\pi \text{ m}^{-1}} = \cos^{-1} \frac{3}{5} = 53.13^\circ, \\ \beta &= \cos^{-1} \frac{k_y}{k} = \cos^{-1} \frac{4\pi \text{ m}^{-1}}{5\pi \text{ m}^{-1}} = \cos^{-1} \frac{4}{5} = 36.87^\circ, \\ \gamma &= \cos^{-1} \frac{k_z}{k} = \cos^{-1} \frac{0 \text{ m}^{-1}}{5\pi \text{ m}^{-1}} = \cos^{-1} 0 = 90.00^\circ. \end{aligned}$$

($\cos \alpha$, $\cos \beta$ y $\cos \gamma$ se denominan **cosenos directores** de \mathbf{k}). La orientación de la cuerda es la de \mathbf{k} , pues la onda se propaga a lo largo de ella. En la figura 8.7 se ubica la cuerda con estos ángulos y con el extremo A en el origen.

(b) En tres dimensiones, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t$. En este ejemplo, $k_z = 0$ y $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = k_x x + k_y y - \omega t$. La ecuación 8.13 no es una función de $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$, por lo tanto no es una onda viajera. Además, en una onda viajera la amplitud es constante,

mientras que esa función tiene una amplitud $f(x) = 10^{-3} \cos(3\pi x + 4\pi y)$ que depende de la posición del punto $(x, y, 0)$ de la cuerda.

(c) Según la ecuación 8.13, las vibraciones son paralelas al vector unitario \mathbf{u}_z , esto es, son perpendiculares a la misma cuerda o a \mathbf{k} , $\xi \perp \mathbf{k}$, y esta perpendicularidad es lo que define a una onda transversal. La polarización es lineal pues ξ siempre es paralelo a z .

(d) Si en todo instante un extremo no vibra, es un nodo de desplazamiento o extremo fijo; si vibra es un extremo libre o antinodo. Para evaluar a ξ , encontremos las coordenadas de los extremos A y B ($L = 0.5 \text{ m}$ es la longitud de la cuerda),

$$\begin{aligned} x_A &= 0, & y_A &= 0, & z_A &= 0; \\ x_B &= L \cos \alpha = \frac{3}{5}L = 0.3 \text{ m}, \\ y_B &= L \cos \beta = \frac{4}{5}L = 0.4 \text{ m}, \\ z_B &= L \cos \gamma = 0 \times L = 0. \end{aligned}$$

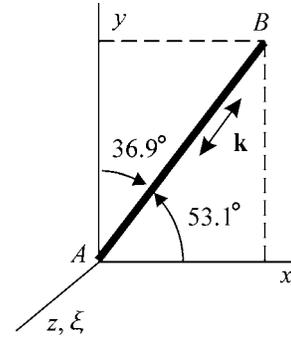


Figura 8.7 \mathbf{k} no es paralelo a los ejes.

Reemplacemos en la ecuación 8.13,

$$\begin{aligned} \xi_A(t) &= 10^{-3} \cos(3\pi \times 0 + 4\pi \times 0) \text{sen}(10\,000\pi t) \mathbf{u}_z = 10^{-3} \text{sen}(10\,000\pi t) \mathbf{u}_z; \\ \xi_B(t) &= 10^{-3} \cos(3\pi \times 0.3 + 4\pi \times 0.4) \text{sen}(10\,000\pi t) \mathbf{u}_z \\ &= 10^{-3} \cos(2.5\pi) \text{sen}(10\,000\pi t) \mathbf{u}_z = 10^{-3} \times 0 \times \text{sen}(10\,000\pi t) \mathbf{u}_z = 0. \end{aligned}$$

A se comporta como un extremo libre pues está vibrando; B no vibra y es un extremo fijo.

(e) Las ondas viajeras que se propagan con sentidos opuestos y dan lugar a la onda descrita por la ecuación 8.13 lo hacen con rapidez con rapidez (ecuación 7.4) $v = \omega/k$. La frecuencia angular es el coeficiente del tiempo, $\omega = 10\,000\pi \text{ s}^{-1}$. La rapidez es

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{10\,000\pi \text{ s}^{-1}}{5\pi \text{ m}^{-1}} = 2000 \text{ m/s}.$$

(f) Las frecuencias propias las da la ecuación 9.8, p. 83; la fundamental es

$$\nu_f = \frac{v}{4L} = \frac{2000 \text{ m/s}}{4 \times 0.5 \text{ m}} = 1000 \text{ s}^{-1} = 1000 \text{ Hz}.$$

El armónico descrito por la ecuación 8.13 tiene una frecuencia

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10\,000\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}{2\pi \text{ rad}} = 5000 \text{ Hz}.$$

Su orden es

$$m = \frac{5000 \text{ Hz}}{1000 \text{ Hz}} = 5.$$

Resumen

Dos ondas de igual frecuencia, pero con sentidos opuestos de propagación, interfieren constructivamente en unos puntos llamados antinodos y destructivamente en otros puntos llamados nodos. Cuando tienen igual amplitud, en los nodos el campo es cero, y en los antinodos es el doble del de una sola.

Cuando el espacio del que disponen las ondas es finito solo son posibles unas frecuencias que dependen del sistema vibrante. Por ejemplo, en una cuerda las frecuencias están predeterminadas por su longitud, tensión

e inercia. Cuando se excita una cuerda y se libera, no es posible dejarla vibrando con cualquier frecuencia, ella quedará vibrando con una o varias frecuencias que le son características. Las frecuencias superiores a la fundamental se llaman sobretonos; cuando son un número entero de veces la fundamental, el sobretono se llama armónico. Las frecuencias de una cuerda son armónicas.

Módulo 9

Ondas estacionarias en un tubo. Efecto Doppler

Contenido

- 9.1 Tubo abierto en ambos extremos
- 9.2 Tubo con un extremo abierto y el otro cerrado
- 9.3 La voz
- 9.4 Efecto Doppler
 - 9.4.1 Ondas de choque

Objetivos

1. Hallar las frecuencias propias de vibración del aire en un tubo con los extremos abiertos, y con un extremo abierto y el otro cerrado.
2. Mostrar cómo la física de un columbio es igual a la física de las ondas en un tubo excitadas por un parlante.
3. Encontrar cómo cambia una frecuencia por el movimiento de la fuente y del observador.
4. Hallar el frente de onda cuando la fuente es más rápida que la onda.

Preguntas básicas

1. ¿Qué similitudes y diferencias se pueden establecer entre las ondas en una cuerda y en un tubo?
2. ¿Cuáles son las frecuencias de los registros de la voz humana?
3. ¿El movimiento de la fuente y del observador influye en la frecuencia de las ondas?
4. ¿Qué es una *onda de choque*?

Introducción

En el anterior módulo iniciamos un estudio elemental¹ de la física de los instrumentos de cuerda —clavecín, piano, violín, guitarra y otros— cuando analizamos la interferencia de las ondas en la cuerda, que da origen a las ondas estacionarias. En el presente módulo lo hacemos para los instrumentos de viento —flauta, oboe, trompeta— cuando estudiamos las ondas estacionarias en una columna de aire contenida en un tubo.

¹ Para un estudio avanzado consulte:
Neville Fletcher y Thomas Rossing, *The physics of musical instruments*, Springer, Nueva York, 2005. Lothar Cremer y John Allen, *Physics of the violin*, MIT Press, 1984.



Una fuente emite ondas electromagnéticas hacia un móvil. De acuerdo con la frecuencia con que regresen a la fuente, se puede conocer la rapidez del móvil. Este es uno de muchos ejemplos de aplicación del *efecto Doppler*.

Veremos cómo cambia la frecuencia percibida de una onda respecto a la frecuencia emitida, debido al movimiento de la fuente y del observador. Veremos también qué ocurre cuando la velocidad de la fuente es mayor que la de la onda que genera.

9.1 Tubo abierto en ambos extremos

Los extremos del tubo de la figura 9.1 están abiertos y en su interior se propaga una onda sonora; la onda puede provenir de un parlante lejano. La onda que penetra en el tubo sufre una reflexión en el extremo derecho, lo que es extraño puesto que allí hay aire y no una frontera rígida. Pero al llegar al extremo sí hay un cambio de medio: los elementos de volumen en el interior del tubo solo se pueden expandir o comprimir en la dirección x , en cambio un elemento de volumen inmediatamente después de $x = L$ sí puede cambiar de volumen cambiando sus dimensiones transversales, ya que transversalmente lo limita aire y no el tubo; esto es lo que provoca la reflexión. En el interior se presenta, entonces, interferencia entre las ondas incidente y reflejada. Supondremos, y es una suposición delicada ya que la realidad es diferente, que la onda reflejada tiene la misma amplitud que la onda incidente, lo que equivale a decir que el extremo abierto no emite sonido al espacio abierto en frente de él. En estas condiciones hay puntos nodales en el interior del tubo o, mejor, planos nodales perpendiculares a x donde la interferencia es destructiva, y planos antinodales donde es constructiva. En los extremos abiertos es constructiva, porque en ellos las ondas de desplazamiento incidente y reflejada están en fase, lo que hace que las variaciones de ξ sean máximas.

Cuando se tiene en cuenta que el extremo abierto sí radia sonido al medio circundante, el antinodo de desplazamiento se corre una cantidad ϵ , llamada **corrección de extremo libre**,² afuera del tubo aproximadamente igual a $0.3D$, donde D es el diámetro del tubo. Esto significa que la longitud efectiva L' de la columna de aire sea la longitud física L del tubo más la corrección,

$$L' = L + \epsilon. \tag{9.1}$$

Esta L' es la longitud que se debe tener en cuenta en lugar de L , en las próximas ecuaciones, si se quiere una mayor concordancia con medidas experimentales.

En la figura 9.2 se muestran nodos y antinodos de desplazamiento sin conexión con ningún sistema físico en particular. Para un tubo abierto-abierto, su extremo izquierdo tiene que coincidir con un A , y el derecho con otro A más a la derecha del primer A . Como entre antinodos consecutivos la distancia es $\lambda/2$, estamos diciendo que entre los extremos del tubo debemos acomodar un número entero de semilongitudes de onda; expresemos con una ecuación lo dicho,

$$L = m\lambda/2; \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Despejemos la longitud de onda,

$$\lambda = \frac{2L}{m} = 2L, L, \frac{2}{3}L, \frac{L}{2}, \dots$$

Ecuación que es idéntica a la ecuación 8.9; esta proviene de exigir que los extremos de la cuerda sean nodos, y la última de exigir que los extremos del tubo sean antinodos. Recuerde que como el desfase entre ξ y Δp es 90° , los nodos de desplazamiento coinciden con antinodos de presión, y los antinodos de desplazamiento con nodos de presión ($p = p_0$).

Las frecuencias propias del tubo son

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = m \frac{v}{2L}; \quad m = 1, 2, \dots \tag{9.2}$$

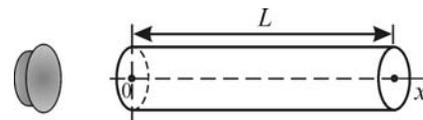


Figura 9.1 Tubo con extremos abiertos.

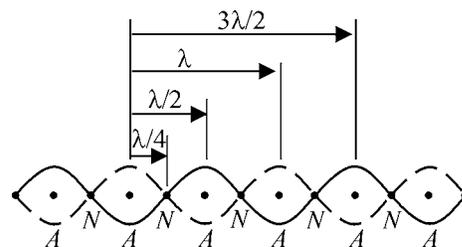


Figura 9.2 Sucesión de nodos y antinodos de desplazamiento.

² Lawrence Kinsler et al., *Fundamentos de acústica*, Limusa, México, 1988, p. 270.

en donde v es la rapidez del sonido en el fluido dentro del tubo; si es aire, está dada por la ecuación 4.13, p. 32. La frecuencia mínima o fundamental es

$$\nu_f = v/2L. \quad (9.3)$$

La ecuación 9.2 la reescribimos como

$$\nu = m\nu_f = \nu_f, 2\nu_f, 3\nu_f, \dots \quad (9.4)$$

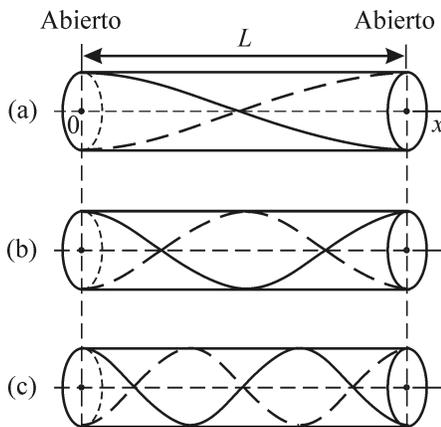


Figura 9.3 Tres primeros modos de vibración en un tubo abierto-abierto.

El sonido producido por un tubo abierto-abierto contiene una o varias de las anteriores frecuencias; todos sus sobretonos son armónicos. Casi siempre en nuestra vida cotidiana existe un ruido de fondo que contiene una gama amplia de frecuencias. Cuando acercamos el extremo de un tubo a un oído (el tubo se puede formar con la mano sola) la intensidad de los sonidos del ambiente con una frecuencia igual o cercana a cualquiera de las frecuencias dadas por la ecuación 9.4 se ve reforzada respecto a las demás y esto explica el cambio que se presenta en el sonido, que se escucha como el rumor del mar.

El que solo sean posibles determinadas longitudes de onda y, como consecuencia, solo ciertas frecuencias, proviene de haber impuesto dos condiciones de frontera: que los extremos sean antinodos de desplazamiento. De nuevo, las frecuencias propias dependen únicamente de la geometría y de las propiedades físicas del sistema. Cuando un instrumento musical se lleva de un lugar frío a uno más caliente sus frecuencias cambian, ya que hay dilataciones, lo que daría frecuencias más bajas y, si es de viento, aumenta la rapidez del sonido, lo que daría un aumento de ellas.

La figura 9.3a corresponde a cuando acomodamos una semilongitud de onda en el tubo, $m = 1$; la figura 9.3b a dos semilongitudes de onda, $m = 2$, o sea una longitud de onda; la figura 9.3c a tres semilongitudes de onda, $m = 3$. Las curvas en el interior del tubo representan la amplitud de vibración de los elementos de masa, esto es, los límites entre los que tales elementos vibran. Recuerde que las vibraciones son longitudinales, porque el sonido en un fluido lo es, y los límites dados por dichas curvas se deben entender a lo largo del eje x , centrados en una coordenada x en particular. Las curvas no representan las ondas incidente y reflejada; representan, como se dijo, la distribución de amplitud. La escala en y de las curvas es diferente de la escala en x : la máxima amplitud de las vibraciones dentro de un tubo o columna de aire, por ejemplo dentro de una trompeta, puede ser de milésimas de milímetro.



Vea en el multimedia de *Física de las ondas* la experiencia *Ondas en un tubo con extremos abiertos*.



Vea en el multimedia de *Física de las ondas* la experiencia *Ondas en una columna de aire*.

9.2 Tubo con un extremo abierto y el otro cerrado

Tapemos el extremo derecho del tubo (figura 9.4a). En $x = L$ ya el aire no tiene libertad de desplazarse, el extremo es de una inercia mucho mayor que el extremo libre y como consecuencia la onda reflejada de desplazamiento está allí en contrafase con la incidente, $R = -1$, e interfieren destructivamente en todo instante. Al tapar, el extremo se convierte, entonces, en un nodo de desplazamiento y un antinodo de presión: no hay fluctuaciones del desplazamiento, pero las fluctuaciones de la presión son máximas, alrededor de p_0 .

El extremo izquierdo debe coincidir con un A de la figura 9.2 y el extremo derecho con un N . La mínima distancia entre A y N es $\lambda/4$, la próxima

entre el mismo A y el otro N más alejado es $\lambda/4 + \lambda/2$, la que sigue es $\lambda/4 + \lambda/2 + \lambda/2, \dots$ Generalicemos,

$$L = \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{2} = (2m + 1) \frac{\lambda}{4}; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (9.5)$$

Excluimos m negativos porque L y λ son positivos.

La figura 9.4b corresponde a cuando acomodamos en el tubo un cuarto de λ , $m = 0$; la figura 9.4c a cuando acomodamos $\lambda/4 + \lambda/2$, $m = 1$; la figura 9.4d a cuando acomodamos $\lambda/4 + \lambda/2 + \lambda/2$, $m = 2$.

Despejemos λ de la ecuación 9.5 y reemplacemos en $v = v/\lambda$ para obtener las frecuencias propias o de resonancia del tubo,

$$v = (2m + 1) \frac{v}{4L}; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (9.6)$$

Vemos que la frecuencia fundamental es

$$v_f = v/4L. \quad (9.7)$$

La ecuación 9.6 la reescribimos como

$$v = (\text{número impar})v_f = v_f, 3v_f, 5v_f, \dots \quad (9.8)$$

Al comparar la ecuación 9.7 con la ecuación 9.3 vemos que al tapar un extremo la frecuencia fundamental se reduce a la mitad; en términos musicales se dice que baja una octava. Además, al comparar la ecuación 9.8 con la ecuación 9.4 desaparecen los armónicos pares, solo quedan los impares. Un pozo se comporta como un tubo abierto-cerrado; el sonido producido al arrojar una piedra en él tiene reforzados los armónicos impares y los pares no existen o son relativamente débiles.

Según la ecuación 4.5, p. 29, las ondas de desplazamiento y de presión están desfasadas 90° , lo que lleva a que los antinodos de desplazamiento sean nodos de presión, y viceversa. Esto quiere decir que donde ocurre interferencia constructiva entre las ondas de desplazamiento incidente y reflejada (ondas en fase) se presenta interferencia destructiva entre las ondas de presión incidente y reflejada (ondas en contrafase), y viceversa. En consecuencia, en la reflexión en el extremo cerrado de un tubo las ondas de desplazamiento incidente y reflejada están en contrafase, y las de presión en fase (ejemplo 9.3, p. 86).³ Cuando dentro del tubo se usa un pequeño micrófono como sonda, y puesto que este responde es a cambios de presión, se comprueba que la señal eléctrica proveniente de él es máxima en los nodos de desplazamiento y mínima en los antinodos; o con otras palabras, con el micrófono detectamos nodos y antinodos de presión. *El oído también responde a cambios de presión, y cuando escuchamos un máximo de la interferencia de dos ondas, escuchamos es la interferencia destructiva entre las respectivas ondas de desplazamiento, o constructiva entre las ondas de presión.* Para que las predicciones concuerden con lo que escuchamos es, entonces, preferible analizar las ondas sonoras en términos de ondas de presión antes que en términos de ondas de desplazamiento. Además, las ondas de presión tienen la ventaja de ser escalares mientras que las de desplazamiento son vectoriales.

³ Vea el artículo "Pressure and displacement in sound waves", Chris Tindle, *American Journal of Physics*, septiembre de 1986, p. 749, donde el autor sostiene un punto de vista diferente, y es que en la reflexión de una onda sonora en una pared rígida ambas ondas de desplazamiento están en fase.



Vea en el multimedia de *Física de las ondas* la experiencia *Ondas longitudinales en un resorte*.

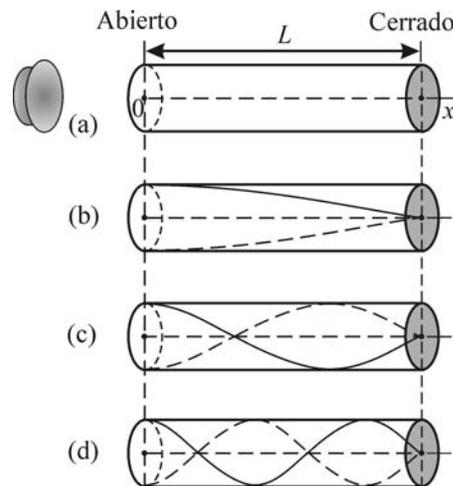


Figura 9.4 Tubo abierto-cerrado y sus tres primeros modos de vibración.



Vea en el multimedia de *Física de las ondas* la experiencia *Ondas en un tubo con un extremo cerrado*.

9.3 La voz

El que las frecuencias propias dependan de la geometría y las propiedades físicas no es exclusivo de un tubo o de una cuerda sino de cualquier sistema, incluyendo el cuerpo humano. Las frecuencias que una persona produzca dependen de las dimensiones de su cavidad torácica, laringe, cuerdas vocales, boca, cabeza, ... Aunque percibamos sonidos entre 20 Hz y 20 kHz, la mayoría de la energía sonora que emitimos corresponde a frecuencias por debajo de 1 kHz. Los cantantes se clasifican en seis grupos principales, según el rango en que se ubiquen las frecuencias fundamentales de las notas que cantan. Aunque hay fluctuaciones importantes de individuo a individuo, el siguiente es el rango aproximado de cada grupo o **registro**. El más grave es el de menores frecuencias, el más agudo el de mayores; los tres primeros registros corresponden a voces masculinas, los otros tres a femeninas: *bajo*, 82-293 Hz; *barítono*, 110-392 Hz; *tenor*, 147-523 Hz; *contralto*, 175-622 Hz; *mezzosoprano*, 196-698 Hz; *soprano*, 262-1047 Hz.

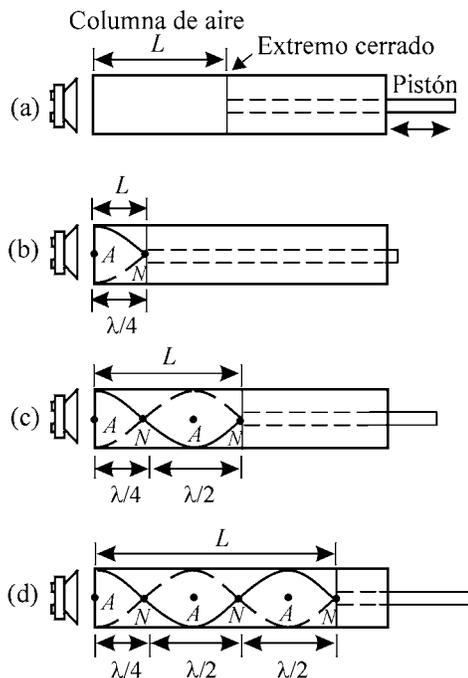


Figura 9.5 Resonancia entre una columna de aire y un parlante.

Ejemplo 9.1 Un parlante que emite un sonido de 261.6 Hz (nota *do* central) está al frente del extremo abierto de un tubo (figura 9.5a). La longitud L de la columna de aire se puede cambiar moviendo el pistón que sobresale a la derecha del tubo. La temperatura ambiente es 25°C . (a) Halle la longitud de las tres primeras columnas de aire que entran en resonancia con el parlante. (b) Mediante un esquema, muestre en cada caso la distribución de amplitud y la posición de los nodos y antinodos de desplazamiento.

Solución

(a) La rapidez del sonido es, según la ecuación 4.13, p. 32, $v = 20\sqrt{25.0 + 273.2} = 345.4 \text{ m/s}$.

Se presenta resonancia cuando una de las frecuencias propias de la columna de aire (la frecuencia fundamental o uno de los sobretonos) entre en resonancia con la frecuencia externa (ν_{ext}) del parlante. Según la ecuación 9.6,

$$\nu_{\text{ext}} = (2m + 1) \frac{v}{4L}; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Despejemos y hallemos las tres primeras longitudes ($m = 0, 1, 2$),

$$\begin{aligned} L &= (2m + 1) \frac{v}{4\nu_{\text{ext}}} = (2m + 1) \frac{345.4 \text{ m/s}}{4 \times 261.6 \text{ s}^{-1}} \\ &= (2m + 1) \times 0.33 \text{ m} = \begin{cases} 0.33 \text{ m}, & m = 0; \\ 0.99 \text{ m}, & m = 1; \\ 1.65 \text{ m}, & m = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Si queremos expresar a L en términos de la longitud de onda del sonido del parlante λ_{ext} , reemplacemos $\nu_{\text{ext}} = v/\lambda_{\text{ext}}$ en la ecuación 9.6,

$$\frac{v}{\lambda_{\text{ext}}} = (2m + 1) \frac{v}{4L}.$$

Cancalemos v y despejemos L ,

$$L = (2m + 1) \frac{\lambda_{\text{ext}}}{4} = \begin{cases} \lambda_{\text{ext}}/4, & m = 0; \\ 3\lambda_{\text{ext}}/4, & m = 1; \\ 5\lambda_{\text{ext}}/4, & m = 2. \end{cases}$$

(b) Con $m = 0$ se obtiene el modo fundamental o armónico de orden 1 (figura 9.5b); en la figura vemos que $L = \lambda_{\text{ext}}/4$. Con $n = 1$ se obtiene el primer sobretono o armónico de orden 3 (figura 9.5c), $L = \lambda_{\text{ext}}/4 + \lambda_{\text{ext}}/2 = 3\lambda_{\text{ext}}/4$. Con $m = 2$ se

obtiene el segundo sobretono o armónico de orden 5 (figura 9.5d), $L = \lambda_{\text{ext}}/4 + \lambda_{\text{ext}}/2 + \lambda_{\text{ext}}/2 = 5\lambda_{\text{ext}}/4$.

La A (antinodo de desplazamiento) en estas figuras marca la posición de un plano transversal al tubo cuyos puntos vibran con la máxima amplitud; la N (nodo de desplazamiento) marca un plano transversal cuyos puntos están en reposo. En los antinodos la variación de ξ es máxima, y $\partial\xi/\partial x = 0$. Esto en la ecuación 4.5, p. 29, da que $p(A) = p_0$: la presión en los antinodos de desplazamiento es p_0 , y generalmente p_0 es la presión atmosférica. La presión en A no cambia; los antinodos de desplazamiento son nodos de presión, lo que ya se sabe cuando se dice que las ondas de presión y de desplazamiento están desfasadas 90° o $\lambda/4$.

Cuando la columna de aire mide 33 cm el parlante entra en resonancia con el modo fundamental de la columna; cuando mide 99 cm entra en resonancia con el tercer armónico, pues la frecuencia fundamental cambia a $v/4L = 345.4/4 \times 0.99 = 87.2$ Hz, y la v_{ext} de 261.6 Hz es exactamente tres veces 87.2 Hz. (Cuando mide 1.65 m, ¿por qué la resonancia es con el armónico de orden 5?).

Un observador cercano al tubo distingue fácilmente cuándo el pistón pasa por las resonancias, pues en ellas el tubo absorbe mucha energía sonora proveniente del parlante, el aire en su interior adquiere una gran amplitud de vibración y el observador escucha una importante variación del volumen.

Debido principalmente a que el extremo abierto radia energía hacia el exterior, el antinodo de desplazamiento que se espera allí se desplaza cierta cantidad fuera del tubo, llamada corrección de extremo abierto ϵ . Predecir su valor es un problema complejo que depende de las características físicas del parlante, de la columna de aire y del espacio entre el parlante y el tubo.

Si el generador de impares $(2m + 1)$ se hubiera escrito como $(2m - 1)$, o de una forma extraña como $(2m + 1219)$, a los armónicos hallados, aunque seguirían siendo de orden 1, 3 y 5 respectivamente, les corresponderían unos valores distintos de m . En caso de que el generador de impares, por alguna razón, se hubiera escrito como $(2m + 1219)$, ¿qué n le correspondería al modo fundamental y a los armónicos de orden 3 y 5?

Ejemplo 9.2 En el interior de un tubo de 90 cm de longitud y sección circular de 2.5 cm de radio hay una onda sonora con longitud de onda de 1.2 m (figura 9.6); la densidad del aire es 1.0 kg/m^3 . Halle la energía sonora promedio en el interior del tubo si la función de onda es (longitud en m, tiempo en s)

$$\xi = 10^{-7} \cos kx \sin 586\pi t. \tag{9.9}$$

Solución. La energía es igual al producto del número de joules en cada metro cúbico (densidad de energía, E) por el número de metros cúbicos (volumen V). La densidad E (ecuación 6.3, p. 52) depende de la amplitud y, como en el tubo existe una onda estacionaria y no viajera, se presenta la complicación de que la amplitud de las vibraciones del aire depende de la posición en el interior del tubo. La amplitud $f(x)$ es el coeficiente de la función que da la variación temporal; según la ecuación 9.9 es

$$f(x) = 10^{-7} \text{ m} \cos kx.$$

En la ecuación 6.3 se debe reemplazar a ξ_0 por $f(x)$. Como la amplitud depende de x , debemos evaluar la energía en un diferencial de volumen y luego integrar. En la figura vemos que $dV = A dx = \pi r^2 dx$. La energía en un dV es, por definición de densidad de energía, $dE = E dV$. La energía total es la integral sobre el volumen del tubo,

$$\begin{aligned} E &= \int_V E dV = \int_0^L \frac{1}{2} \rho \omega^2 f^2(x) \pi r^2 dx = \frac{1}{2} \pi \rho \omega^2 r^2 \int_0^L f^2(x) dx \\ &= \frac{10^{-14} \text{ m}^2}{2} \pi \rho \omega^2 r^2 \int_0^L \cos^2 kx dx. \end{aligned}$$

La integral da $L/2$,

$$\begin{aligned} E &= \frac{10^{-14} \text{ m}^2}{4} \pi \rho \omega^2 r^2 L = \frac{10^{-14} \text{ m}^2}{4} \pi (1.0 \text{ kg/m}^3) (586 \pi \text{ s}^{-1})^2 (0.025 \text{ m})^2 (0.9 \text{ m}) \\ &= 1.5 \times 10^{-11} \text{ J}. \end{aligned}$$

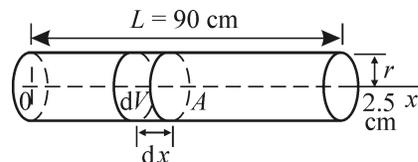


Figura 9.6

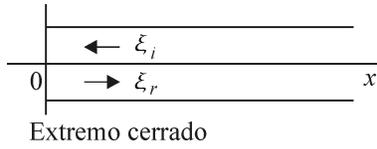


Figura 9.7

Esta es una energía extraordinariamente pequeña, aunque los datos utilizados son reales.

Nota: la frecuencia del ejemplo, $\nu = \omega/2\pi = 586\pi/2\pi = 293$ Hz, corresponde a la frecuencia fundamental de una nota *re*.

Ejemplo 9.3 Las ondas incidente y reflejada en el extremo cerrado del tubo de la figura 9.7 están dadas por las ecuaciones 8.1 y 8.2, p. 71. Mientras que en la figura 8.1 los ξ son transversales, en el tubo son longitudinales. Pruebe que en dicho extremo las ondas ξ están en contrafase, mientras que las de presión están en fase.

Solución. El desfase entre las ondas de desplazamiento en el extremo cerrado es el valor de la ecuación 8.6, p. 72, para $x = 0$,

$$\Delta\phi = \pm\pi;$$

o sea que las ondas están en contrafase y, por estar en la misma dirección, el eje x , su suma es cero, es decir, interfieren destructivamente y dan un nodo de desplazamiento.

Con la ecuación 4.5, p. 29, hallemos las ondas de presión incidente y reflejada,

$$\begin{aligned}\Delta p_i &= -B \frac{\partial \xi_i}{\partial x} = -B \frac{\partial}{\partial x} [\xi_{0i} \sin(\omega t + kx)] = -B \xi_{0i} k \cos(\omega t + kx) \\ &= B \xi_{0i} k \sin(\omega t + kx \pm \pi + \pi/2), \\ \Delta p_r &= -B \frac{\partial \xi_r}{\partial x} = -B \frac{\partial}{\partial x} [\xi_{0r} \sin(\omega t - kx \pm \pi)] = B \xi_{0r} k \cos(\omega t - kx \pm \pi) \\ &= B \xi_{0r} k \sin(\omega t - kx \pm \pi + \pi/2).\end{aligned}$$

De donde concluimos que las fases de las ondas de presión son

$$\begin{aligned}\phi_i &= \omega t + kx \pm \pi + \pi/2, \\ \phi_r &= \omega t - kx \pm \pi + \pi/2,\end{aligned}$$

y por lo tanto su desfase es

$$\Delta\phi_{ir} = \phi_i - \phi_r = 2kx.$$

Evaluable el extremo cerrado, $x = 0$, da

$$\Delta\phi = 0;$$

es decir, las ondas están en fase (*una compresión se refleja como una compresión o una rarefacción como una rarefacción, al contrario de un extremo abierto*) y por ser escalares interfieren constructivamente, esto es, se refuerzan en el extremo cerrado y dan un antinodo de presión.

Se sigue, de lo expuesto en este ejemplo, que en un extremo abierto las ondas de desplazamiento están en fase e interfieren constructivamente dando un antinodo de desplazamiento; las ondas respectivas de presión, en el mismo extremo, están en contrafase e interfieren destructivamente dando un nodo de presión.

Ejemplo 9.4 Análisis detallado de la física de las vibraciones del aire dentro de un tubo excitadas por un agente externo.

Solución. En la figura 9.8a se representa un columpio de longitud l sobre el que actúa una fuerza \mathbf{F} de frecuencia ν_{ext} . La frecuencia propia del columpio es $\nu = (1/2\pi)\sqrt{g/l}$; la velocidad del columpio es \mathbf{v}_p . La fuerza \mathbf{F} generalmente proviene de una persona en A .

De la experiencia cotidiana sabemos que cuando esperamos a que el columpio vaya y vuelva (trayectoria ABA) basta con un ligero empujón para mantener una gran amplitud; el empujón se aplica hacia la izquierda cuando el columpio llega a A y empieza a bajar: \mathbf{F} y \mathbf{v}_p están dirigidos ambos hacia la izquierda y su producto escalar, que es la rapidez de transferencia de energía de A al columpio, es positivo: $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_p > 0$. Con el lenguaje de la física, decimos que entran en resonancia el sistema y la fuerza externa, pues coinciden sus frecuencias, $\nu_{\text{ext}} = \nu$. Para que la

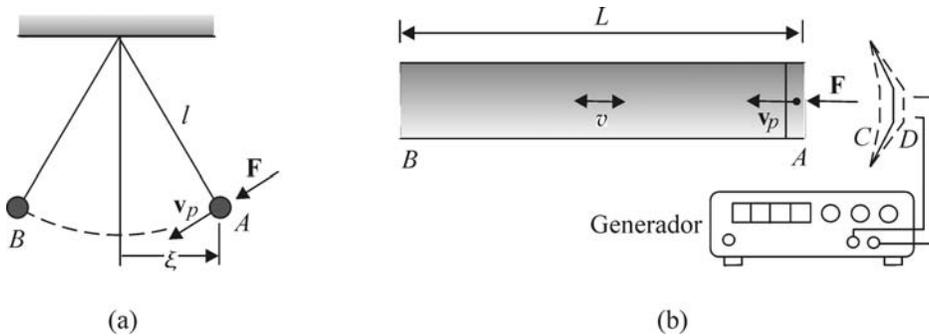


Figura 9.8 Resonancia entre un sistema y una fuerza externa: $F \cdot v_p > 0$.

potencia dada por dicho producto siempre sea positiva, F y v_p deben tener igual frecuencia.

Si reemplazamos el columpio por un tubo con los extremos abiertos y a la persona por una fuente sonora como un parlante (figura 9.8b), la situación física es igual; veámoslo:

La variable v_p es la velocidad de un elemento de volumen de ancho infinitesimal en el extremo abierto A del tubo. La membrana del parlante vibra entre los extremos C y D indicados por las líneas discontinuas. La frecuencia con que la membrana hace el recorrido CDC es la del generador que alimenta el parlante, ν_{ext} . Supongamos que C coincide con una compresión en el extremo A , $\Delta p > 0$. Este Δ recorre el tramo AB ; en B , por ser un extremo abierto, sufre un desfase de π (ejemplo 9.3) y se refleja como una rarefacción (o expansión, $\Delta p < 0$) antes de recorrer de regreso el tramo BA ; en A se refleja con un cambio de fase de π por estar también abierto, e inicia como una compresión un nuevo ciclo ABA . Mientras tanto, si la membrana ha ejecutado un ciclo CDC , entonces la compresión del aire que está iniciando un nuevo ciclo ABA recibe un "empujón" de parte de las compresiones causadas por el parlante,

$$t_{ABA} = t_{CDC}.$$

Como t_{CDC} es el período de la fuerza externa, P_{ext} , y t_{ABA} es el período, P , de un ciclo de la onda dentro del tubo, llegamos a que se presenta resonancia,

$$\nu_{ext} = \nu,$$

y $F \cdot v_p > 0$.

El período de la fuerza externa es igual al tiempo que la perturbación tarda en hacer el recorrido ABA , $P_{ext} = 2L/v$, de donde $\nu_{ext} = 1/P_{ext} = v/2L$. Si esta frecuencia se multiplica por un entero m , el inicio de un ciclo ABA también coincide con una posición C de la membrana y $F \cdot v_p > 0$. Esto es, las frecuencias de resonancia son $\nu = mv/2L$, ecuación igual a la ecuación 9.2, p. 81.

Si el tubo es abierto en A y cerrado en B , la compresión que inicia el recorrido en A no sufre desfase en B donde se refleja, entonces, como una compresión. Al regresar a A se refleja como una expansión, y debemos esperar, en consecuencia, otro recorrido más ABA para que en A se refleje como inició, como una compresión, y podamos decir que Δp en el tubo ha completado un ciclo. Por lo tanto, un ciclo dentro del tubo abierto-cerrado tarda el doble que si fuera abiertoabierto, $t_{ABABA} = 4L/v$; este es el tiempo que debe tardar un ciclo CDC para que $F \cdot v_p > 0$, y $\nu_{ext} = 1/P_{ext} = v/4L$. Vemos que la frecuencia fundamental se reduce a la mitad al tapar un extremo del tubo, tal como ya lo habíamos deducido.

En lugar de un parlante podemos pensar en sonidos procedentes de otras fuentes como la voz de una persona, un instrumento musical, o el ruido que siempre hay en el ambiente. Solo los sonidos con frecuencia igual a una de las frecuencias propias del tubo entran en resonancia con el tubo y se escucha de forma apreciable. Así el tubo funciona como un **filtro acústico**. Esto explica el cambio de la percepción del sonido en el ambiente cuando formamos una cavidad con nuestra mano sobre un oído.

9.4 Efecto Doppler

A comienzos del siglo XIX el estudio de las estrellas dobles indicaba que las frecuencias de la luz emitida por una de las estrellas eran mayores que las de la otra. Christian Doppler, en 1842, lo explicó como un efecto de un acercamiento de una de ellas a la Tierra y un alejamiento de la otra, en su movimiento alrededor del centro de masa del sistema. Predijo que este cambio también lo debía presentar el sonido; Christophorus Buys-Ballott lo comprobó en 1845 con músicos en una estación de tren: situó a varios trompetistas en un vagón y a otros músicos en diferentes puntos de la carrilera, los cuales estimaron el aumento de tono cuando el tren se acercaba y la disminución cuando se alejaba. Después situó a los trompetistas en tierra y a los observadores en el tren. En ambos casos se confirmó la predicción de Doppler.⁴

Definimos como **frecuencia de emisión**, ν , la frecuencia con que llega la onda a un observador en reposo respecto a la fuente. Por ejemplo, es la frecuencia con que el sonido de la sirena de una ambulancia llega a su conductor. Definimos como **frecuencia de recepción**, ν' , la frecuencia detectada por cualquier observador. Llamamos **corrimiento o efecto Doppler**, $\Delta\nu$, a $\Delta\nu = \nu' - \nu$. Es obvio que si el observador está en reposo respecto a la fuente no se presenta tal efecto, $\Delta\nu = 0$. Hallaremos la ecuación que relaciona a ν y ν' para el caso en que la fuente y el observador se muevan con velocidad constante a lo largo de la misma línea recta.

En la figura 9.9 una fuente F se mueve con rapidez v_F y un observador O con rapidez v_O . Cuando hay un acercamiento entre fuente y observador llegan más ciclos por segundo al observador y $\Delta\nu > 0$; cuando hay un alejamiento detecta menos y $\Delta\nu < 0$; cuando la distancia permanece constante $\Delta\nu = 0$. Por ejemplo, un observador en movimiento circular alrededor de una fuente no experimenta efecto Doppler.

Dedujimos varias expresiones para la rapidez de una onda en diferentes medios: $v = \sqrt{T/\mu}$, $v = \sqrt{Y/\rho}$, ...; estas velocidades son medidas *respecto a un sistema de referencia en reposo en el medio* cuyas vibraciones son la onda. Respecto al mismo sistema definimos también a v_F y v_O . Pero como ya consideramos a un observador en movimiento en el medio, la rapidez de las ondas respecto a él es

$$v' = v - v_O. \quad (9.10)$$

Esta velocidad no depende de la velocidad de la fuente.

Supongamos que en la posición 1 de la figura 9.10 la fuente emite un máximo; un tiempo de un período P más tarde el frente de onda correspondiente a ese máximo es una esfera representada por la circunferencia de la figura con un radio vP , pero esta distancia es la longitud de onda, $\lambda = vP$. Durante ese período, la fuente avanza una distancia $v_F P$ hasta la posición 2, y emite el próximo máximo, ya que el tiempo entre dos máximos consecutivos es un período. La distancia entre estos dos máximos consecutivos, en el sentido en que se mueve la fuente, es la nueva longitud de onda

$$\lambda' = vP - v_F P.$$

Factoricemos por P y reemplacémoslo por $1/\nu$,

$$\lambda' = (v - v_F)/\nu. \quad (9.11)$$



Figura 9.9 La frecuencia percibida es diferente de la emitida cuando la distancia fuente-observador cambia.

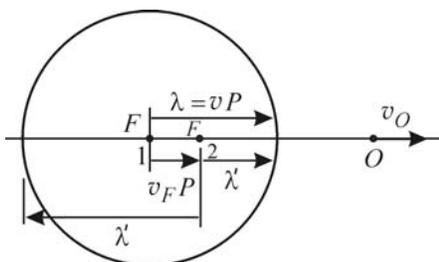


Figura 9.10 Cuando la fuente se mueve cambia λ ; cuando se mueve el observador, cambia v respecto a él.

⁴ Robert Beyer, *Sounds of our times*, American Institute of Physics, 1998, pp. 42-44.

En física prerrelativista los *intervalos* espaciales y temporales son absolutos, esto es, no dependen de la velocidad de quien los mida, y como consecuencia el anterior valor de λ' es válido para todos los sistemas de referencia inerciales y *no depende del movimiento del observador*. Vemos que al frente de la fuente la longitud de onda se acorta, mientras que detrás se alarga (figuras 9.10 y 9.11).

La frecuencia detectada por el observador es el cociente entre las ecuaciones 9.10 y 9.11,

$$\nu' = \frac{v'}{\lambda'} = \nu \frac{v - v_O}{v - v_F}. \quad (9.12)$$

Hay varias maneras de manejar *numéricamente* esta ecuación. Una muy sencilla consiste en reemplazar por valores (+) las velocidades que vayan hacia la derecha y por (-) las que vayan hacia la izquierda, incluyendo la del sonido en el punto donde calculemos a ν' ; por ejemplo, $v = -340$ m/s (ejemplo 9.5, p. 90). Otra manera es considerar siempre positiva a v , y v_O negativa cuando el observador se mueve hacia la fuente y positiva si se mueve en sentido opuesto; además, v_F se considera positiva cuando la fuente se dirige al observador y negativa si se mueve en sentido opuesto a él.

Todas las ondas, entre ellas la luz, presentan efecto Doppler. Una diferencia esencial es que no necesita de un medio para su propagación y no podemos aplicar la ecuación 9.12, donde las diferentes v son las medidas por un observador en reposo en el medio. La frecuencia ν' solo depende de la velocidad relativa fuente-observador v y se halla que está dada por

$$\nu' = \nu \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c},$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío o el aire; $c = 3.00 \times 10^8$ m/s. Cuando $v \ll c$ la anterior ecuación se simplifica,

$$\nu' = \nu(1 - v/c). \quad (9.13)$$

Al medir las frecuencias de la luz emitida por la mayoría de las galaxias se halla que son menores mientras más alejadas estén de la Tierra; este fenómeno se conoce como *corrimiento hacia el rojo*, ya que de los colores es al rojo al que le corresponde menor frecuencia. Se concluye inmediatamente que la mayoría de las galaxias se están alejando de la Tierra con una velocidad mayor mientras más alejadas estén. Esto dio origen a las teorías de un universo en expansión y del *big bang*.

9.4.1 Ondas de choque

Cuando la rapidez de la fuente o del observador es mayor que la de la onda, la ecuación 9.12 no tiene sentido. Es posible que ni siquiera la onda alcance al observador o que este la deje atrás.

En la figura 9.12 una fuente se mueve desde A hasta B en un tiempo t , con $v_F > v$; $AB = v_F t$. Cuando la fuente está en B , el frente de onda producido en A es una esfera de radio $AC = vt$. Se cumple que

$$\text{sen } \theta = \frac{vt}{v_F t} = \frac{v}{v_F}. \quad (9.14)$$

Los demás frentes esféricos producidos en puntos intermedios son tangentes al cono especificado por θ puesto que los respectivos radios decrecen en la misma proporción que la distancia de los puntos a B . *El frente de onda es, entonces, el cono dado por θ , y se le conoce como **onda de choque**.*

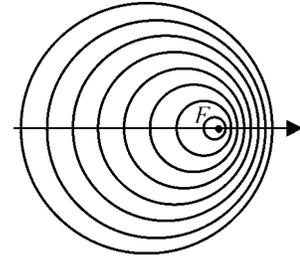


Figura 9.11 La longitud de onda se acorta en el sentido en que se mueve la fuente y se alarga en sentido contrario.

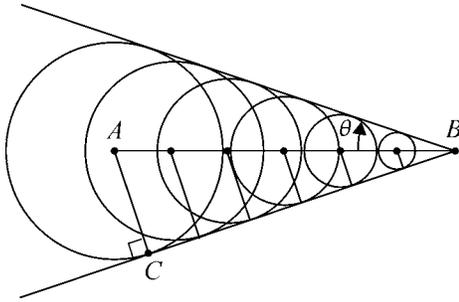


Figura 9.12 Frente de onda cónico debido a una fuente que se desplaza con rapidez mayor que la de la onda.

La relación v_F/v se conoce como el número de Mach. Un avión que vuele con Mach 1.5 quiere decir que su velocidad es $1.5 \times 340 = 510$ m/s, suponiendo que 340 m/s es la rapidez del sonido donde se encuentra el avión.

La acumulación de energía en la superficie del cono es tal que ya no hay una relación lineal entre la fuerza restauradora y la deformación de un elemento de volumen del medio (ley de Hooke, ecuación 4.5, p. 29), por lo que la rapidez de la onda de choque no cumple la ecuación que da la rapidez de las ondas acústicas, ecuación 4.10, p. 30; v va a depender de la amplitud y es mayor que el valor predicho por la ecuación referida. El frente de onda es una región de violentos esfuerzos, cambios de densidad y temperatura; su espesor es menor que la trayectoria media libre de las moléculas del medio donde se produce la onda; en el aire es menor que un micrómetro. La onda de choque va disminuyendo su amplitud hasta que se debilita tanto que llega a obedecer las leyes regulares de las ondas acústicas expuestas en la sección 4.1, p. 27, y es lo que ocurre para los observadores dentro del cono.

La llegada del frente de onda a nuestros oídos es lo que escuchamos como un **trueno sónico**. Note que la porción del frente cónico que llega a un observador en C fue producido por la fuente en A, pero que esta se encuentra en B cuando el trueno llega a C.

Cuando partículas cargadas se mueven en un medio con rapidez mayor que la que lo hace la luz en ese mismo medio, las partículas emiten la **radiación Cherenkov**, como es el caso del resplandor azul que a veces rodea el núcleo de un reactor nuclear sumergido en agua. Así mismo, una lancha de carreras produce una onda de choque en la superficie del agua. Ondas de choque se emplean en medicina para desintegrar cálculos renales y biliares, cuya posición se ha determinado previamente con ultrasonido. Un ejemplo más de onda de choque es el chasquido producido por la punta de un látigo.

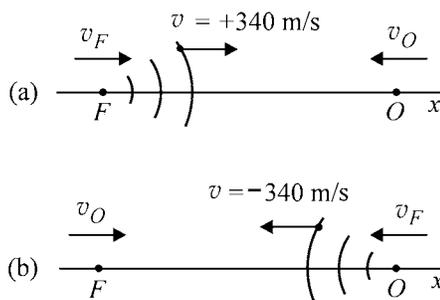


Figura 9.13 Efecto Doppler. En (a) F es la fuente y O el observador, en (b) O es la fuente y F el observador.

Ejemplo 9.5 Una fuente sonora F , que se mueve a 60 km/h en línea recta (figura 9.13a), emite un sonido de 440 Hz —frecuencia fundamental de la nota *la* central—. Un observador O se mueve hacia F a 40 km/h sobre la misma línea. La rapidez del sonido en el aire es 340 m/s. Halle la frecuencia con que las ondas reflejadas por O regresan a F .

Solución. Se sobrentiende que todas las velocidades son con respecto a un observador en reposo en el medio, que en este caso es el aire. Las diferentes cantidades de la ecuación 9.12, p. 89, las vamos a tratar algebraicamente, es decir, como cantidades que intrínsecamente pueden ser positivas, negativas o cero.

Dividamos la solución en dos etapas: (a) Hallar la frecuencia con que las ondas llegan a O y (b) hallar la frecuencia con que las ondas reflejadas por O regresan a F .

(a) La fuente es F y se mueve hacia la derecha, $v_F = +60$ km/h = +16.7 m/s; el observador es O y se mueve hacia la izquierda, $v_O = -40$ km/h = -11.1 m/s; el sonido percibido se propaga hacia la derecha, $v = +340$ m/s; la frecuencia emitida es $\nu = 440$ Hz (figura 9.13a). Reemplacemos en la ecuación 9.12 para hallar la frecuencia con que las ondas llegan a O ,

$$\nu' = 440 \text{ Hz} \frac{(+340 \text{ m/s}) - (-11.1 \text{ m/s})}{(+340 \text{ m/s}) - (+16.7 \text{ m/s})} = 477.8 \text{ Hz}.$$

La frecuencia aumenta puesto que \overline{FO} disminuye.

(b) La frecuencia de las ondas no cambia por reflexión (ni por transmisión), por lo tanto O se convierte en una nueva fuente que emite con $\nu = 477.8$ Hz y se mueve hacia la izquierda con $v_F = -11.1$ m/s; el nuevo observador es F que se mueve hacia la derecha con $v_O = +16.7$ m/s; el sonido percibido por F se propaga hacia

la izquierda con $v = -340$ m/s (figura 9.13b). Reemplazando en la ecuación 9.12, obtenemos la frecuencia de las ondas que regresan a F ,

$$\nu' = 477.8 \text{ Hz} \frac{(-340 \text{ m/s}) - (+16.7 \text{ m/s})}{(-340 \text{ m/s}) - (-11.1 \text{ m/s})} = 518.2 \text{ Hz}.$$

Esta frecuencia es próxima a la de un *do* aunque el sonido emitido inicialmente sea un *la*.

Resumen

La interferencia de ondas viajeras en una columna de aire que se propagan con sentidos opuestos y de igual frecuencia originan ondas estacionarias, con una sucesión de nodos y antinodos iguales a los que se presentan en una cuerda. En los extremos libres hay interferencia constructiva entre las ondas de desplazamiento e interferencia destructiva entre las ondas de presión, coincidiendo un antinodo de desplazamiento con un nodo de presión; en un extremo cerrado es lo contrario. Los modos de vibración son armónicos. Cuando solo un extremo está cerrado, la frecuencia fundamental es la mitad de si ambos extremos están abiertos (o ambos cerrados) y desaparecen los armónicos pares.

El efecto Doppler consiste en que cuando la distancia fuente-observador cambia, la frecuencia detectada es diferente de la emitida. El cambio no depende de la distancia, sino de la rapidez con que esta cambie. Una disminución de la distancia conlleva un aumento de la frecuencia percibida, y un aumento de la distancia implica una disminución de tal frecuencia.

Cuando la rapidez de una fuente es mayor que la de las ondas que produce, se presenta una onda no periódica llamada onda de choque, caracterizada porque el frente de onda es un cono con un ángulo determinado por la rapidez de la fuente respecto a la del sonido o número Mach: $\sin \theta = 1/\text{Mach}$.

Módulo 10

Análisis de Fourier. Velocidades de fase y de grupo

Contenido

- 10.1 Análisis de Fourier
- 10.2 Velocidad de fase y velocidad de grupo. Pulsos

Objetivos

1. Mostrar cómo las ondas ideales seno y coseno son la base para representar ondas reales.
2. Definir qué es un medio dispersivo.
3. Entender los pulsos como una sucesión *temporal* de interferencias constructivas y destructivas entre dos ondas.

Preguntas básicas

1. ¿Todas las ondas se pueden expresar como *una* función seno?
2. ¿Qué son *tono* y *timbre*?
3. ¿Qué diferencias existen entre el sonido de un diapasón y el de una cuerda?
4. ¿Existen sistemas vibrantes cuyos sobretonos no sean armónicos?
5. ¿Con qué rapidez se propaga la onda resultante de la interferencia de un grupo de ondas?
6. ¿Qué aplicación tienen los pulsos?
7. ¿Cómo se llama el fenómeno de que la rapidez de propagación dependa de la frecuencia o de la longitud de onda?
8. ¿En la vida cotidiana se encuentra que la rapidez de una onda sonora dependa de su frecuencia? ¿Y si son ondas luminosas?

Introducción

Los antiguos griegos descubrieron que ocultas en la irregularidad del movimiento planetario subyacen regularidades que el matemático debe descubrir, que lo complejo se puede concebir como una suma de elementos simples. Esta idea es de largo alcance y se aplica en multitud de fenómenos que no tienen relación con la astronomía, y es la clave del *análisis de Fourier*, del que solo daremos un bosquejo. Realmente ya hemos visto varios ejemplos: las ondas estacionarias en una cuerda y en un tubo las obtuvimos como la suma de dos ondas armónicas, e igual haremos con los pulsos.

Representar un onda o señal como la suma de un grupo de ondas armónicas, cada una de ellas con su respectiva velocidad de propagación o



Joseph Fourier (1768-1830), matemático, administrador y egiptólogo francés, publicó la *Teoría analítica del calor*, obra que sería de importancia histórica en física matemática y que originaría el *análisis de Fourier*.

velocidad de fase, nos conduce al concepto de velocidad de grupo, y este a su vez nos permite clasificar los medios en dispersivos y no dispersivos. Veremos también que los pulsos son el resultado de la interferencia de un grupo de dos ondas.

10.1 Análisis de Fourier

A simple vista, en una noche despejada, se distinguen cerca de 5000 estrellas. Su movimiento, visto desde la Tierra, se puede representar con un solo movimiento de una esfera que rota alrededor de un eje norte-sur una vez en 24 horas; cada estrella es un punto fijo a tal esfera. Pero, también a simple vista, y siguiendo el movimiento durante varios meses, se distingue que de ellas hay cinco que no siguen el patrón de movimiento de las demás, pues se desplazan respecto al resto: se detienen, avanzan, retroceden, hacen bucles. A esas cinco "estrellas" errantes se les llamó planetas: Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno. El movimiento aparentemente errático de los planetas se explica de forma simple como un mero efecto de perspectiva, por observarlos desde la Tierra, pero en algunas mentes dicho movimiento les confiere a los planetas un significado especial y desempeñan un papel importante en la pseudociencia de la astrología.

Pensando el movimiento de los planetas, los griegos de hace 2400 años concibieron la idea de representar lo irregular o complejo como una superposición de elementos sencillos, y se dieron a la tarea de descubrir qué suma de movimientos circulares uniformes reproducía el movimiento de los astros. Tal fue la tarea del astrónomo durante 2000 años, hasta que Johannes Kepler, cerca de 1610, reemplazó la complejísima estructura de decenas de movimientos circulares por solo cinco elipses, una por planeta.

Joseph Fourier publicó en 1822 la *Teoría analítica del calor*, donde resolvió el problema de hallar cómo cambia la temperatura con el tiempo en los puntos de una placa bidimensional. La solución consistió en una suma de senos y cosenos, cada uno de ellos con una frecuencia múltiplo de una frecuencia fundamental. La idea de representar el complejo cambio de la temperatura como una suma de sencillas funciones armónicas (situación semejante a la de los planetas) probó ser muy fértil. Con el paso del tiempo la idea se aplicó en terrenos distintos al de la termodinámica, como veremos más adelante, y ha evolucionado hasta llegar a ser hoy en día una herramienta indispensable en campos muy importantes de la física y la ingeniería. En muchos casos la suma se reemplaza por una integral, que como sabemos, *también es una suma*.

La función no armónica $\xi(x, t) = \xi(x - vt)$ de la figura 10.1 tiene período P , y se puede expresar como una superposición de funciones armónicas seno y coseno con una frecuencia múltiplo de la frecuencia fundamental $\nu = 1/P$, mediante la **serie de Fourier**

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= \xi_0 + \xi_{01} \operatorname{sen}(kx - \omega t) + \xi_{02} \operatorname{sen} 2(kx - \omega t) + \dots \\ &\quad + \xi'_{01} \operatorname{cos}(kx - \omega t) + \xi'_{02} \operatorname{cos} 2(kx - \omega t) + \dots \\ &= \xi_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \xi_{0m} \operatorname{sen} m(kx - \omega t) + \sum_{m=1}^{\infty} \xi'_{0m} \operatorname{cos} m(kx - \omega t). \end{aligned} \quad (10.1)$$

A las amplitudes ξ_{0m} y ξ'_{0m} se les llama **coeficientes de Fourier**; hacerle el análisis de Fourier a una señal consiste en hallarle tales amplitudes.

Cuando decimos que un instrumento musical emite determinado *tono*, nos referimos es a la frecuencia fundamental, aunque la mayoría de las veces escuchamos, *simultáneamente*, el modo fundamental y varios de los sobretonos. Para los instrumentos de cuerda¹ y de viento estos son armónicos y cuando producen, por ejemplo, el tono *do central*, al que le corresponde

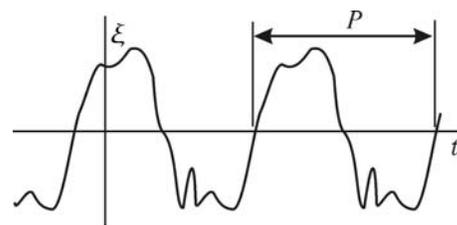


Figura 10.1 Onda periódica no armónica.

¹ Cada sobretono tiene su tiempo de decaimiento; los de un piano, además, se alejan ligeramente de la fórmula $\nu_m = m\nu_f$ y son inarmónicos:

http://www.acoustics.auckland.ac.nz/research/research_files/keane_nzas04.pdf

una frecuencia fundamental $\nu_f = 261.6 \text{ Hz}$, un análisis de las vibraciones ξ de la cuerda o del aire revela una serie como la expresada por la ecuación 10.1. O sea que escuchamos un sonido con $\nu_f = 261.6 \text{ Hz}$, otro con $\nu = 2\nu_f = 2 \times 261.6 = 523.2 \text{ Hz}$, otro con $\nu = 3\nu_f = 3 \times 261.6 = 784.8 \text{ Hz}$, ..., cada uno de ellos con su amplitud o coeficiente de Fourier. ¿Por qué, entonces, si el contenido de frecuencias de dicho *do* es igual para todos los instrumentos, estos suenan distinto? La respuesta es que el conjunto de amplitudes es característico de cada instrumento, y son las que determinan *el timbre*. Decimos entonces que dos instrumentos emiten el mismo tono (igual ν_f) pero tienen diferente timbre (diferente conjunto de amplitudes) y así distinguimos entre los *do* de una guitarra y de un piano.

Podemos construir un conjunto de osciladores electrónicos: uno que oscile con $\nu = 261.6 \text{ Hz}$, otro con frecuencia el doble, otro con frecuencia el triple y así sucesivamente, y con ellos alimentar un parlante. Además, tendremos un botón que al oprimirlo genere cada una de las anteriores frecuencias pero con las amplitudes apropiadas para dar el timbre de una guitarra, otro que las genere pero con las amplitudes para el piano, o para una flauta. Desde hace decenios existen en el comercio teclados electrónicos con las anteriores características.

La importancia de los sobretonos ($m > 1$ en la ecuación 10.1) depende de las características físicas del instrumento, de la intensidad de la excitación, del punto donde esta se aplique, de las propiedades físicas del agente excitador, del tono que se quiera producir. Por ejemplo, los armónicos pares de los tonos bajos de un clarinete no existen; los armónicos de orden mayor a 7 no existen en el piano; en general, los instrumentos de viento son ricos en armónicos.²

En sentido estricto, las componentes de Fourier tienen una frecuencia múltiplo de la fundamental. Pero se puede demostrar que los sobretonos de las ondas en dos dimensiones,³ como en la membrana de un tambor o en un platillo, no tienen una frecuencia que sea un entero por fundamental, esto es, no son armónicos. Al golpear un tambor escuchamos la fundamental y sus sobretonos no armónicos, lo que le da el sonido característico de un golpe; al excitar una cuerda, suena la fundamental y sus sobretonos armónicos, lo que le da su agradable sonido. Nuestro gusto es tal que cuando escuchamos varios sonidos simultáneamente, y las relaciones entre sus frecuencias se pueden describir con números enteros, esto es, por números racionales, el sonido nos parece especialmente agradable. Los sobretonos matemáticos para el tambor dados por la serie de la ecuación 10.1 no coinciden con las frecuencias de los sobretonos físicos a que realmente vibra. En la figura 10.2 se muestran el modo fundamental y los cinco primeros sobretonos de una membrana circular; las líneas interiores son líneas nodales de desplazamiento. El signo (+) quiere decir que el sector respectivo sube, mientras que el (-) baja en contrafase; medio período más tarde se han invertido. Si se esparce arena sobre el tambor, ella se acumula en las partes que no vibran, marcando nítidamente las líneas nodales. Fue Ernst Chladni, cerca de 1790, quien desarrolló este método de visualizar las líneas nodales de los diferentes modos de vibración de una placa de vidrio excitada en un borde por un arco de violín. El Sol también tiene modos normales de vibración; hay lugares de su superficie que oscilan en contrafase con otros.

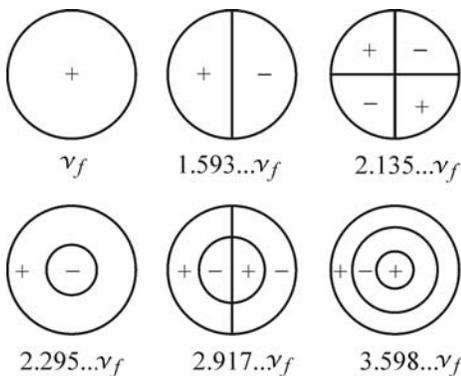


Figura 10.2 Seis primeros modos de vibración de una membrana circular ideal.

² En el artículo "The cosmic symphony", Wayne Hu y Martin White, *Scientific American*, febrero de 2004, aparece una relación interesante entre las ondas sonoras en un tubo, el fondo cósmico de microondas y el universo primitivo.

³ Marcelo Alonso y Edward Finn, *Física*, tomo II, artículo 22.7, "Ondas estacionarias en dos dimensiones".

Un diapasón es un elemento metálico, generalmente en forma de **U**, acoplado a una caja de resonancia (figura 10.3). Cuando lo golpeamos, vibra con una frecuencia fundamental y varios sobretonos no armónicos. En un tiempo muy corto los sobretonos se disipan en el propio diapasón y solo sobrevive el modo fundamental, lo que lo hace muy útil para afinar instrumentos musicales. La situación es muy diferente con un instrumento de cuerda o viento, donde los sobretonos, además de ser armónicos, duran un tiempo comparable al fundamental, e inclusive pueden ser más intensos que él.

Cuando escuchamos simultáneamente un diapasón y una cuerda, se pueden escuchar pulsos debidos a la interferencia del sonido de aquel con el fundamental o uno de los sobretonos de la cuerda; si las frecuencias fueran iguales, no habría pulsos. Una de las frecuencias propias de la caja debe ser igual o muy próxima a la frecuencia del diapasón, para que haya transferencia de energía del diapasón a la caja mediante resonancia.

La luz blanca que penetra en un prisma la podemos representar por una señal no armónica del tipo de la figura 10.1. El prisma le hace la descomposición física de Fourier en señales seno más simples, cada una de ellas con su frecuencia y asociada con un color (figura 10.4). De nuevo, como en el tambor, las frecuencias no son múltiplo de una frecuencia fundamental. Los experimentos de Newton con prismas están entre los más importantes en la historia de la ciencia.



Vea en el multimedia de Física de las ondas la experiencia Vibración de un diapasón.

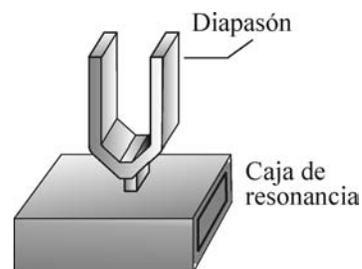


Figura 10.3 La frecuencia del diapasón debe coincidir con una de las frecuencias propias de su caja de resonancia.

10.2 Velocidad de fase y velocidad de grupo. Pulsos

Consideremos un grupo de dos ondas sonoras armónicas Δp_1 y Δp_2 de igual amplitud pero con frecuencias ν_1 y ν_2 ligeramente distintas (figuras 10.5a y b),

$$\Delta p_1(x, t) = \mathcal{P}_{01} \text{sen}(k_1 x - \omega_1 t) \quad \text{y} \quad \Delta p_2(x, t) = \mathcal{P}_{01} \text{sen}(k_2 x - \omega_2 t). \quad (10.2)$$

Las amplitudes de presión son iguales a \mathcal{P}_{01} (ecuación 4.6, p. 29). Que difieran *poco* en sus frecuencias quiere decir que $|\Delta \nu|/\nu_{1 \text{ ó } 2} \ll 1$, con $|\Delta \nu| = |\nu_1 - \nu_2|$.

Aplicando el principio de superposición (sección 7.2, p. 67) la suma de Δp_1 y Δp_2 (línea continua de la figura 10.5c) debe representar una situación física,

$$\Delta p(x, t) = \Delta p_1 + \Delta p_2 = \mathcal{P}_{01} [\text{sen}(k_1 x - \omega_1 t) + \text{sen}(k_2 x - \omega_2 t)].$$

Apliquemos la identidad $\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \text{sen } \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, con $\alpha = k_1 x - \omega_1 t$ y $\beta = k_2 x - \omega_2 t$,

$$\begin{aligned} \Delta p(x, t) &= 2\mathcal{P}_{01} \cos \frac{1}{2}[(k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t] \\ &\quad \times \text{sen} \frac{1}{2}[(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t] \\ &= 2\mathcal{P}_{01} \cos \frac{1}{2}(x\Delta k - t\Delta\omega) \text{sen}(kx - \omega t), \end{aligned} \quad (10.3)$$

donde $\Delta k = k_1 - k_2$, $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, $k = (k_1 + k_2)/2$ y $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$.

El desfase entre los dos campos es

$$\begin{aligned} \Delta\phi(x, t) &= \phi_1 - \phi_2 = (k_1 x - \omega_1 t) - (k_2 x - \omega_2 t) \\ &= (k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t = x\Delta k - t\Delta\omega. \end{aligned} \quad (10.4)$$

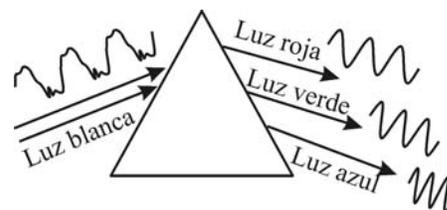


Figura 10.4 El prisma le hace un análisis de Fourier a la luz blanca, esto es, la descompone en ondas más simples que son los diferentes colores.

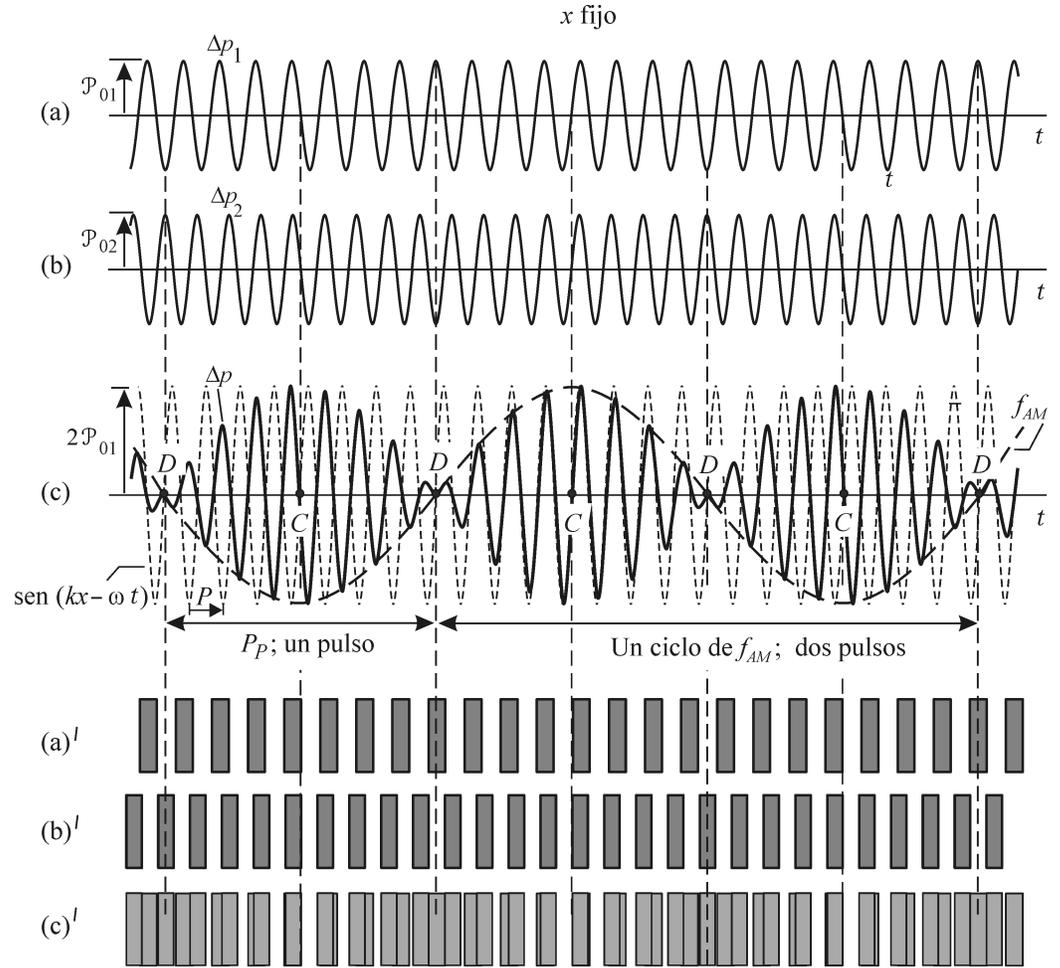


Figura 10.5 La interferencia de dos ondas de frecuencia similar produce pulsos.

Vemos que las ondas no son coherentes ya que el desfase depende del tiempo. Introduzcamos la ecuación anterior en la ecuación 10.3,

$$\Delta p(x, t) = 2\mathcal{P}_{01} \cos(\Delta\phi/2) \sin(kx - \omega t), \quad (10.5)$$

Llamamos **función de amplitud modulada**, f_{AM} , al coeficiente de $\sin(kx - \omega t)$,

$$f_{AM}(x, t) = 2\mathcal{P}_{01} \cos\left(\frac{1}{2}(x\Delta k - t\Delta\omega)\right) = 2\mathcal{P}_{01} \cos(\Delta\phi/2), \quad (10.6)$$

con lo que la ecuación 10.5 queda

$$\Delta p(x, t) = f_{AM} \sin(kx - \omega t). \quad (10.7)$$

En la figura 10.5c se grafican, con líneas a trazos, las funciones $f_{AM}(x, t)$, $\sin(kx - \omega t)$ y, con línea continua, su producto $\Delta p(x, t)$.

Hay ciertos instantes t donde las ondas interfieren constructivamente (puntos C de la figura 10.5c), dados por

$$\Delta\phi = 2m\pi = x\Delta k - t\Delta\omega; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10.8)$$

En esos instantes las ondas se refuerzan y la función de amplitud vale

$$f_{AM} = 2\mathcal{P}_{01} \cos(2m\pi/2) = 2\mathcal{P}_{01} \cos m\pi = \pm 2\mathcal{P}_{01}.$$

Esto nos dice que la amplitud de Δp en los instantes de refuerzo es $2\mathcal{P}_{01}$, como era de esperarse puesto que Δp_1 y Δp_2 tienen igual amplitud \mathcal{P}_{01} ; Δp cambia con una frecuencia promedio $\nu = (\nu_1 + \nu_2)/2$, pues según la ecuación 10.7,

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{(\omega_1 + \omega_2)/2}{2\pi} = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}.$$

Para hallar el tiempo entre dos interferencias constructivas apliquemos el operador Δ a la ecuación 10.8,

$$2\pi\Delta m = \Delta x\Delta k - \Delta t\Delta\omega.$$

En un punto fijo del espacio, $\Delta x = 0$; despejamos el intervalo temporal,

$$\Delta t = -2\pi\Delta m/\Delta\omega.$$

El tiempo entre dos interferencias consecutivas corresponde a $\Delta m = \pm 1$; además, tomemos el valor absoluto para hallar la magnitud de Δt ,

$$\Delta t = 2\pi/|\Delta\omega|. \tag{10.9}$$

En el problema 44, p. 107, se le pide al estudiante mostrar que este es también el tiempo entre dos interferencias destructivas consecutivas. En la figura 10.5c se señalan con la letra D los instantes de interferencia destructiva; note que en dichos instantes Δp_1 está en contrafase con Δp_2 : $\Delta\phi(x, t) = \text{impar } \pi$.

A menor $|\Delta\omega|$, mayor el tiempo entre un máximo y el próximo máximo en un mismo punto del espacio. Al intervalo temporal de la ecuación 10.9 lo llamamos el período de un pulso P_p ; la frecuencia de los pulsos es

$$\nu_p = \frac{1}{P_p} = \frac{|\Delta\omega|}{2\pi} = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2\pi} = |\nu_1 - \nu_2| = |\Delta\nu|. \tag{10.10}$$

Analicemos más la ecuación 10.3: la frecuencia de f_{AM} es $\nu_{AM} = |\nu_1 - \nu_2|/2$; como cada ciclo de f_{AM} contiene dos pulsos (figura 10.5c), la frecuencia de estos es $\nu_p = 2\nu_{AM} = |\nu_1 - \nu_2|$, expresión que acabamos de obtener mediante consideraciones de interferencia constructiva. La frecuencia del factor $\text{sen}(kx - \omega t)$ es $\nu = (\nu_1 + \nu_2)/2$, lo que que implica que $\nu_{AM} \ll \nu$ puesto que ν_{AM} está determinado por la resta de las frecuencias y ν por la suma; o con otras palabras, la amplitud del campo Δp cambia mucho más lentamente que el propio campo Δp .

El desfase entre las ondas que producen los pulsos depende del tiempo, ecuación 10.4. En consecuencia, para observar la transición de interferencia constructiva a destructiva no es necesario un desplazamiento espacial como en el caso de las ondas estacionarias en una cuerda. Basta con fijar x y esperar que el tiempo transcurra. Por esto a los pulsos se les cita como un ejemplo de **interferencia temporal**.

Para reforzar el concepto de pulsos, en la figura 10.5a' dibujamos una serie de rectángulos, uno por cada máximo de la figura a ; igual relación existe entre b' y b . La figura c' es el resultado de trasladar a' y dejarla encima de b' , y es análoga a los pulsos de c . Note que las zonas más oscuras de c' corresponden a interferencia destructiva, pues allí coincide un máximo de a' con un mínimo de b' .

Experimentalmente podemos escuchar pulsos con el arreglo de la figura 10.6: dos diapasones con frecuencias cercanas se golpean para que sus cajas de resonancia emitan sonido. Mientras más cercanas estén sus frecuencias, más espaciados temporalmente están los pulsos; cuando $\nu_1 = \nu_2$,

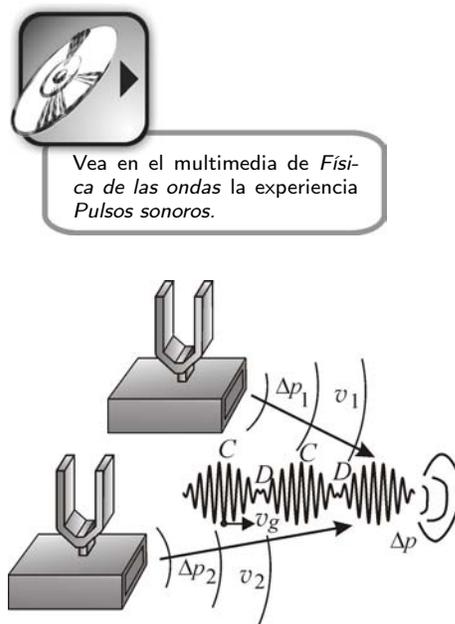


Figura 10.6 Con dos diapasones producimos pulsos.

Vea en el multimedia de Física de las ondas la experiencia Pulsos sonoros.



Vea en el multimedia de *Física de las ondas* la experiencia *Medida de una frecuencia mediante pulsos*.

$P_p = \infty$ y los pulsos desaparecen puesto que $v_p = |\nu_1 - \nu_2| = 0$. Así nos explicamos la utilidad de un diapasón para afinar una nota musical: se hacen sonar simultáneamente el instrumento por afinar y el diapasón y se realizan los cambios necesarios en el instrumento hasta que no se escuchen pulsos; en un instrumento de cuerdas se le cambia la tensión a la cuerda respectiva.

Al intervalo de frecuencias fundamentales entre dos teclas consecutivas en un piano se le llama **semitono**; así que no es posible, entonces, obtener un cuarto de tono. Sin embargo, cuando las pulsamos *simultáneamente*, lo que escuchamos sigue la línea de pulsos dibujada con una línea continua en la figura 10.5c, donde no está ninguna de las dos frecuencias originales, sino la frecuencia intermedia $(\nu_1 + \nu_2)/2$ que corresponde a un cuarto de tono, y escuchamos, además del cuarto de tono, pulsos de frecuencia $|\nu_1 - \nu_2|$. Estos últimos producen una sensación de sonido áspero al que calificamos como *disonante*. Cuando pulsamos dos teclas no vecinas, el cerebro es capaz de diferenciar las componentes ξ_1 y ξ_2 que producen la curva continua referida.

La amplitud *variable* f_{AM} que produce los pulsos es el resultado de un *grupo* de dos ondas. No necesariamente los pulsos avanzan con la velocidad de una de las ondas, sino que lo hacen con la velocidad implícita en la ecuación 10.6, llamada **velocidad de grupo**, v_g , igual al cociente entre la frecuencia angular de la función f_{AM} y el número de onda de la misma función,

$$v_g = \frac{\Delta\omega/2}{\Delta k/2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}.$$

Definimos, con rigor, la velocidad de grupo tomando el límite cuando $\Delta k \rightarrow 0$,

$$v_g = \lim_{\Delta k \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}.$$

Reemplacemos a $\omega = kv$,

$$v_g = \frac{d(kv)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk}.$$

Llamamos **medio no dispersivo** a aquel en el que la rapidez no depende de λ y, por lo tanto, cumple que $dv/dk = 0$. En este caso, $v_g = v$, lo que significa que la velocidad de grupo es igual a la velocidad de fase, v , puesto que todas las componentes del grupo tienen igual velocidad. Llamamos **medio dispersivo** a aquel en el que la velocidad sí depende de la longitud de onda o, por lo tanto, de la frecuencia.

Estrictamente, todo medio material es dispersivo, pero en muchos casos la dispersión pasa desapercibida. Por ejemplo, la rapidez del sonido en el aire está dada por la ecuación 4.13, p. 32, sin importar la frecuencia, y por eso decimos que el aire es un medio no dispersivo de las ondas sonoras; muy cerca de una explosión tal ecuación no se cumple, y la rapidez sí depende de la frecuencia. Si la rapidez dependiera notablemente de la frecuencia en condiciones ordinarias, la experiencia sonora sería muy diferente de la que conocemos, ya que en un concierto, para citar solo un ejemplo, llegarían a nuestros oídos primero unos sonidos que otros, aun de una misma nota (recuerde que esta tiene componentes de Fourier), imposibilitando la experiencia musical; los sonidos graves y los agudos tardan, por fortuna, igual tiempo en llegar a nosotros.

El vacío es un medio no dispersivo de la luz, puesto que todas las frecuencias se propagan en él a 300 000 km/s; el rojo y el azul se propagan

con esta rapidez. Pero cuando la luz penetra en las gotitas de agua de la llovizna, cada color cambia de 300 000 km/s a una rapidez menor que le es característica, y esto provoca un cambio en la dirección de propagación, dando como resultado el arco iris.

Con efecto Doppler se puede saber la velocidad de una tormenta o de un carro. Para tal efecto se envía una onda electromagnética, no sonora, de frecuencia conocida hacia el objetivo, que la refleja hacia la fuente e interfiere allí con la onda inicial produciendo pulsos de frecuencia $\nu_p = |\nu' - \nu|$; esta frecuencia y ν nos dan la velocidad incógnita.

Ejemplo 10.1 Un diapasón ν_d de 440 Hz y una cuerda de una guitarra se hacen sonar simultáneamente (figura 10.7). Se escuchan quince pulsos por segundo. Halle en qué porcentaje se debe cambiar la tensión de la cuerda para afinarla, esto es, para que no se escuchen pulsos.

Solución. (El sonido que se escucha de la guitarra proviene casi en su totalidad de la caja de la guitarra y no directamente de la cuerda, como erróneamente puede sugerir la figura. El diapasón también debe ir sobre una caja de resonancia para que dé un buen volumen). Sean ν_d la frecuencia del diapasón, ν_m la de la cuerda y ν_p la de los pulsos.

Al golpear un diapasón se producen varias frecuencias, pero solo la fundamental sobrevive un tiempo mucho mayor que los sobretonos (ningún sobretono de un diapasón es armónico) y así la frecuencia del diapasón es única. Con una cuerda es diferente: al excitarla, la fundamental y varios sobretonos, que sí son armónicos, tienen amplitudes y tiempos de duración similares. Si uno de los armónicos de orden m tiene su frecuencia cercana a ν_d , debido a la interferencia de ese armónico con el sonido del diapasón se escuchan pulsos de frecuencia (ecuación 10.10)

$$\nu_p = |\nu_m - \nu_d|.$$

Según la ecuación 8.10, p. 74,

$$\nu_p = \left| \frac{m}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} - \nu_d \right|.$$

Despejemos,

$$\frac{m}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \nu_d \pm \nu_p. \tag{10.11}$$

Para que no se presenten pulsos la tensión se debe cambiar hasta que $\nu_m = \nu_d$. Si α es la fracción del cambio, la nueva tensión es $T + \alpha T$ y

$$\nu_p = 0 = \frac{m}{2L} \sqrt{\frac{T + \alpha T}{\mu}} - \nu_d = \frac{m}{2L} \sqrt{\frac{T(1 + \alpha)}{\mu}} - \nu_d = \frac{m}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \sqrt{1 + \alpha} - \nu_d.$$

Reemplacemos la ecuación 10.11 en la anterior ecuación,

$$0 = (\nu_d \pm \nu_p) \sqrt{1 + \alpha} - \nu_d.$$

Los datos del ejemplo son $\nu_d = 440$ Hz y $\nu_p = 15$ Hz. Despejemos la fracción buscada α y reemplacemos los datos,

$$\alpha = \left(\frac{\nu_d}{\nu_d \pm \nu_p} \right)^2 - 1 = \begin{cases} 0.072, & \nu_p = -15 \text{ Hz;} \\ -0.065, & \nu_p = +15 \text{ Hz.} \end{cases}$$

No hay frecuencias negativas; $\nu_p = -15$ Hz solo quiere decir $\nu_m < \nu_d$. En términos de porcentaje, si la cuerda está destemplada hay que incrementar la tensión en $100\alpha = 7.2\%$ para que la frecuencia del armónico aumente de 425 a 440 Hz; si la cuerda está sobretemplada, hay que disminuir la tensión en $100\alpha = 6.5\%$ para que la frecuencia del armónico disminuya de 455 a 440 Hz. El signo (-) en el valor $\alpha = -0.065$ quiere decir precisamente que es necesario mermer la tensión.

Note que en la solución no fue necesario conocer los valores de m , L , T ni μ .

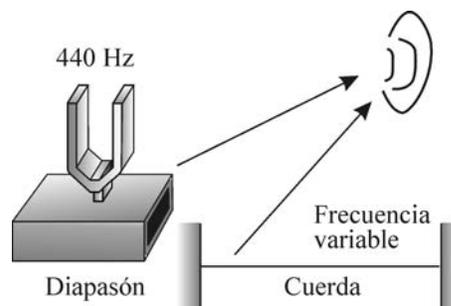


Figura 10.7

Resumen

Las funciones periódicas seno y coseno son una base útil para representar cualquier señal u onda. En algunos casos se utilizan como una suma, y en casos más generales como una integral. Hacer el análisis de Fourier consiste en hallar las amplitudes de las señales armónicas cuya suma nos reproduce la función inicial.

Cuando dos sonidos con frecuencias semejantes se presentan en el mismo espacio y tiempo decimos que interfieren produciendo pulsos, que son la alternancia entre momentos de interferencia constructiva y momentos de interferencia destructiva. El período de un pulso es el tiempo entre dos interferencias constructivas o dos destructivas consecutivas. Son un ejemplo de interferencia temporal. Examinando los pulsos electromagnéticos resultantes de la interferencia entre una onda que se envía hacia un cuerpo, con la onda por él reflejada, se averigua la velocidad del cuerpo.

Cuando la amplitud resultante de un grupo de ondas se desplaza con velocidad v_g diferente a la de las ondas, el medio se llama dispersivo. O, lo que es equivalente, un medio dispersivo es aquel en el que la velocidad de una onda depende de su longitud de onda, o de su frecuencia.

Problemas del capítulo 1

- 1 Muestre que $kx \pm \omega t = (2\pi/\lambda)(x \pm vt)$.
- 2 Halle la fase de la onda de desplazamiento $\xi(x, t) = -\xi_0 \cos(kx - \omega t)$.
- 3 Halle las dimensiones de (a) $\partial\xi/\partial x$, (b) $\partial^2\xi/\partial x^2$, (c) ∇^2 , (d) $\partial\xi/\partial t$, (e) $\partial^2\xi/\partial t^2$. (f) Verifique que las siguientes ecuaciones son dimensionalmente correctas:

$$\frac{\partial^2\xi(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2\xi(x, t)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2\xi(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \xi(x, t).$$

- 4 Considere el pulso de onda, en $t = 0$ (distancia en m, tiempo en s), dado por la función de onda $\xi(x, t)|_{t=0} = A(2 + 3x^2)$; A es una constante. (a) Escriba una expresión para $\xi(x, t)$, si el anterior pulso viaja hacia la izquierda con una rapidez de 5 m/s; (b) pruebe que la expresión del literal anterior cumple la ecuación de onda.
- 5 Tomando medidas con una regla en la figura 3.3, p. 20, halle ϵ_l con la ecuación 3.2. (El valor que halle es válido solo para el instante al que corresponde la figura).
- 6 En la figura 3.4, p. 22, ¿cuánto vale $\xi(L_0/2)$?
- 7 Un sonido para ser audible debe tener una intensidad y frecuencia adecuadas. La frecuencia para ser audible por un ser humano debe estar entre 20 y 20 000 Hz; ¿en qué rango está la longitud de onda correspondiente, cuando el medio es (a) aire y $v = 340$ m/s, (b) agua y $v = 1500$ m/s?
- 8 Una persona, alejada de las escalas de una pirámide, palmorea una vez al frente de ella. La distancia horizontal entre escalas contiguas es 1.00 m, la rapidez del sonido es 340 m/s. Halle la longitud de onda (explique su respuesta) y la frecuencia con que el sonido reflejado por las escalas regresa a la persona.
- 9 Señale cuál de las siguientes funciones $\xi(x, t)$ cumple la ecuación de onda y dé las razones (vea las secciones 2.3, p. 14, y 7.2, p. 67; x en metros y t en segundos): (a) $(3x - 2t)/(x + 2t)$, (b) $\ln(x^2 + 6t) + \sin(2x - 7t)$, (c) $\log(t - \sqrt{8}x) + \exp(\sqrt{2}x + t/2)$.
- 10 Pruebe, con el binomio de Newton, que si $a \ll 1$, entonces $(1 + a)^{-1} \approx 1 - a$, y que por lo tanto la ecuación 4.2, p. 27, cuando $\partial\xi/\partial x \ll 1$, se puede aproximar a $\rho = \rho_0(1 - \partial\xi/\partial x)$.
- 11 Muestre que el promedio por período de $\sin^2(kx - \omega t)$ definido como

$$[\sin^2(kx - \omega t)]_{\text{pro}} = \frac{1}{P} \int_t^{t+P} \sin^2(kx_0 - \omega t) dt$$

es 1/2. Muestre, además, que es igual al promedio de $\cos^2(kx - \omega t)$.

- 12 Sean v_p la rapidez de las ondas P (longitudinales) y v_s la rapidez de las ondas S (transversales) que se producen en un terremoto; $\Delta v = v_p - v_s$. Sea t_p el tiempo que tarda en viajar la onda P entre el foco y un sismógrafo y t_s el tiempo respectivo para la onda S ; $\Delta t = t_s - t_p$. Muestre que la distancia entre el foco y el sismógrafo está dada por $x = v_p v_s \Delta t / \Delta v$. Evalúe esta expresión para $v_p = 8$ km/s, $v_s = 3.5$ km/s y $\Delta t = 51$ s.

- 13 A partir de las ecuaciones

$$\rho = \rho_0 - \rho_0 \frac{\partial\xi}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho_0} \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2},$$

obtenga la ecuación de onda para la densidad,

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho_0} \frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}.$$

- 14** (Este problema es una continuación del ejemplo 4.5, p. 35).
 (a) ¿Qué elementos de masa i ($i = -3, -2, \dots, 32, 33$) en la figura 4.13d, p. 37, están en su posición de equilibrio? (b) ¿Qué elementos i están más separados de su posición de equilibrio? Mida con la regla de la figura y dé el valor respectivo de x_i y $\xi(x_i)$, teniendo en cuenta que a la derecha es (+) y a la izquierda es (-). (c) Como el tubo es de sección transversal constante, el ancho de cada elemento es inversamente proporcional a su densidad. En Medellín, $\rho_0 \approx 1.00 \text{ kg/m}^3$ y $p_0 = 640 \text{ mm Hg}$; estos son los valores para todos los elementos de la figura 4.13a. ¿Qué elementos i de la figura 4.13d tienen $\rho = \rho_0 = 1.00 \text{ kg/m}^3$?, ¿cuánto vale ξ para estos elementos? (d) ¿Está de acuerdo el resultado del anterior literal con la ecuación 4.3, p. 28? ¿Está de acuerdo con que el desfase entre la onda de densidad y la de desplazamiento sea 90° ? (e) ¿Qué elementos i tienen máxima densidad, y cuáles mínima?; ¿cuánto vale ξ para estos elementos? (f) ¿Está de acuerdo el resultado del anterior literal con la ecuación 4.3? (g) Mida ξ_0 y λ . Si la temperatura atmosférica es 25°C , calcule la frecuencia del sonido. (h) ¿Cuál es la intensidad y el nivel de intensidad sonora? (i) ¿Cuál es la amplitud de la onda de presión?; ¿entre qué valores fluctúa la presión? (j) ¿Es constante la temperatura a lo largo del tubo? (tenga presente que la propagación del sonido es fundamentalmente un proceso adiabático, esto es, no hay flujo de calor entre el elemento i y los elementos $i - 1$ e $i + 1$). (k) Si en la figura 4.13d un elemento i de masa tiene un volumen el doble que otro, podemos afirmar que su densidad es la mitad; ¿se puede afirmar también que la presión es la mitad? (recuerde que $PV = nRT$).
- 15** Se produce en Medellín un sonido con una amplitud de presión de 1.00 mm Hg . La presión atmosférica es 640 mm Hg y la temperatura 28.0°C ; suponga que la densidad del aire es 1.0000 kg/m^3 . Halle (a) los límites entre los que fluctúa la presión instantánea, (b) la amplitud de densidad y los límites entre los que fluctúa la densidad instantánea.
- 16** Interprete *gráficamente* el campo ξ en el entorno de x_C y x_D (figura 4.11, p. 34) y determine si en dichos puntos no hay cambio de presión ($\Delta p = 0$), si son de compresión ($\Delta p > 0$) o descompresión ($\Delta p < 0$). Utilice la definición de ξ , p. 5.
- 17** Halle el cambio de la rapidez del sonido en el aire por unidad de cambio en la temperatura a 0.0°C .
- 18** En un extremo de una cuerda horizontal se acopla un oscilador que vibra a 50.0 Hz . Del otro extremo, que pasa por una polea, se suspende una masa de 100 g . La distancia entre el oscilador y la polea es 1.50 m y la masa de la cuerda es 2.00 g . Sea ξ_0 la amplitud de las oscilaciones del punto que usted escoja de la cuerda; trate a esta como ideal. Halle (a) el tiempo que tarda un punto de la cuerda en completar un ciclo y la longitud de la trayectoria que recorre en este tiempo, (b) el tiempo que tarda una perturbación transversal en viajar entre el oscilador y la polea, (c) la distancia que recorre la perturbación en un período, esto es, la longitud de onda. (d) ¿Qué quiere decir "trate la cuerda como ideal"?
- 19** Una varilla vibra con movimiento armónico simple verticalmente entre dos puntos separados 1.40 cm ; tarda $1/60$ de segundo en completar un ciclo. A la varilla se acopla una cuerda horizontal muy larga (trate, entonces, las ondas como viajeras y no como estacionarias; esto es, no preste atención a las ondas reflejadas en el otro extremo), de densidad lineal 4.00 g/m y con una tensión de 0.976 N . Calcule (a) la máxima rapidez de un punto de la cuerda, (b) la máxima fuerza sobre un pequeño segmento de la cuerda de 1.00 mm de longitud, (c) la máxima potencia instantánea y la potencia promedio transferida a la cuerda.
- 20** Muestre que (a) la magnitud de la razón entre la rapidez de una partícula de una cuerda tensa y la rapidez de la onda es igual a la pendiente de la cuerda en el punto donde está la partícula, (b) el máximo valor de la anterior razón es igual a $k\xi_0$.
- Nota:* de este problema y el ejemplo 4.4, p. 35, se concluye que decir "bajas deformaciones" también implica que en todo instante *la velocidad de una partícula debe ser mucho menor que la velocidad de la onda*.
- 21** Demuestre que en una cuerda compuesta (a) la amplitud de la onda transmitida es mayor que la de la onda incidente, si al cambiar de medio la densidad lineal de masa disminuye; (b) la amplitud reflejada no puede ser mayor que la incidente.

(c) Halle el límite máximo del coeficiente de transmisión. (d) ¿Cerca del anterior límite, cuánto es, en términos de la amplitud incidente, la amplitud reflejada y la transmitida?

22 Un alambre de cobre de 1.00 mm de diámetro se une a un alambre de aluminio de 4.00 mm de diámetro. Desde el cobre una onda transversal incide en la interfaz, con una frecuencia de 200 Hz y una amplitud de medio milímetro. La tensión del alambre compuesto es 50 N, $\rho_{Cu} = 8700 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{Al} = 2700 \text{ kg/m}^3$. Halle (a) la rapidez de las ondas en el cobre y en el aluminio, (b) la amplitud de las ondas reflejada y transmitida, (c) la potencia de las ondas incidente y reflejada, (d) la potencia de la onda transmitida.

23 Un alambre de cobre (tabla 4.1, p. 29) consta de dos secciones de 1.00 m de longitud cada una (figura 10.8); la densidad lineal de masa de la sección izquierda es 4.00 g/m y de la sección derecha es 1.00 g/m; de esta sección se suspende una masa de 1.00 kg. (a) Si en el extremo Q se produce una perturbación transversal como se indica con la flecha vertical, ¿cuánto tarda en llegar al otro extremo P la señal así producida? (trate al alambre como una cuerda); (b) si en P se produce un tirón breve como se indica con la flecha gruesa horizontal, ¿cuánto tarda en llegar a Q la señal así producida? (trate al alambre como una barra); (c) ¿qué fracción de la potencia producida en el literal (a) se transmite a la sección izquierda y llega a P?

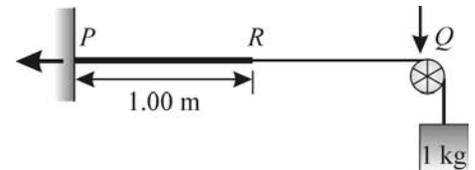


Figura 10.8

24 Una onda sonora viajera, plana y armónica, de 700 Hz, se propaga en el aire con una rapidez de 350 m/s. Su dirección de propagación forma el mismo ángulo α con cada uno de los tres ejes cartesianos, el nivel de intensidad es 70.0 dB, la densidad del aire es 1.00 kg/m^3 . (a) Halle α ; (b) halle la amplitud de la onda de desplazamiento; (c) halle la amplitud en x de las oscilaciones de un punto del medio; (d) escriba una expresión, en función del tiempo, para la componente ξ_x de la onda de desplazamiento, en el punto P de coordenadas, en metros, (2, 4, 6); (e) halle la energía sonora en una región del espacio de dimensiones, en metros, $10 \times 6 \times 4$.

25 ¿En qué porcentaje se incrementan las frecuencias propias de vibración de una cuerda finita cuando la tensión se incrementa 20.0%?

26 Se suspende una masa de 50.0 g de una cuerda de 1.80 m de longitud como se muestra en la figura 10.9. Mediante un oscilador acoplado a la cuerda se produce una onda estacionaria con tres vientres. Con luz estroboscópica de 5400 destellos por minuto se observa la cuerda en las posiciones 1 a 6; en estas dos últimas la cuerda está instantáneamente en reposo. La figura no está a escala y la pendiente se ha exagerado. Halle (a) el tiempo entre dos posiciones consecutivas de la cuerda; (b) el período, la frecuencia, la longitud de onda y la rapidez de las ondas viajeras que producen la onda estacionaria; (c) la masa de la cuerda; (d) la rapidez del punto A cuando pasa por la posición de equilibrio.

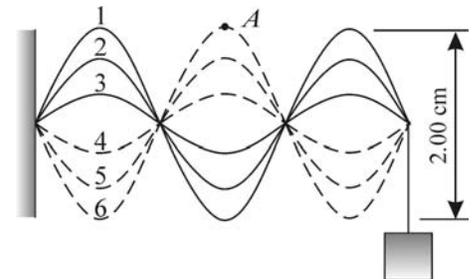


Figura 10.9

27 Una cuerda de 80.0 cm de largo que está tensionada con ambos extremos fijos tiene dos frecuencias de resonancia consecutivas en 80.0 y 100 Hz. Halle (a) la frecuencia fundamental, (b) el orden de los armónicos de 80.0 y 100 Hz, (c) la rapidez con que se propaga una perturbación en la cuerda.

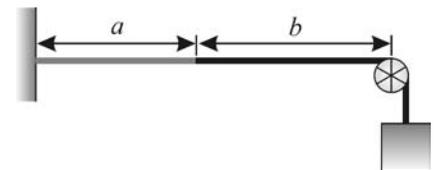


Figura 10.10

28 Una cuerda de área transversal uniforme está compuesta por las secciones a y b (figura 10.10). Se quiere hacer vibrar toda la cuerda de modo que el punto de unión de las secciones sea un nodo. (a) Demuestre que la relación entre el número de vientres m_a y m_b está dado por el número racional

$$\frac{m_a}{m_b} = \sqrt{\frac{\rho_a L_a}{\rho_b L_b}}$$

(b) Si se quiere obtener dicho nodo con la mínima frecuencia posible, halle m_a y m_b si la sección a es de cobre, $\rho_a = 8.9 \text{ g/cm}^3$, y la b es de aluminio, $\rho_b = 2.7 \text{ g/cm}^3$, $L_a = 82.62 \text{ cm}$ y $L_b = 100.00 \text{ cm}$. (c) Halle el valor de dicha mínima frecuencia si el área transversal de la cuerda es 1.00 mm^2 y la masa suspendida que la tensiona es 2.00 kg. (d) ¿En qué sección es mayor la amplitud? Explique. (e) Dibuje la cuerda con la onda estacionaria. (f) ¿Para qué próxima frecuencia el punto de unión vuelve a ser un nodo?; ¿cuánto valen m_a y m_b ? Dibuje la cuerda.

29 Un tubo de 40.0 cm de largo está abierto en un extremo y cerrado en el otro. Se halla que tiene dos frecuencias de resonancia consecutivas en 1080 y 1512 Hz. Halle



Vea en el multimedia de Física de las ondas la experiencia Ondas en una cuerda compuesta.

(a) la frecuencia fundamental, (b) el orden de los armónicos de 1080 y 1512 Hz, (c) la rapidez del sonido y la temperatura del aire.

30 Un tubo tiene un extremo abierto en el origen y un extremo cerrado sobre el eje x , a una distancia L del origen. Los parámetros λ , v y ξ_0 son conocidos. (a) ¿Cuál de las siguientes funciones puede representar una onda estacionaria dentro del tubo: $\xi = \xi_0 \sin kx \cos \omega t$ o $\xi = \xi_0 \cos kx \cos \omega t$? Explique. (b) Determine si cada uno de los extremos es un nodo o un antinodo de presión. (c) Si la onda estacionaria corresponde al primer sobretono, escriba la función de onda, en función del tiempo, para los puntos del medio situados en la posición del primer antinodo de desplazamiento después del origen. (d) ¿Cuál es la amplitud de las ondas viajeras cuya interferencia produce la onda estacionaria?

31 Cierta barra de un órgano se comporta como un tubo abierto-abierto. En un extremo está la fuente de sonido y por el otro se radia al aire circundante. El tubo es de longitud 38.6 cm y diámetro 2.00 cm, la temperatura del recinto donde se encuentra el órgano es 24.3 °C. Calcule la frecuencia fundamental y los dos primeros sobretonos del tubo (a) sin tener en cuenta la corrección de extremo libre ϵ y (b) teniéndola en cuenta (ecuación 9.1, p. 81).

32 Suponga que las ondas en una barra se describen con la función de onda (longitud en m, tiempo en s)

$$\xi(\mathbf{r}, t) = 10^{-3} \sin(\sqrt{3}\pi x + \pi z) \cos(6000\pi t) \mathbf{u}_y.$$

La barra mide 75.0 cm; el extremo A está en el origen y el B en la dirección de propagación de las ondas. Halle (a) si la onda es transversal o longitudinal, viajera o estacionaria (explique); (b) el valor del número de onda; (c) los ángulos α (con el eje x), β (con el eje y) y γ (con el eje z) que la barra y el vector de propagación forman con los ejes cartesianos; (d) la rapidez de propagación de las ondas. (e) Con las coordenadas de los extremos determine si son nodos o antinodos de desplazamiento, (f) la frecuencia fundamental de la barra, (g) el orden del armónico descrito por la función dada.

33 (a) ¿Un sonido cuatro veces más intenso que otro, cuántos decibeles más tiene? (b) ¿En qué rango debe estar una intensidad sonora para que le correspondan decibeles negativos?

34 Cerca de una máquina perforadora de calles el nivel de intensidad del sonido es 105 dB y cerca de un automóvil en marcha es 45 dB. ¿Cuántas veces es mayor la amplitud de la onda de presión de la perforadora que la respectiva amplitud del automóvil?

35 Con datos tomados de la figura 6.4, p. 53, estime cuántas veces mayor es la mínima intensidad audible a 30 Hz que la mínima intensidad audible a 4 kHz.

36 Muestre que el nivel de intensidad a una distancia r de una fuente puntual que emite isotrópicamente en un medio homogéneo está dado por

$$\beta = a - b \log r,$$

con a y b constantes.

37 Una persona hablando normalmente en un salón produce un nivel de intensidad de 65 dB; ¿cuántas personas se necesitan para que, hablando simultáneamente, produzcan un nivel de 85 dB?

38 La Tierra está 2.5 veces más alejada que Mercurio del Sol y Plutón está 40 veces más alejado que la Tierra del Sol; ¿cuántas veces es mayor la intensidad de la luz solar en Mercurio que en la Tierra?; ¿cuántas veces mayor es en la Tierra que en Plutón?

39 Una fuente sonora puntual F emite uniformemente en todas las direcciones sobre el piso (figura 10.11); los frentes de onda son, entonces, hemisféricos. A 4.00 m de la fuente la intensidad sonora es 0.0500 W/m^2 . Halle la energía emitida, en sonido, durante una hora.

40 Un parlante situado en el origen emite en sonido 50.0 W a 440 Hz. Suponga que la radiación sonora es isotrópica y armónica, la rapidez del sonido es 350 m/s y

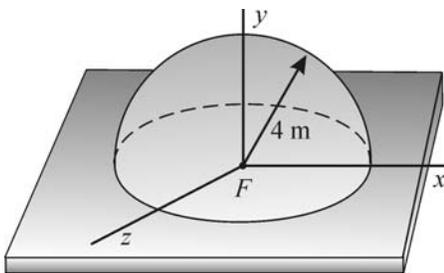


Figura 10.11

la densidad del aire es 1.00 kg/m^3 . (a) Halle, en mm, la amplitud de las vibraciones del aire a 1.00 m del parlante. (b) Escriba una expresión para la onda de desplazamiento que avanza en sentido $+y$. Especifique la dirección de este desplazamiento y diga por qué. (c) Si la onda fuera transversal, ¿cuál sería la dirección del anterior desplazamiento?

41 Una fuente sonora ejecuta un movimiento armónico simple. Un observador se encuentra en reposo en la línea de las oscilaciones, a 50 m del punto de equilibrio de la fuente; la mínima frecuencia que percibe es 900 Hz y la máxima es 1000 Hz , la rapidez del sonido es 350 m/s . (a) Halle la máxima rapidez de la fuente y la frecuencia de emisión. (b) Especifique en qué punto se encuentra la fuente y hacia dónde se mueve cuando se producen los sonidos que se escuchan con las frecuencias escritas dadas (c) Halle el tiempo transcurrido entre la producción de esos sonidos y su percepción por el observador.

42 El movimiento de una fuente sonora es circular uniforme; un observador en reposo está en el plano de la circunferencia y por fuera de ella. Muestre en qué punto de la trayectoria de la fuente se produce el sonido que el observador escuchará con mayor frecuencia, en cuál se produce el de mínima frecuencia y en qué puntos los que se escucharán sin cambio de frecuencia.

43 Dos aves A y B vuelan la una hacia a la otra, A a 10.0 m/s y B a 20.0 m/s ; la rapidez del sonido es 350 m/s . Estos valores son respecto a un sistema de referencia en reposo en el aire. Ambas aves emiten sonidos de 500 Hz . (a) Halle la frecuencia de los pulsos percibidos por cada una de las aves y que se producen por la interferencia de su propio sonido con el que le llega de la otra ave. (b) Halle la longitud de onda del sonido emitido por A , en el sentido en que A se mueve y detrás de A ; ¿dependen estos valores del movimiento de un observador diferente al propio A ? (c) ¿Según A , con qué rapidez se le acerca el sonido de B ?; ¿según B , con qué rapidez se le acerca el sonido de A ?

44 Muestre que el tiempo entre dos interferencias destructivas consecutivas de las ondas dadas por la ecuación 10.2, p. 97, en un punto del espacio, lo da también la ecuación 10.9.

45 La interferencia de dos ondas de frecuencia cercana produce pulsos. Demuestre que en el tiempo que dura un pulso una onda ejecuta un ciclo más que la otra.

46 Dos parlantes se conectan a sendos generadores de onda (figura 10.12). Los pulsos producidos por la interferencia de las ondas sonoras emitidas se detectan con un micrófono, cuya señal se examina con un osciloscopio. En la pantalla de este se observa la señal mostrada con una línea continua en la figura 10.5c. En el osciloscopio se lee que a P (figura 10.5c) le corresponden 2 milisegundos. Tomando datos de dicha figura, halle la frecuencia de los sonidos emitidos. Exprese el resultado con tres cifras significativas.

47 Un diapasón y cierto instrumento de viento, que se puede tratar aproximadamente como un tubo abierto-cerrado, están en resonancia a 370 Hz (*fa* sostenido) cuando la temperatura es 27.0°C , y al sonar simultáneamente no producen pulsos. ¿Cuál es la frecuencia de los pulsos si la temperatura sube a 30.0°C ?

48 Inicialmente, un espectador está parado viendo pasar una banda de música como se muestra en la figura 10.13. Las dos trompetas están afinadas a 440 Hz , los trompetistas marchan a 1.00 m/s , la rapidez del sonido es 350 m/s . (a) ¿Cuál es la frecuencia de los pulsos escuchados por el espectador, debidos a las dos trompetas? (b) ¿Depende la frecuencia de los pulsos del lateral anterior de la distancia entre el observador y los trompetistas? Explique. (c) Cuando un tiempo después ambos trompetistas estén al lado izquierdo del espectador, ¿cuál es la frecuencia de los pulsos?

49 Una cuerda de un violín que debería estar afinada a 440 Hz (*la* central) realmente no lo está ya que se oyen tres pulsos por segundo cuando se toca junto con un diapasón de 440 Hz . (a) Halle los valores posibles de la frecuencia fundamental de la cuerda desafinada. (b) Si la cuerda desafinada se tocara junto con un diapasón *la* de 880 Hz , ¿se escucharían pulsos debidos al sonido del diapasón y a alguno de los armónicos de la cuerda?; ¿de qué frecuencia serían los pulsos? (c) Cuando se aumenta un poco la tensión de la cuerda, crece la frecuencia de los pulsos; ¿cuál es

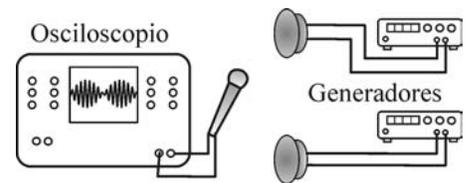


Figura 10.12



Figura 10.13

la frecuencia fundamental de la cuerda desafinada, antes de aumentarle la tensión?

50 Una patrulla A de la policía emite una onda electromagnética de 2.00×10^9 Hz hacia otro automotor B . (a) Los pulsos producidos por la interferencia entre la onda emitida y la que regresa reflejada por B a la patrulla tienen una frecuencia de 420 Hz. Halle la velocidad con que B se aleja —o se acerca— de A . (Se supone que B se mueve en la línea AB ; debe aplicar dos veces la ecuación 9.13, p. 89). (b) Sea ν la frecuencia de emisión y ν_p la frecuencia de los pulsos; demuestre que la magnitud de la velocidad de B es, con muy buena aproximación, $v = c\nu_p/2\nu$.

51 Demuestre que cuando v_O y v_F son de magnitud mucho menor que v , la ecuación 9.12, p. 89, se puede aproximar a

$$\nu' = \nu(1 - v_{OF}/v),$$

donde v_{OF} es la rapidez de separación de O respecto a F . Note que esta ecuación es igual a la ecuación 9.13, p. 89.

52 Un avión vuela horizontalmente con Mach 2.00 a 6000 m de altura; la rapidez del sonido es 326 m/s. (a) ¿Cuánto tiempo después de pasar el avión por la vertical de un observador en tierra este escucha el trueno sónico? Suponga que la rapidez del sonido no depende de la altura. (b) ¿A qué distancia estaba el avión de esa vertical cuando produjo el trueno que escucha nuestro observador? (c) Realmente la temperatura atmosférica depende notablemente de la altura, y por lo tanto también la rapidez del sonido; dentro de los primeros 18 km, a mayor altura menor es la temperatura. Describa, cualitativamente, cómo cambia este hecho la forma del frente de onda cónico.

Capítulo 2

Ondas electro- magnéticas

Contenido

Módulo 11

La ecuación de onda en el vacío

Módulo 12

Ondas planas

Módulo 13

Energía de una onda
electromagnética

Módulo 14

Polarización. Presión de radiación



La luz solar es el ejemplo más notable de ondas electromagnéticas: hace posible la fotosíntesis de las plantas, determina nuestro clima, nos permite ver.

Presentación

La luz, los rayos infrarrojos y ultravioletas y otras radiaciones provenientes del Sol rigen la vida y el clima de nuestro planeta. La importancia del Sol la reconocieron culturas antiguas y lo adoraron.

Newton imaginó la luz como un flujo de partículas que representa el poder de Dios para dar vida a la materia inerte.¹ La concepción de la luz como una onda electromagnética se debe a James Clerk Maxwell en la segunda mitad del siglo XIX y la predijo a partir de un desarrollo teórico de sus leyes. Las cantidades intensidad energética, densidad de energía, potencia y presión de radiación, asociadas con una onda, se deben expresar en términos de lo que es la luz: campos electromagnéticos variables con el tiempo.

¹ Betty Dobbs, *The Janus faces of genius. The role of alchemy in Newton's thought*, Cambridge University Press, 2002, p. 40.

Módulo 11

La ecuación de onda en el vacío

Contenido

- 11.1 Las ecuaciones de onda en el vacío
- 11.2 Algunos comentarios a raíz de las ecuaciones de onda
 - 11.2.1 Breve historia de algunos símbolos

Objetivos

1. Obtener las ecuaciones de onda para los campos eléctrico y magnético en el vacío.
2. Mostrar algunas características del modelo físico de Maxwell.
3. Presentar una reseña histórica sobre las leyes de Newton y de Maxwell y la notación matemática.

Preguntas básicas

1. ¿Con qué rapidez se propagan las perturbaciones de los campos eléctrico y magnético?
2. ¿Los campos eléctrico y magnético son la perturbación de un medio material?
3. ¿Si la luz es una onda, qué es lo que ondula?
4. ¿Cuando aplicamos las leyes de Maxwell para estudiar un fenómeno, coinciden nuestro modelo físico y la escritura de sus ecuaciones con las del propio Maxwell?
5. La anterior pregunta, pero respecto a Newton.
6. ¿Es necesario tener un modelo físico correcto de un fenómeno para hallar las leyes que lo rigen?

Introducción

La base de la mecánica clásica son las leyes de Newton; con estas obtuvimos la ecuación de onda para las ondas mecánicas en una cuerda. La base del electromagnetismo clásico son las leyes de Maxwell, con las que obtendremos la ecuación para las ondas electromagnéticas, por ejemplo, las que se producen cuando una corriente cambia o al mover un cuerpo cargado eléctricamente o un imán.

Haremos algunas anotaciones históricas sobre el modelo mecanicista que Maxwell utilizó para los fenómenos electromagnéticos y sobre el que halló el conjunto de cuatro leyes que los rigen. Aprovecharemos la ocasión para un dar una visión somera de la evolución de la notación matemática utilizada en la física.



James Clerk Maxwell (1831-1879), físico británico, está a la altura de Newton y de Einstein por la importancia de sus contribuciones científicas. Es célebre principalmente por su teoría electromagnética y por la teoría cinética de los gases.

Recuerde que

 Es indispensable, cuando se escribe a mano, diferenciar entre vectores y escalares escribiendo una flecha sobre los vectores, p. ej., \vec{F} ; cuando el vector es unitario, se debe escribir, en su lugar, un 'gorro', p. ej., \hat{u}_x , \hat{k} .

A continuación resolvemos tres ejemplos con el propósito de lograr alguna familiaridad con el operador ∇ .

Ejemplo 11.1 Halle $\nabla \times \mathbf{r}$.

Solución. A la operación $\nabla \times$ se le llama **rotacional** o rot.

$\nabla = \mathbf{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$, y $\mathbf{r} = \mathbf{u}_x x + \mathbf{u}_y y + \mathbf{u}_z z$; por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{r} &\equiv \nabla \times \mathbf{r} = \left(\mathbf{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\mathbf{u}_x x + \mathbf{u}_y y + \mathbf{u}_z z) \\ &= \mathbf{u}_z \frac{\partial y}{\partial x} - \mathbf{u}_y \frac{\partial z}{\partial x} - \mathbf{u}_z \frac{\partial x}{\partial y} + \mathbf{u}_x \frac{\partial z}{\partial y} + \mathbf{u}_y \frac{\partial x}{\partial z} - \mathbf{u}_x \frac{\partial y}{\partial z} = 0 + \dots + 0 = 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 11.2 Halle $\nabla \cdot \mathbf{r}$.

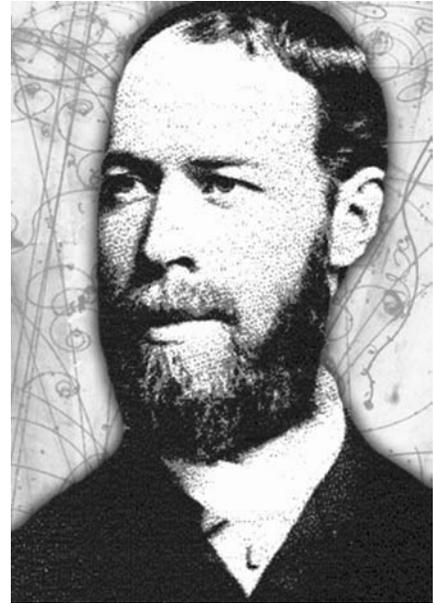
Solución. A la operación $\nabla \cdot$ se le llama **divergencia** o div.

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{r} &\equiv \nabla \cdot \mathbf{r} = \left(\mathbf{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{u}_x x + \mathbf{u}_y y + \mathbf{u}_z z) \\ &= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Ejemplo 11.3 Halle, en coordenadas cartesianas, $\nabla \cdot \nabla$.

Solución. El operador $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ se llama **laplaciano**.

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \left(\mathbf{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\mathbf{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned}$$



Heinrich Hertz (1857-1894), físico alemán, confirmó experimentalmente la existencia predicha por Maxwell de las ondas electromagnéticas, a las que les midió su velocidad. Fue el primero en emitir y captar ondas de radio. Dejó claro que la luz y el calor radiante son ondas electromagnéticas. Descubrió el efecto fotoeléctrico en 1887.

11.1 Las ecuaciones de onda en el vacío

Las cuatro leyes de Maxwell se pueden presentar en formas integral y diferencial,

Ley de Gauss:	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q}{\epsilon_0},$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0};$
Ley de Gauss:	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0,$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0;$
Ley de Faraday:	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt},$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t};$
Ley de Ampère:	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i_c + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt},$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$

Utilizaremos la expresión diferencial. En el vacío, o sea aplicadas en puntos del espacio especificados por el vector posición \mathbf{r} en el instante t ,

sin cargas ($\rho = 0$) ni corrientes ($\mathbf{j} = \mathbf{0}$), son

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (11.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (11.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (11.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (11.4)$$

Apliquemos el operador rotacional a ambos miembros de la ecuación 11.3,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right).$$

El miembro derecho de esta ecuación nos dice que derivemos primero respecto al tiempo a \mathbf{B} y al vector resultante lo derivemos espacialmente con el operador rotacional, $\nabla \times$. Como las derivadas temporal y espacial conmutan, $\nabla \times (\partial \mathbf{B} / \partial t) = \partial (\nabla \times \mathbf{B}) / \partial t$, y

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}).$$

Además, \mathbf{E} cumple la identidad¹ $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$. Al igualar las dos últimas ecuaciones, $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -(\partial / \partial t)(\nabla \times \mathbf{B})$. Introduciendo las ecuaciones 11.1 y 11.4, obtenemos

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right).$$

Llegamos, así, a la ecuación de onda

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (11.5)$$

Para una onda que se propague solo en la dirección x , $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2$ y la ecuación 11.5 adopta la forma

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2}. \quad (11.6)$$

Reemplazando en esta ecuación a \mathbf{E} por ξ y a $1/(\mu_0 \epsilon_0)$ por T/μ , obtenemos la ecuación para las ondas de desplazamiento ξ en una cuerda. De las ecuaciones 11.5 o 11.6 concluimos que \mathbf{E} en el vacío se propaga ondulatoriamente con velocidad $1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. Esta velocidad, conocida con la letra c , es una de las constantes fundamentales de la naturaleza. Reemplazando los valores de la permeabilidad magnética, μ_0 , y de la permitividad eléctrica del vacío, ϵ_0 , en unidades SI, obtenemos

$$c = \frac{1}{\sqrt{(4\pi \times 10^{-7} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(8.8544 \times 10^{-12} \text{ N}/\text{A}^2)}} = 299\,790 \text{ km/s.}$$

En resumen,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 300\,000 \text{ km/s.}$$

¹ *Justificación.* El producto triple vectorial de tres funciones vectoriales \mathbf{A} , \mathbf{C} y \mathbf{D} es $\mathbf{A} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{D}$. Si asociamos a \mathbf{A} y \mathbf{C} con ∇ , la identidad toma la forma $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{D}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{D}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{D} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{D}) - \nabla^2 \mathbf{D}$. Hemos reemplazado a $\nabla \cdot \nabla$ por el operador ∇^2 ; este operador se llama **laplaciano**. Si además reemplazamos a \mathbf{D} por \mathbf{E} , obtenemos: $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$.

En el vacío \mathbf{B} también cumple la ecuación de onda,

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (11.7)$$

11.2 Algunos comentarios a raíz de las ecuaciones de onda

En el año 1873 James Clerk Maxwell (1831-1879) publicó² *A treatise on electricity and magnetism*. En este libro halló, con la matemática y la física de la época, las ecuaciones de onda, y mostró que la velocidad esperada es muy próxima a la de la luz, que ya había sido medida con diferentes métodos.

Maxwell predijo: (a) a partir de la deducción de las ecuaciones de onda, la existencia de las ondas electromagnéticas; (b) que la velocidad de estas ondas es igual a la de la luz; y (c) que, debido a la igualdad entre la velocidad predicha de las ondas electromagnéticas y la velocidad de la luz, la luz es una onda electromagnética. La predicción (c) implica que la luz, por ejemplo la producida por el filamento de una bombilla, debe provenir de las cargas eléctricas del filamento.

Antes de Maxwell la *óptica* y el *electromagnetismo* eran dos ramas independientes de la física, pero él con la predicción (c) convirtió la óptica en un capítulo del electromagnetismo. Las predicciones (a) y (b) fueron comprobadas en el laboratorio antes de 1900.

Las ecuaciones de onda, tomadas textualmente del *Treatise*,³ son

$$K\mu \frac{d^2 F}{dt^2} + \nabla^2 F = 0, \quad K\mu \frac{d^2 G}{dt^2} + \nabla^2 G = 0, \quad K\mu \frac{d^2 H}{dt^2} + \nabla^2 H = 0.$$

La permitividad ϵ es K ; las componentes cartesianas del campo son F , G y H . Notamos que Maxwell no utiliza el signo de derivada parcial ∂ , aunque utiliza el signo de derivada total con el significado de derivada parcial. En lugar de una ecuación vectorial, escribe tres ecuaciones escalares. Maxwell no escribió textualmente las ecuaciones 11.5 y 11.7. Para hacerlo, y llegar a ellas como hicimos en la sección anterior, fue necesario desarrollar aun más de lo que Maxwell conocía, la notación y el análisis vectorial. Esto se debe principalmente a Oliver Heaviside (1850-1925) y Josiah Willard Gibbs (1839-1903).

Pero donde encontramos una mayor diferencia del trabajo de Maxwell respecto a nuestra época, no es en la presentación y el tratamiento matemáticos, del cual ya hemos señalado algunos aspectos, sino en el modelo físico.

Quienes pensaban en una onda, antes de 1905, siempre pensaban en un medio material cuya vibraciones, deformaciones, etc., constituían la onda. Los fenómenos se concebían mecánicamente, esto es, a la manera newtoniana: la manifestación de masas sometidas a fuerzas. Así, el modelo físico de Maxwell para la propagación de la luz, por ejemplo del Sol a la Tierra, es similar a como se propagan las ondas en la superficie del agua: *debe* existir un medio material, el *éter luminífero*, que llena todo el espacio, y cuyas deformaciones constituyen la luz. El éter en contacto con el Sol empieza a vibrar y pone en movimiento al éter vecino, y así sucesivamente hasta que la perturbación, o sea la luz, llega a la Tierra. Al hacer oscilar, por

² James Clerk Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, Dover Publications, Nueva York, 1954. Dos tomos.

³ Óp. cit., segundo tomo, p. 434.

ejemplo, un imán, se pensaba que ocurría lo mismo: se perturba el éter en contacto con el imán y va avanzado una perturbación con velocidad c . Con la palabra *vacío* los físicos del siglo XIX quieren decir el espacio solo con la presencia de éter; para nosotros la misma palabra tiene un significado diferente.

Los campos eléctricos y magnéticos son manifestación de perturbaciones del éter: el campo magnético en un punto es la manifestación de un remolino de éter, cuyo eje coincide con la dirección de \mathbf{B} . En un punto cercano hay otro remolino con el mismo sentido de rotación que el primero; entre ambos remolinos existen unos rodamientos, a la manera de balines, que permiten la igualdad entre los sentidos. El campo magnético se asocia con la energía cinética del remolino; en cambio, el campo eléctrico se asocia con cierta energía potencial. Dice Maxwell en su *Treatise*:⁴ "La fuerza magnética es el efecto de la fuerza centrífuga de los remolinos". ("Magnetic force is the effect of the centrifugal force of the vortices").

Se dedicaron, hasta bien entrado el siglo XX, ingentes esfuerzos a detectar el éter, pero fue imposible probar su existencia física (es de destacar, dentro de estos esfuerzos, el experimento de Michelson-Morley). Lo que fallaba era el modelo: la luz no es una onda mecánica, no es la deformación de un medio, y para entenderla es necesario renunciar al éter (tan imprescindible para los físicos antes de 1905): la luz es un nuevo tipo de onda, que no requiere de un medio material. En 1905 Einstein postuló: la luz en *el vacío* se propaga con velocidad c , independientemente de la velocidad del observador inercial que la mida o de la fuente que la produzca.

Es sorprendente que de Maxwell sobrevivan sus ecuaciones (aunque con una presentación matemática renovada), halladas con un modelo físico completamente descartado. Él no supo de la existencia de los electrones, descubiertos en 1897, ni de la estructura nuclear del átomo.

Con Newton (1642-1727) ocurre⁵ lo mismo que con Maxwell: una cosa es lo que nosotros conocemos como las leyes de Newton, cómo las aplicamos y cómo las escribimos; y otra cosa es lo que Newton pensó de sus leyes, cómo las aplicó y cómo las escribió. En 1687 publicó los *Principios matemáticos de la filosofía natural*. En este libro se propuso deducir toda la física a partir de unos axiomas, conocidos como *las tres leyes de Newton*. (Euclides quiso hacer lo mismo, pero en geometría, en el libro *Elementos de geometría*, cerca de 2000 años antes de Newton).

El lenguaje matemático de Newton y de su época es la geometría euclidiana. Las variables y parámetros (espacio, tiempo, velocidad, aceleración. . .) se representaban, desde hacía siglos, mediante segmentos de rectas o de curvas de una gráfica (o mediante ángulos, áreas. . .), no con letras (x , t , v , a . . .). La solución de los problemas era predominantemente gráfica, no con fórmulas analíticas. Fue necesario el trabajo intenso de otros matemáticos y físicos, especialmente de Leonhard Euler, para llegar al método newtoniano de solución de un problema que, en el caso de una *partícula* de masa M , consiste en hallarle la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ a partir de la *segunda ley de Newton*: la fuerza resultante sobre M se iguala al producto de M por la aceleración \mathbf{a} , y se resuelve la ecuación diferencial resultante para despejar a $\mathbf{r}(t)$,

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a} = M \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}.$$

⁴ Óp. cit., segundo tomo, p. 470.

⁵ Clifford Truesdell, *Ensayos de historia de la mecánica*, Editorial Tecnos, Madrid, 1975.

Las ecuaciones

$$F_x = Ma_x, \quad F_y = Ma_y, \quad F_z = Ma_z,$$

aplicables a *cualquier* sistema mecánico —una partícula, un sistema de partículas, un sólido, un medio elástico, un sistema continuo o discontinuo— solo fueron publicadas por Euler⁶ cerca de 1750. Newton nunca las escribió, y menos escribió la ecuación vectorial conocida como la segunda ley de Newton para masa constante, equivalente a las tres anteriores ecuaciones escalares: $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$. Sin embargo, el nombre de *leyes de Newton* es justo, pues son la presentación en un lenguaje matemático simbólico de los axiomas expuestos en su libro *Principios*.

11.2.1 Breve historia de algunos símbolos

La tabla 11.1 muestra algunos símbolos, la fecha de su primera aparición escrita con el significado actual, y su autor.⁷

La designación de puntos, líneas y planos por letras se ha llevado hasta Hipócrates de Quíos, ~440 a. n. e. Los signos + y – fueron de uso general en aritmética solo a partir del siglo XIX. El nombre de nabla para ∇ fue sugerido por Robertson Smith (~ 1860) a causa de la similitud del símbolo con un arpa asiria. La notación actual tuvo aceptación general solo después de 1915.

Tabla 11.1

Símbolo	Fecha	Autor
—	S XII	al-Hassâr [‡]
+, –	1489	Johann Widman
=	1557	Robert Recorde
<, >	1631	Thomas Harriot
×	1631	William Oughtred
∞	1655	John Wallis
÷	1659	Johann Rahn
dx, ∫	1675	Gottfried Leibniz
π	1706	William Jones
e	1728	Leonhard Euler
i	1777	Leonhard Euler
$\frac{\partial}{\partial}$	1786	Adrian-Marie Legendre
n!	1808	Christian Kramp
∇	1853	William Hamilton
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$	1881	Josiah Gibbs
$\nabla \cdot, \nabla \times$	1881	Josiah Gibbs

[‡] Como símbolo fraccional.

Resumen

Mediante las leyes de Maxwell obtuvimos la ecuación de onda para el campo eléctrico; la respectiva ecuación para el campo magnético se deja como un problema para que el estudiante lo resuelva. De ellas se concluye que

⁶ A la ley $d\mathbf{m} \mathbf{a} = d\mathbf{f}$ John Papastavridis la llama la ley de Newton-Euler en su libro *Analytical mechanics*, Oxford University Press, 2002, p. 102.

⁷ Florian Cajori, *A history of mathematical notations*, Dover Publications, Nueva York, 1993. Michael Crowe, *A history of vector analysis*, Dover Publications, Nueva York, 1994.

las perturbaciones de ambos campos se propagan con la velocidad de la luz en el vacío. Maxwell predijo la naturaleza electromagnética de la luz y, como consecuencia, que la luz es producida por cargas eléctricas.

La notación matemática tiene una historia compleja; un ejemplo es que las leyes de Newton y de Maxwell que *nosotros* aplicamos no las escribieron ellos con nuestra notación. Pero aun más importante, la concepción del mundo físico que ellos tenían difiere notablemente de la que tienen los físicos de hoy en día, aunque estos apliquen las leyes que llevan sus nombres.

Módulo 12

Ondas planas

Contenido

- 12.1 Solución en ondas planas
- 12.2 El espectro electromagnético
- 12.3 Rango de validez de las leyes

Objetivos

1. Hallar la relación entre los campos eléctrico y magnético de una onda plana.
2. Mostrar que las ondas electromagnéticas planas son transversales.
3. Dar algunas características de los siete rangos del espectro electromagnético.

Preguntas básicas

1. ¿Son independientes entre sí las componentes eléctrica y magnética de una onda electromagnética?
2. ¿Qué es una onda plana electromagnética?
3. ¿Cómo se clasifican las ondas electromagnéticas?
4. ¿Las leyes de Maxwell siempre están de acuerdo con el comportamiento de las cargas eléctricas?

Introducción

En la sección 7.1.1, p. 65, se definió qué es una onda plana mecánica; si es electromagnética basta con reemplazar a ξ por \mathbf{E} o \mathbf{B} , pero mientras que ξ puede ser longitudinal o transversal, veremos que \mathbf{E} y \mathbf{B} son transversales. Además, existe una relación muy simple entre ambos campos.

De manera análoga a como clasificamos el sonido según su frecuencia en infrasonido ($\nu < 20$ Hz), sonido propiamente dicho ($20 \text{ Hz} < \nu < 20 \text{ kHz}$) y ultrasonido ($\nu > 20 \text{ kHz}$), también se clasifican las ondas electromagnéticas en siete rangos según la frecuencia, el llamado **espectro electromagnético**, del que la luz visible es el más pequeño.



La luz que llega del Sol a una estación espacial y las ondas con las que se establece una comunicación entre ella y la Tierra se pueden considerar localmente planas y pertenecen a diferentes clasificaciones del espectro electromagnético.

12.1 Solución en ondas planas

Las ecuaciones 11.5 y 11.7 admiten una solución de la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - ct) \quad \text{y} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - ct),$$

donde \mathbf{u} es un vector unitario en la dirección de avance de la onda.

La fase contiene la dirección de propagación, puesto que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}$ forma parte de la fase; sin embargo, no contiene la dirección del campo.

Puesto que el valor de $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - ct)$ en cierto instante especifica un plano, los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} son constantes en todos los puntos de ese plano, y a las mencionadas soluciones para \mathbf{E} y \mathbf{B} se les denomina *solución en ondas planas*. En este caso, como lo demostramos a continuación, necesariamente los vectores \mathbf{u} , \mathbf{E} y \mathbf{B} son ortogonales entre sí, lo que constituye una demostración de que las ondas electromagnéticas planas son transversales, esto es, no hay componente de los campos en la dirección \mathbf{u} de propagación.

Introduciendo la variable

$$s \equiv \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - ct = u'_x x + u'_y y + u'_z z - ct, \quad (12.1)$$

—estas u'_x , u'_y y u'_z no son vectores unitarios, sino las componentes del vector unitario \mathbf{u} — podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - ct) &= \mathbf{E}(s) = \mathbf{u}_x E_x(s) + \mathbf{u}_y E_y(s) + \mathbf{u}_z E_z(s), \\ \mathbf{B}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - ct) &= \mathbf{B}(s) = \mathbf{u}_x B_x(s) + \mathbf{u}_y B_y(s) + \mathbf{u}_z B_z(s). \end{aligned}$$

Consideremos el vector $\nabla \times \mathbf{E}(s)$,¹

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}.$$

Según el determinante, la componente x del vector $(\nabla \times \mathbf{E})$ es

$$(\nabla \times \mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z(s)}{\partial y} - \frac{\partial E_y(s)}{\partial z} = \frac{\partial E_z(s)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} - \frac{\partial E_y(s)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z}.$$

Pero $\partial E_z(s)/\partial s = dE_z(s)/ds$ y $\partial E_y(s)/\partial s = dE_y(s)/ds$; según la ecuación 12.1, $\partial s/\partial y = u'_y$ y $\partial s/\partial z = u'_z$. Reemplazando estas igualdades, obtenemos $(\nabla \times \mathbf{E})_x = u'_y dE_z(s)/ds - u'_z dE_y(s)/ds$. Examinando el miembro derecho de esta ecuación notamos que es una resta donde está ausente el índice x , mientras que y y z se alternan simétricamente, llevándonos esto a pensar que es la componente x del producto vectorial $\mathbf{u} \times d\mathbf{E}/ds$, o sea

$$(\nabla \times \mathbf{E})_x = (\mathbf{u} \times d\mathbf{E}/ds)_x.$$

Siguiendo un procedimiento análogo al del anterior párrafo, se demuestra que $(\nabla \times \mathbf{E})_y = (\mathbf{u} \times d\mathbf{E}/ds)_y$ y $(\nabla \times \mathbf{E})_z = (\mathbf{u} \times d\mathbf{E}/ds)_z$; por lo tanto,

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{u} \times d\mathbf{E}/ds.$$

¹ Justificación. Sean \mathbf{A} y \mathbf{C} dos vectores, y \mathbf{D} su producto vectorial; entonces $\mathbf{D} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} =$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}.$$

Asociamos a \mathbf{A} con ∇ y a \mathbf{C} con \mathbf{E} .

De igualar esta ecuación a la ecuación 11.3 resulta $\mathbf{u} \times d\mathbf{E}/ds = -\partial\mathbf{B}(s)/\partial t$. Derivemos en cadena, $\partial\mathbf{B}(s)/\partial t = \partial\mathbf{B}(s)/\partial s \cdot \partial s/\partial t$. Pero $\partial\mathbf{B}(s)/\partial s = d\mathbf{B}/ds$ y $\partial s/\partial t = -c$ (vea la ecuación 12.1); por lo tanto, $\partial\mathbf{B}(s)/\partial t = -c d\mathbf{B}/ds$. O sea que $\mathbf{u} \times d\mathbf{E}/ds = -(-c) d\mathbf{B}/ds$. Eliminando ds obtenemos $\mathbf{u} \times d\mathbf{E} = c d\mathbf{B}$. Integremos, $\mathbf{u} \times \int d\mathbf{E} = c \int d\mathbf{B}$: $\mathbf{u} \times \mathbf{E} = c\mathbf{B}$. Multiplicando por el número de onda y recordando que $k\mathbf{u} = \mathbf{k}$ y $kc = \omega$, llegamos a $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega\mathbf{B}$. Despejemos,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{1}{\omega} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ k_x & k_y & k_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}. \quad (12.2)$$

La ecuación nos da información útil: por propiedad del producto vectorial, $\mathbf{B} \perp \mathbf{k}$ y $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$. El campo \mathbf{B} es transversal por ser perpendicular a la dirección de \mathbf{k} , que es la de avance de la onda, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$. Además, si $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ también vale cero: en el punto \mathbf{r} y en el instante t los campos eléctrico y magnético están en fase o en contrafase.

También se puede demostrar que

$$\mathbf{E} = -\frac{c^2}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\frac{c^2}{\omega} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ k_x & k_y & k_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \quad (12.3)$$

Vemos que $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$: el campo eléctrico es transversal, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$. En una onda plana, \mathbf{E} y \mathbf{B} están en el frente de onda.

Calculemos la magnitud de \mathbf{B} con la ecuación 12.2,

$$|\mathbf{B}| = B = (1/\omega)|\mathbf{k}| |\mathbf{E}| \sin 90^\circ = (k/\omega)E;$$

reemplacemos $k/\omega = 1/c$ y despejemos,

$$E = cB. \quad (12.4)$$

Las magnitudes de \mathbf{E} y \mathbf{B} están relacionadas a través de c . Vectorialmente la ecuación no se cumple, $\mathbf{E} \neq c\mathbf{B}$.

12.2 El espectro electromagnético

Cuando Maxwell predijo la naturaleza electromagnética de la luz convirtió la óptica en un capítulo del electromagnetismo y dio origen a la clasificación de las ondas electromagnéticas según la frecuencia o longitud de onda, el llamado **espectro electromagnético**. No existe una diferencia esencial entre las ondas de radio, los rayos X o la luz visible; todos son campos eléctricos y magnéticos ondulatorios. En astronomía es muy importante el estudio de la radiación proveniente del espacio en cada una de las regiones del espectro electromagnético. Así como una persona se puede identificar analizando su voz (análisis de Fourier), una sustancia se puede identificar analizando las frecuencias e intensidades relativas de las ondas electromagnéticas que emite (espectrometría).

Los límites de cada región del siguiente espectro, ordenado de menor a mayor frecuencia o, lo que es equivalente, de mayor a menor longitud de onda ($\lambda = c/\nu$), no son estrictos, sino que se solapan con las regiones vecinas.

1. *Ondas de radio*. Frecuencia desde algunos Hz hasta 10^9 Hz o λ desde algunos kilómetros hasta 0.3 m. Son generadas en los alambres de circuitos eléctricos, por circuitos electrónicos como los osciladores LC o por astros como el Sol y Júpiter. Se utilizan en comunicaciones de radio AM, FM

y televisión. El estudio de las ondas de radio procedentes del espacio se denomina **radioastronomía**. Cuando λ está entre 1 y 10 m o ν entre 300 y 30 MHz se llama *VHF* (**very high frequency**).

2. *Microondas*. Frecuencia entre 10^9 y 3×10^{11} Hz o λ entre 0.3 m y 1 mm. Esta región también se conoce como *UHF* (**ultra high frequency**). Son generadas por circuitos electrónicos. Las moléculas de agua tienen frecuencias naturales de resonancia en el anterior rango, lo que explica el calentamiento de los alimentos en los hornos de microondas. Se utilizan en comunicación por teléfonos celulares y en radares meteorológicos. El universo está lleno de radiación residual de microondas generada cuando se originó el universo hace 13.7 ± 0.1 mil millones de años.

3. *Radiación o rayos infrarrojos*. Frecuencia entre 3×10^{11} y 4.3×10^{14} Hz o λ entre 1 mm y 700 nm (1 nanómetro = 1 nm = 10^{-9} m). Se producen generalmente cuando átomos o moléculas cambian su movimiento rotacional o vibratorio. Nos causan la sensación de calor de una fuente como el Sol, una fogata o una estufa. Los cuerpos que normalmente encontramos — hasta unos 3000 °C, incluyendo los seres vivos— tienen su radiación más intensa en el infrarrojo; el filamento de una bombilla emite mucha más energía en infrarrojo que en luz visible.

4. *Luz o espectro visible*. Frecuencia entre 4.3×10^{14} y 7.5×10^{14} Hz o λ entre 700 y 400 nm. La luz visible se produce por transiciones de los electrones de los átomos a niveles de energía inferiores; la diferencia de energía entre el nivel final y el inicial se emite en luz. Las transiciones se provocan con una corriente eléctrica o elevando la temperatura del emisor. Según la longitud de onda (en el vacío) es la percepción del color: rojo, 630-700 nm; naranja, 590-630 nm; amarillo, 560-590 nm; verde, 480-560 nm; azul, 440-480 nm; violeta, 400-440 nm. Una onda electromagnética para ser visible debe estar en alguno de los anteriores rangos, además debe tener una amplitud mínima, análogo a lo que ocurre con las ondas sonoras. Obvio que el ojo es menos sensible en los extremos del espectro. El ojo, como el oído, no es un receptor lineal; una onda donde menos intensidad necesita para ser visible es a 555 nm, que corresponde a un color amarillo-verde; nuestro ojo ha evolucionado de manera que su punto de mayor sensibilidad corresponde con el punto donde la radiación solar es más intensa, que es a 550 nm (un ejemplo de resonancia). Surge la pregunta: ¿por qué, entonces, el Sol no se ve amarillo-verde sino amarillo? La respuesta es que el Sol también emite rojo y verde, y el cerebro lo interpreta como amarillo.

5. *Rayos ultravioleta (UV)*. Frecuencia entre 7.5×10^{14} y 3×10^{17} Hz o λ entre 400 y 1 nm. Estos rayos se utilizan en la cirugía ocular LASIK. El Sol es una fuente potente de UV; causan problemas serios de visión cuando se mira sin protección, por mucho tiempo, la luz que se refleja en la nieve; causan el *bronceado* y quemaduras en la piel por exposición prolongada; ionizan la atmósfera a más de 80 km de altura creando la **ionosfera**; se utilizan en procesos de esterilización de equipos médicos.

6. *Rayos X*. Frecuencia entre 3×10^{17} y 3×10^{20} Hz o λ entre 1 nm y 1 pm (1 picómetro = 1 pm = 10^{-12} m). Cuando λ es del orden de 0.1 nm la radiación se denomina rayos X, pero si se originan en el núcleo se llaman rayos γ . Se producen en transiciones electrónicas de los electrones más ligados al núcleo. En medicina se producen desacelerando electrones que se disparan contra un metal. Como penetran el tejido muscular son indispensables en medicina y odontología.

7. *Rayos γ* . Frecuencia mayor que 3×10^{20} Hz o λ menor que 1 pm. La máxima ν detectada es cerca de 10^{24} Hz. Por ser tan energéticos se generan en los núcleos atómicos; se utilizan para destruir tejidos cancerosos.

Aunque hemos hablado de onda de determinada frecuencia, en realidad es una aproximación: la luz de una sola frecuencia es una idealización imposible de lograr; lo que más se le acerca es la luz láser (vea la sección 2.2, p. 14).

12.3 Rango de validez de las leyes

Una de las consecuencias de las leyes de Maxwell es que toda carga acelerada radia ondas electromagnéticas. Esto es correcto aplicado a un gran número de cargas, como los electrones que oscilan en una antena de una emisora de radio; pero aplicado a una sola, como por ejemplo un electrón ligado a un átomo, predice que tardaría una pequeña fracción de segundo en caer al núcleo al ir perdiendo energía por emisión. Es obvio que los electrones de un átomo están acelerados, pues si no se moverían uniformemente en línea recta. En conclusión, las leyes de Maxwell contradicen la permanencia que observamos de la materia, pues los objetos, compuestos de átomos, duran mucho más que una fracción de segundo. Las leyes de Newton también tienen una validez restringida a $v \ll c$; cuando esta desigualdad no es válida, la longitud, el tiempo, la aceleración, la masa y la fuerza dejan de ser absolutas y pasan a depender del sistema de referencia.

Resumen

En una onda plana los campos eléctrico y magnético son perpendiculares a la dirección de propagación, lo que implica que el *plano definido por ambos campos coincide con un frente de onda*. El que no tengan componente en la dirección de propagación se expresa como $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ y $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$. Ambos campos dependen el uno del otro mediante las ecuaciones 12.2 y 12.3.

En orden de frecuencia creciente, las ondas se clasifican en siete rangos que constituyen el espectro electromagnético: ondas de radio, microondas, radiación infrarroja, luz o espectro visible, rayos ultravioleta, rayos X y rayos γ . A su vez, el espectro visible se clasifica en colores, de violeta a rojo.

Módulo 13

Energía de una onda electromagnética

Contenido

- 13.1 Conservación de la energía
- 13.2 Las leyes de Maxwell y la conservación de la energía
- 13.3 Fuerza de una onda sobre una carga

Objetivos

1. Escribir en forma integral la ley de conservación de la energía para una onda.
2. Hallar una expresión para varias cantidades energéticas en función de \mathbf{E} y \mathbf{B} .
3. Hallar una relación para la fuerza que la componente eléctrica de una onda hace sobre una carga, respecto a la fuerza respectiva debida a la componente magnética.

Preguntas básicas

1. ¿Qué significado físico tiene el vector de Poynting?
2. ¿Cómo es la contribución del campo eléctrico a la energía de una onda respecto a la contribución del campo magnético?
3. ¿Qué son intensidad instantánea e intensidad promedio de una onda electromagnética?
4. ¿Cómo se obtienen las variables energéticas densidad de energía, intensidad y potencia de una onda electromagnética a partir de las ecuaciones de Maxwell?

Introducción

Fijemos la atención en alguna región del espacio en la que haya ondas. La región puede ser una sala con varias fuentes de ondas y a la que también entren ondas procedentes del exterior. Las fuentes tal vez sean personas hablando o señales generadas o recibidas por teléfonos celulares. Puesto que las ondas transportan energía, debemos poder expresar matemáticamente el principio de conservación de la energía para este caso. Nos limitaremos solo a ondas electromagnéticas, como las de los celulares.

Mucha parte de la física se dedica a estudiar la interacción entre la radiación y la materia. Cuando aquella es ondas electromagnéticas, sus componentes eléctrica y magnética ejercen fuerzas sobre la carga en la que inci-



El espejo parabólico del horno solar en Odeillo (Francia) tiene varios pisos de altura. La energía electromagnética solar es reflejada hacia el foco del espejo donde la densidad energética es tal que la temperatura que genera, hasta 4000°C , puede fundir metales con alto punto de fusión.

dan. Veremos que la relación entre esas fuerzas depende de la relación c/v , donde v es la rapidez de la carga.

13.1 Conservación de la energía

Imaginemos un medio no disipativo en el que se propagan ondas. Sea una superficie cerrada A que delimita un volumen V (figura 13.1).

Una onda transporta energía y en cada punto del espacio tiene una dirección de avance. Podemos idear un vector $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ cuya magnitud sea la intensidad y su dirección la de avance de la onda, $\mathbf{S} \equiv I\mathbf{u}$. Puesto que la intensidad es energía por unidad de tiempo y unidad de área, entonces la energía que por unidad de tiempo atraviesa el diferencial de área da es el producto escalar $\mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}$.

La rapidez de flujo de energía a través de toda la superficie A es la suma de los aportes de *todos* los da que conforman a A :

$$\text{rapidez de flujo de energía a través de } A = \oint_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}.$$

Sea $E_V(t)$ la energía instantánea dentro de V ; la rapidez con que cambia E_V es

$$\text{rapidez de cambio de la energía en } V = dE_V(t)/dt.$$

Si $\oint_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} > 0$ es porque a través de A hay un flujo neto de energía hacia el exterior de V y, por conservación de la energía, esta integral es lo que V está *perdiendo*, o sea que $dE_V(t)/dt$ sería negativo: la energía que V *pierda* la *gana* el exterior de V . O con otras palabras, la rapidez de flujo de energía a través de A es el negativo de la rapidez de cambio de la energía en V ,

$$\oint_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{dE_V(t)}{dt}. \tag{13.1}$$

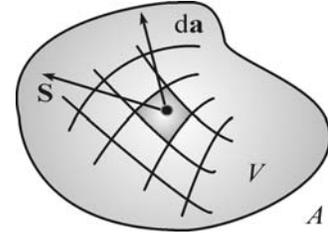


Figura 13.1 La superficie A delimita el volumen V , en un medio en el que se propagan ondas.

13.2 Las leyes de Maxwell y la conservación de la energía

Nos proponemos expresar a $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ en términos de $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$.

Multipliquemos escalarmente¹ por \mathbf{B} cada uno de los miembros de la ecuación 11.3,

$$\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial B^2}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right).$$

El último paréntesis es la densidad instantánea de energía magnética, $E_B(\mathbf{r}, t)$,

$$\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \frac{\partial E_B}{\partial t}. \tag{13.2}$$

Multipliquemos escalarmente por \mathbf{E} la ecuación 11.4,

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})}{\partial t} = \frac{1}{2} \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right).$$

Este paréntesis es la densidad instantánea de energía eléctrica, $E_E(\mathbf{r}, t)$,

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \frac{\partial E_E}{\partial t}. \tag{13.3}$$

¹ $\frac{\partial (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})}{\partial t} = \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 2\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, de donde $\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})}{\partial t}$.

Efectuemos la resta entre las ecuaciones 13.2 y 13.3,

$$\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \frac{\partial E_B}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial E_E}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (E_B + E_E). \quad (13.4)$$

El último paréntesis es la densidad total de energía del campo electromagnético, ϵ , y el primer miembro es, según una identidad,² $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$. Por lo tanto, $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \partial E / \partial t$. Multipliquemos por dV e integremos sobre el volumen total,

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV = -\mu_0 \int_V \frac{\partial E}{\partial t} dV.$$

La densidad E es función de (x, y, z, t) , pero al integrar sobre el diferencial de volumen $dV = dx dy dz$ la integral queda función *únicamente* de t ; por lo tanto, la derivada parcial respecto a t sale de la integral como una derivada total,

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV = -\mu_0 \frac{d}{dt} \int_V E dV.$$

La última integral es la energía total dentro del volumen V , $E_V(t)$.

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV = -\mu_0 \frac{dE_V}{dt}.$$

Según el teorema de la divergencia, esta integral de volumen es igual a una integral sobre toda la superficie A que delimita a V ,

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV = \oint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a}.$$

Igualemos las dos últimas ecuaciones,

$$\oint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} = -\mu_0 \frac{dE_V}{dt}.$$

Dividamos por μ_0 ,

$$\oint_A \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{dE_V}{dt}.$$

De comparar esta ecuación con la 13.1, concluimos que $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} / \mu_0$. Como $\mu_0 = 1/(c^2 \epsilon_0)$, llegamos a

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} / \mu_0 = c^2 \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (13.5)$$

El vector \mathbf{S} es fundamental en electromagnetismo y se denomina **vector de Poynting**.³ Su magnitud evaluada en (\mathbf{r}, t) es la intensidad de la onda y su dirección \mathbf{u} es la de propagación, $\mathbf{S} = \mathbf{u}I$. Si la onda es plana, $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$, $B = E/c$ y

$$I(\mathbf{r}, t) = S = c^2 \epsilon_0 EB \sin 90^\circ = c \epsilon_0 E^2(\mathbf{r}, t). \quad (13.6)$$

Si también es armónica y con polarización lineal,

$$E = E_0 \sin k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - ct), \quad \text{y} \quad I(\mathbf{r}, t) = c \epsilon_0 E_0^2 \sin^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t).$$

² *Justificación.* El producto triple escalar de tres vectores \mathbf{A} , \mathbf{C} y \mathbf{D} es $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{D} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) - \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{D})$. Si reemplazamos a \mathbf{A} por ∇ , a \mathbf{C} por \mathbf{E} y a \mathbf{D} por \mathbf{B} , obtenemos $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$.

³ En honor a John Henry Poynting (1852-1914), físico británico que lo definió en 1884.

Promediamos por período,

$$\langle I \rangle = \langle c\epsilon_0 E_0^2 \sin^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \rangle = c\epsilon_0 E_0^2 \langle \sin^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \rangle = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2. \quad (13.7)$$

Además, $I = cE$; por lo tanto $E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$. Como I y E están expresados en función de E_0 y no de $E(\mathbf{r}, t)$, se debe sobrentender que se trata de promedios temporales; por esto hemos prescindido de los signos $\langle \rangle$. Por una razón análoga, cuando decimos que cierta cantidad tiene un valor numérico específico, se debe entender que nos referimos al promedio temporal de la cantidad; así, una potencia de 0.1 W se refiere a una potencia promedio.

En una onda plana polarizada linealmente,

$$\langle E_B \rangle = \frac{\langle B^2 \rangle}{2\mu_0} = \frac{\frac{1}{2} B_0^2}{2\mu_0} = \frac{B_0^2}{4\mu_0} = \frac{(E_0/c)^2}{4\mu_0} = \frac{E_0^2}{4c^2\mu_0} = \frac{1}{4} \epsilon_0 E_0^2$$

y

$$\langle E_E \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \langle E^2 \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 E_0^2.$$

Vemos que las densidades de energía eléctrica y magnética de una onda plana son iguales.

13.3 Fuerza de una onda sobre una carga

La fuerza que una onda electromagnética ejerce sobre una carga q con velocidad \mathbf{v} la da la ecuación conocida como fuerza de Lorentz, $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_B$; de donde

$$\frac{F_E}{F_B} = \frac{qE}{qvB \sin(\mathbf{v}, \mathbf{B})} \geq \frac{E}{vB} = \frac{E}{vE/c} = \frac{c}{v}.$$

Cuando $v \ll c$, $c/v \gg 1$ y $F_E \gg F_B$. Esto les ocurre a los electrones que pasan entre las placas de deflexión de un osciloscopio: para calcular la deflexión en la pantalla de dicho aparato solo se tiene en cuenta el campo eléctrico y no el magnético. Pero aunque una fuerza sea mucho mayor que la otra, el campo magnético aporta igual que el eléctrico a la energía de la onda.

Ejemplo 13.1 Una resistencia cilíndrica de resistividad ρ , longitud L y radio a transporta una corriente I (figura 13.2); el área transversal es A . Demuestre que (a) en los puntos de la superficie el vector de Poynting es normal a la superficie, (b) la rapidez con que fluye energía hacia el interior a través de la superficie es $I^2 R$.

Solución

(a) Hallemos expresiones para los vectores \mathbf{E} y \mathbf{B} en la superficie de la resistencia. Una corriente rectilínea produce un campo magnético cuyas líneas son circunferencias concéntricas con la corriente y se expresa por

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \mathbf{u}_t, \quad (13.8)$$

donde a es la distancia al eje de la resistencia; \mathbf{u}_t es un vector tangencial a la circunferencia con sentido dado por la mano derecha; los vectores unitarios \mathbf{u}_r y \mathbf{u}_x están definidos en la figura.

El campo eléctrico y la densidad de corriente \mathbf{J} están relacionados por

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{J} = \rho \mathbf{J} \mathbf{u}_x = \rho(I/A) \mathbf{u}_x. \quad (13.9)$$

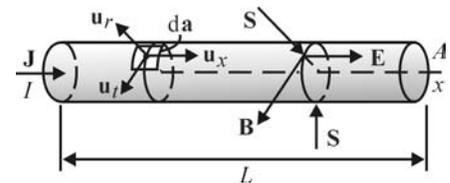


Figura 13.2 Vector de Poynting en la superficie de una resistencia.

La resistencia R , L y A cumplen que $R = \rho L/A$. Despejemos la resistividad y reemplacémosla en la ecuación 13.9,

$$\mathbf{E} = \frac{AR}{L} \frac{I}{A} \mathbf{u}_x = \frac{IR}{L} \mathbf{u}_x = \frac{V}{L} \mathbf{u}_x. \quad (13.10)$$

Evaluemos el vector de Poynting (ecuación 13.5) con las ecuaciones 13.8 y 13.10,

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{V}{L} \mathbf{u}_x \right) \times \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \mathbf{u}_t \right) = \frac{VI}{2\pi a L} \mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_t.$$

El área superficial de la resistencia es $A_s = 2\pi a L$ y $\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_t = -\mathbf{u}_r$,

$$\mathbf{S} = -(VI/A_s) \mathbf{u}_r = -(I^2 R/A_s) \mathbf{u}_r. \quad (13.11)$$

Vemos que \mathbf{S} está dirigido en sentido $-\mathbf{u}_r$, es decir, hacia el eje de la resistencia.

(b) Para encontrar la rapidez de flujo de energía, o sea la potencia, debemos integrar sobre toda la superficie de la resistencia ($d\mathbf{a} = \mathbf{u}_r da$),

$$\begin{aligned} \int_{A_s} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} &= - \int_{A_s} (I^2 R/A_s) \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r da = -(I^2 R/A_s) \int_{A_s} da = -(I^2 R/A_s) A_s \\ &= -I^2 R. \end{aligned}$$

El signo negativo significa que este flujo va hacia el interior de la resistencia y vemos que es igual a la energía disipada por efecto Joule. La energía disipada, según el vector de Poynting, es mayor en la superficie de la resistencia y disminuye hacia el centro. En un punto por fuera de la resistencia, así sea a una distancia infinitesimal de ella, el vector es cero porque $\mathbf{E} = 0$ aunque $\mathbf{B} \neq 0$ (¿por qué $\mathbf{E} = 0$ fuera de la resistencia?).

Resumen

La magnitud del vector de Poynting en el vacío, $\mathbf{S} = c^2 \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$, es el flujo de energía por unidad de tiempo y unidad de área, es decir, la intensidad; su sentido es el de propagación de la onda. Cuando su integral de superficie sobre un área cerrada es positiva, significa que la energía dentro del volumen disminuye; en caso contrario, aumenta.

Las componentes eléctrica y magnética de una onda plana aportan por igual a la energía de la onda, aunque la fuerza eléctrica sobre una carga siempre es mayor, en magnitud, que la magnética: $F_E/F_B \geq c/v$. Cuando $v \ll c$, se puede despreciar la fuerza magnética frente a la eléctrica.

Módulo 14

Polarización. Presión de radiación

Contenido

- 14.1 Polarización
 - 14.1.1 Componentes en fase
 - 14.1.2 Componentes en cuadratura
 - 14.1.3 Componentes en contrafase
 - 14.1.4 Componentes con otros desfases
 - 14.1.5 Componentes con desfase aleatorio
 - 14.1.6 Intensidad
- 14.2 Presión de radiación

Objetivos

1. Definir qué es *polarización* de una onda electromagnética y describir las más importantes: lineal, circular, elíptica y aleatoria.
2. Hallar una expresión para la presión que una onda electromagnética ejerce sobre los cuerpos con los que interacciona.

Preguntas básicas

1. ¿Cómo se debe entender la afirmación de que el campo eléctrico *describe una figura*, por ejemplo, una elipse?
2. ¿Si el campo eléctrico *describe* una elipse, el magnético también?
3. ¿Por qué la luz ejerce presión sobre los cuerpos?
4. ¿Cualquier onda, incluyendo el sonido, ejerce presión?

Introducción

El campo de desplazamiento de una onda transversal en una cuerda o los campos eléctrico y magnético de una onda plana se pueden descomponer en dos direcciones perpendiculares a la dirección de propagación. Según sea el desfase entre ambas componentes, utilizamos cierta figura en el plano determinado por esas direcciones para describir el campo y hablamos, entonces, de la **polarización** de la onda. Las ondas polarizadas tienen importantes aplicaciones tecnológicas como, por ejemplo, guardar y leer información en discos duros ópticos —efecto Kerr— o hallar las regiones de mayor esfuerzo mecánico en un material.

Aunque una onda no transporte masa, sí transporta energía, momento lineal y momento angular. El intercambio de momento lineal que la onda hace con los cuerpos que interaccione se manifiesta en una presión sobre ellos. Esto explica la orientación de la cola de los cometas y permite hablar, en novelas de ciencia ficción o en proyectos futuristas, de naves espaciales impulsadas por la luz de las estrellas.



Las ondas ejercen una presión sobre los cuerpos en los que inciden. El Sol no solo atrae gravitacionalmente los demás astros, sino que sus ondas electromagnéticas también les ejercen una fuerza relativamente pequeña y opuesta a la gravitacional.

14.1 Polarización

Por polarización de una onda nos referimos a la figura mediante la que describamos su campo como función del tiempo en cierto punto P (figura 14.1e) especificado por \mathbf{r} . En una cuerda, si estamos describiendo el campo de desplazamiento ξ para un punto de ella, y vemos que este punto sigue una circunferencia, decimos que la onda tiene polarización circular, o elíptica si sigue una elipse. Con una onda electromagnética puede ocurrir una situación análoga, y si su campo, eléctrico o magnético, como función del tiempo en cierto punto del espacio se puede describir con una elipse, decimos que la onda electromagnética está polarizada elípticamente en ese punto. Pero mientras que en una onda elástica se puede pensar en puntos materiales que realmente se mueven en elipse, en una onda electromagnética no, por no ser una onda elástica; los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} se propagan en el vacío.

Se entenderá que una onda longitudinal no es polarizable puesto que, por definición de onda longitudinal, el campo siempre está en la dirección de avance de la onda. O dicho con otras palabras, una onda longitudinal siempre está polarizada linealmente.

Por convención, el observador que determine la polarización de una onda electromagnética se debe ubicar de manera que la onda se le acerque, $\mathbf{k} \rightarrow \text{---}$, y luego fijarse en su campo eléctrico. Lo que ocurra con el campo magnético se deduce de \mathbf{E} con la ecuación 12.2, p. 122.

El plano definido por \mathbf{E} y \mathbf{k} se llama **plano de polarización**. Esta definición lleva a que el plano de polarización sea perpendicular al frente de onda.

Vimos que en una onda plana \mathbf{E} y \mathbf{B} definen un plano perpendicular a \mathbf{k} ; sea este el plano yz , coincidente con el frente de onda. Como \mathbf{E} , \mathbf{B} y \mathbf{k} forman un sistema derecho, la dirección de avance de la onda es paralela al eje x . El vector de onda, si la onda avanza en dirección de x creciente, $+x$, será $\mathbf{k} = \mathbf{u}_x k$. En este caso, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{u}_x k_x + \mathbf{u}_y k_y + \mathbf{u}_z k_z) \cdot (\mathbf{u}_x x + \mathbf{u}_y y + \mathbf{u}_z z) = \mathbf{u}_x k \cdot (\mathbf{u}_x x + \mathbf{u}_y y + \mathbf{u}_z z) = kx$; en lugar de $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ escribiremos $(kx - \omega t)$. Cualquiera sea la polarización de la onda, su campo eléctrico se puede expresar como

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_y + \mathbf{E}_z = \mathbf{u}_y E_y + \mathbf{u}_z E_z \\ &= \mathbf{u}_y E_{0y} \text{sen}(kx - \omega t) + \mathbf{u}_z E_{0z} \text{sen}(kx - \omega t + \delta). \end{aligned} \quad (14.1)$$

El desfase entre las componentes E_z y E_y es δ . La ecuación equivale a descomponer la onda en dos ondas con polarización lineal, una polarizada en y (componente eléctrica \mathbf{E}_y y su respectiva componente magnética \mathbf{B}_z , dada por la ecuación 12.2) y la otra polarizada en z (componente eléctrica \mathbf{E}_z y su respectiva componente magnética \mathbf{B}_y).

Veamos las diferentes polarizaciones según el valor de δ .

14.1.1 Componentes en fase

Estar en fase dos variables quiere decir que las dos alcanzan *simultáneamente* su máximo valor, o su mínimo, o cero, $\delta = 0$ (figura 14.1a). Por ejemplo, en un péndulo la altura y la energía potencial están en fase.

De la ecuación 14.1, $E_y = E_{0y} \text{sen}(kx - \omega t)$ y $E_z = E_{0z} \text{sen}(kx - \omega t)$. Hagamos el cociente E_y/E_z y despejemos, $E_y = (E_{0y}/E_{0z})E_z$. Esta es la ecuación de una recta con pendiente E_{0y}/E_{0z} .

La onda tiene polarización rectilínea: su campo \mathbf{E} oscila, en el punto \mathbf{r} donde se hace el presente análisis, siempre en la misma dirección. En

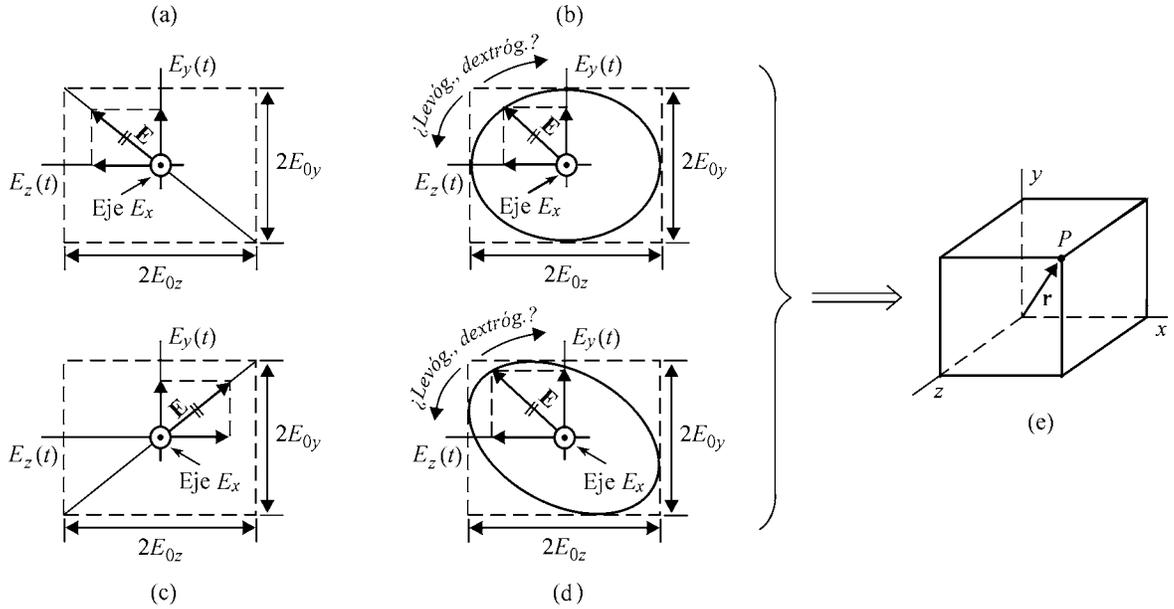


Figura 14.1 Componentes E_y y E_z (a) en fase, (b) en cuadratura, (c) en contrafase y (d) con desfase diferente a los anteriores.

la figura *a* vemos que cuando $E_y = E_{0y}$, $E_z = E_{0z}$; cuando $E_y = -E_{0y}$, $E_z = -E_{0z}$; y también simultáneamente se hacen cero E_y y E_z .

14.1.2 Componentes en cuadratura

Estar desfasadas 90° o en cuadratura dos variables quiere decir que en el instante que una alcanza su máximo o su mínimo valor, la otra vale cero, $\delta = \pm\pi/2$ (figura 14.1b). Esto se logra describiendo a una variable con la función seno y a la otra con la función coseno (examine los gráficos de estas funciones). Por ejemplo, en el oscilador armónico simple bloque-resorte la elongación y la velocidad están desfasadas $\pi/2$. De la ecuación 14.1, $E_z = E_{0z} \text{sen}(kx - \omega t \pm \pi/2) = \pm E_{0z} \text{cos}(kx - \omega t)$. Despejemos E_z/E_{0z} , elevemos al cuadrado y sumemos con $(E_y/E_{0y})^2$,

$$\frac{E_y^2}{E_{0y}^2} + \frac{E_z^2}{E_{0z}^2} = \text{sen}^2(kx - \omega t) + \text{cos}^2(kx - \omega t) = 1.$$

Esta es la ecuación de una elipse; decimos que la onda tiene polarización elíptica. En la figura *b* vemos que cuando $E_y = E_{0y}$, $E_z = 0$; cuando $E_y = -E_{0y}$, $E_z = 0$; cuando $E_z = E_{0z}$, $E_y = 0$; cuando $E_z = -E_{0z}$, $E_y = 0$. Si $E_{0y} = E_{0z} \equiv E_0$, la ecuación de la elipse cambia a la ecuación de la circunferencia $E_y^2 + E_z^2 = E_0^2$; decimos que la onda tiene polarización circular. Cuando la polarización es elíptica o circular, se puede preguntar por el sentido de la polarización, ¿dextrógira o levógira? En un ejemplo posterior veremos un método de determinararlo.

14.1.3 Componentes en contrafase

Estar en contrafase dos variables quiere decir que en el instante que una variable alcanza su máximo valor, la otra está en su mínimo; y que las dos se hacen cero simultáneamente, $\delta = \pm\pi$ (figura 14.1c). Por ejemplo, en

el oscilador armónico simple bloque-resorte la elongación y la aceleración están en contrafase. De la ecuación 14.1, $E_z = E_{0z} \sin(kx - \omega t \pm \pi) = -E_{0z} \sin(kx - \omega t)$. De donde $E_y = -(E_{0y}/E_{0z})E_z$. Esta es la ecuación de una recta con pendiente $-E_{0y}/E_{0z}$. La onda tiene polarización rectilínea: su campo \mathbf{E} oscila, en el punto \mathbf{r} donde se hace el presente análisis, siempre en la misma dirección. En la figura *c* vemos que cuando $E_y = E_{0y}$, $E_z = -E_{0z}$; cuando $E_y = -E_{0y}$, $E_z = +E_{0z}$; y también simultáneamente se hacen cero E_y y E_z .

14.1.4 Componentes con otros desfases

Cuando $\delta \neq 0, \pm\pi/2, \pm\pi$, se puede probar que el campo eléctrico puede ser descrito con una elipse cuyos ejes no son paralelos a los ejes y y z (figura 14.1d). Cuando una variable se hace máxima, cero o mínima, la otra lo hace un tiempo después diferente a 0 (desfase de 0), a $\frac{1}{4}P$ (desfase de $\pm\pi/2$), y a $P/2$ (desfase de $\pm\pi$).



Vea en el multimedia de Física de las ondas la experiencia Polarización.

14.1.5 Componentes con desfase aleatorio

Realmente, para la luz más común o luz natural —por ejemplo la luz del Sol, de una llama o de una lámpara— δ en un punto del espacio cambia aleatoriamente con el tiempo por intervalos de cerca de 10^{-8} s, y solo por este tiempo la onda mantiene una polarización definida. Esta polarización —o más bien, despolarización— se llama *aleatoria*.

Debemos recalcar que el campo eléctrico no describe una figura en el espacio. Cuando decimos, por ejemplo, que el campo eléctrico "describe" una elipse o una función seno, lo hace pero en el espacio abstracto del campo eléctrico, cuyos ejes son E_x , E_y y E_z (figuras 14.1a, b, c y d), no en el espacio en que vivimos, que es el espacio con ejes x , y , z : lo que ocurre en el punto P de la figura 14.1e se describe con una de las figuras a, b, c o d.

14.1.6 Intensidad

Reemplazando la ecuación 14.1 en la ecuación 13.6 obtenemos la intensidad instantánea,

$$I(\mathbf{r}, t) = c\epsilon_0 E_{0y}^2 \sin^2(kx - \omega t) + c\epsilon_0 E_{0z}^2 \sin^2(kx - \omega t + \delta) = I_y(\mathbf{r}, t) + I_z(\mathbf{r}, t). \quad (14.2)$$

En la polarización lineal, $\delta = 0$ o $\pm\pi$ y la anterior ecuación da

$$I(\mathbf{r}, t) = c\epsilon_0 (E_{0y}^2 + E_{0z}^2) \sin^2(kx - \omega t).$$

En la polarización circular, $E_{0y} = E_{0z}$, $\delta = \pm\pi/2$; la intensidad instantánea es

$$I(\mathbf{r}, t) = c\epsilon_0 [E_{0y}^2 \sin^2(kx - \omega t) + E_{0z}^2 \cos^2(kx - \omega t)] = c\epsilon_0 E_{0y}^2.$$

Vemos que la intensidad instantánea en la polarización circular no depende del tiempo, y entonces es igual a la intensidad promedio.

El promedio de la ecuación 14.2 es

$$\begin{aligned} I &= c\epsilon_0[E_{0y}^2\langle\sin^2(kx - \omega t)\rangle + E_{0z}^2\langle\sin^2(kx - \omega t + \delta)\rangle] \\ &= c\epsilon_0[E_{0y}^2(1/2) + E_{0z}^2(1/2)] = \frac{1}{2}c\epsilon_0E_{0y}^2 + \frac{1}{2}c\epsilon_0E_{0z}^2 \\ &= I_y + I_z, \end{aligned}$$

resultado que era de esperarse puesto que el promedio de una suma es la suma de los promedios. La intensidad es un escalar y no un vector, y por tanto no tiene componentes. La ecuación anterior y la 14.2 no se deben entender como que la intensidad sea la suma de una componente y de la intensidad con una componente z , sino como que es la suma de la intensidad de la onda y más la intensidad de la onda z . Si fuera un vector sería $I = \sqrt{I_y^2 + I_z^2}$.

14.2 Presión de radiación

Todos hemos sentido, cerca de los parlantes utilizados en conciertos o en discotecas, la presión del sonido sobre nuestra piel o vestido. Esta experiencia nos revela que el sonido transporta momento lineal. Las ondas electromagnéticas también presionan los cuerpos sobre los que inciden, debido al intercambio de momento lineal con ellos.

Por conservación del momento lineal, el cambio de momento lineal p_{onda} de una onda cuando es reflejada o absorbida por un medio, es igual al negativo del cambio del momento lineal del medio, p_{medio} ,

$$p_{\text{onda}} = -p_{\text{medio}}. \quad (14.3)$$

1. Incidencia normal, superficie absorbente

Consideremos primero la situación más sencilla: el caso de una onda electromagnética con un ángulo de incidencia de 0° sobre una superficie perfectamente negra, esto es, que absorbe el 100% de la onda. En la figura 14.2a se ilustra, antes de la absorción, un cilindro de luz de altura h , sección transversal A , volumen V y densidad de momento lineal p_{den} (momento lineal por unidad de volumen). El cilindro es absorbido por la superficie con una velocidad c , en un tiempo t ; esto lleva a que $h = ct$. En la figura 14.2b se ilustra la situación después de la absorción, donde ha desaparecido el cilindro, pero su momento y energía se han transferido a la superficie.

El momento dentro del cilindro es

$$p = p_{\text{den}}V = p_{\text{den}}Ah = p_{\text{den}}Act.$$

Según la ecuación 14.3, este momento es el que se transfiere a la superficie en el mismo t . De acuerdo con la segunda ley de Newton, la fuerza que la onda le ejerce a la superficie es

$$F = \frac{p}{t} = \frac{p_{\text{den}}Act}{t} = p_{\text{den}}Ac.$$

La presión P_{rad} que la onda o radiación ejerce sobre la superficie es así

$$P_{\text{rad}} = \frac{F}{A} = \frac{p_{\text{den}}Ac}{A} = p_{\text{den}}c. \quad (14.4)$$

Según la relatividad especial, la energía E del cilindro y su inercia m están relacionadas por la célebre ecuación $E = mc^2 = (mc)c$. El paréntesis

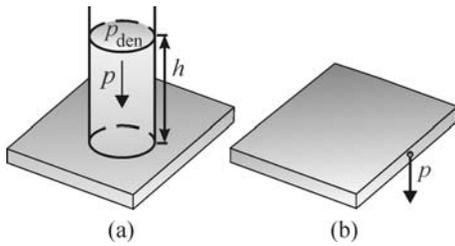


Figura 14.2 Absorción para incidencia normal.

es el momento lineal del cilindro de luz, $E = pc$. Dividiendo por el volumen del cilindro, $(E/V) = (p/V)c$. El primer paréntesis es la densidad de energía E y el segundo es la densidad de momento lineal p_{den} , $E = p_{den}c$. Igualemos con la ecuación 14.4,

$$P_{rad} = E. \tag{14.5}$$

Vemos que la presión (N/m^2) y la densidad de energía (J/m^3) tienen unidades equivalentes. Recuerde que $E = I/v$ y $E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2$ (polarización lineal). En el vacío,

$$E = \frac{I}{c} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2.$$

La fuerza sobre la superficie podemos escribirla en términos de la potencia P de la luz. Despejemos a p de $E = pc$ y reemplacemos en $F = p/t$ para obtener que $F = E/ct$. Pero E/t es la energía por unidad de tiempo que la onda transfiere a la superficie, o sea la potencia,

$$F = P/c.$$

2. Incidencia oblicua, superficie absorbente

En la figura 14.3 la luz incide sobre una superficie totalmente absorbente. El ángulo de incidencia θ_i se define como el ángulo entre la normal N en el punto de incidencia y un rayo. El momento lineal se puede descomponer en una componente p_x paralela a la interfaz y una componente perpendicular p_y . Puesto que solo la componente perpendicular, $p_y = p \cos \theta_i$, produce una presión, basta con introducir $\cos \theta_i$ en la ecuación 14.5,

$$P_{rad} = E \cos \theta_i. \tag{14.6}$$

La ecuación 14.5 es un caso particular para $\theta_i = 0$.

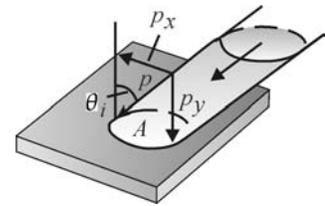


Figura 14.3 Incidencia oblicua.

3. Incidencia normal, superficie reflectiva

En la figura 14.4 se ilustra una onda que incide normalmente sobre una superficie totalmente reflectiva, esto es, que refleja el 100% de la energía de la onda.

Se selecciona de la onda un cilindro de luz con momento lineal p antes de la reflexión (figura 14.4a). Después de un tiempo t , el cilindro es totalmente reflejado y tiene un momento $-p$ (figura 14.4b). Como el momento lineal se conserva, el momento del sistema cilindro-superficie antes y después de la absorción debe ser constante. Esto lleva a que la superficie después de la absorción adquiere un momento lineal $2p$,

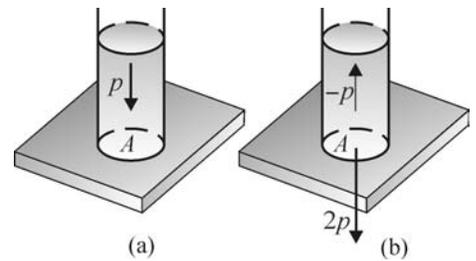


Figura 14.4 Reflexión para incidencia normal.

$$\begin{aligned} p_{antes} &= p_{después}, \\ (p_{cilindro} + p_{superficie})_{antes} &= (p_{cilindro} + p_{superficie})_{después}, \\ p + 0 &= -p + 2p. \end{aligned}$$

Vemos que el cambio de momento lineal de la superficie es el doble de cuando hay absorción total, lo que lleva, de acuerdo con la segunda ley de Newton, a que la onda ejerza el doble de fuerza y, en consecuencia, el doble de presión,

$$P_{rad} = 2E.$$

Una situación parecida se presenta cuando jugamos con un balón: hacemos más fuerza cuando lo rechazamos que cuando lo atrapamos.

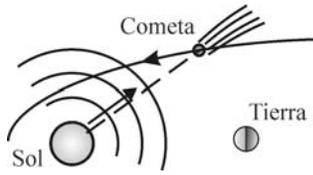


Figura 14.5 Orientación de la cola de los cometas.

4. Incidencia oblicua, superficie reflectiva

Por argumentos ya expuestos, si la incidencia es oblicua basta con introducir la función $\cos \theta_i$ en la anterior ecuación,

$$P_{\text{rad}} = 2E \cos \theta_i. \tag{14.7}$$

Desde hace siglos se sabe que la cola de los cometas está en la línea Sol-cometa, en el lado opuesto al Sol (figura 14.5). Esto se debe al sentido de la fuerza que la radiación hace sobre las partículas de la cola (vea el problema 13), explicación dada por Kepler en 1619. Además de la radiación electromagnética, el Sol también emite partículas, el llamado *viento solar*, que da origen a otra cola menos brillante. Maxwell dedujo teóricamente, en 1871, que la radiación electromagnética ejerce una fuerza sobre las superficies; fue probado experimentalmente por Pyotr Lebedev en 1900. Es posible hacer rotar unas aspas mediante la presión de la luz, análogo a como se hacen rotar por un chorro de agua, pero el experimento es muy delicado y exige un alto vacío.

Ejemplo 14.1 El campo eléctrico de una onda es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_y E_0 \text{sen}(kx - \omega t) - \mathbf{u}_z E_0 \text{cos}(kx - \omega t).$$

Halle el sentido de la polarización de la onda.

Solución. Según la anterior ecuación, en cualquier punto del espacio tridimensional especificado por \mathbf{r} la onda se propaga paralela al eje x , con componentes

$$E_y(\mathbf{r}, t) = E_0 \text{sen}(kx - \omega t), \tag{14.8}$$

y

$$E_z(\mathbf{r}, t) = -E_0 \text{cos}(kx - \omega t). \tag{14.9}$$

Enfatizamos que es incorrecto decir que la onda se propaga a lo largo del eje x , pues la onda es plana, y existe en *todo el espacio tridimensional infinito*. Se debe decir, más bien, que se propaga paralela al eje x . Las componentes y y z tienen igual amplitud y un desfase de 90° , lo que da lugar, como ya se demostró, a polarización circular (figura 14.6). Para hallar el sentido se debe averiguar en qué sentido cambia \mathbf{E} . Para esto es necesario examinar su variación temporal $\partial \mathbf{E} / \partial t$ en algún punto fijo \mathbf{r} (de manera análoga, cuando se quiere saber el sentido de movimiento de una partícula se examina su velocidad $d\mathbf{r} / dt$).

Un observador ubicado de manera que la onda se le acerque, $\mathbf{k} \rightarrow \rightarrow$, describe a \mathbf{E} en un punto \mathbf{r} , con la figura citada. Basta con examinar el cambio temporal de una de las componentes de \mathbf{E} en cualquiera de los cuatro cuadrantes.

Escojamos a E_y cuando \mathbf{E} está en el cuadrante I, donde se cumple que $E_y > 0$ y $E_z > 0$. Comparando estas dos relaciones características del cuadrante I con las ecuaciones 14.8 y 14.9, vemos que $\text{sen}(kx - \omega t) > 0$ y $\text{cos}(kx - \omega t) < 0$. Entonces, $\partial E_y / \partial t = -\omega E_0 \text{cos}(kx - \omega t)$ es positivo, puesto que $\omega > 0$, $E_0 > 0$ y $\text{cos}(kx - \omega t) < 0$. El valor positivo de la derivada nos indica que E_y está aumentando, y por lo tanto el diagrama final es el de la figura 14.7, correspondiente a polarización dextrógira. A la misma conclusión llegamos si analizamos la rapidez con que cambia E_z , $\partial E_z / \partial t$.

Este ejemplo lo podemos transformar en uno sobre ondas elásticas. Imagínese al eje x coincidente con una cuerda; las ondas transversales son vibraciones de los puntos de la cuerda en planos paralelos al plano yz . Cambie a \mathbf{E} por el campo de desplazamiento ξ y a E_0 por ξ_0 .

Ejemplo 14.2 Una onda plana armónica polarizada linealmente, con longitud de onda $\lambda = 6.0 \times 10^{-7}$ m, se propaga en el vacío. La intensidad promedio de la onda es 0.5 W/m^2 . La dirección de propagación es paralela al plano xz , a 30° con el eje x . El campo eléctrico oscila paralelo al eje y . Escriba, en forma vectorial, las ecuaciones que describen los campos eléctrico y magnético de la onda.

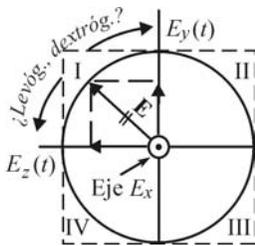


Figura 14.6 Polarización circular.

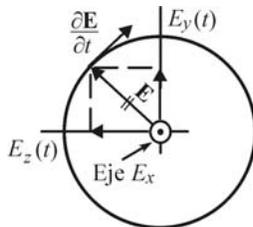


Figura 14.7 Sentido de la polarización.

Solución. En la figura 14.8 se muestran, en el origen y en un instante arbitrario, los vectores \mathbf{E} y \mathbf{k} . El vector \mathbf{B} se halla con la regla de la mano derecha: según la ecuación 12.2, tiene el mismo sentido que el producto $\mathbf{k} \times \mathbf{E}$.

Los vectores \mathbf{E} y \mathbf{B} están en fase, y vibran con una frecuencia $\nu = c/\lambda = 3 \times 10^8 / 6 \times 10^{-7} = 5 \times 10^{14}$ Hz. Esto quiere decir que al cabo de un tiempo $t = \frac{1}{2}P = \frac{1}{2} \frac{1}{5 \times 10^{14}}$ s tales vectores tendrán un sentido opuesto al mostrado en la figura. Como la onda es plana, \mathbf{E} y \mathbf{B} se deben trasladar a todos los puntos del frente de onda, que es el plano infinito donde están \mathbf{E} y \mathbf{B} , perpendicular a \mathbf{k} ; también se deben trasladar a todos los puntos de los planos a una distancia, a lo largo de \mathbf{k} , $n\lambda$ ($n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$) del plano que pasa por el origen.

En un plano infinito separado $\lambda/2$ del plano mostrado, los vectores \mathbf{E} y \mathbf{B} se deben dibujar con sentido opuesto. Como la polarización es lineal, \mathbf{E} siempre es paralelo a y ; si fuera elíptica, \mathbf{E} (y por supuesto \mathbf{B} también) rotaría alrededor de \mathbf{k} , espacial y temporalmente, a la vez que cambiaría de magnitud. Si fuera circular, rotaría sin cambiar de magnitud.

El campo eléctrico para una onda plana, armónica y con polarización lineal se puede escribir como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \mathbf{u}_E, \quad (14.10)$$

donde \mathbf{u}_E es un vector unitario con la dirección de \mathbf{E} .

Hallemos los valores o expresiones de (a) E_0 , (b) $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$, (c) ω y (d) \mathbf{u}_E que hacen de la ecuación general 14.10 una ecuación específica para este ejemplo:

(a) De la ecuación 13.7, p. 129,

$$E_0 = \sqrt{\frac{2I}{c\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2(0.5 \text{ W/m}^2)}{(3 \times 10^8 \text{ m/s})(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)}} = 19.4 \text{ V/m}.$$

(b) Como la onda es transversal, \mathbf{k} no puede tener componente en la dirección de \mathbf{E} y $k_y = 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \mathbf{k}_x + \mathbf{k}_y + \mathbf{k}_z = \mathbf{k}_x + \mathbf{k}_z = \mathbf{u}_x k_x + \mathbf{u}_z k_z \\ &= \mathbf{u}_x k \cos 30^\circ + \mathbf{u}_z k \sin 30^\circ = \mathbf{u}_x \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathbf{u}_z \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{2} \\ &= \frac{\pi}{\lambda} (\sqrt{3}\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_z). \end{aligned}$$

De esta ecuación vemos que $k_x = \sqrt{3}\pi/\lambda$, y $k_z = \pi/\lambda$.

La onda descrita por la ecuación 14.10 existe en *todo el espacio infinito tridimensional*. El vector \mathbf{r} especifica el punto P de ese espacio donde se está analizando la onda (figura 14.9), y su expresión es

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}_x x + \mathbf{u}_y y + \mathbf{u}_z z.$$

Hallemos el producto escalar,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \frac{\pi}{\lambda} (\sqrt{3}\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_z) \cdot (\mathbf{u}_x x + \mathbf{u}_y y + \mathbf{u}_z z) = \frac{\pi}{\lambda} (\sqrt{3}x + z).$$

(c) La frecuencia angular es

$$\omega = 2\pi c/\lambda.$$

(d) Como la polarización es lineal, \mathbf{u}_E no depende del tiempo,

$$\mathbf{u}_E = \mathbf{u}_y.$$

Reemplazando los valores hallados de E_0 , $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$, ω y \mathbf{u}_E en la ecuación 14.10, llegamos a la expresión final para el campo eléctrico,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 19.4 \frac{\text{V}}{\text{m}} \sin \left[\frac{\pi}{\lambda} (\sqrt{3}x + z) - \frac{2\pi c}{\lambda} t \right] \mathbf{u}_y \\ &= 19.4 \frac{\text{V}}{\text{m}} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z - ct \right) \mathbf{u}_y \\ &= E_y \mathbf{u}_y. \end{aligned} \quad (14.11)$$

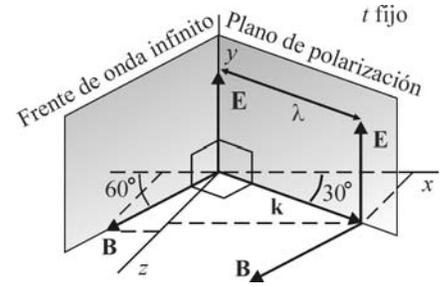


Figura 14.8 Diferentes planos en una onda plana.

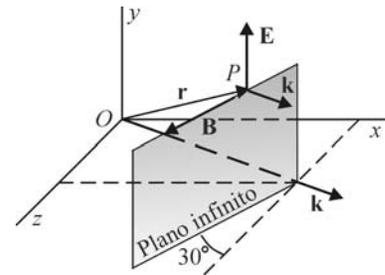


Figura 14.9 La onda en un punto P arbitrario.

Para hallar la componente magnética de la onda utilizamos la ecuación 12.2,

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\omega} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ k_x & k_y & k_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ k_x & 0 & k_z \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega} (-\mathbf{u}_x E_y k_z + \mathbf{u}_z k_x E_y) \\ &= \frac{E_y k}{\omega} (-\mathbf{u}_x \sin 30^\circ + \mathbf{u}_z \cos 30^\circ) = \frac{E_y}{c} \left(-\frac{1}{2} \mathbf{u}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{u}_z\right).\end{aligned}$$

De esta ecuación se desprende que

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_x(\mathbf{r}, t) &= -\frac{E_y}{2c} \mathbf{u}_x = -\frac{19.4 \text{ V}}{2c} \frac{1}{\text{m}} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{2} z - ct\right) \mathbf{u}_x, \\ \mathbf{B}_z(\mathbf{r}, t) &= \frac{\sqrt{3} E_y}{2c} \mathbf{u}_z = \frac{19.4 \sqrt{3} \text{ V}}{2c} \frac{1}{\text{m}} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{2} z - ct\right) \mathbf{u}_z.\end{aligned}$$

Vemos que \mathbf{B}_x y \mathbf{B}_z son generados por E_y .

En las ecuaciones 14.11 y posteriores notamos que la dirección de avance de la onda está en la fase, que la fase no contiene la dirección del campo, la cual es dada por el vector unitario que acompaña a la amplitud del campo. En dichas ecuaciones tampoco aparece la coordenada y , no porque $y = 0$, sino porque $k_y = 0$. Recuerde que en general $y \neq 0$, pues y es la coordenada respectiva de un punto cualquiera del espacio, $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (-\infty, +\infty)$, $z \in (-\infty, +\infty)$.

Ejemplo 14.3 La radiación electromagnética solar cae sobre la Tierra a razón de 1400 W/m^2 . (a) Suponiendo que la radiación se pueda considerar como ondas planas, estime la amplitud de los campos eléctrico y magnético de la onda; (b) halle la potencia emitida por el Sol en ondas electromagnéticas; (c) ¿cuánta masa (inercia) por segundo pierde el Sol debido a la radiación?; (d) halle entre qué límites está la fuerza que dicha radiación ejerce sobre la Tierra, y compare con la fuerza de atracción gravitacional entre ambos astros.

Solución. La distancia de la Tierra al Sol (r_{TS}) es, aproximadamente, 150 millones de kilómetros (a esta distancia se le define como una unidad astronómica, U. A., de distancia). En metros, $r_{TS} = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$. El Sol se puede aproximar a una fuente puntual que emite ondas esféricas, pero la curvatura de las ondas cuando nos movemos en la superficie terrestre es indetectable, y suponemos que el frente de onda es plano localmente, entendiendo por *localmente* desplazamientos muy pequeños en comparación con r_{TS} .

(a) Según los datos, $I(r_{TS}) = 1400 \text{ W/m}^2$. Despejemos E_0 de la ecuación 13.7, p. 129,

$$E_0 = \sqrt{\frac{2(1400 \text{ W/m}^2)}{(3 \times 10^8 \text{ m/s})(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)}} = 1027 \text{ V/m}.$$

Despejemos B_0 de la ecuación 12.4, p. 122,

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{1027 \text{ V/m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 3.42 \times 10^{-6} \text{ T} = 3.42 \mu\text{T}.$$

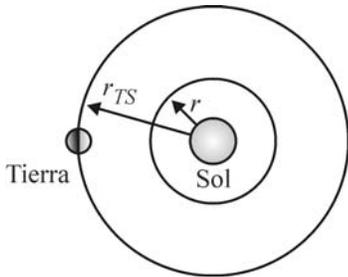


Figura 14.10 Emisión de radiación solar.

(b) La potencia que pasa a través de una esfera de radio r dentro de la que esté el Sol es constante, sin importar r . Nos piden hallar cuántos joules, en promedio, pasan cada segundo a través de una esfera de radio r_{TS} (figura 14.10). A esta distancia la intensidad es 1400 W/m^2 , lo que quiere decir que por cada m^2 pasan en un segundo 1400 J . Debemos hallar entonces el área de una esfera de radio r_{TS} ,

$$P = I(r)A(r) = I(r_{TS})4\pi r_{TS}^2 = (1400 \text{ W/m}^2)4\pi(1.5 \times 10^{11} \text{ m})^2 = 4 \times 10^{26} \text{ J/s}.$$

Como la energía se conserva, esta potencia es igual a la disminución de energía del Sol cada segundo,

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{Sol}} = -4 \times 10^{26} \text{ J/s}.$$

(c) Según la relatividad especial, $E = mc^2$. Derivemos respecto al tiempo, $dE/dt = c^2 dm/dt$; de donde

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{\text{Sol}} = \frac{1}{c^2} \frac{dE}{dt} = -\frac{4 \times 10^{26} \text{ J/s}}{(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2} = -4.52 \times 10^9 \text{ kg/s.}$$

El Sol pierde una masa (entendida como inercia, no como átomos o moléculas) de 4.5 millones de toneladas cada segundo, la que se transforma en ondas electromagnéticas.

(d) La Tierra no absorbe ni refleja el 100% de la radiación que le llega (el porcentaje de reflectividad de un planeta se llama su **albedo**), por lo que la presión de radiación sobre ella es mayor que si fuera totalmente absorbente, y menor que si fuera totalmente reflectiva,

$$E < P_{\text{rad}} < 2E.$$

Hallemos la fuerza suponiendo que la Tierra absorbe toda la radiación; en este caso la presión la da la ecuación 14.6, p. 137. Sea R el radio de la Tierra. La figura 14.11 muestra como elemento de área sobre la superficie terrestre a un anillo concéntrico con la línea TS , y de ancho infinitesimal. El ángulo entre un rayo proveniente del Sol y la normal N al infinitesimal es θ . El radio del elemento es $R \sin \theta$ y su ancho es $R d\theta$; su área es entonces el perímetro por el ancho, $da = (2\pi R \sin \theta)(R d\theta) = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$. La fuerza sobre el infinitesimal es

$$dF = P_{\text{rad}} da = (E \cos \theta)(2\pi R^2 \sin \theta d\theta) = 2\pi R^2 E \sin \theta \cos \theta d\theta.$$

Para hallar la fuerza total, debemos integrar entre 0 y $\pi/2$. Sobre la superficie terrestre la densidad de energía, E es casi constante y sale de la integral,

$$F = 2\pi R^2 E \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = 2\pi R^2 E \int_0^{\pi/2} \sin \theta d(\sin \theta) = 2\pi R^2 E \left. \frac{\sin^2 \theta}{2} \right|_0^{\pi/2} = \pi R^2 E.$$

En esta ecuación πR^2 es el área de la proyección del hemisferio iluminado sobre un plano perpendicular a la dirección de la luz. La función $\cos \theta$ en las ecuaciones para la presión de radiación (ecuaciones 14.6 y 14.7) realiza la proyección. En la figura 14.12 se ilustra entre líneas gruesas un elemento de área da , y su proyección en un plano perpendicular a la luz, con líneas punteadas.

El radio terrestre es $R = 6370 \text{ km} = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$, la densidad de energía es $E = I/v \approx I/c$. Reemplacemos en la última ecuación para F ,

$$F = \pi(6.37 \times 10^6 \text{ m})^2 \frac{1400 \text{ W/m}^2}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} \approx 6 \times 10^8 \text{ N.}$$

La presión de radiación cuando la superficie es 100% reflectiva es el doble que cuando es 100% absorbente, por consiguiente, la fuerza sería el doble de lo hallado. La respuesta a este literal (d) es

$$6 \times 10^8 \text{ N} < F < 12 \times 10^8 \text{ N.}$$

La masa de la Tierra es $6 \times 10^{24} \text{ kg}$ y la del Sol es $2 \times 10^{30} \text{ kg}$; la fuerza de atracción gravitacional F_G es

$$F_G = G \frac{m_{\text{Sol}} m_{\text{Tierra}}}{r_{TS}^2} = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \frac{(6 \times 10^{24} \text{ kg})(2 \times 10^{30} \text{ kg})}{(1.5 \times 10^{11} \text{ m})^2} = 3.6 \times 10^{22} \text{ N.}$$

La fuerza de atracción gravitacional es, aproximadamente, $10^{22}/10^9 = 10^{13}$ veces mayor que la debida a la radiación electromagnética.

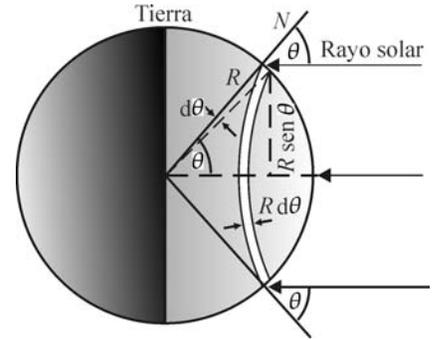


Figura 14.11 Presión de radiación sobre la Tierra.

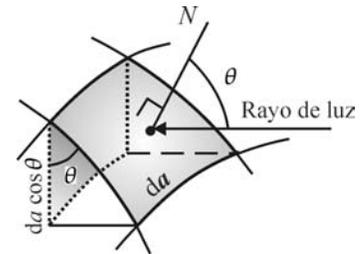


Figura 14.12 Proyección de un elemento de área.

Resumen

Cuando hablamos de la polarización de una onda nos referimos siempre a una onda transversal; cualquiera sea su polarización, la descomponemos en dos ondas con polarización lineal. Según el desfase δ entre estas, la polarización de la onda inicial es lineal ($\delta = 0, \pm\pi$); circular ($\delta = \pm\pi/2$); elíptica ($\delta = \pm\pi/2$ o diferente de 0 y $\pm\pi$); aleatoria (δ cambia aleatoriamente).

La presión que una onda ejerce sobre un cuerpo es una manifestación del intercambio de momento lineal onda-cuerpo; en una situación real está entre dos extremos ideales: la superficie que absorbe toda la radiación que le llegue perpendicularmente —superficie negra ideal— y la que la refleja toda —superficie blanca ideal—. En este caso la presión es el doble que en el primero. En las ecuaciones $P_{\text{rad}} = E \cos \theta_i$ y $P_{\text{rad}} = 2E \cos \theta_i$, el ángulo θ_i se mide respecto a la normal a la superficie.

Problemas del capítulo 2

1 Halle la ecuación 11.7 a partir de las ecuaciones de Maxwell. ¿Con qué velocidad se propaga \mathbf{B} en el vacío? *Ayuda:* aplique el operador rot (o sea $\nabla \times$) a la ecuación 11.4, y proceda de manera análoga a como se hizo para llegar a la ecuación 11.5, p. 114.

2 Demuestre que en el vacío, $\mathbf{E} = -\frac{c^2}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{B}$. *Ayuda:* siga un procedimiento análogo al que se recorrió para llegar a la ecuación 12.2, $(\nabla \times \mathbf{B})_x = (\partial/\partial y)B_z(s) - (\partial/\partial z)B_y(s) = \dots$ Utilice la ecuación 11.4.

3 Resuelva el ejemplo 14.1, pero repitiendo el análisis en los cuadrantes II, III y IV.

4 Un alambre de cobre de un milímetro de diámetro (resistividad $\rho = 1.69 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$) transporta una corriente de 1.2 A. Halle (a) el campo eléctrico en la resistencia. En un punto de la superficie halle (b) el campo magnético y (c) la magnitud del vector de Poynting y su sentido. (d) Halle la resistencia de un metro del alambre y la potencia disipada por efecto Joule en ese metro. (e) Verifique que la integral sobre el área de la resistencia del vector de Poynting (es decir, el flujo de \mathbf{S}) hallado en el literal c es igual a la anterior potencia.

5 Un condensador cilíndrico de volumen V se está cargando (figura 1). Muestre que (a) el vector de Poynting está dirigido hacia el eje del cilindro, (b) la rapidez con que fluye energía electromagnética a través de la superficie del cilindro es, según dicho vector,

$$\int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = V \frac{dE}{dt}.$$

La densidad de energía dentro del condensador es $E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$.

Sugerencia: calcule \mathbf{B} debido a la corriente de desplazamiento i_d durante el proceso de carga, halle una expresión para \mathbf{S} y realice su integral sobre el área del condensador. La densidad de energía dentro del condensador es $E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$, $i_d = \epsilon_0 d\Phi_E/dt = \epsilon_0 d(EA)/dt$.

6 Una onda luminosa plana y armónica con polarización lineal z se propaga en el vacío; su longitud de onda es 628 nm y la intensidad promedio 1.00 W/m². La dirección de propagación es paralela al plano xy , formando 60° con la dirección x . Escriba una ecuación vectorial para (a) $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, (b) el vector de Poynting promedio. (c) Grafique en el origen de un sistema cartesiano y en un instante arbitrario, los vectores \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{k} y \mathbf{S} .

7 Una onda plana armónica con polarización lineal se propaga en el vacío en dirección $+x$. El plano de polarización forma 40° con el plano xy . (a) Represente en un sistema cartesiano el plano de polarización y los vectores \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{k} en el origen y en un instante arbitrario, (b) repita el anterior literal si el ángulo es con el plano yz y la dirección de propagación es $+z$.

8 Un astronauta está, en reposo, a 10.0 m de su nave espacial. Su masa, junto con la del equipo y traje es de 92.0 kg. Dispone de un láser de 1.20 kW; para alcanzar la nave lo enciende de modo que la luz se aleje de la nave, en sentido opuesto a ella. (a) ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzarla? (b) Muestre que si lanzara un objeto de solo 20.0 g con una velocidad de 10.0 m/s tardaría 1.28 h.

9 Halle la fuerza que la onda del problema 6 ejerce sobre una lámina circular de 1.00 m de diámetro que refleja el 80% de la radiación si la lámina está perpendicular a la dirección (a) y , (b) z . (*Ayuda:* tenga presente que lo que no se refleja es absorbido). (c) En el caso del literal a, ¿cuál es el cambio de momento lineal de la lámina durante 1 hora, debido a la onda?, ¿cuál es el cambio de velocidad de la lámina durante este tiempo si su masa es 400 g?

10 ¿Cuando la polarización es lineal es correcto preguntar por su *sentido*, que si levógiro o dextrógiro?

11 Dos ondas electromagnéticas 1 y 2, planas y armónicas, de igual frecuencia angular ω y amplitud E_0 , con polarización lineal z , se propagan en el vacío en las direcciones $+x$ y $+y$ respectivamente. En el origen, el desfase entre \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 es

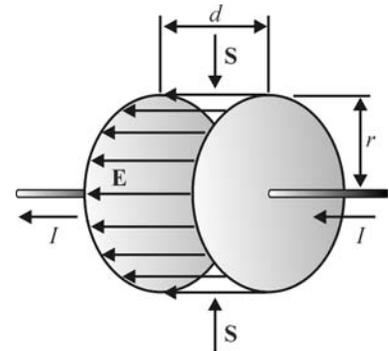


Figura 1 Condensador en proceso de carga.

cero. (a) Escriba las expresiones para los *vectores* $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$ y su resultante $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. (b) ¿Qué polarización tiene \mathbf{E} ? (c) Halle la ecuación de los planos en los que el campo eléctrico es cero en *todo instante*, y de ellos grafique en un sistema cartesiano el plano más cercano al origen. (d) ¿Es cero el campo magnético en los planos donde $\mathbf{E} = 0$? Explique. (e) Escriba una expresión vectorial para el campo magnético resultante $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. (f) Halle la ecuación de los planos en los que el campo magnético está polarizado linealmente. (g) Halle la ecuación de los planos en los que el campo magnético está polarizado circularmente. (h) Escriba las ecuaciones de las componentes del vector de Poynting. (i) ¿Cuál es la densidad de energía promedio? Con este valor, halle el promedio del vector de Poynting.

12 Halle el sentido de la polarización de la onda electromagnética cuyo campo eléctrico está descrito por $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(ky + \omega t)\mathbf{u}_x - E_0 \sin(ky + \omega t)\mathbf{u}_z$.

13 Una partícula esférica de radio r procedente de la cola de un cometa absorbe un porcentaje α de la radiación solar ($0 \leq \alpha \leq 100$); la densidad de la partícula es ρ , la potencia que el Sol emite en ondas electromagnéticas es P , la masa solar es M . (a) Halle r para que la fuerza debida a la radiación solar equilibre la atracción gravitacional del Sol (para r mayor predomina la atracción gravitacional y la partícula cae hacia el Sol, si es menor predomina la fuerza de la radiación y es alejada del Sol). (b) ¿Por qué la respuesta no depende de la distancia de la partícula al Sol? (c) Evalúe r si absorbe el 80% de la radiación. Para el valor de P consulte el ejemplo 14.3, $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg, $\rho = 3000$ kg/m³ (este es el valor de la densidad promedio de la corteza terrestre).

Capítulo 3

Reflexión y refracción

Contenido

Módulo 15

Leyes de reflexión y refracción

Módulo 16

Prueba de las leyes de reflexión y refracción

Módulo 17

Reflexión y transmisión electromagnéticas



La reflexión y la refracción de ondas son fenómenos cotidianos: con frecuencia podemos ver un objeto es por la luz que refleja, y la propia luz que penetra en nuestros ojos sufre múltiples refracciones. Pero los cuerpos reflejantes y refractantes no son neutros y desempeñan un papel activo modificando la luz con la que interaccionan.

Presentación

Cuando hablamos el sonido se propaga en todas las direcciones, y en algún momento alcanza una pared o alguna otra superficie cercana; como la frecuencia no cambia por transmisión, en la pared se propaga una onda refractada con la misma frecuencia que la incidente, al igual que la onda reflejada. Con una cuerda (sección 5.2, p. 43) examinamos ya la reflexión y la transmisión en una discontinuidad. Una luz que se encienda también alcanzará alguna interfaz como un vidrio, la piel de una persona o el piso. En el presente capítulo nos detendremos a examinar cómo se comportan las ondas electromagnéticas cuando inciden en una interfaz que separa dos medios no conductores de la electricidad (dieléctricos), pero sí conductores de tales ondas. Estudiaremos cómo se distribuye la energía incidente entre la onda reflejada y la refractada y qué cambios se presentan en la polarización.

Módulo 15

Leyes de reflexión y refracción

Contenido

- 15.1 Principio de Huygens
- 15.2 Definiciones
 - 15.2.1 Plano de incidencia. Ángulos de incidencia, reflexión y refracción
 - 15.2.2 Índice de refracción
- 15.3 Leyes de reflexión y refracción

Objetivos

1. Mostrar cuáles son los ángulos de importancia en la reflexión y transmisión de las ondas.
2. Enunciar las leyes que rigen los anteriores ángulos.
3. Hallar cómo cambia la longitud de onda cuando el medio cambia.

Preguntas básicas

1. ¿Cómo se afecta la geometría de un frente de onda cuando cambia de medio?
2. ¿Cambia la velocidad de la luz cuando cambia de medio? ¿Cambia la frecuencia?
3. ¿Cómo es la dirección de una onda reflejada y la de una onda transmitida?

Introducción

Cuando una onda incide en una interfaz, se producen una onda reflejada y una onda transmitida o refractada. La relación entre el ángulo con que incide y con que se refleja se conoce desde hace más de dos mil años; en cambio, a pesar de haber sido buscada por griegos y árabes, la relación con el ángulo con que se transmite no se halló hasta 1621, hace menos de cuatro siglos; primero se encontró empíricamente y poco después se probó con base en un modelo teórico. A partir de entonces fue posible diseñar, matemáticamente, lentes, microscopios y telescopios refractivos.



El agua refleja la luz procedente de la mujer y produce una imagen virtual e invertida del mismo tamaño.

15.1 Principio de Huygens

La propagación de una onda electromagnética que incide sobre una interfaz se puede estudiar, en principio, con las leyes de Maxwell. Pero es una tarea de alta dificultad, y buena parte de los fenómenos que se presentan se pueden comprender de una manera más simple. En 1678, Christian Huygens enunció una ficción muy útil, conocida como **principio de Huygens**, que hoy podemos aplicar a las ondas electromagnéticas para trazar la propagación de sus frentes de onda. El principio dice:

Todo punto de un frente de onda se puede tratar como un emisor de ondas secundarias; al cabo de cierto tiempo el nuevo frente es la superficie envolvente o tangente de estas ondas.

A las ondas secundarias también se les denomina **onditas**. Definimos un **rayo** como una línea que en todo punto del espacio es perpendicular al frente de onda, y que tiene la orientación de la propagación de la onda. En la figura 15.1 se trazan cinco frentes de onda y tres rayos. Por el propio concepto de frente de onda (p. 65), el tiempo que tarda la onda en ir de A a B es el mismo tiempo que tarda en ir de C a D, $t_{AB} = t_{CD}$. También se ilustra el principio de Huygens con los puntos A, E y C, que se consideran como emisores puntuales secundarios de las onditas también ilustradas. El nuevo frente de onda un tiempo posterior es la superficie envolvente de las onditas.

En la figura 15.2a se ilustra, con perspectiva, una onda plana; los frentes de onda son planos paralelos y en consecuencia los rayos también. En la figura 15.2b, sin perspectiva, una onda plana incide sobre una lente; después de atravesar la lente todos los rayos se cruzan en F haciendo que allí la densidad de energía sea máxima. Entre la lente y F los frentes de onda son casquetes esféricos; decimos que la onda es convergente porque los rayos se aproximan entre sí en la dirección de propagación. A la izquierda de F la onda es divergente porque los rayos se separan entre sí en la dirección de propagación. Como se comprenderá, los rayos de una onda esférica son radiales.

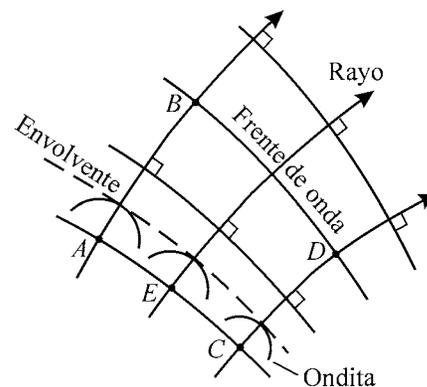


Figura 15.1 Frentes de onda y rayos. Principio de Huygens.

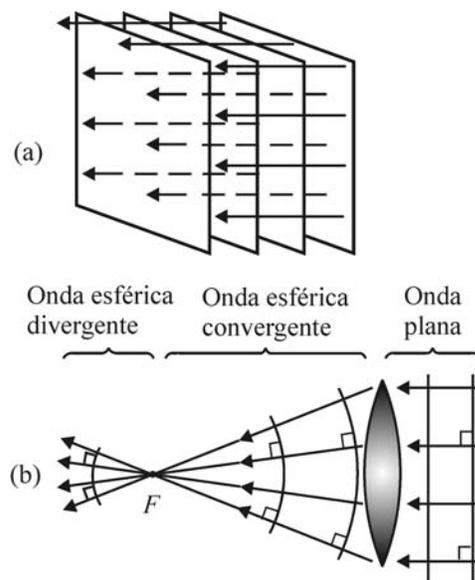


Figura 15.2 (a) onda plana, (b) ondas plana y esférica.

15.2 Definiciones

15.2.1 Plano de incidencia. Ángulos de incidencia, reflexión y refracción

Cuando la luz incide en una interfaz, parte se refleja y parte se refracta.¹ Donde están la luz incidente y la luz reflejada, *inmediatamente antes de la interfaz*, se define como el medio 1; donde está la luz refractada, *inmediatamente después de la interfaz*, es el medio 2 (figura 15.3). El medio 1 en muchas situaciones es el aire, y el 2 es un vidrio, agua o alguna otra sustancia transparente a la luz. El plano definido por el rayo incidente k_i y la normal N en el punto de incidencia se llama **plano de incidencia**.

Al abordar una situación donde se presenten reflexión y refracción, lo primero que se debe hacer es localizar el plano de incidencia.

N y la línea de intersección entre el plano de incidencia y la interfaz dividen el plano de incidencia en cuatro cuadrantes: el cuadrante I, donde

¹ Hay casos particulares donde no hay reflexión o transmisión.

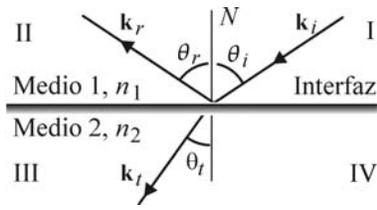


Figura 15.3 k_i define el medio 1.

está el rayo incidente; el II, adyacente al I en el medio 1; el III, diagonalmente opuesto al I; y el IV, diagonalmente opuesto al II. El rayo reflejado está siempre en II y el transmitido en III.

El ángulo de incidencia θ_i es el ángulo del rayo incidente con N , θ_r es el ángulo del rayo reflejado k_r con N , y θ_t es el ángulo del rayo transmitido o refractado k_t con N .

15.2.2 Índice de refracción

El índice absoluto de refracción de un medio se define como

$$n = c/v,$$

donde c es la rapidez de la luz en el vacío y v es la rapidez en el medio. Como $v \leq c$, entonces $n \geq 1$.

Cualquier medio material dispersa las ondas electromagnéticas, solo en el vacío todas ellas se propagan con rapidez c . Al depender la rapidez de la frecuencia, n depende también de ν o de λ .

Como la frecuencia no cambia por transmisión podemos escribir

$$\nu = \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2}, \quad \text{o} \quad \frac{c\lambda_1}{v_1} = \frac{c\lambda_2}{v_2}.$$

Introduciendo la definición de índice de refracción obtenemos

$$n_1\lambda_1 = n_2\lambda_2. \quad (15.1)$$

Supongamos que el medio 1 es el vacío y llamemos λ , sin subíndices y sin primar, a la longitud de onda en el vacío, $\lambda = \lambda_1$. Denotemos con λ' la longitud de onda en un medio material, $\lambda' = \lambda_2$. Al índice del medio 2 denotémoslo con n , $n = n_2$. Reemplacemos en la ecuación 15.1,

$$\lambda' = \lambda/n. \quad (15.2)$$

Vemos que cuando la onda pasa a un medio donde su rapidez disminuye la longitud de onda disminuye, puesto que la frecuencia no cambia; una disminución de λ implica un aumento de k .

El **índice relativo de refracción** de dos sustancias con índices absolutos n_1 y n_2 se define como

$$n_{12} = n_1/n_2, \quad \text{o} \quad n_{21} = n_2/n_1.$$

Vemos que se cumple que $n_{12} = 1/n_{21}$ y que un índice relativo sí puede ser menor que 1.

El siguiente es un primer paso en la comprensión del mecanismo físico de generación de la luz reflejada y refractada: la luz que incide desde el aire sobre un medio, por ejemplo un vidrio, interacciona con los átomos del vidrio, que absorbe energía de la luz para emitirla a continuación con la misma frecuencia de la luz original, en todas las direcciones. La radiación que sale de los diferentes átomos al aire da lugar a la onda reflejada, y la que sigue en el vidrio da origen a la onda refractada.

15.3 Leyes de reflexión y refracción

Las leyes de reflexión y refracción establecen que

1. Los rayos incidente, reflejado y refractado están en el plano de incidencia; lo que quiere decir que \mathbf{k}_i , \mathbf{k}_r y \mathbf{k}_t son coplanares con dicho plano.
2. El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, esto es,

$$\theta_i = \theta_r.$$

Esta ley se cumple para cualesquier frecuencia e índices de refracción.

3. Al cambiar de medio la onda cambia de rapidez (n cambia), lo que se manifiesta con un quiebre del rayo. La relación entre los ángulos de incidencia y refracción es

$$n_1 \text{ sen } \theta_i = n_2 \text{ sen } \theta_t. \quad (15.3)$$

Esta ecuación se llama **ley de refracción** o **ley de Snell**.² Recuerde que en un medio material n depende de la frecuencia.

Las leyes de reflexión y refracción fueron conocidas empíricamente antes de que fueran deducidas a partir de un modelo teórico, tarea que emprendemos a continuación.

Resumen

Si conocemos las propiedades del medio, mediante el principio de Huygens podemos trazar los cambios de un frente de onda.

El índice absoluto de refracción de una sustancia es $n = c/v$, y $n \geq 1$. El índice relativo entre dos sustancias es $n_{12} = n_1/n_2$, y puede ser menor que 1. La longitud de onda cambia según n : $\lambda' = \lambda/n$, donde λ es el valor en el vacío; la frecuencia no cambia.

Con excepción de la incidencia normal, la luz manifiesta su cambio de velocidad al cambiar de medio con un quiebre o cambio en la dirección de propagación. Cuando esta se acerca a la normal, es porque disminuye la velocidad; cuando se aleja es porque aumenta. Es un hecho fácilmente verificable que cuando la luz pasa del aire al agua se acerca a la normal, por lo que debe disminuir su velocidad, de acuerdo con un modelo ondulatorio de la luz. Pero si esta se interpreta como un flujo de partículas que obedecen las leyes de Newton, el que se acerque a la normal traería como consecuencia que la velocidad debe aumentar.

Las leyes de reflexión y refracción establecen que los rayos incidente, reflejado y refractado son coplanares con el plano de incidencia, que $\theta_i = \theta_r$ y $n_1 \text{ sen } \theta_i = n_2 \text{ sen } \theta_t$.



Vea en el multimedia de *Física de las ondas* la experiencia *Reflexión de ondas planas*.

² Descubierta empíricamente por Willebrord Snell en 1621, con lo que se inició la óptica moderna aplicada. En el siglo XVII se halló teóricamente la ley con base en un modelo corpuscular, en el que era necesario que la rapidez de la luz aumentara al pasar del aire al agua; también se halló con base en un modelo ondulatorio, en el que era necesario que tal rapidez disminuyera. Solo en 1850 Léon Foucault, con un arreglo de espejos rotantes, constató que disminuía. La velocidad de la luz fue medida por primera vez a partir del trabajo de Ole Römer en 1676 con los eclipses de Io, un satélite de Júpiter; Newton obtuvo 240 000 km/s. La igualdad entre θ_i y θ_r fue conocida por Euclides (300 a. C.), quien la enunció en su libro *Catóptrica*.

Módulo 16

Prueba de las leyes de reflexión y refracción

Contenido

- 16.1 Prueba basada en un modelo ondulatorio
 - 16.1.1 Propagación de la luz en la materia
 - 16.1.2 Reflexiones especular y difusa
- 16.2 Ángulo crítico
- 16.3 Principio de Fermat

Objetivos

1. Deducir las leyes de reflexión y refracción a partir de un modelo ondulatorio de la luz.
2. Hallar en qué condiciones no se presenta transmisión y solo se da reflexión.
3. Deducir las leyes de reflexión y refracción con un principio que no tiene en cuenta la naturaleza ondulatoria de la luz.

Preguntas básicas

1. ¿Cómo son los frentes de onda reflejado y transmitido cuando una onda plana incide sobre una interfaz plana?
2. ¿Cómo se propaga la luz en una fibra óptica?
3. ¿Cuando la luz viaja entre dos puntos, sigue la trayectoria de distancia mínima o de tiempo mínimo?

Introducción

Ocurre con frecuencia que primero se hace un descubrimiento empíricamente y solo después se encuentra su justificación teórica. Un ejemplo histórico es el descubrimiento de la elipticidad de las órbitas planetarias por parte de Kepler, que hubieron de esperar más de medio siglo para que Newton las dedujera utilizando su ley de gravitación universal; otro ejemplo son las leyes de reflexión y refracción, las que hallaremos teóricamente por dos métodos: el primero se basa en la suposición de que la luz se comporta como una onda, y el segundo supone que la luz minimiza el tiempo para viajar entre dos puntos.



Pierre de Fermat (1601-1665), matemático francés, fundó la teoría de números. Con su *principio de tiempo mínimo* se pueden deducir las leyes de reflexión y refracción.

16.1 Prueba basada en un modelo ondulatorio

El literal 1 de la sección 15.3 se prueba por razones de simetría: al ser idéntica la naturaleza a un lado y otro del plano de incidencia, no hay razón para que la luz prefiera un lado, y debe continuar en tal plano.

En la figura 16.1 una onda plana incide sobre una interfaz plana con un ángulo θ_i ; de los infinitos rayos paralelos dibujamos dos, uno que incide en A y el otro en D . Según el principio de Huygens, estos puntos emiten ondas secundarias; la que permanece en el medio 1 pertenece a la onda reflejada, la que se emite al medio 2 pertenece a la onda refractada. El rayo reflejado en A tiene que ser paralelo al reflejado en D , ya que ambos puntos son físicamente indistinguibles; esto es, por simetría probamos que una onda incidente plana en una interfaz plana produce una onda reflejada plana. Por la misma razón, la onda transmitida también es plana. Los segmentos AB , CD y DE representan una porción de los frentes de onda incidente, reflejado y refractado, respectivamente, y son perpendiculares a sus respectivos rayos.

Por tener lados mutuamente perpendiculares, el ángulo BAD es igual a θ_i , CDA es igual a θ_r y ADE es igual a θ_t .

Por el mismo concepto de frente de onda, la luz llega simultáneamente a A y B ; un tiempo t después llega a C , D y E ya que C y D están en un mismo frente de onda, al igual que D y E ,

$$t_{BD} = t_{AC} = t_{AE}.$$

Como la rapidez es constante en cada uno de los dos medios, podemos escribir

$$t_{BD} = \frac{BD}{v_1} = \frac{AD \text{ sen } \theta_i}{v_1},$$

$$t_{AC} = \frac{AC}{v_1} = \frac{AD \text{ sen } \theta_r}{v_1},$$

$$t_{AE} = \frac{AE}{v_2} = \frac{AD \text{ sen } \theta_t}{v_2}.$$

De la igualdad $t_{BD} = t_{AC}$ se sigue que $\text{sen } \theta_i = \text{sen } \theta_r$; como los ángulos están entre 0 y 90° , $\theta_i = \theta_r$. Según la igualdad $t_{BD} = t_{AE}$ se cumple que $\text{sen } \theta_i/v_1 = \text{sen } \theta_t/v_2$, o

$$\frac{\text{sen } \theta_i}{\text{sen } \theta_t} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Esta es la ley de Snell para las ondas, sean elásticas o no. Para las ondas electromagnéticas se suele escribir en términos de índices de refracción y no de rapidez,

$$\frac{\text{sen } \theta_i}{\text{sen } \theta_t} = \frac{c/v_2}{c/v_1} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Llegamos así a la forma más común de escribir la ley de refracción,

$$n_1 \text{ sen } \theta_i = n_2 \text{ sen } \theta_t.$$

Cuando $\theta_i = 0$, θ_t también es cero; solo en este caso el rayo refractado no se desvía. Para $\theta_i \neq 0$, el rayo refractado sí se desvía respecto a la dirección del rayo incidente. Decimos que se acerca a la normal si $\theta_t < \theta_i$ (figura 16.2a), y que se aleja de la normal si $\theta_t > \theta_i$ (figura 16.2b). De la ecuación 15.3, vemos que $\theta_t < \theta_i$ implica que $n_2 > n_1$ o $v_2 < v_1$, y que $\theta_t > \theta_i$ implica que $n_2 < n_1$ o $v_2 > v_1$.

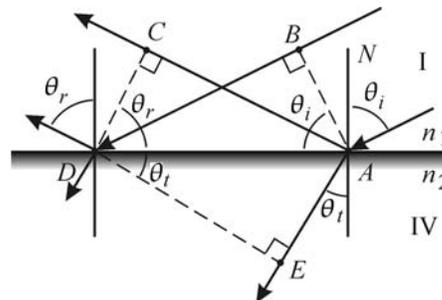


Figura 16.1 Una onda incidente plana en una interfaz plana origina ondas reflejada y refractada planas.

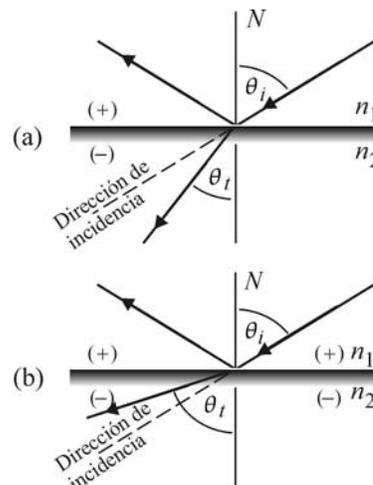


Figura 16.2 El rayo refractado (a) se acerca a la normal, (b) se aleja de la normal.

16.1.1 Propagación de la luz en la materia

Cuando los campos electromagnéticos penetran en la materia, sus campos \mathbf{E} y \mathbf{B} interactúan con las cargas eléctricas en ella ($\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = m\mathbf{a}$), las que al acelerarse radian. La radiación emitida al medio 1 constituye la onda reflejada y la emitida en el medio 2 interfiere con la incidente y da lugar a la onda transmitida. La luz que vemos llegar del Sol o de otro objeto realmente no llega directamente de él sino por reemisión de las moléculas del aire a unos pocos milímetros del ojo.

16.1.2 Reflexiones especular y difusa

Cuando una onda plana incide con un ángulo θ_i en una superficie plana perfectamente lisa, solo hay un ángulo de reflexión y hablamos de **reflexión especular** (figura 16.3). Pero si la superficie es irregular o rugosa como nuestra piel, el vidrio esmerilado, la corteza de un árbol o la página de un libro, la luz reflejada se propaga en varias direcciones y se llama **reflexión difusa**.

En el capítulo "Óptica geométrica" veremos que la formación de imágenes por reflexión requiere de una superficie especular. Aunque a una página la iluminemos con luz en una sola dirección, la podemos ver desde cualquier ángulo debido a su reflexión difusa.

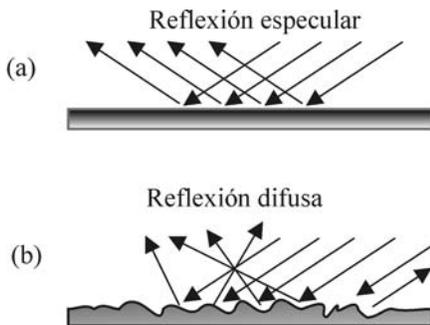


Figura 16.3 La reflexión depende de qué tan lisa sea la superficie.

16.2 Ángulo crítico

Cuando $n_1 > n_2$, $\theta_t > \theta_i$. El máximo θ_t es 90° , que se obtiene cuando el ángulo de incidencia cumple que (ecuación 15.3) $\text{sen } \theta_i = (n_2/n_1) \text{sen } 90^\circ = n_{21}$. A este ángulo se le denomina **ángulo crítico** θ_c ,

$$\text{sen } \theta_c = n_{21}.$$

Para θ_i mayor que θ_c , el seno de θ_t sería mayor que 1. Este absurdo lo interpretamos como que no hay luz refractada, toda la luz incidente se refleja y la onda permanece así dentro del medio 1; decimos que se presenta **reflexión total interna**; fue descubierta por Kepler (1571-1630).

El fenómeno de reflexión total tiene una aplicación importante en la comunicación a través de fibras ópticas (figura 16.4). En cada punto de incidencia en el interior de la fibra de vidrio $\theta_i > \theta_c = \text{sen}^{-1} n_{21}$, y así la luz permanece dentro de la fibra sin que se escape fuera de ella. La única pérdida es la absorción que se presenta de la energía electromagnética por parte del vidrio, pero la luz puede recorrer kilómetros con una amplitud apreciable, dependiendo de la calidad del vidrio. Este se cubre formando un cable coaxial, con una envoltura cuyo índice de refracción n_e cumple que $n_e < n$, en donde n_1 es n y n_2 es n_e .



Figura 16.4 En una fibra óptica, $n > n_e$.

16.3 Principio de Fermat

La forma en que la luz se propaga se puede estudiar con un enfoque diferente al expuesto anteriormente, basándonos en el **principio de Fermat** (1657) o **principio del tiempo mínimo**:

La trayectoria que la luz sigue para viajar entre dos puntos es aquella que toma un tiempo mínimo.

El principio tiene fallas, pero estimuló la búsqueda de funciones que se minimicen (cálculo variacional) en los fenómenos físicos. Detrás de él hay trabajos de Maupertuis, Euler, Lagrange, Hamilton y Feynman y está relacionado con el desarrollo de la mecánica cuántica en el siglo XX.

La trayectoria rectilínea de la luz en un medio homogéneo es una consecuencia directa del principio de Fermat, porque al ser la recta la línea más corta entre dos puntos, también es la de tiempo mínimo.

Deduzcamos las leyes de reflexión y refracción a partir de dicho principio. En la figura 16.5 la luz va de A a B por reflexión y de A a C por refracción; D es el punto de incidencia definido por x. El punto D debe estar en el plano perpendicular a la interfaz que contiene a A y B, porque si no fuera así la trayectoria AD + DB sería más larga y el tiempo también; C debe estar en el mismo plano, que es el plano de incidencia, porque si no AD + DC también se alargaría.

El tiempo que tarda un rayo en ir de A a B por reflexión es

$$t_1 = \frac{AD + DB}{v_1} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_1};$$

como es mínimo su derivada es cero,

$$\frac{dt_1}{dx} = \frac{1}{2v_1} \left[\frac{2x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{2(d-x)}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} \right] = 0.$$

De donde

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{(d-x)}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}.$$

El lado izquierdo es $\text{sen } \theta_i$ y el derecho es $\text{sen } \theta_r$,

$$\text{sen } \theta_i = \text{sen } \theta_r.$$

Como ambos ángulos están entre 0 y 90°,

$$\theta_i = \theta_r,$$

que, junto con el hecho de que el rayo reflejado es coplanar con el plano de incidencia, es la ley de reflexión.

El tiempo que tarda un rayo en ir de A a C por transmisión es

$$t_2 = \frac{AD}{v_1} + \frac{DC}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{f^2 + (e-x)^2}}{v_2};$$

como es mínimo su derivada es cero,

$$\frac{dt_2}{dx} = \frac{1}{2} \left[\frac{2x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{2(e-x)}{v_2 \sqrt{f^2 + (e-x)^2}} \right] = 0.$$

De donde

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{e-x}{v_2 \sqrt{f^2 + (e-x)^2}}.$$

El lado izquierdo es $\text{sen } \theta_i / v_1$ y el derecho es $\text{sen } \theta_t / v_2$,

$$\frac{\text{sen } \theta_i}{v_1} = \frac{\text{sen } \theta_t}{v_2}.$$

que, junto con el hecho de que el rayo refractado es coplanar con el plano de incidencia, es la ley de refracción. La luz no viaja en línea recta de A a

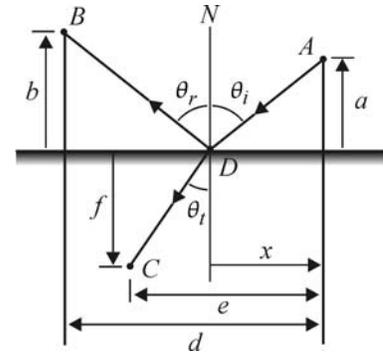


Figura 16.5 Geometría para aplicar el principio de Fermat.

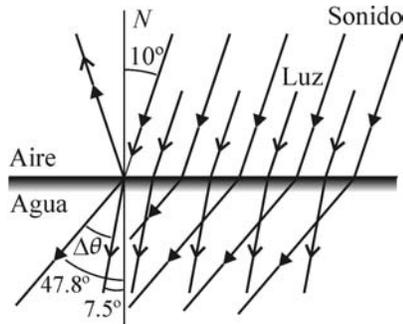


Figura 16.6 Cuando la luz penetra en el agua se acerca a la normal, en cambio el sonido se aleja.

C , que es la trayectoria de distancia mínima, sino que para minimizar el tiempo alarga la trayectoria en el medio de mayor rapidez y la acorta en el de menor, lo cual se manifiesta con un acercamiento a la normal cuando $n_1 < n_2$ y un alejamiento cuando $n_1 > n_2$.

Ejemplo 16.1 Una onda plana sonora y una onda plana luminosa inciden a 10° sobre la superficie de un lago (figura 16.6). Las flechas más cortas representan rayos de luz, mientras que las más largas representan rayos de sonido. Suponga que el sonido se propaga en el aire a 340 m/s y en el agua a 1450 m/s . (a) ¿Cuál es el ángulo entre las direcciones de propagación de ambas ondas en el agua? (b) ¿A partir de qué ángulo de incidencia no se transmite sonido al agua?

Solución

(a) En la figura se ilustran ambas ondas con un ángulo de incidencia de 10° . Con la ley de Snell hallamos θ_r para la luz,

$$\theta_t = \text{arc sen}[(n_{\text{aire}}/n_{\text{agua}}) \text{sen } \theta_i] = \text{arc sen}[(1.00/1.33) \text{sen } 10^\circ] = 7.5^\circ.$$

Para el sonido no podemos aplicar directamente la ecuación 15.3, p. 151, ya que el índice de refracción se define para ondas electromagnéticas, no para las mecánicas. Sin embargo, de dicha ecuación se puede recuperar la ley de Snell para cualquier onda, recordando que $n = c/v$,

$$v_2 \text{sen } \theta_i = v_1 \text{sen } \theta_t.$$

El ángulo de refracción para el sonido es

$$\theta_t = \text{arc sen}[(v_2/v_1) \text{sen } \theta_i] = \text{arc sen}[(1450/340) \text{sen } 10^\circ] = 47.8^\circ.$$

El ángulo pedido es

$$\Delta\theta = \theta_{t, \text{sonido}} - \theta_{t, \text{luz}} = 47.8^\circ - 7.5^\circ = 40.3^\circ.$$

(b) Para el sonido el ángulo crítico es

$$\theta_c = \text{arc sen}[(v_1/v_2) \text{sen } 90^\circ] = \text{arc sen}(340/1450) = 13.6^\circ.$$

No hay sonido transmitido si $\theta_i > 13.6^\circ$. Como la luz, al contrario del sonido, disminuye de velocidad al pasar del aire al agua, para cualquier $\theta_i < 90^\circ$ habrá luz transmitida al agua.

Ejemplo 16.2 Muchos medios dieléctricos tienen su permeabilidad magnética cercana a la del vacío, $\mu \approx \mu_0$. Definimos la permitividad relativa como $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$. Muestre que $n \approx \sqrt{\epsilon_r}$.

Solución

$$n = \frac{c}{v} = \frac{1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}{1/\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \approx \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon_0}} = \sqrt{\epsilon_r}.$$

Resumen

Las leyes de reflexión y de Snell se pueden probar con un modelo ondulatorio y con un principio de tiempo mínimo (también se pueden probar aplicando condiciones de frontera al campo eléctrico). Cuando la luz viaja entre dos puntos sigue la trayectoria de tiempo mínimo, no la de distancia mínima. Si no fuera así, la luz no cambiaría de dirección al cambiar de medio, y los rayos incidente y refractado serían colineales. Cuando la luz viaja directamente entre dos puntos en un medio homogéneo, el principio

de tiempo mínimo da como resultado el de distancia mínima, y así el rayo de luz es un segmento recto.

Cuando la luz viaja en un medio con índice de refracción mayor que donde está la onda refractada, esta deja de existir si $\theta_i > \theta_c$, donde θ_c es el ángulo de incidencia para el que $\theta_r = 90^\circ$. El fenómeno de que toda la luz permanezca en el medio 1 se llama reflexión total interna.

Módulo 17

Reflexión y transmisión electromagnéticas

Contenido

- 17.1 Coeficientes de Fresnel
- 17.2 Interpretación de los signos de los coeficientes
- 17.3 Ángulo de polarización. Ley de Brewster

Objetivos

1. Obtener las ecuaciones de los coeficientes de reflexión y transmisión que permitan analizar las características de las ondas reflejada y refractada en términos de las características de la onda incidente.
2. Analizar cómo se puede polarizar linealmente por reflexión una onda.

Preguntas básicas

1. ¿Cómo se expresa la ley de conservación de la energía para una onda que incide en una interfaz?
2. ¿Cómo se afecta la polarización de las ondas reflejada y transmitida respecto a la polarización de la onda incidente?
3. ¿De qué depende la amplitud de los campos eléctricos reflejado y refractado?
4. ¿Siempre hay una onda reflejada?

Introducción

Averiguar la dirección de las ondas reflejada y transmitida es sencillo con las leyes de reflexión y refracción. Pero lo único que cambia respecto a la onda incidente en la reflexión y la transmisión no es la dirección. En los libros se ilustran gráficamente los cambios de dirección; lo que no se suele representar son los cambios energéticos y de polarización. ¿Cómo se relacionan la energía y los campos reflejados y transmitidos con los de la onda incidente?, ¿cómo cambia la polarización de las ondas reflejada y transmitida? Las respuestas, basadas en los *coeficientes de Fresnel*, son más complejas que en el caso de una cuerda compuesta (sección 5.2, p. 43) y son el objetivo del presente módulo.



Agustin Fresnel (1788-1827), físico francés, hizo importantes aportes a la óptica y a la teoría ondulatoria de la luz: produjo franjas de interferencia con varios dispositivos, estudió la aberración de la luz, utilizó combinaciones de lentes y prismas en los faros, estudió la luz polarizada y avanzó notablemente la teoría de la difracción.

17.1 Coeficientes de Fresnel

Como origen de coordenadas escogamos cualquiera de los infinitos puntos de la interfaz (plano xz); sea xy el plano de incidencia, que coincide con el plano de la hoja. La clave para responder las preguntas de la anterior página radica en descomponer todo \mathbf{E} y \mathbf{B} en dos componentes: la proyección en el plano de incidencia o componente π y la proyección en la dirección perpendicular a dicho plano o componente σ ; esta componente es también la componente z , que es paralela a la interfaz, y la componente π coincide con la intersección del plano de incidencia con el frente de onda. En la figura 17.1 se muestra tal descomposición para \mathbf{E}_i , \mathbf{E}_r y \mathbf{E}_t , la que significa que los campos eléctricos y magnéticos, *cualquiera sea su polarización*, los representamos como la superposición de dos campos mutuamente perpendiculares con polarización lineal π y σ respectivamente.

Por onda π entendemos a \mathbf{E}_π junto con \mathbf{B}_σ , por onda σ entendemos a \mathbf{E}_σ junto con \mathbf{B}_π . A cada onda —incidente, reflejada y transmitida— la descomponemos en una onda π y otra σ .

Según lo anterior,¹

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_i &= \mathbf{E}_{i\pi} + \mathbf{E}_{i\sigma}, & \mathbf{B}_i &= \mathbf{B}_{i\pi} + \mathbf{B}_{i\sigma}, \\ \mathbf{E}_r &= \mathbf{E}_{r\pi} + \mathbf{E}_{r\sigma}, & \mathbf{B}_r &= \mathbf{B}_{r\pi} + \mathbf{B}_{r\sigma}, \\ \mathbf{E}_t &= \mathbf{E}_{t\pi} + \mathbf{E}_{t\sigma}, & \mathbf{B}_t &= \mathbf{B}_{t\pi} + \mathbf{B}_{t\sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (17.1)$$

Definimos los coeficientes de Fresnel para la amplitud (se pueden definir coeficientes para la potencia; ejemplo 17.3, p. 167) como

$$\left. \begin{aligned} R_\pi &= \frac{E_{0r,\pi}}{E_{0i,\pi}}, & R_\sigma &= \frac{E_{0r,\sigma}}{E_{0i,\sigma}}, \\ T_\pi &= \frac{E_{0t,\pi}}{E_{0i,\pi}}, & T_\sigma &= \frac{E_{0t,\sigma}}{E_{0i,\sigma}}. \end{aligned} \right\} \quad (17.2)$$

Una condición de frontera nos dice que

$$\mathbf{E} \text{ paralelo a la interfaz es continuo,}^2 \quad (17.3)$$

y la otra condición de frontera nos dice que, para dieléctricos con $\mu \cong \mu_0$ —caso muy común—,

$$\mathbf{B} \text{ paralelo a la interfaz es continuo.} \quad (17.4)$$

Para aplicar las condiciones (17.3) y (17.4) debemos examinar los campos en los puntos P_1 (en el medio 1) y P_2 (en el medio 2) separados entre sí una distancia infinitesimal $P_1P_2 \rightarrow 0$ (figura 17.2). En P_1 , por haber ondas incidente y reflejada, debemos dibujar \mathbf{k}_i , \mathbf{k}_r , $\mathbf{E}_{i\pi}$, $\mathbf{E}_{i\sigma}$, $\mathbf{B}_{i\pi}$, $\mathbf{B}_{i\sigma}$, $\mathbf{E}_{r\pi}$, $\mathbf{E}_{r\sigma}$, $\mathbf{B}_{r\pi}$ y $\mathbf{B}_{r\sigma}$: ¡diez vectores para representar en un solo punto! Esta congestión de vectores la resolvemos como se ilustra en los cuatro diagramas de la figura 17.3, pero se debe mantener presente que todos los puntos P_1 son un mismo punto del espacio. Con P_2 hay menos problema porque en el medio 2 solo existe la onda transmitida, pero tampoco se debe olvidar que todos los puntos P_2 son un mismo punto del espacio. O con otras palabras: podemos imaginar cuatro transparencias —vea la figura citada—, y

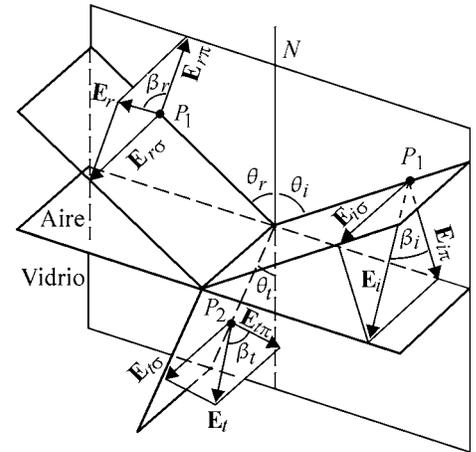


Figura 17.1 Ángulos de incidencia, reflexión, refracción y de los campos eléctricos con el plano de incidencia.

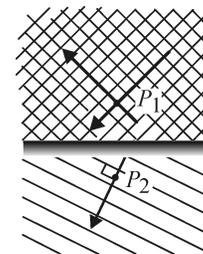


Figura 17.2 La distancia P_1P_2 es infinitesimal.

¹ Para visualizar las componentes π y σ es conveniente poner una hoja perpendicular al rayo que estemos examinando. Cualquier vector en esta hoja puede representar el campo. La proyección de este vector en z es la componente σ y la proyección a lo largo de la intersección de la hoja con el plano de incidencia es la componente π .

² De esta condición de frontera es posible deducir las leyes de reflexión y refracción.

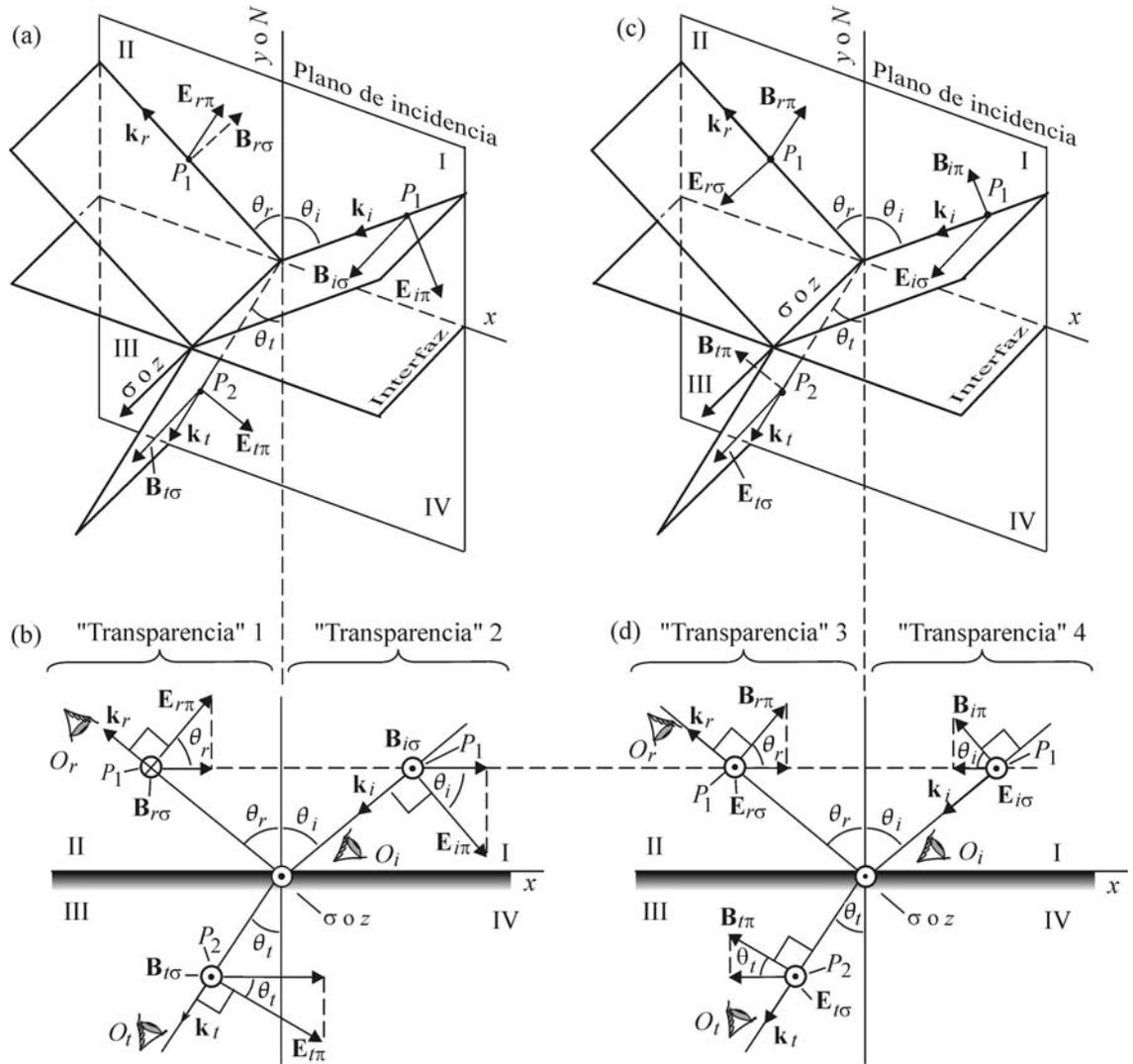


Figura 17.3 (a) y (b): diagrama de la onda π (\mathbf{E}_π y su \mathbf{B}_σ). (c) y (d): diagrama de la onda σ (\mathbf{E}_σ y su \mathbf{B}_π). El diagrama b es igual al a pero visto de frente, sin perspectiva; igual ocurre entre d y c.

luego trasladarlas horizontalmente de manera que los puntos P_1 se superpongan, y también los puntos P_2 . Los vectores de la figura 17.3 se deben imaginar en cada uno de los puntos cercanos a la interfaz, puesto que toda la interfaz está siendo iluminada con una onda plana, y toda onda estrictamente plana tiene un frente de onda que es un plano infinito. Según la condición (17.3) y las figuras 17.3a y b, $E_{i\pi} \cos \theta_i + E_{r\pi} \cos \theta_r = E_{t\pi} \cos \theta_t$. Reemplacemos los campos por ondas planas armónicas,

$$E_{0i,\pi} \text{sen}(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t) \cos \theta_i + E_{0r,\pi} \text{sen}(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha_{r\pi}) \cos \theta_i = E_{0t,\pi} \text{sen}(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha_{t\pi}) \cos \theta_t.$$

Las α son constantes de fase relativas a la fase de $\mathbf{E}_{i\pi}$. Como la última igualdad se cumple en todo \mathbf{r} de la interfaz y en todo t , las cantidades entre paréntesis deben ser iguales, y podemos cancelarlas; y para eliminar la dependencia del tiempo en la condición de frontera, es necesario que

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t \equiv \omega.$$

$$E_{0i,\pi} \cos \theta_i + E_{0r,\pi} \cos \theta_i = E_{0t,\pi} \cos \theta_t.$$

Dividamos por $E_{0i,\pi}$; según las ecuaciones 17.2,

$$\cos \theta_i + R_\pi \cos \theta_i = T_\pi \cos \theta_t. \quad (17.5)$$

Según la condición (17.4) y las figuras 17.3a y b,

$$\begin{aligned} B_{i\sigma} - B_{r\sigma} &= B_{t\sigma}, \\ B_{0i,\sigma} \text{sen}(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t) - B_{0r,\sigma} \text{sen}(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha_r) &= \\ &= B_{0t,\sigma} \text{sen}(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha_t). \end{aligned}$$

Cancelemos las funciones seno,

$$B_{0i,\sigma} - B_{0r,\sigma} = B_{0t,\sigma}. \quad (17.6)$$

Puesto que para una onda plana $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$ implica que $\mathbf{B}_\sigma = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_\pi$; esto lo interpretamos como que \mathbf{E}_π genera a \mathbf{B}_σ y viceversa), entonces cada amplitud $B_{0\sigma}$ está relacionada con su amplitud asociada $E_{0\pi}$, $B_{0\sigma} = E_{0\pi}/v$; introduciendo esta igualdad en la ecuación 17.6,

$$\frac{E_{0i,\pi}}{v_1} - \frac{E_{0r,\pi}}{v_1} = \frac{E_{0t,\pi}}{v_2}.$$

Multipliquemos por c y reemplacemos a c/v por n ,

$$n_1 E_{0i,\pi} - n_1 E_{0r,\pi} = n_2 E_{0t,\pi}.$$

Dividamos por $E_{0i,\pi}$; según las ecuaciones 17.2,

$$n_1 - n_1 R_\pi = n_2 T_\pi. \quad (17.7)$$

Despejemos las incógnitas R_π y T_π de las ecuaciones 17.5 y 17.7,

$$R_\pi = \frac{E_{0r,\pi}}{E_{0i,\pi}} = \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i}, \quad T_\pi = \frac{E_{0t,\pi}}{E_{0i,\pi}} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i}. \quad (17.8)$$

Hallemos ahora los coeficientes σ .

Según la condición (17.3) y las figuras 17.3c y d,

$$E_{i,\sigma} + E_{r,\sigma} = E_{t,\sigma}. \quad (17.9)$$

Reemplacemos los campos por ondas planas armónicas,

$$\begin{aligned} E_{0i,\sigma} \text{sen}(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha_\sigma) + E_{0r,\sigma} \text{sen}(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha_{r\sigma}) &= \\ &= E_{0t,\sigma} \text{sen}(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha_{t\sigma}). \end{aligned}$$

Para que esta ecuación se cumpla en todo \mathbf{r} de la interfaz y en todo t , las cantidades entre paréntesis deben ser iguales, y podemos cancelarlas,

$$E_{0i,\sigma} + E_{0r,\sigma} = E_{0t,\sigma}.$$

Dividamos por $E_{0i,\sigma}$; según las ecuaciones 17.2,

$$1 + R_\sigma = T_\sigma. \quad (17.10)$$

Según la condición (17.4) y las figuras 17.3c y d —después de cancelar funciones seno—,

$$-B_{0i,\pi} \cos \theta_i + B_{0r,\pi} \cos \theta_i = -B_{0t,\pi} \cos \theta_t.$$

Reemplacemos a $B_{0\pi}$ por $E_{0\sigma}/v$,

$$-\frac{E_{0i,\sigma} \cos \theta_i}{v_1} + \frac{E_{0r,\sigma} \cos \theta_i}{v_1} = \frac{E_{0t,\sigma} \cos \theta_t}{v_2}.$$

Multipliquemos por c y reemplacemos a c/v por n ,

$$-n_1 E_{0i,\sigma} \cos \theta_i + n_1 E_{0r,\sigma} \cos \theta_i = -n_2 E_{0t,\sigma} \cos \theta_t.$$

Dividamos por $E_{0i,\sigma}$; según las ecuaciones 17.2,

$$-n_1 \cos \theta_i + n_1 R_\sigma \cos \theta_i = -n_2 T_\sigma \cos \theta_t. \quad (17.11)$$

Despejemos las incógnitas R_σ y T_σ de las ecuaciones 17.10 y 17.11,

$$R_\sigma = \frac{E_{0r,\sigma}}{E_{0i,\sigma}} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}, \quad T_\sigma = \frac{E_{0t,\sigma}}{E_{0i,\sigma}} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}. \quad (17.12)$$

Sea β el ángulo entre la línea recta definida por un \mathbf{E} y el plano de incidencia. Para \mathbf{E}_i es β_i , para \mathbf{E}_r es β_r , y para \mathbf{E}_t es β_t (figura 17.1, p. 163).

No confunda a θ_i con β_i , a θ_r con β_r , ni a θ_t con β_t ; son ángulos independientes entre sí.

En la citada figura vemos que

$$\tan \beta_i = \frac{E_{i\sigma}}{E_{i\pi}}, \quad \tan \beta_r = \frac{E_{r\sigma}}{E_{r\pi}}, \quad \tan \beta_t = \frac{E_{t\sigma}}{E_{t\pi}}.$$

Cuando la polarización de un campo es lineal β es constante; para cualquier otra polarización β depende del tiempo. Para β constante las anteriores relaciones entre campos instantáneos lleva a relaciones entre amplitudes,

$$\tan \beta_i = \frac{E_{0i,\sigma}}{E_{0i,\pi}}, \quad \tan \beta_r = \frac{E_{0r,\sigma}}{E_{0r,\pi}}, \quad \tan \beta_t = \frac{E_{0t,\sigma}}{E_{0t,\pi}}.$$

17.2 Interpretación de los signos de los coeficientes

Los signos de R y T se deben interpretar de acuerdo con la convención implícita en las figuras 17.3, pues fueron las figuras utilizadas para hallarlos, como explicamos a continuación.

Si $R_\pi > 0$, $\mathbf{E}_{i\pi}$ y $\mathbf{E}_{r\pi}$ estarán orientados en el mismo instante t como se muestra en la figura 17.3a, o cada uno en sentido opuesto al ilustrado; los respectivos \mathbf{B} ($\mathbf{B}_{i\sigma}$ y $\mathbf{B}_{r\sigma}$) estarán siempre antiparalelos, o sea en contrafase (figura 17.3b). Si $R_\pi < 0$, solo uno de ellos ($\mathbf{E}_{i\pi}$ o $\mathbf{E}_{r\pi}$) tendrá sentido opuesto al ilustrado. Los respectivos \mathbf{B} estarán siempre paralelos, o sea en fase.

Si $R_\sigma > 0$, $\mathbf{E}_{i\sigma}$ y $\mathbf{E}_{r\sigma}$ estarán siempre paralelos en el mismo t : cuando uno esté saliendo de la hoja, el otro también lo hará; cuando uno esté

entrando a la hoja, el otro también (figuras 17.3c y d); los respectivos \mathbf{B} estarán como se ilustra, o ambos con sentido opuesto al ilustrado. Si $R_\sigma < 0$, $\mathbf{E}_{i\sigma}$ será antiparalelo a $\mathbf{E}_{r\sigma}$. Solo uno de los \mathbf{B} asociados ($\mathbf{B}_{i\sigma}$ o $\mathbf{B}_{r\sigma}$) tendrá sentido opuesto al ilustrado. Si R_π y R_σ tienen igual signo, y la onda incidente tiene polarización dextrógira, la onda reflejada tendrá polarización levógira, y viceversa. Si R_π y R_σ tienen signos opuestos, no cambiará el sentido de la polarización. Dextrógira es sinónimo de derecha u horaria, \odot ; levógira es sinónimo de izquierda o contrarreloj, \ominus .

Puesto que para cualquier θ_i , $T_\pi \geq 0$ y $T_\sigma \geq 0$, no habrá cambios respecto a las orientaciones definidas para los campos transmitidos en la figura 17.3; pero no pierda de vista que dichos campos son oscilantes, generalmente cambian millones de veces cada segundo. El sentido de la polarización no puede cambiar por transmisión; si la onda incidente tiene polarización dextrógira o levógira, igual será la polarización de la onda transmitida. Los observadores adecuados para juzgar la polarización son O_i , O_r y O_t .

Ejemplo 17.1 Un haz de luz de sección transversal A_i incide sobre una interfaz plana. Si la sección transversal del haz refractado es A_t , demuestre que

$$\frac{A_t}{A_i} = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}.$$

Solución. En la figura 17.4 mostramos las secciones transversales de los haces incidente, reflejado y transmitido. La sección transversal del haz incidente A_i es el área del rectángulo $ACFE$, para el haz refractado es la del rectángulo $DBGH$,

$$\frac{A_t}{A_i} = \frac{(BG)(DB)}{(AE)(AC)}. \tag{17.13}$$

Pero $BG = AE$, $AC = AB \cos \theta_i$ y $DB = AB \cos \theta_r$. Reemplacemos en la ecuación 17.13,

$$\frac{A_t}{A_i} = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}. \tag{17.14}$$

Ejemplo 17.2 ¿Cuándo se cumple que $I_i = I_r + I_t$?

Solución. Por conservación de la energía,

$$P_i = P_r + P_t, \\ I_i A_i = I_r A_r + I_t A_t.$$

Solo si $A_i = A_r = A_t$ se puede obtener $I_i = I_r + I_t$. Y las áreas son iguales solo para incidencia normal, $\theta_i = 0$ (vea el ejemplo 17.1). En el caso de una cuerda compuesta, también se halla que $I_i = I_r + I_t$ solo si los radios de las secciones 1 y 2 de la cuerda son iguales.

Ejemplo 17.3 Un haz de luz incide sobre una interfaz. (a) Halle expresiones para las fracciones de potencia reflejada y transmitida en función del coeficiente R . A la fracción reflejada se le llama **reflectancia**: $\mathcal{R} \equiv P_r/P_i$, y a la fracción transmitida **transmitancia**: $\mathcal{T} \equiv P_t/P_i$. (b) Evalúe los coeficientes de Fresnel y la reflectancia y la transmitancia para incidencia normal. (c) Evalúe los porcentajes de energía —por unidad de tiempo— reflejada y transmitida si la incidencia es normal, el medio 1 es aire y el medio 2 agua, vidrio o diamante.

Solución Las expresiones que halleemos se cumplen para cada onda π o σ y para todo θ_i .

(a) Si consideramos un haz incidente de área transversal A_i (figura 17.5), el área transversal del haz reflejado es $A_r = A_i$ puesto que $\theta_r = \theta_i$.

$$\mathcal{R} = \frac{P_r}{P_i} = \frac{I_r A_r}{I_i A_i} = \frac{I_r}{I_i} = \frac{v_1 E_r}{v_1 E_i} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\frac{1}{2} \epsilon_1 E_{0r}^2}{\frac{1}{2} \epsilon_1 E_{0i}^2} = \frac{E_{0r}^2}{E_{0i}^2} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 = R^2.$$

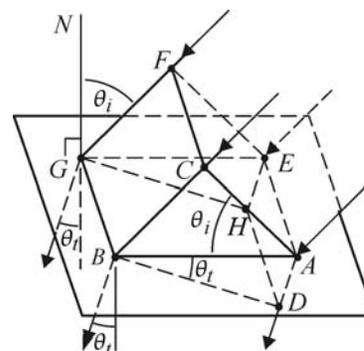


Figura 17.4 Áreas transversales incidente y transmitida.

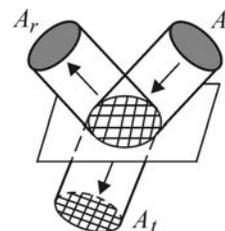


Figura 17.5 Áreas transversales de los diferentes haces.

Por conservación de la energía, la energía promedio por unidad de tiempo que pasa a través de A_i debe ser igual a la energía promedio por unidad de tiempo que pasa a través de A_r más la energía promedio por unidad de tiempo que pasa a través del área transversal del haz transmitido A_t , $P_i = P_r + P_t$; o, dividiendo por P_i , $1 = P_r/P_i + P_t/P_i = \mathcal{R} + \mathcal{T}$. Despejemos, $\mathcal{T} = 1 - \mathcal{R} = 1 - R^2$. En resumen,

$$\mathcal{R} = R^2, \quad \mathcal{T} = 1 - R^2.$$

(b) Reemplacemos $\theta_i = 0$ y $\theta_t = 0$ en las ecuaciones 17.8 y 17.12,

$$R_\pi = R_\sigma = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad T_\pi = T_\sigma = \frac{2n_1}{n_1 + n_2};$$

por lo tanto las reflectancias π y σ son iguales, al igual que las transmitancias.

$$\mathcal{R}_{\pi\sigma} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \quad \text{y} \quad \mathcal{T}_{\pi\sigma} = \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2}\right)^2.$$

(c) $\%P_r = 100\mathcal{R} = 100R^2$, $\%P_t = 100\mathcal{T} = 100(1 - R^2)$. Para aire-agua ($n_1 \approx 1.00$ y $n_2 = 1.33$) obtenemos,

$$\%P_r = 2\%, \quad \%P_t = 98V\%;$$

para aire-vidrio ($n_1 \approx 1.0$ y vidrio de $n_2 = 1.5$) obtenemos,

$$\%P_r = 4\%, \quad \%P_t = 96\%;$$

para aire-diamante ($n_1 \approx 1.0$ y $n_2 = 2.4$) obtenemos,

$$\%P_r = 17\%, \quad \%P_t = 83\%.$$

Ejemplo 17.4 Evalúe los coeficientes de Fresnel para incidencia rasante e interprete los resultados.

Solución. Incidencia rasante quiere decir $\theta_i \rightarrow 90^\circ$; reemplacemos en las ecuaciones 17.8 y 17.12,

$$\begin{aligned} \lim_{\theta_i \rightarrow 90^\circ} R_\pi &= \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos 90^\circ}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos 90^\circ} = \frac{n_1 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_t} = 1, \\ \lim_{\theta_i \rightarrow 90^\circ} R_\sigma &= \frac{n_1 \cos 90^\circ - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos 90^\circ + n_2 \cos \theta_t} = \frac{-n_2 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_t} = -1, \\ \lim_{\theta_i \rightarrow 90^\circ} T_\pi &= \frac{2n_1 \cos 90^\circ}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos 90^\circ} = \frac{0}{n_1 \cos \theta_t} = 0, \\ \lim_{\theta_i \rightarrow 90^\circ} T_\sigma &= \frac{2n_1 \cos 90^\circ}{n_1 \cos 90^\circ + n_2 \cos \theta_t} = -\frac{0}{n_2 \cos \theta_t} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto las amplitudes reflejadas no cambian por ser de magnitud 1 los coeficientes de reflexión, ni el sentido de la polarización (en caso de que la polarización incidente sea circular o elíptica) por tener signos opuestos R_π y R_σ . La intensidad de la luz transmitida tiende a cero a medida que $\theta_i \rightarrow 90^\circ$; toda la luz se refleja. Esto está de acuerdo con la observación cotidiana con un vidrio: aunque sea transparente para incidencia normal (solo refleja el 4%, y por lo tanto es malo como espejo), para incidencia oblicua es sumamente reflectivo y actúa como un buen espejo.

Ejemplo 17.5 Una onda plana polarizada linealmente incide sobre una superficie de agua ($n = 1.33$), con un ángulo de 20° . La amplitud del campo eléctrico incidente es 100 V/m. Determine la amplitud de las ondas reflejada y transmitida y sus fases relativas a la fase de la onda incidente, si el ángulo entre \mathbf{E}_i y el plano de incidencia es 90° .

Solución. Por defecto, el otro medio es aire, $n_1 = 1.00$. De la ley de Snell obtenemos $\theta_t = \arcsen\left(\frac{1.00 \sen 20^\circ}{1.33}\right) = 14.9^\circ$. Los campos eléctricos del ejemplo se muestran

en la figura 17.6. Diferencie claramente entre θ_i y el ángulo entre \mathbf{E}_i y el plano de incidencia, pues son totalmente independientes entre sí.

El que el ángulo entre \mathbf{E}_i y el plano de incidencia sea 90° quiere decir que $\mathbf{E}_{i\pi} = 0$ y en consecuencia $E_{0i,\pi} = 0$. Según las ecuaciones 17.1, p. 163, $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{i\sigma}$.

Según las ecuaciones 17.2, $E_{0r,\pi} = R_\pi E_{0i,\pi} = R_\pi 0 = 0$ y $E_{0t,\pi} = T_\pi E_{0i,\pi} = T_\pi 0 = 0$. Estas amplitudes son cero, cualesquiera sean los valores de R_π y T_π ; no es necesario conocer el valor de estos dos coeficientes. Sin embargo, cuando se evalúan con las ecuaciones 17.8, p. 165, se obtiene $R_\pi = -0.128$ y $T_\pi = 0.848$. Como no hay luz reflejada ni transmitida π , a veces se dice que estos coeficientes son cero, pero vemos claramente que no es cierto. No hay luz reflejada ni transmitida π porque la luz incidente no trae componente π , no porque los respectivos coeficientes sean cero.

Falta evaluar R_σ y T_σ . Apliquemos las ecuaciones 17.12, p. 166,

$$\frac{E_{0r,\sigma}}{E_{0i,\sigma}} = R_\sigma = -0.155, \quad \frac{E_{0t,\sigma}}{E_{0i,\sigma}} = T_\sigma = 0.845.$$

R_π y R_σ tienen igual signo, pero como la polarización es lineal es absurdo decir que el sentido de la polarización cambia.

Las amplitudes pedidas son

$$E_{0r,\sigma} = R_\sigma E_{0i,\sigma} = -0.155 \times 100 = -15.5 \text{ V/m},$$

$$E_{0t,\sigma} = T_\sigma E_{0i,\sigma} = 0.845 \times 100 = 84.5 \text{ V/m}.$$

El signo (-) no significa que $E_{0r,\sigma}$ sea negativa (las amplitudes siempre son positivas) sino que \mathbf{E}_i y \mathbf{E}_r están en contrafase, $\delta = \pm\pi$: cuando un vector entra al plano de incidencia, el otro sale, al contrario de lo que muestra la figura. Como T siempre es positivo, \mathbf{E}_i y \mathbf{E}_t siempre están en fase: ambos vectores salen del plano de incidencia, se hacen cero, o entran al plano de incidencia simultáneamente.

El campo eléctrico neto en P_1 es $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r$ (ambos vectores están en el mismo punto a una distancia infinitesimal de la interfaz). La amplitud de \mathbf{E}_1 , E_{01} , se puede hallar con la ley del coseno, pero escribiendo la amplitud $E_{0r,\sigma}$ con valor absoluto, pues le estamos dando la posibilidad de estar antecedida por el signo (-),

$$E_{01} = \sqrt{E_{0i,\sigma}^2 + 2E_{0i,\sigma}|E_{0r,\sigma}| \cos \delta + E_{0r,\sigma}^2}$$

$$= \sqrt{E_{0i,\sigma}^2 - 2E_{0i,\sigma}|E_{0r,\sigma}| + E_{0r,\sigma}^2} = E_{0i,\sigma} - |E_{0r,\sigma}|$$

$$= 100 - |-15.5| = 84.5 \text{ V/m}.$$

Vemos que, efectivamente, la condición de frontera expresada por la ecuación 17.9, p. 165, sí se cumple.

Ejemplo 17.6 Un haz de luz polarizada circularmente, de 1 W de potencia, incide sobre una superficie de vidrio ($n = 1.5$) con un ángulo de 45° . (a) Describa con detalle el estado de polarización de los haces reflejado y refractado. (b) Halle la reflectancia y la transmitancia. (c) Halle la potencia reflejada y la transmitida.

Solución

(a) Los cambios en la polarización los determinan los coeficientes de Fresnel. Debemos suponer que el medio 1 es aire, $n_1 = 1.0$; $n_2 = 1.5$, $\theta_i = 45^\circ$.

De la ley de Snell,

$$\theta_t = \text{arc sen} \left(\frac{1.0 \text{ sen } 45^\circ}{1.5} \right) = 28.13^\circ.$$

Reemplacemos los anteriores valores en las ecuaciones 17.8, p. 165, y 17.12, p. 166,

$$R_\pi = -0.092, \quad T_\pi = 0.728, \quad R_\sigma = -0.303, \quad T_\sigma = 0.697.$$

Como la luz incidente tiene polarización circular, $E_{0i,\pi} = E_{0i,\sigma}$. Así,

$$E_{0r,\pi} = R_\pi E_{0i,\pi} = -0.092 E_{0i,\pi} \quad \text{y} \quad E_{0r,\sigma} = R_\sigma E_{0i,\sigma} = -0.303 E_{0i,\sigma}.$$

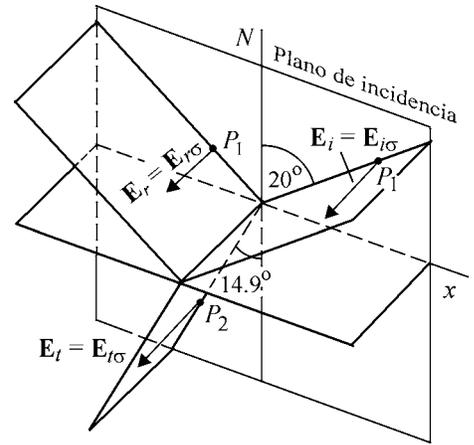


Figura 17.6 Luz con polarización σ .

Por lo tanto, $E_{0r,\pi} \neq E_{0r,\sigma}$: la onda reflejada tiene polarización elíptica, con la amplitud σ 3.3 veces la amplitud π ($E_{0r,\sigma}/E_{0r,\pi} = 0.303/0.092 = 3.3$). Como R_π y R_σ tienen signos iguales, el sentido de la polarización sí cambia, juzgado por el observador O_r de las figuras 17.3b y d.

Con argumentación análoga a la del anterior párrafo, concluimos que $E_{0t,\pi} \neq E_{0t,\sigma}$. Pero la elipse correspondiente al campo eléctrico transmitido es mucho menos excéntrica que la reflejada: $E_{0t,\sigma}/E_{0t,\pi} = 0.697/0.728 = 0.96$. Como T_π y T_σ siempre son positivos, el *sentido* de la polarización de la onda refractada nunca cambia —aunque pueda pasar de circular a elíptica—, juzgado por el observador O_t de las figuras 17.3b y d.

(b) $\mathcal{R}_\pi = R_\pi^2 = 0.092^2 = 0.0085$: el 0.85% de la energía de la onda incidente π se refleja.

$\mathcal{R}_\sigma = R_\sigma^2 = 0.303^2 = 0.092$: el 9.2% de la energía de la onda incidente σ se refleja.

$\mathcal{T}_\pi = 1 - \mathcal{R}_\pi = 0.9915$: el 99.15% de la energía de la onda incidente π se refracta.

$\mathcal{T}_\sigma = 1 - \mathcal{R}_\sigma = 0.908$: el 90.8% de la energía de la onda incidente σ se refracta.

(c) Como la onda incidente tiene polarización circular, la amplitud de la onda incidente π es igual a la de la onda incidente σ , y esto lleva que sus potencias sean iguales,

$$1 W = P_{i\pi} + P_{i\sigma} = 2P_{i\pi} = 2P_{i\sigma},$$

de donde

$$P_{i\pi} = P_{i\sigma} = 0.5 W,$$

$$P_r = P_{r\pi} + P_{r\sigma} = \mathcal{R}_\pi P_{i\pi} + \mathcal{R}_\sigma P_{i\sigma} = 0.0085 \times 0.5 + 0.092 \times 0.5 = 0.05 W,$$

$$P_t = P_{t\pi} + P_{t\sigma} = \mathcal{T}_\pi P_{i\pi} + \mathcal{T}_\sigma P_{i\sigma} = 0.9915 \times 0.5 + 0.908 \times 0.5 = 0.95 W.$$

De la energía incidente se refleja el 5% y se transmite el 95%.

Ejemplo 17.7 Un haz de luz polarizada linealmente incide sobre una superficie de vidrio de índice de refracción 1.5, con un ángulo de 45° . El ángulo β_i entre \mathbf{E}_i y el plano de incidencia es de 30° (figura 17.1, p. 163). Halle (a) el ángulo β_r entre \mathbf{E}_r y el plano de incidencia, (b) el ángulo β_t entre \mathbf{E}_t y el plano de incidencia.

Solución. Los coeficientes de Fresnel tienen los mismos valores del ejemplo 17.6. De la figura vemos que

(a)

$$\tan \beta_r = \frac{E_{0r,\sigma}}{E_{0r,\pi}} = \frac{R_\sigma E_{0i,\sigma}}{R_\pi E_{0i,\pi}} = \frac{R_\sigma E_i \sin \beta_i}{R_\pi E_i \cos \beta_i} = \frac{R_\sigma}{R_\pi} \tan \beta_i = \frac{-0.303}{-0.092} \tan 30^\circ = 1.9,$$

de donde

$$\beta_r = \arctan 1.9 = 62.3^\circ.$$

Debido a los signos negativos de R_π y R_σ , \mathbf{E}_r tiene dirección opuesta a la mostrada en la figura, en los instantes en que \mathbf{E}_i está orientado como se ilustra.

(b)

$$\tan \beta_t = \frac{E_{0t,\sigma}}{E_{0t,\pi}} = \frac{T_\sigma E_{0i,\sigma}}{T_\pi E_{0i,\pi}} = \frac{T_\sigma E_i \sin \beta_i}{T_\pi E_i \cos \beta_i} = \frac{T_\sigma}{T_\pi} \tan \beta_i = \frac{0.697}{0.728} \tan 30^\circ = 0.55,$$

de donde

$$\beta_t = \arctan 0.55 = 28.9^\circ.$$

17.3 Ángulo de polarización. Ley de Brewster

Las amplitudes de los campos eléctricos de la onda reflejada, según las ecuaciones 17.2, p. 163, están dadas por

$$E_{0r,\pi} = R_{\pi}E_{0i,\pi} \quad \text{y} \quad E_{0r,\sigma} = R_{\sigma}E_{0i,\sigma}. \quad (17.15)$$

Existe un ángulo de incidencia llamado **ángulo polarizante** o **ángulo de Brewster**,³ θ_B , para el que R_{π} es cero, lo que lleva a que la onda reflejada no tenga componente π , sin importar el valor de $E_{0i,\pi}$, ecuación 17.15. O sea que para dicho ángulo la onda reflejada queda polarizada linealmente en dirección σ , *cualquiera sea la polarización de la onda incidente*.

Hallemos el valor de $\theta_i \equiv \theta_B$ que hace cero a R_{π} . Según la ecuación 17.8, $n_1 \cos \theta_t = n_2 \cos \theta_B$; según la ley de Snell, $n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin \theta_t$. De dividir entre sí estas dos últimas ecuaciones obtenemos $\sin \theta_B \cos \theta_B = \sin \theta_t \cos \theta_t$, o $\sin 2\theta_B = \sin 2\theta_t$. Una solución trivial es $\theta_B = \theta_t$, lo que implica que no hay cambio de medio; otra solución es $\theta_B = \pi/2 - \theta_t$ o $\theta_B + \theta_t = \pi/2$.

Ley de Brewster: cuando los rayos reflejado y refractado son perpendiculares entre sí, $R_{\pi} = 0$ y, cualquiera sea la polarización incidente, la luz reflejada tiene polarización lineal, perpendicular al plano de incidencia (figura 17.7).

Como $\theta_B + \theta_t = \pi/2$, entonces $\sin \theta_t = \cos \theta_B$. Reemplacemos en la ley de Snell, $n_1 \sin \theta_B = n_2 \cos \theta_B$; de donde

$$\tan \theta_B = n_{21}.$$

Un caso muy particular en el que no hay onda reflejada pero sí transmitida es cuando $\theta_i = \theta_B$, lo que elimina a $E_{0r,\pi}$. Si además la onda incidente no tiene componente σ (o sea que tiene polarización π), $E_{0i,\sigma} = 0$ y, según la ecuación 17.15, la onda reflejada tampoco la puede tener. Se puede demostrar que no existe θ_i para el que R_{σ} sea cero.

El ejemplo más notable de polarización por reflexión es el arco iris. La luz solar tiene polarización aleatoria; al incidir en las gotitas de agua se dispersa y sufre como mínimo una reflexión dentro de ellas antes de regresar al aire. En esta reflexión la componente $E_{r,\pi}$ se hace muy pequeña en comparación con $E_{r,\sigma}$ (no se vuelve nula porque θ_i no es exactamente θ_B), y la luz queda con polarización lineal σ , o más exactamente, queda **parcialmente polarizada** ya que sigue teniendo una pequeña $E_{r,\pi}$. Esto se comprueba con el arco iris que forma la fuente de la Universidad de Antioquia, aproximadamente antes de las 9 a. m. y después de las 3 p. m. Cuando se mira a través de una lámina o vidrio polarizado —estos polarizadores están disponibles en el Almacén del Instituto de Física— hay una posición del polarizador para la cual se observa con la máxima intensidad el arco iris con el paisaje como fondo. Cuando el polarizador se rota 90° , desaparece el arco iris —o mejor, los arcos iris, el primario y el secundario— y solo se observa el paisaje.

Resumen

Es clave para estudiar las ondas reflejada y refractada descomponer los campos en componentes π y σ . Las relaciones entre las amplitudes, o coeficientes de Fresnel, dependen de los índices de refracción y del ángulo de

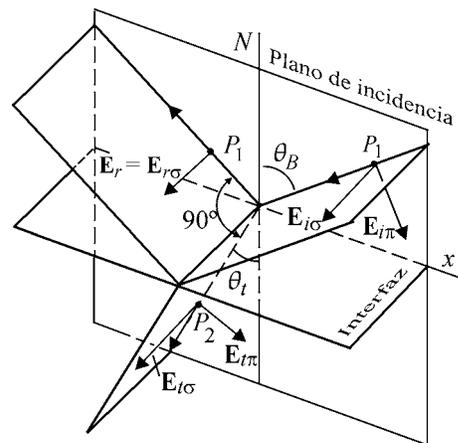


Figura 17.7 Polarización por reflexión.



Vea en el multimedia de Física de las ondas la experiencia Ángulo de polarización.

³ Sir David Brewster (pronúnciese *brúster*), físico escocés, 1781-1868, descubrió experimentalmente esta ley en 1812. Inventó el caleidoscopio.

incidencia,

$$R_\pi = \frac{E_{0r,\pi}}{E_{0i,\pi}} = \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i}, \quad T_\pi = \frac{E_{0t,\pi}}{E_{0i,\pi}} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i},$$

$$R_\sigma = \frac{E_{0r,\sigma}}{E_{0i,\sigma}} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}, \quad T_\sigma = \frac{E_{0t,\sigma}}{E_{0i,\sigma}} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}.$$

La interpretación de los signos de los coeficientes depende del diagrama que se utilice para deducirlos (figura 17.3, p. 164). Cuando R_π y R_σ tienen igual signo y la polarización no es lineal, el sentido de la polarización cambia de dextrógira a levógira, o viceversa. El sentido de la polarización de la onda refractada no cambia porque los coeficientes de transmisión nunca son negativos.

Cuando $\tan \theta_i = \tan \theta_t = n_{21}$ la onda reflejada siempre está polarizada linealmente con el campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia, sin importar la polarización de la onda incidente. Si además la onda incidente no tiene componente σ , no hay entonces onda reflejada.

Problemas del capítulo 3

- Un haz de luz en aire incide sobre un aceite con un ángulo de 45° y se refracta con un ángulo de 30° . ¿Cuál es la rapidez de la luz en el aceite?
- El fondo de un vaso de vidrio ($n = 1.48$) es de caras planas y paralelas y está horizontal. El vaso está lleno de agua y arriba, desde el aire, incide sobre el agua un rayo de luz con un ángulo de 60° . Halle el ángulo con que el rayo incide sobre la cara inferior del fondo de vidrio del vaso.
- Una onda atraviesa un medio homogéneo limitado por caras planas y paralelas, de grosor a (figura 1). (a) Verifique que la *desviación* δ es cero, esto es, que un rayo sale del medio paralelo a como entró. (b) Pruebe que el rayo emergente sufre un *desplazamiento* d , respecto al incidente, dado por

$$d = a \frac{\text{sen}(\theta_i - \theta_t)}{\cos \theta_t}.$$

- Con una figura similar a la figura 16.1, p. 155, muestre por qué un rayo transmitido no puede estar en el cuadrante IV.
- Muestre que cuando un plano se rota un ángulo α , el rayo reflejado rota el doble (figura 2), esto es, muestre que $\beta = 2\alpha$.
- Luz roja de $\lambda = 650$ nm penetra en el agua ($n = 1.33$); ¿cuál es la longitud de onda en el agua?, ¿cambia la frecuencia al pasar del aire al agua?
- Un observador O mira el borde del fondo de un recipiente cúbico vacío como se muestra en la figura 3. Halle el mínimo índice de refracción de un líquido con el que se debe llenar el cubo para que O , *sin mover sus ojos*, pueda ver el centro de la cara inferior del cubo.
- Un haz de luz incide normalmente sobre la cara vertical del prisma de la figura 4. El índice de refracción del prisma es 1.64. Halle el máximo α para el que no sale luz del prisma por la cara inclinada cuando el prisma está rodeado de (a) aire, (b) agua.
- Una fibra de vidrio ($n = 1.6$) tiene una envoltura de índice de refracción 1.3 (figura 5). Halle (a) a partir de qué ángulo de incidencia en B no hay transmisión de luz a la envoltura, (b) entre qué límites de θ se transmite luz a la envoltura, (c) entre qué límites está el ángulo de incidencia en B .

- Una pequeña moneda está en el fondo de un estanque de 1.20 m de profundidad. Un disco opaco flota en el estanque, con su centro encima de la moneda. Halle el mínimo radio del disco para que la moneda no sea visible por ningún observador desde el aire.
- Una fuente F emite luz roja de 633 nm. La luz recorre un tramo de 2.0 cm hasta un punto P de interés. (a) ¿Cuántas longitudes de onda o cuántos ciclos del campo eléctrico hay en este tramo? (b) La pregunta anterior, pero entre F y P se intercala una placa de vidrio de índice 1.50 y 2.0 mm de espesor.

12 Explique cuál es el error cuando se escribe (a) $\vec{E}_{0i} = \vec{E}_{0i,\pi} + \vec{E}_{0i,\sigma}$, (b) $E_{0i} = E_{0i,\pi} + E_{0i,\sigma}$, (c) $E_i = E_{i,\pi} + E_{i,\sigma}$.

13 Sabiendo que $\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$, muestre que $B_{\pi,\sigma} = E_{\sigma,\pi}/v$.

14 ¿Es válida la ecuación 17.14 cualquiera sea la forma de la sección transversal del haz, o lo es únicamente para una sección rectangular (figura del ejemplo 17.1)?

15 Demuestre que, en las direcciones π o σ ,

$$\mathcal{R}_{\pi\sigma} = R_{\pi\sigma}^2, \quad \mathcal{J}_{\pi\sigma} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} T_{\pi\sigma}^2.$$

La conservación de la energía exige que $P_r/P_i + P_t/P_i = 1$. Utilice este hecho para probar también que $R_{\pi\sigma}^2 + \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} T_{\pi\sigma}^2 = 1$.

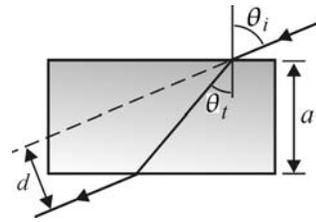


Figura 1

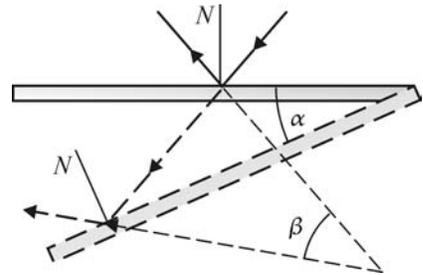


Figura 2

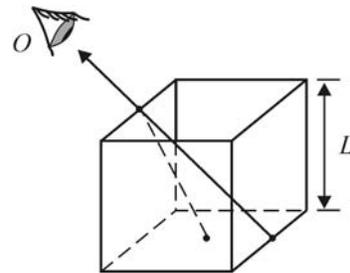


Figura 3

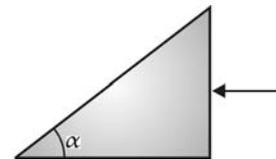


Figura 4

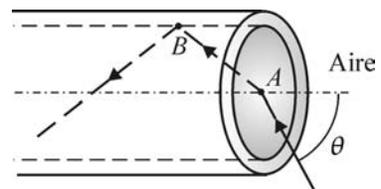


Figura 5

16 ¿A qué ángulo respecto a la horizontal debe estar el Sol para que la luz que incide sobre un lago quede polarizada por reflexión? ¿Existe algún ángulo para el que se presente reflexión total y no se transmita luz al agua?

17 Muestre que $R_\sigma = 0$ implica que no haya cambio de medio. *Nota:* simultáneamente se debe cumplir la ley de Snell.

18 Si en el ejemplo 17.6 el campo eléctrico incidente se expresa como

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{i\pi} + \mathbf{E}_{i\sigma} = \mathbf{u}_\pi E_0 \sin(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t) - \mathbf{u}_\sigma E_0 \cos(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t),$$

donde \mathbf{u}_π es un vector unitario en el sentido de $\mathbf{E}_{i\pi}$ de la figura 17.3, y $\mathbf{u}_\sigma = \mathbf{u}_z$ es un vector unitario en la dirección σ o z , halle el sentido de polarización de la onda incidente.

Ayuda: este problema es igual al ejemplo 14.1, p. 138; basta con cambiar el eje x por \mathbf{k}_i , a E_z por $E_{i\sigma}$ y a E_y por $E_{i\pi}$.

19 Cuando $n_2 > n_1$ muestre que (a) R_σ es negativo para cualquier θ_i , (b) R_π es negativo para $\theta_i < \theta_B$ y positivo para $\theta_i > \theta_B$. Cuando $n_2 < n_1$ lo anterior se invierte.

20 Una onda plana incide sobre un material transparente ($n = 1.45$) con un ángulo de 28° ; su campo eléctrico forma un ángulo de 90° con el plano de incidencia y tiene una amplitud de 100 V/m . Halle (a) los valores de R_π , R_σ , T_π y T_σ ; (b) la amplitud de los campos eléctricos reflejado y transmitido; (c) la amplitud de los campos magnéticos incidente, reflejado y transmitido. (d) Especifique la dirección de los anteriores campos magnéticos.

21 Igual al problema 20, pero el ángulo del campo eléctrico incidente con el plano de incidencia es 0° .

22 Un haz de luz polarizada linealmente incide sobre una superficie de vidrio de índice de refracción 1.5, con un ángulo de 45° . El ángulo β_i entre \mathbf{E}_i y el plano de incidencia es de 30° (figura 17.1, p. 163). La potencia del haz incidente es de 1 mW . Halle la potencia (a) de las componentes π y σ de la onda incidente, (b) de las ondas reflejada y transmitida.



Desde hace milenios la humanidad ha observado las estrellas, pero sólo desde Galileo se interponen entre el ojo del astrónomo y ellas los telescopios, que son un conjunto de espejos y lentes que siguen las leyes de la *óptica geométrica*.

Presentación

La propagación de la luz en un medio y lo que le ocurre cuando llega a una superficie o interfaz donde comienza otro medio se puede investigar con las ecuaciones de Maxwell. Generalmente esto es de una gran complejidad, y en muchas situaciones parte de la información que se obtiene puede lograrse con un método mucho más sencillo que se llama *óptica geométrica*, donde hay que saber poco de la física de la luz. Por ejemplo, no es necesario saber que es una onda, que tiene campos E y B , que es transversal; no es necesario tampoco hablar de fase, ni de polarización, ni de coeficientes de Fresnel. De física solo son necesarias las leyes de reflexión y de refracción, el resto es geometría euclidiana.

La óptica geométrica se cumple siempre que la longitud de onda de la luz sea mucho menor que los objetos con los que la luz interacciona. El concepto fundamental es el de *rayo*; se debe mantener presente que un rayo tiene dirección y sentido: los de propagación de la luz.

Lo más importante en la óptica geométrica es hallar los cambios en la dirección de propagación de los rayos a medida que se encuentran con cambios en el medio. Para lograrlo, nos valemos de los conceptos de *objeto* (P) y de *imagen* (Q). Estos son importantes para comprender el funcionamiento de un telescopio, una cámara fotográfica o el ojo humano.

Capítulo 4

Óptica geométrica

Contenido

Módulo 18

Convención de signos. Objeto e imagen

Módulo 19

Formación de una imagen por reflexión

Módulo 20

Formación de una imagen por refracción

Módulo 21

Formación de una imagen por un sistema compuesto: lentes

Módulo 22

El ojo. Descomposición de la luz

Módulo 23

Instrumentos ópticos

Módulo 18

Convención de signos. Objeto e imagen

Contenido

- 18.1 Convención de signos
- 18.2 Concepto de objeto
- 18.3 Concepto de imagen

Objetivos

1. Aclarar qué se entiende, en óptica, por *objeto* e *imagen*.
2. Mostrar qué se quiere decir con los adjetivos *real* y *virtual* aplicados a un objeto y a una imagen.

Preguntas básicas

1. ¿El concepto de *objeto* que se usa en óptica coincide con el concepto de *objeto* de la vida cotidiana?
2. La anterior pregunta, pero para el concepto de *imagen*.
3. ¿En óptica un *objeto real* es un objeto tangible?
4. ¿Qué es un *sistema óptico*?

Introducción

El ojo tiene una estructura compleja cuyos componentes alteran la forma del frente de onda de la luz que le llegue; en el proceso de visión la luz lo atraviesa hasta llegar a la retina, donde se generan señales eléctricas que el cerebro posteriormente interpreta como imágenes. La luz que le llega al ojo, a su vez, puede provenir de otro dispositivo complejo como un microscopio o un telescopio. Para hallar la trayectoria de un rayo en su recorrido total debemos basarnos en los conceptos de *objeto* e *imagen*.



El objeto es una abertura en forma de F en una caja dentro de la que hay una bombilla (derecha de la figura). La luz que le llega a la lente en el centro produce una imagen en una pantalla (izquierda de la figura), imagen que es real, invertida y mayor que el objeto.

18.1 Convención de signos

Un sistema óptico es un dispositivo físico al que le llega luz y del que sale luz. En la figura 18.1a lo representamos con una curva cerrada, y puede ser una superficie reflectiva o refractiva, o una combinación de estas como un microscopio o un telescopio.

El lado positivo de un sistema es por donde le llegue la luz, negativo es el lado opuesto (muchos textos siguen una convención diferente). En la figura 16.2a, p. 155, vemos que la luz que sale por reflexión *siempre* está en el lado positivo (por ejemplo, en espejos) y la que sale por refracción *siempre* está en el lado negativo (por ejemplo, en lentes o la luz que penetra en el ojo).

18.2 Concepto de objeto

Un **objeto óptico** P es el *lugar* de intersección de los rayos que *llegan* al sistema. Debemos diferenciarlo de un **objeto físico**,¹ que es un conglomerado de partículas. Cuando en óptica hablamos de *objeto*, debemos sobrentender que nos referimos a un objeto óptico y no a un objeto físico. En cambio, en la vida cotidiana cuando hablamos de *objeto* nos referimos a objetos físicos. A veces un objeto óptico coincide con un objeto físico, pero con frecuencia no es así.

Si los rayos que llegan al sistema se intersecan físicamente, o mediante prolongaciones, en un punto, el objeto es puntual. A menudo hablamos de objetos puntuales, aunque en la realidad los objetos no lo sean, pues tienen algún volumen. Pero esto no es una limitación, pues la superficie del objeto macroscópico o extendido la consideramos conformada por un infinito número de objetos puntuales. En la figura 18.1b ilustramos dos de esos puntos, A y B .

Al sistema de cada punto le llegan infinito número de rayos, y hay infinitos puntos. Basta, como dijimos, con considerar un solo punto, pues a los demás les aplicamos el mismo análisis. El recíproco de lo anterior también es cierto: a cada punto del lado del sistema por donde entra la luz llega un rayo de cada uno de los puntos del objeto; o con otras palabras: *a cada punto del sistema le llega información de todo el objeto* (figura 18.2).

Si los rayos llegan divergentes (esto es, alejándose entre sí en el sentido en que se propaga la luz), el objeto puntual P se denomina **objeto real**, y es el caso ilustrado en la figura 18.1a, donde el lugar de intersección está en sentido opuesto al de aproximación de los rayos al sistema. Necesariamente P está en el lado positivo, y su distancia p , llamada **distancia objeto**, es $(+)$, $p = |p|$.

Si llegan convergentes (esto es, acercándose entre sí en el sentido en que se propaga la luz), se denomina **objeto virtual** (figura 18.1c), y el lugar de intersección necesariamente está en el mismo sentido en que se aproximan los rayos. O sea que P está al otro lado del sistema por donde llega la luz, el lado negativo, y p es $(-)$, $p = -|p|$.

Se debe evitar la fuerte tendencia a pensar el *objeto* (óptico, por supuesto) como el lugar de donde salen físicamente los rayos; a veces es así, pero a veces no. En su lugar, *se debe pensar como el lugar de intersección de los rayos que llegan al sistema, así sea con prolongaciones, como se ilustra mediante*

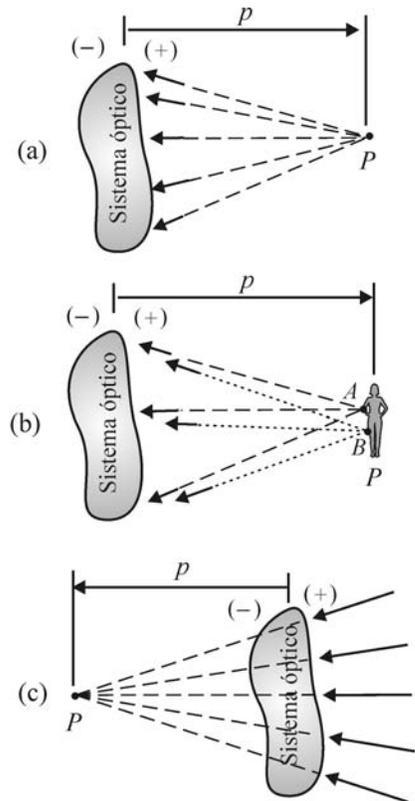


Figura 18.1 (a) Objeto puntual y real, (b) objeto macroscópico real, (c) objeto puntual y virtual.

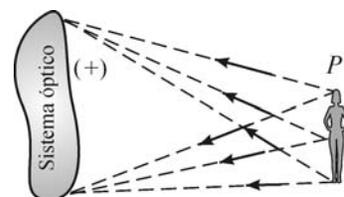


Figura 18.2 A cada punto del sistema óptico llegan rayos de todo el objeto.

¹ La idea de que los rayos emanan en todas las direcciones desde cada punto de un objeto físico se debe a Francesco Maurolico de Messina, 1494-1575: Vasco Ronchi, *Optics. The science of vision*, Dover Publications, Nueva York, 1991, p. 39.

las líneas a trazos de las figuras. Dicha tendencia se origina en que los rayos provenientes de un punto de un objeto físico sí salen del punto, y siempre llegan divergentes al sistema. En consecuencia, *todo objeto físico es un objeto (óptico) real*, $p > 0$ (pero no viceversa).

Sea consciente de que con las palabras *objeto real* en óptica no nos referimos a lo que se quiere decir en la vida cotidiana, que es un objeto físico que sí existe, en oposición a un objeto imaginado. En óptica queremos decir que los rayos asociados a P llegan divergentes al sistema, como lo harían si los rayos provinieran de un objeto físico situado en P (figura 18.1a).

18.3 Concepto de imagen

Llamamos **imagen** Q al lugar de intersección de los rayos que *salen* del sistema y **distancia imagen** q a la distancia de Q al sistema (figura 18.3).

Se debe evitar la fuerte tendencia a pensar la imagen como el lugar donde *físicamente* se intersecan los rayos que salen; a veces es así, pero a veces no. En cualquier caso, es la intersección de las prolongaciones de los rayos que salen, como se ilustra mediante las líneas a trazos de las figuras.

El problema principal de la óptica geométrica es: ¿cuál es el lugar de intersección de los rayos que salen del sistema, conocidos el lugar de intersección de los rayos que llegan y las características del sistema? O de otra manera: ¿qué Q le corresponde a P ?

Vemos que la función de un sistema óptico consiste en recibir unos rayos, procesarlos y entregarlos con direcciones diferentes.

Si a un objeto puntual le corresponde una imagen puntual, el sistema se denomina **sistema óptico perfecto**. Pero la perfección no es de este mundo, y los rayos que salen nunca se intersecan en un solo punto. Decimos entonces que el sistema sufre de **aberraciones** o defectos. Mientras menos se aleje del ideal de que a P puntual le corresponda una Q puntual, o sea que tenga menos aberraciones, mejor y más costoso es el sistema.

Cuando se vea en *óptica física* el tema de *difracción*, se verá que a un objeto puntual nunca le corresponde una imagen puntual, no por una aberración del sistema, sino como una manifestación intrínseca de la naturaleza ondulatoria de la luz.

En los cuatro dibujos de la figura 18.4 se ilustran rayos que salen del sistema óptico; no se muestran los que llegan, que son los que definen el lado (+). La luz puede salir por el lado opuesto por donde entró (figuras a y b), como en una lente o la luz mediante la que vemos, que es la que penetra al ojo. También puede salir por el mismo lado por donde llegó (figuras c y d), como la luz que se refleja en las caras de una lente, o la que se refleja en el ojo y produce las imágenes que vemos cuando miramos a los otros a los ojos. Una interfaz puede producir simultáneamente imágenes por reflexión y por refracción.

Si los rayos salen convergentes, o sea acercándose entre sí en el sentido en que avanza la luz, la imagen se denomina **imagen real**. En la figura 18.4a se ilustra cuando los rayos salen por el lado opuesto por donde llega la luz; como salen convergentes, el lugar de intersección está en el sentido en que avanza la luz, en el lado (-), y q es (-), $q = -|q|$. En la figura 18.4c, se ilustra cuando salen por el mismo lado por donde llega la luz al sistema y, por ser convergentes, se intersecan en el mismo sentido de los rayos, en el lado (+), y q es (+), $q = |q|$.

Si los rayos salen divergentes, o sea alejándose entre sí en el sentido en que avanza la luz, la imagen se denomina **imagen virtual**. En la figura 18.4b se ilustra cuando los rayos salen por el lado opuesto por donde llega la luz;

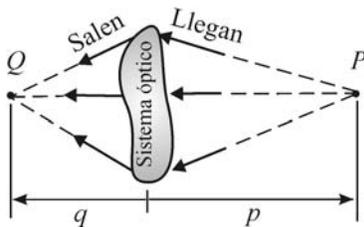


Figura 18.3 El sistema cambia la inclinación de los rayos.

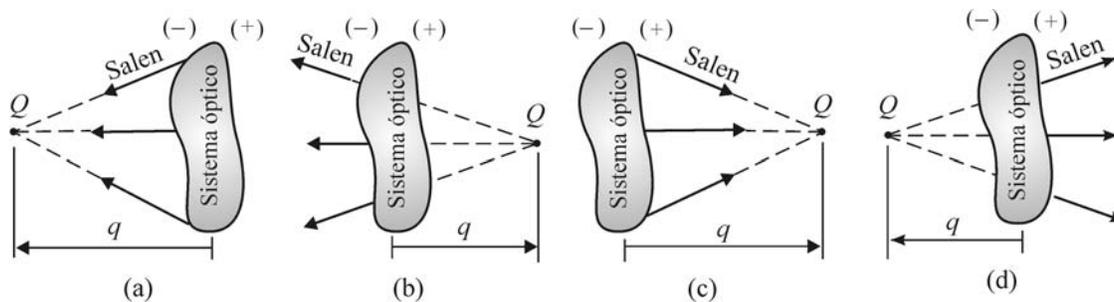


Figura 18.4 (a) y (c) son imágenes reales, (b) y (d) son virtuales.

como salen divergentes, el lugar de intersección está en el sentido opuesto al avance de la luz, en el lado (+), y q es (+). En la figura 18.4d, se ilustra cuando salen por el mismo lado por donde llega la luz al sistema y, por ser divergentes, se intersecan en el lado (-), y q es (-).

Se comprenderá que no es posible proyectar las imágenes virtuales (o sea rayos divergentes, figuras 18.4b y d) en una pantalla, pues la luz de la imagen asociada con cada punto del objeto se abre cada vez más dando una imagen borrosa. La pantalla habría que ponerla en Q para observar una imagen nítida, pero en Q no hay luz asociada con la imagen.

La imagen real sí es posible proyectarla poniendo la pantalla en el lugar dado por Q (figura 18.5a). Pero si no se ubica en Q (figura 18.5b), lo que se observe en ella no es la imagen, aunque en la vida cotidiana se le llame así; *la imagen, a pesar de no ser visible, sigue siendo real y ubicada en Q!*

Más sobre los signos: con mayúsculas, por lo general, denotamos puntos, y con minúsculas la distancia de los puntos al sistema. Las distancias las tratamos algebraicamente, esto es, intrínsecamente pueden ser negativas, cero o positivas. Por ejemplo, con la letra q denotamos la distancia de Q . Si Q está al otro lado de donde llega la luz, es negativa y aun en este caso escribimos q y no $-q$. Escribiendo $-q$ no garantizamos que la distancia imagen sea negativa, porque si q es negativa, $-q$ es positiva. La forma correcta de garantizar que q sea negativa es escribiendo $q = -|q|$, y no $q = -q!$; y para garantizar que sea positiva, $q = |q|$.

Nuestro sistema óptico, representado hasta ahora de una forma abstracta por una curva cerrada, toma siempre la forma concreta de una interfaz reflectiva-refractiva o un conjunto de ellas, ya sea un espejo, la superficie del agua de un estanque, nuestros ojos, un microscopio o un telescopio. Volvamos a exponer lo dicho, pero ya con una interfaz concreta:

La figura 15.3, p. 150, es básica en la óptica geométrica. Siempre que un rayo incida en una interfaz, debemos inmediatamente trazar la normal N al plano tangente a la interfaz en el punto de incidencia (si la interfaz es plana, el plano tangente es la propia interfaz), ubicar a continuación un plano que contenga a N y a la dirección de incidencia, y que es el plano de incidencia. A continuación se debe dibujar el resto de dicha figura. La luz incidente, que *llega* a la interfaz, se relaciona con el objeto (figura 18.6); la luz que *sale* por reflexión se relaciona con la imagen formada por reflexión y la que *sale* por transmisión se relaciona con la imagen formada por refracción. Generalmente existen estas dos imágenes, porque casi siempre se presenta reflexión y transmisión (los coeficientes R_π , R_σ , T_π y T_σ son diferentes de cero).

Repitamos lo expuesto, pero con un sistema óptico concreto, una interfaz plana que refleja y refracta: si los rayos *llegan* divergentes (figura 18.7a),

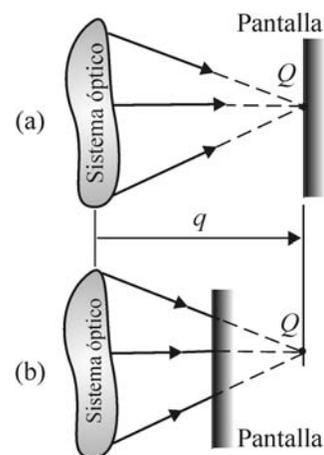


Figura 18.5 Ubicación de una pantalla para observar una imagen real.

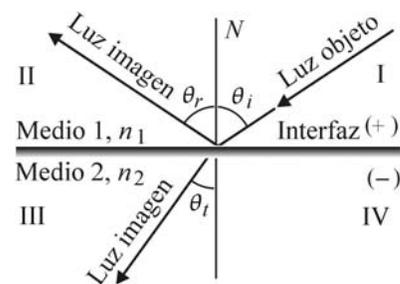


Figura 18.6 En cada punto de la interfaz hay luz asociada con el objeto y las imágenes.

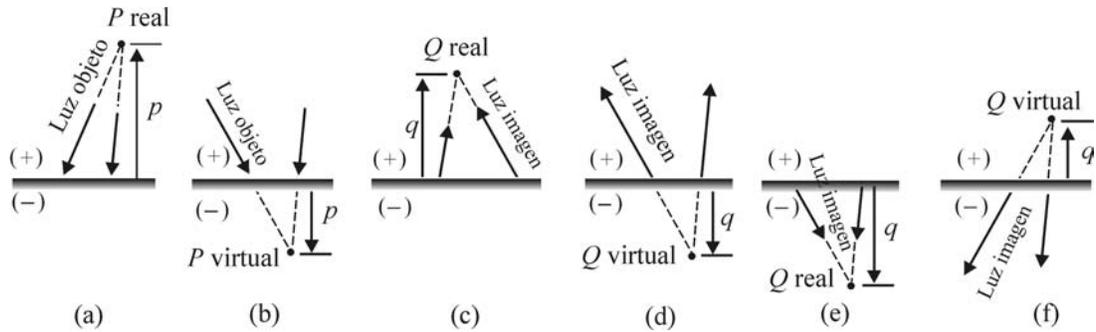


Figura 18.7 Objetos e imágenes reales o virtuales

el objeto es real y su lugar de intersección (no importa si físicamente o mediante prolongaciones) está en el mismo lado por donde llegaron, en sentido opuesto a su dirección de propagación, y $p > 0$. Si *llegan* convergentes (figura 18.7b), el objeto es virtual y su lugar de intersección, mediante prolongaciones, está al otro lado por donde llegaron, en el mismo sentido de propagación, y $p < 0$.

Si los rayos reflejados *salen* convergentes (figura 18.7c), la imagen es real y su lugar de intersección (no importa si físicamente o mediante prolongaciones) está en el mismo lado por donde llegaron, en su sentido de propagación, y $q > 0$. Si *salen* divergentes (figura 18.7d, como es el caso de un espejo plano en el que nos miremos), la imagen es virtual y su lugar de intersección, mediante prolongaciones, está al otro lado de la interfaz, en sentido contrario a su sentido de propagación, y $q < 0$.

Si los rayos refractados *salen* convergentes (figura 18.7e), la imagen es real y su lugar de intersección (no importa si físicamente o mediante prolongaciones) está en el mismo lado de la interfaz que ellos, en su sentido de propagación, y $q < 0$. Si *salen* divergentes (figura 18.7f), la imagen es virtual y su lugar de intersección, mediante prolongaciones, está al otro lado de donde salen, en sentido contrario al de su propagación, y $q > 0$.

En las próximas secciones hallamos la ecuación que relaciona la posición de un objeto con la de la imagen respectiva para varios sistemas ópticos concretos; empezamos con la formación de imágenes por un espejo.

Resumen

El lado positivo de un sistema óptico es por donde le llegue luz, el negativo es el lado opuesto. En una convención de signos diferente y muy utilizada, si el objeto o la imagen son reales, a sus respectivas distancias se les considera positivas, independientemente de a qué lado estén, y negativas si son virtuales.

Entendemos por lugar de intersección de dos rayos el lugar donde se intersequen físicamente o mediante prolongaciones. Si todos los rayos que llegan a un sistema óptico se intersecan en un punto, el objeto es puntual y el frente de onda incidente es esférico. *Un objeto no puntual se debe analizar como compuesto por un infinito número de objetos puntuales.* El lugar de intersección de los rayos que salen se llama *imagen*. Un sistema perfecto es aquel que produce una imagen puntual de un objeto puntual. Como esto no ocurre, decimos que el sistema presenta *aberraciones*. Un objeto se llama real si los rayos llegan divergentes, y virtual si son convergentes; para una imagen es al contrario.

Módulo 19

Formación de una imagen por reflexión

Contenido

- 19.1 Reflexión en una superficie esférica
- 19.2 Aumentos

Objetivos

1. Obtener la ecuación que relaciona la distancia imagen con la distancia objeto para el sistema óptico más simple: una superficie reflectiva esférica.
2. Mostrar cómo se halla, gráficamente, la imagen de un objeto mediante rayos principales.
3. Definir los diferentes aumentos de un sistema óptico.
4. Introducir el concepto de *foco*.

Preguntas básicas

1. ¿Cómo se halla una imagen por reflexión?
2. ¿En qué condiciones a un objeto puntual le corresponde, por reflexión, una imagen puntual?
3. ¿Cómo se pueden clasificar los espejos?
4. ¿En qué difiere un objeto macroscópico de su imagen formada por un espejo?

Introducción

Los rayos que llegan a un espejo asociados con un objeto puntual se reflejan, y solo en circunstancias muy restringidas dan una imagen puntual. En cursos más avanzados se pueden mermar las restricciones y estudiar de una forma más general la formación de imágenes. No obstante tales restricciones, la óptica que estamos desarrollando es sumamente útil para comprender muchos instrumentos ópticos, y es el punto de partida para entender las bases teóricas de esta importante área de la física. Empezaremos estudiando la formación de una imagen por un espejo esférico, lo que nos posibilita comprender la formación de imágenes por el espejo más común, el espejo plano, que quizás utilizamos diariamente; el espejo plano es un caso particular de espejo esférico: tiene un radio de curvatura infinito. El ejemplo más notable de imágenes formadas por reflexión en espejos esféricos son las que observamos cuando miramos a otra persona a los ojos.



A diferencia de la reflexión en una superficie plana como la de un estanque, las imágenes que la superficie esférica de nuestros ojos forma por reflexión son más pequeñas que los objetos reflejados.

19.1 Reflexión en una superficie esférica

Sea nuestro sistema un espejo conformado por un casquete esférico reflectivo con centro de curvatura C y radio de curvatura r (figura 19.1). El eje de simetría del sistema (línea VC) se llama **eje principal** o **eje óptico** y su intersección con el espejo es el **vértice** V . Los rayos que llegan se intersecan en un punto P y los rayos reflejados se intersecan en Q .

Toda la óptica de este capítulo será **paraxial**, con lo que entenderemos que solo vamos a considerar los rayos que formen un ángulo pequeño con el eje principal, o sea rayos casi paralelos a él. En este caso podemos hacer las siguientes aproximaciones: $BP = VP - \delta \approx VP = p$, $BQ = VQ - \delta \approx VQ = q$, $BC = VC - \delta \approx VC = r$, $\alpha_1 \approx \tan \alpha_1$, $\alpha_2 \approx \tan \alpha_2$ y $\beta \approx \tan \beta$. La óptica paraxial se llama también **óptica gaussiana** en honor al trabajo de Gauss de 1841.

En la figura 19.1 vemos que se cumple que $\beta = \theta_i + \alpha_1$ y $\alpha_2 = \theta_i + \beta$. Eliminemos θ_i de este par de ecuaciones para obtener $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta$. Usemos las aproximaciones paraxiales,

$$\begin{aligned} \tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 &= 2 \tan \beta, \\ \frac{h}{BP} + \frac{h}{BQ} &= 2 \frac{h}{BC}, \\ \frac{h}{p} + \frac{h}{q} &= 2 \frac{h}{r}. \end{aligned}$$

Cancelemos h ,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{r}. \tag{19.1}$$

Esta es la **ecuación de Descartes para espejos esféricos**. El que se cancele h significa que todos los rayos que lleguen paraxiales se reflejan dirigiéndose a un punto, *bastando así con saber dónde se intersecan dos rayos para saber por dónde pasará el resto de infinitos rayos (o sus prolongaciones)*. O con otras palabras, al objeto puntual P le corresponde una imagen puntual Q y el espejo se comporta como un sistema perfecto. Para rayos no paraxiales daría una ecuación en la que h no se cancela, resultando que Q no es puntual. A esta aberración se le llama **esférica** (figura 19.2a); las imágenes de dos puntos P_1 y P_2 se pueden superponer, impidiendo que se distinga una de otra (figura 19.2b). O sea que si P_1 y P_2 son puntos de un objeto macroscópico o extendido su imagen no será nítida.

Hablar de un objeto puntual equivale a decir que la porción de frente de onda que le llega al sistema es un casquete esférico, y así podemos pensar a un sistema óptico perfecto como aquel del que sale también esférico el frente de onda, esto es, que produce una imagen puntual.

Cuando $|p| \gg |q|$ a Q se le llama **foco**, F , y a q **longitud focal**, f . Según la ecuación 19.1,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \approx \frac{1}{q} = \frac{1}{f} = \frac{2}{r}.$$

Vemos que

$$f = r/2,$$

y la ecuación 19.1 la escribimos

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}, \quad \text{con } f = \frac{r}{2}. \tag{19.2}$$

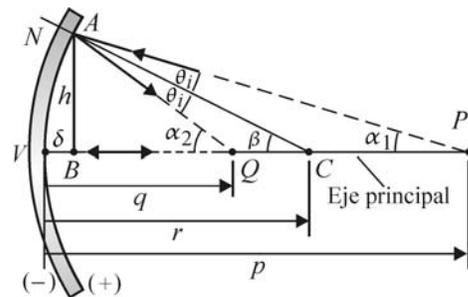


Figura 19.1 Geometría de la reflexión de rayos.

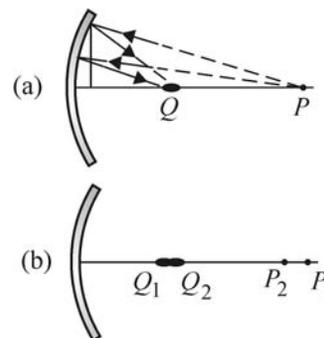


Figura 19.2 Aberración esférica.

El espejo con $f > 0$ se denomina **positivo, cóncavo o convergente**; con $f < 0$ se denomina **negativo, convexo o divergente**. El espejo convexo más común es la córnea de nuestros ojos, con un radio de curvatura cercano a -8 mm, o una longitud focal de -4 mm.

Cantidades que tienden a infinito o a cero

Al tomar medidas, p puede ser, por ejemplo, 2 m, y considerársele infinito. Desconcierta que a tal distancia se le pueda calificar como $p \rightarrow \infty$. Tal vez fuera mejor decir $q \ll p$. Con la afirmación matemática de que una variable tiende a infinito, en física lo que se quiere decir es que esa variable es mucho mayor que las otras variables involucradas en el problema. Igual ocurre con la afirmación matemática de que una variable tiende a cero; en física lo que se quiere decir es que es mucho menor que las demás variables. En lugar de decir que $1/p \rightarrow 0$, es más apropiado decir $1/p \ll 1/q$, y que por lo tanto $1/p + 1/q \approx 1/q = 1/f$. Vemos que cuando $p \rightarrow \infty$ (o sea $|p| \gg |q|$), $q = f$.

Rayos principales

Llamamos **rayos principales o notables** a los siguientes cuatro rayos: uno que *llegue* paralelo al eje principal, otro que *salga* paralelo, uno que pase por el centro de curvatura y otro que incida en el vértice; en la figura 19.3 se trazan para un espejo cóncavo y uno convexo. Para hallar gráficamente la imagen de un objeto generalmente usamos solo rayos principales; para hallarla analíticamente lo hacemos con la ecuación 19.2.

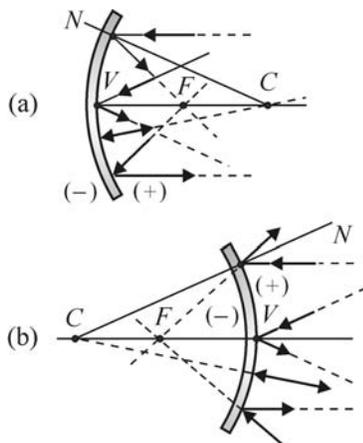


Figura 19.3 Rayos principales de un espejo (a) cóncavo, (b) convexo.

19.2 Aumentos

El aumento (o magnificación) transversal (o lateral), M , se define como la relación entre la longitud o altura transversal (o sea perpendicular al eje principal) de una imagen, $A'B'$ (figura 19.4), y la altura transversal del objeto respectivo, AB . En dicha figura trazamos, de los infinitos rayos asociados con B , el punto más alto de P , dos de los rayos principales; su imagen es B' . En V se aplica la ley de reflexión, $\theta_r = \theta_i$. Como vimos, todos los demás rayos reflejados se orientan hacia B' ya que en la aproximación paraxial no hay aberración esférica. Se cumple que $\tan \theta_i = AB/p$ y $\tan \theta_i = -A'B'/q$. Hemos introducido un signo menos porque la tangente de un ángulo entre 0 y 90° es positiva, y en la figura $A'B' < 0$ por estar orientado hacia abajo, y $q > 0$ por estar por donde llega la luz. De las dos últimas ecuaciones obtenemos $AB = p \tan \theta_i$ y $A'B' = -q \tan \theta_i$; hallemos el aumento $M = A'B'/AB$,

$$M = -q/p. \tag{19.3}$$

El aumento longitudinal, M_L , que se relaciona con la dirección axial, se define como la relación entre la longitud axial infinitesimal de una imagen, dq , y la dimensión axial del objeto infinitesimal respectivo, dp ; es igual a (vea el ejemplo 19.4)

$$M_L \equiv dq/dp = -M^2. \tag{19.4}$$

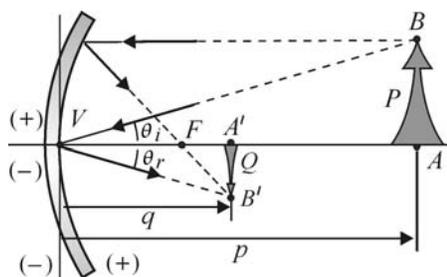


Figura 19.4 Aumento por un espejo.

Ejemplo 19.1 A un objeto real puesto a 1.2 m de un espejo esférico le corresponde una imagen que es virtual y dos veces mayor. (a) Analíticamente, determine la longitud focal y la naturaleza del espejo. (b) Con rayos principales ilustre, a escala, la solución gráfica del problema.

Solución

(a) Como el objeto es real, los rayos llegan divergentes y se intersecan en dirección opuesta a la de ellos, $p > 0$. Por ser virtual la imagen, los rayos salen, por reflexión (es un espejo), divergentes y se intersecan en dirección opuesta a ellos, $q < 0$. El aumento es 2, pero no sabemos si la imagen es derecha o invertida, entonces usamos valor absoluto, $|M| = 2$. Averigüemos si es +2 o -2,

$$M = -\frac{q}{p} = -\frac{(-)}{(+)} = (+) = +2,$$

de donde $q = -2p$. Reemplacemos en la ecuación 19.2, $1/p + 1/(-2p) = 1/f$. Despejemos, $f = 2p = +2.4$ m. El espejo es positivo, o cóncavo, o convergente, pues la longitud focal es positiva.

(b) En la figura 19.5 se ilustra la solución gráfica. Del punto más alto del objeto llegan dos rayos divergentes. El rayo superior llega con $\theta_i = 0$, el rayo reflejado respectivo sale dirigiéndose hacia C. El rayo inferior llega paralelo, el reflejado sale dirigiéndose hacia F. Vemos que los que salen lo hacen divergiendo. Note que aunque el espejo es convergente, produce rayos divergentes, pues el objeto está entre el vértice y el foco.

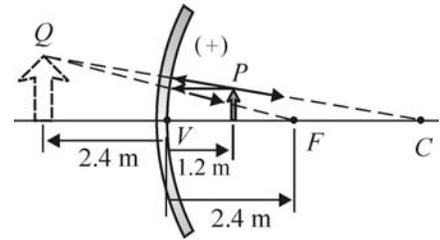


Figura 19.5 Imagen virtual y derecha.

Ejemplo 19.2 Determine la naturaleza de un espejo que sea útil para la vigilancia en un almacén.

Solución. Lo primero que se debe exigir es que el aumento sea positivo, para que la imagen tenga la misma orientación que su respectivo objeto,

$$M > 0. \tag{19.5}$$

Si $M = +1$, sería el caso de un espejo plano, con el que la imagen es del mismo tamaño que el objeto, y para dar un buen cubrimiento tendría que ser muy grande, de más de 1 m, pues los estantes y las personas tienen medidas mayores que 1 m. Si $M > 1$, la situación empeora, pues imágenes mayores que el objeto no son convenientes porque dan un cubrimiento aun menor que con un espejo plano. En conclusión, para que las imágenes sean derechas y menores que los objetos que se quieren vigilar, y obtener así un mayor cubrimiento o campo de visión mayor,

$$0 < M < 1. \tag{19.6}$$

Las imágenes en el almacén corresponden a objetos físicos, que siempre se comportan como objetos (ópticos) reales,

$$p > 0. \tag{19.7}$$

Reemplacemos en la ecuación 19.3, p. 186, las relaciones (19.5) y (19.7),

$$(+) = \frac{-q}{(+)};$$

de donde $q < 0$: Q es una imagen virtual. Llegamos a lo que se cumple también con las lentes, esto es, que toda imagen derecha de un objeto real es virtual.

De las ecuaciones para espejos, $M = -q/p$ y $(1/p) + (1/q) = (1/f)$, obtenemos $f = Mp/(M - 1)$. Reemplacemos en esta ecuación las relaciones (19.5), (19.6) y (19.7),

$$f < 0.$$

El espejo tiene que ser convexo o divergente.

Cuando llega luz a nuestros ojos, hay imágenes por reflexión que son las que vemos cuando miramos a alguien a los ojos. También hay imágenes por transmisión, que son las que nos dan la visión. Para estas nuestros ojos son, como se verá más tarde, superficies refractivas convergentes; para aquellas son espejos convexos o negativos que, como acabamos de ver, dan imágenes derechas y menores que el objeto.

Ejemplo 19.3 Un objeto se mueve hacia un espejo esférico de longitud focal f con una velocidad constante v_p . Encuentre la velocidad de la imagen como una función de la distancia p y discuta el resultado.

Solución. La velocidad del objeto es $v_p = dp/dt$, la de la imagen es $v_Q = dq/dt$. Derivemos respecto al tiempo la ecuación 19.2,

$$\frac{dp^{-1}}{dt} + \frac{dq^{-1}}{dt} = \frac{df^{-1}}{dt}.$$

La longitud focal, $f = r/2$, la fija el constructor del espejo; como no depende del tiempo, el miembro derecho de la anterior ecuación es cero.

$$-p^{-2} \frac{dp}{dt} - q^{-2} \frac{dq}{dt} = -p^{-2} v_p - q^{-2} v_Q = 0.$$

Despejemos,

$$v_Q = - \left(\frac{q}{p} \right)^2 v_p.$$

Como $(q/p)^2 = (-q/p)^2 = M^2$,

$$v_Q = -M^2 v_p. \tag{19.8}$$

El $(-)$ significa que las velocidades son opuestas: si el objeto se mueve hacia la izquierda acercándose al espejo, la imagen se mueve hacia la derecha, acercándose también. También significa que si apuntamos con un dedo al espejo, la imagen del dedo apunta hacia el dedo. Esto lo comprobamos a diario cuando nos acercamos a un espejo plano, para el que se cumple que $M = 1$, y $v_Q = -v_p$.

De la ecuación 19.2, $q = fp/(p - f)$. Reemplacemos en la expresión para el aumento lateral, $M = -q/p = f/(f - p)$. Reemplacemos esta expresión para M en la ecuación 19.8,

$$v_Q = - \left(\frac{f}{f - p} \right)^2 v_p.$$

Para un objeto lejano, $p \gg f$ y la anterior ecuación predice que $v_Q \ll v_p$ ($v_Q \rightarrow 0$): Q coincide con F , como era de esperarse. Cuando P se acerca a F los rayos salen casi paralelos y la imagen se forma lejos (q y $v_Q \rightarrow \infty$).

Ejemplo 19.4 (a) Halle la expresión para el aumento longitudinal de un espejo, ecuación 19.4. (b) Halle el volumen de la imagen de un cubo de 1 cm de lado que está perpendicular al eje principal y a 45 cm del espejo. La longitud focal del espejo es 15 cm.

Solución

(a) Según la ecuación 19.8,

$$\frac{dq}{dt} = -M^2 \frac{dp}{dt}.$$

Cancelemos dt y despejemos,

$$\frac{dq}{dp} \equiv M_L = -M^2. \tag{19.9}$$

(b) En la figura 19.6 se representan, sin escala con el resto de la figura, el cubo P y su imagen Q . Sea h_p un lado de P ; su volumen es $V_p = h_p^3$. La altura y el ancho transversal o lateral (esto es, en dirección perpendicular al eje) de la imagen son las de un cuadrado de lado $h_Q = Mh_p$. El área de este cuadrado es $A = h_Q^2 = M^2 h_p^2$.

El grosor del objeto es $\Delta p = h_p$; el de la imagen es Δq . Como son pequeños (mucho menores que p , q y f), aproximamos a infinitesimales estos deltas, $\Delta p \approx dp$, y $\Delta q \approx dq$. De la ecuación 19.9, $\Delta q \approx M_L \Delta p = M_L h_p = -M^2 h_p$.

El volumen de la imagen es así, $V_Q = A|\Delta q| = M^2 h_p^2 \times M^2 h_p = M^4 h_p^3 = M^4 V_p$.

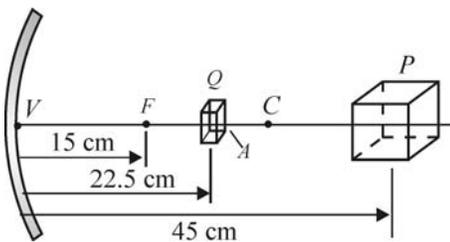


Figura 19.6 Un cubo P y su imagen Q .

$$V_Q = M^4 V_P.$$

Hallemos M . De la ecuación 19.2, $q = fp/(p - f) = 15 \times 45/(45 - 15) = 22.5$ cm. $M = -q/p = -22.5/45 = -0.5$. Q tiene una cara A transversal cuadrada de lado 0.5×1 cm = 0.5 cm. El grosor es $0.5^2 \times 1$ cm = 0.25 cm. Q es entonces un paralelepípedo recto de lados, en cm, $0.5 \times 0.5 \times 0.25$, y con volumen

$$V_Q = M^4 V_P = (1/2)^4 V_P = \frac{1}{16} V_P = 0.0625 \text{ cm}^3.$$

El que M sea diferente de M_L lleva a que la imagen del cubo no sea cúbica, ni la imagen de una esfera sea esférica.

Ejemplo 19.5 Pruebe que, sin importar su distancia al eje, todos los rayos que llegan paralelos al eje de un espejo parabólico se dirigen hacia el foco después de la reflexión.

Solución. El espejo es un paraboloide de revolución. Sea el eje x el eje principal, y el origen de coordenadas el vértice del paraboloide. En la figura 19.7 se muestra el corte de un plano que contiene el eje principal, con el paraboloide. Sea este el plano xy . La distancia del foco F de la parábola al vértice es f .

Un rayo incide paralelo al eje x en el punto P y se refleja pasando por el punto $I(x_0, 0)$. N es la perpendicular al plano tangente en el punto de incidencia. En la figura se ha aplicado ya la ley de reflexión, $\theta_r = \theta_i$. El rayo incidente se caracteriza por el parámetro de impacto b , o por el ángulo α .

La demostración la haremos en coordenadas cartesianas, de acuerdo con el siguiente plan: hallamos 1) las coordenadas de P en función de b , 2) la pendiente m del rayo reflejado, 3) la ecuación del rayo reflejado con los datos de los dos primeros literales, y 4) la intersección del rayo reflejado con el eje x .

- 1) La ecuación de la parábola de la figura es $y^2 = 4fx$. Despejemos a x y reemplacemos a y por b , $x = b^2/(4f)$. Las coordenadas de P son $P(\frac{b^2}{4f}, b)$.
- 2) De la figura vemos que $\theta_i = 90^\circ - \alpha$ y, en el triángulo IPA , $\theta = 180^\circ - 2\theta_i = 180^\circ - 2(90^\circ - \alpha) = 2\alpha$. La pendiente del rayo reflejado es así

$$m = \tan \theta = \tan 2\alpha. \tag{19.10}$$

La pendiente de la parábola en P es $\tan \alpha = dy/dx = 2f/b$. Reemplacemos esta expresión en la identidad

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha};$$

la ecuación 19.10 nos da

$$m = \frac{4bf}{b^2 - 4f^2}.$$

- 3) La ecuación para una línea que pasa por $P(\frac{b^2}{4f}, b)$ con pendiente m es

$$y = m(x - b^2/4f) + b.$$

- 4) Hagamos $y = 0$, $x = x_0$ y despejemos este intercepto,

$$x_0 = f.$$

De donde concluimos que todos los rayos reflejados, sin importar b , se dirigen hacia el punto $I(f, 0)$. I es entonces el foco F de la parábola. O sea que el espejo no tiene aberración esférica para los rayos paralelos al eje principal. Esta es la explicación de la utilidad de las antenas o espejos parabólicos. En F se ubica un receptor, donde la densidad de energía es la más alta. En Odeillo (Francia) hay un horno solar (vea la figura de la página 125) que utiliza un gran espejo parabólico para dirigir los rayos hacia F , donde se ubica un material que se calienta o se funde a miles de grados centígrados, con contaminación mínima.

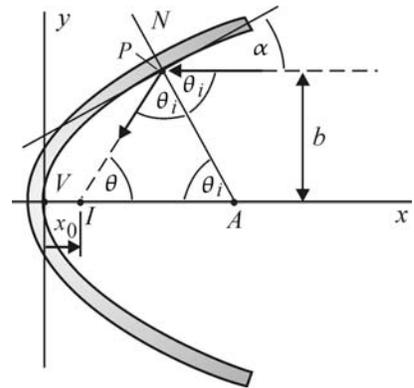


Figura 19.7 Reflexión en un espejo parabólico.

Resumen

La óptica geométrica paraxial, que es la que desarrollamos en este curso, es válida solo si *todos* los rayos tienen una pequeña inclinación respecto al eje óptico, esto es, son casi paralelos a él. Esto tiene como consecuencia que un objeto puntual debe estar sobre el eje principal o muy próximo a él, y que si no es puntual sea de tamaño pequeño. Además, el tamaño del espejo debe ser tal que no le lleguen rayos no paraxiales.

La distancia objeto p y la distancia imagen q producida por un espejo esférico de radio r cumplen que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}, \quad f = \frac{r}{2}.$$

Gráficamente, una imagen se halla mediante rayos principales.

Definimos dos aumentos: el aumento longitudinal M_L que es la distancia entre las imágenes de los dos puntos del objeto más alejados entre sí a lo largo del eje principal, sobre la distancia entre dichos puntos, y el aumento lateral o transversal M , que es la misma relación anterior, pero en una dirección perpendicular al eje:

$$M = -q/p \quad \text{y} \quad M_L = -M^2.$$

Módulo 20

Formación de una imagen por refracción

Contenido

- 20.1 Refracción en una superficie esférica
- 20.2 Focos de un sistema óptico. Aumento

Objetivos

1. Obtener la ecuación que relaciona la distancia imagen con la distancia objeto para una superficie refractora esférica.
2. Definir qué son los focos objeto e imagen de un sistema óptico.
3. Hallar el aumento lateral de una superficie refractiva esférica.

Preguntas básicas

1. ¿Cómo se halla una imagen formada por refracción?
2. ¿La imagen formada por refracción de un objeto esférico es también esférica?

Introducción

En el módulo anterior nos ocupamos de los rayos que se reflejan en una interfaz; en este nos ocuparemos de los que al refractarse producen su respectiva imagen y que tienen como ejemplo más importante la refracción que ocurre en nuestros ojos y que posibilita la visión. Aunque seguimos tratando con interfaces esféricas, podemos aplicar lo visto a una superficie refractiva plana, como lo es una superficie de agua. También podremos en otros módulos estudiar las lentes, ya que solo son un sistema óptico compuesto por dos subsistemas refractivos: las superficies por donde entra la luz y por donde sale. Y el estudio de las lentes nos posibilita, a su vez, entender otros sistemas ópticos que están conformados por subsistemas más elementales, donde cada uno es una lente: los microscopios.



Cuando miramos el pez, realmente miramos es su imagen por refracción, la cual tiene una posición diferente a la del propio pez y, debido a la curvatura de la pecera, un tamaño también distinto.

20.1 Refracción en una superficie esférica

Cuando llega luz a una superficie transparente, hay reflexión y refracción (figura 20.1); por ahora consideramos solo la superficie derecha de esta figura y no la izquierda. La luz reflejada forma una imagen Q_{reflex} según lo visto en la sección anterior; la luz refractada forma una imagen Q como lo veremos en esta sección. Note que la figura 15.3 se ha rotado y trasladado sobre el punto A de la figura 20.1, con la normal N pasando por C . Para $\theta_i \ll 1$, que es nuestro caso de aproximación paraxial, los coeficientes de Fresnel para la reflexión R_π y R_σ son mucho menores (suponiendo como medio 1 el aire y como medio 2 agua o vidrio) que los coeficientes T_π y T_σ , lo que quiere decir que la mayor parte de la energía se transmite y una pequeña parte se refleja. Las imágenes paraxiales por transmisión son mucho más intensas que por reflexión. (Recordemos que si los medios son aire y agua, solo se refleja el 2% de la energía para incidencia normal. Aproximadamente esto es lo que ocurre en la córnea del ojo, debido a que su índice de refracción es muy cercano al del agua).

La figura corresponde a una superficie refringente cóncava, a $n_1 < n_2$ y a un objeto real a la derecha de C . La normal N y la tangente en el punto de incidencia A definen los cuatro cuadrantes. Como $n_1 < n_2$, la dirección de refracción corta al eje principal entre C y P , no entre V y C ni a la derecha de P (¿por qué?). Los rayos refractados (o mejor, sus prolongaciones) en A y en V se intersecan en Q , en sentido opuesto a su dirección de propagación y la imagen es, entonces, virtual; si no hay aberraciones, todos los demás rayos refractados también lo harán en Q .

Se cumple que $\beta = \theta_i + \alpha_1$ y $\beta = \theta_t + \alpha_2$. En la aproximación paraxial, la ley de Snell la escribimos $n_1\theta_i = n_2\theta_t$. De estas tres últimas ecuaciones eliminamos θ_i y θ_t para obtener $n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2 = (n_1 - n_2)\beta$. Reemplacemos los ángulos por su tangente, $n_1 \tan \alpha_1 - n_2 \tan \alpha_2 = (n_1 - n_2) \tan \beta$. Como δ es mucho menor que BP , BQ y BC , podemos reemplazar las anteriores tangentes por h/p , h/q y h/r respectivamente y cancelar h ,

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{n_1 - n_2}{r}. \tag{20.1}$$

Esta es la **ecuación de Descartes para superficie refringente**. Al cancelarse h no se presenta aberración esférica. El ojo humano consigue eliminar los rayos no paraxiales permitiendo el paso de la luz solo por la pupila.¹

La ecuación 20.1 se obtuvo utilizando la ley de Snell, en la que n_1 es el índice de refracción del medio donde está la luz que *llega* a la interfaz, y n_2 el índice donde está la luz que *sale* refractada. En consecuencia, en dicha ecuación n_1 no es el índice donde está el objeto, como a veces confusamente se piensa, sino el índice del medio donde están los rayos que llegan a la superficie o interfaz; y n_2 no es el índice donde está la imagen, sino el índice del medio donde están los rayos que salen por refracción de la superficie. Por ejemplo, en la figura 20.1 la imagen está en el medio 1, pero los rayos que salen refractados están el medio 2, solo que su lugar de intersección o imagen Q está en el medio 1. La imagen es virtual y no es posible proyectarla en una pantalla puesta en Q (ni en ninguna otra parte) pues por Q no pasan físicamente los rayos, sino solo sus prolongaciones.

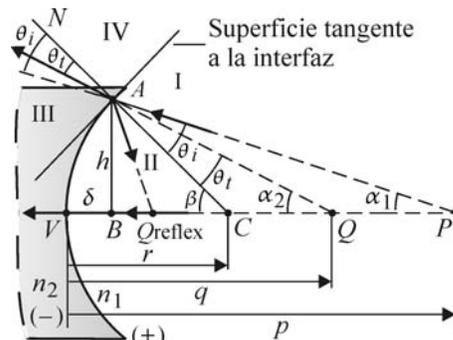


Figura 20.1 Geometría de la refracción de rayos.

Ejemplo 20.1 ¿Puede un observador a la izquierda de la superficie refringente de la figura 20.1 ver la imagen por reflexión Q_{reflex} ?

¹ Fue Kepler, en 1604, quien por primera vez comprendió esta función de la pupila. Óp. cit, p. 43.

Solución. No, porque los rayos tienen dirección, la dirección en que avanza la luz, y la luz reflejada solo le llega a un observador a la derecha de la superficie.

20.2 Focos de un sistema óptico. Aumento

Definimos el **foco objeto** F_o de un sistema óptico como el punto del eje principal en el que debe estar un objeto puntual (frente de onda esférico) para que su imagen se forme en el infinito. Imagen en el infinito (o mejor, $|q| \gg |p|$) quiere decir que los rayos salen paralelos entre sí, o sea que sale un frente de onda plano. La distancia de F_o al vértice es la **distancia focal objeto o primera distancia focal**, f_o . En la ecuación 20.1, cuando $|q| \gg |p|$, p es f_o ,

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} \approx \frac{n_1}{p} = \frac{n_1}{f_o} = \frac{n_1 - n_2}{r}.$$

Despejemos,

$$f_o = \frac{n_1 r}{n_1 - n_2}. \quad (20.2)$$

El **foco imagen**, F_i , es el punto del eje principal en el que se forma la imagen de un objeto puntual lejano, donde *lejano*, o infinito, quiere decir $|p| \gg |q|$; esto es, los rayos llegan paralelos (frente de onda plano) y el frente de onda sale esférico (imagen puntual). La distancia de F_i al vértice es la **distancia focal imagen o segunda distancia focal**, f_i . En la ecuación 20.1, cuando $|p| \gg |q|$, q es f_i ,

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} \approx -\frac{n_2}{q} = -\frac{n_2}{f_i} = \frac{n_1 - n_2}{r}.$$

Despejemos,

$$f_i = -\frac{n_2 r}{n_1 - n_2}. \quad (20.3)$$

Sumemos las ecuaciones 20.2 y 20.3,

$$f_o + f_i = r. \quad (20.4)$$

Cuando f_o es (+), la superficie es convergente, si es (-) es divergente. En la figura 20.2 hemos trazado, usando rayos principales, los focos objeto e imagen de una superficie refractiva.

En la figura 20.3 se traza, con rayos principales, la imagen de un objeto P extendido, no puntual. Basta con hallar el punto de intersección B' de dos rayos refractados asociados con B para saber que todos los demás rayos refractados (o sus prolongaciones) también pasarán por B' ya que en la óptica gaussiana (o sea, aproximación paraxial) no hay aberración esférica. El aumento lateral es $M = A'B'/AB = q \tan \theta_t / p \tan \theta_i$. Aproximemos la tangente al seno, $M = q \sin \theta_t / p \sin \theta_i$. De la ley de Snell, $\sin \theta_t = n_{12} \sin \theta_i$; reemplacemos en la última expresión para M y cancelemos $\sin \theta_i$,

$$M = \frac{n_1 q}{n_2 p}. \quad (20.5)$$

Resumen

En óptica gaussiana las distancias objeto e imagen están relacionadas por la ecuación

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{n_1 - n_2}{r},$$

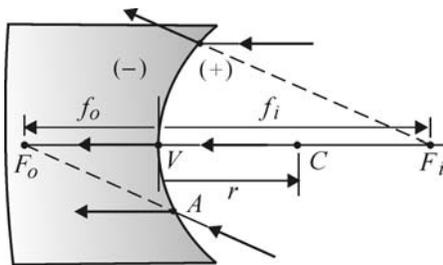


Figura 20.2 Focos objeto e imagen.

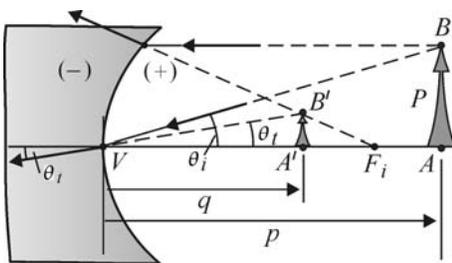


Figura 20.3 Aumento de una superficie refringente.

en la que n_1 es el índice de refracción donde está la luz que incide en la interfaz esférica, n_2 es el del medio donde se transmite la luz y r es el radio de curvatura.

Si los rayos salen paralelos al eje principal, es porque el objeto está en el foco objeto F_o del sistema óptico; si los rayos llegan paralelos, la imagen se forma en el foco imagen F_i :

$$f_o + f_i = r, \quad \text{con} \quad f_o = \frac{n_1 r}{n_1 - n_2} \quad \text{y} \quad f_i = -\frac{n_2 r}{n_1 - n_2}.$$

El aumento lateral está dado por $M = \frac{n_1 q}{n_2 p}$.

Módulo 21

Formación de una imagen por un sistema compuesto: lentes

Contenido

- 21.1 Lentes delgadas en aire
- 21.2 Principio de reversibilidad óptica

Objetivos

1. Mostrar cómo se analiza un sistema óptico compuesto por varios subsistemas.
2. Entender cómo se construye una lente de determinadas dioptrías.
3. Aclarar que una lente tiene diferentes aumentos.

Preguntas básicas

1. ¿Qué importa en una lente, la reflexión o la refracción?
2. ¿Cómo cambia la longitud focal de una lente si en lugar de estar en aire está rodeada de un medio diferente?
3. ¿En qué se diferencia una lente delgada de otra gruesa?
4. ¿Qué pasa si a todos los rayos que salen de un sistema óptico se les revierte el sentido, es decir, si en lugar de salir entran?

Introducción

En la mayoría de los instrumentos ópticos no basta con una sola interfaz que refleje y refracte, sino que son necesarias varias interfaces. El ejemplo más simple es una lente, que tiene dos caras, y los microscopios y telescopios, que pueden constar de espejos y lentes. El ojo está compuesto esencialmente por una superficie refractiva —la córnea—, una lente positiva —el cristalino— y una "pantalla" de proyección —la retina—. Con la lente iniciamos el estudio de los sistemas compuestos. En todos estos, la luz que *sale* de una interfaz *llega* a la próxima o, lo que es equivalente, la *imagen* que crea una interfaz es el *objeto* para la próxima. Surge una pregunta: ¿qué pasa si los rayos que salen de la última interfaz o superficie en lugar de salir entran?



La lupa está compuesta por dos sistemas refractivos, cada uno con su propio objeto e imagen: la cara por donde entra la luz y la cara por donde sale la luz hacia el observador.

21.1 Lentes delgadas en aire

Una lente es un sistema óptico compuesto por dos subsistemas refractivos S_1 y S_2 . Por convención, se llama S_1 a la superficie por donde entra la luz a la lente, y S_2 por donde sale de ella (figura 21.1). Como el lado positivo es por donde llega la luz, entonces S_1 siempre está en el lado positivo y S_2 en el negativo (vea el ejemplo 21.1, p. 201).

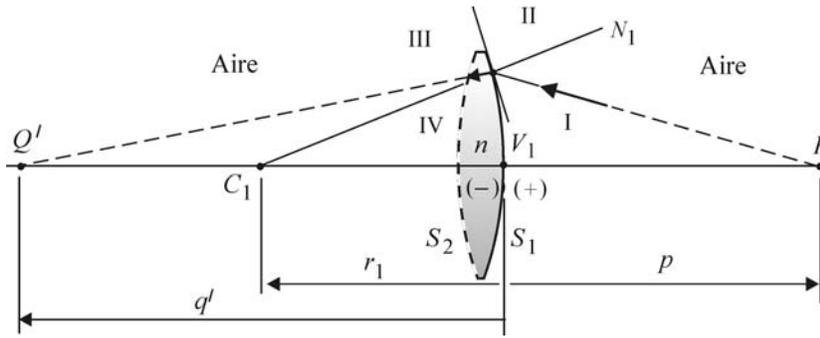


Figura 21.1 Cambio en la dirección del rayo debido a S_1 .

La siguiente exposición la hacemos para lentes delgadas de índice de refracción n , rodeadas de aire. No es aplicable entonces a lentes de contacto, pues estas se usan sobre el ojo (más exactamente sobre la córnea), que tiene un índice ~ 1.38 .

Para aplicar la ecuación 20.1 a S_1 identifiquemos primero sus diferentes términos: como los rayos que le *llegan* están en el aire, este es el medio 1, $n_1 = n_{\text{aire}} = 1.00029 \approx 1.00$. Como los rayos que *salen* refractados están en la lente, esta es el medio 2, $n_2 = n$. Los rayos que *llegan* se intersecan en P , entonces $p = p$; los rayos que *salen* por refracción se intersecan en Q' , $q = q'$ (aunque en esta figura Q' está en el aire, $n_2 = n$). Dos perpendiculares a S_1 se intersecan en C_1 , entonces $r = r_1$; en la figura este radio de curvatura es negativo, pero ello no es razón para escribir $-r_1$, pues r_1 puede ser intrínsecamente negativo; *solo se escribe el signo menos cuando se escriba su valor numérico*. Reemplacemos estas igualdades en la ecuación 20.1,

$$\frac{1}{p} - \frac{n}{q'} = \frac{1-n}{r_1}. \quad (21.1)$$

El aumento lateral que S_1 hace de un pequeño objeto en P es (ecuación 20.5)

$$M_1 = q'/np. \quad (21.2)$$

El grosor de la lente es t . Identifiquemos ahora los términos para aplicar la ecuación 20.1 a S_2 (figura 21.2): como los rayos que le *llegan* están en la lente, entonces este es el medio 1, $n_1 = n$. Los rayos que *salen* refractados están en el aire, este es el medio 2, $n_2 = 1.00$. Los rayos que *llegan* se intersecan en Q' , el objeto para S_2 es Q' y la distancia objeto es $p = q' - t$; la lente es delgada, $|q'| \gg t$ y $p \approx q'$. Los rayos que *salen* por refracción se intersecan en Q , $q = q$. Dos perpendiculares a S_2 se intersecan en C_2 , entonces $r = r_2$. Reemplacemos en la ecuación 20.1,

$$\frac{n}{q'} - \frac{1}{q} = \frac{n-1}{r_2}. \quad (21.3)$$

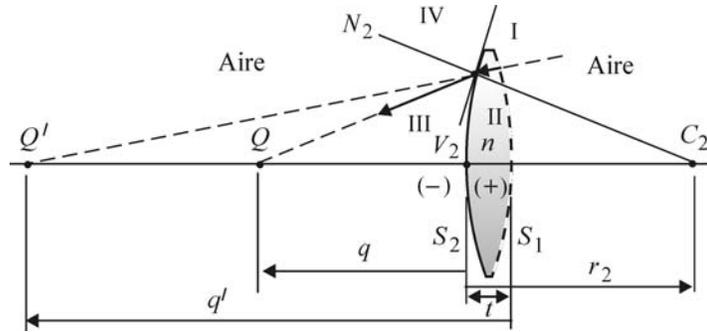


Figura 21.2 Cambio en la dirección del rayo debido a S_2 .

El aumento que S_2 hace de su objeto en Q' y cuya imagen está en Q es (ecuación 20.5)

$$M_2 = nq/q'. \tag{21.4}$$

Sumando las ecuaciones 21.1 y 21.3 se cancela n/q' ; factorizando por $(n - 1)$ llegamos a la **ecuación de Descartes para lentes**,

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \tag{21.5}$$

El aumento transversal de la lente es el producto (¿por qué no la suma?) de los aumentos parciales de los subsistemas S_1 y S_2 , ecuaciones 21.2 y 21.4,

$$M = q/p. \tag{21.6}$$

Se puede demostrar que el aumento longitudinal es

$$M_L = M^2.$$

Vemos que M_L siempre es positivo, lo que significa que, *longitudinalmente*, la imagen tiene la misma orientación que el objeto: cuando usamos anteojos, la orientación de lo que miramos, que son imágenes, no cambia; con un espejo, sí cambia (ecuación 19.9, p. 188; ejemplo 19.3, y ejemplo 19.4).

Cuando $|q| \gg |p|$, a p se le llama la longitud focal de la lente o longitud focal objeto, f , y $(1/p) - (1/q) \approx (1/p) = (1/f)$. Reemplazando en la ecuación 21.5, llegamos a la **ecuación del constructor de lentes**,

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = (n - 1) \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}. \tag{21.7}$$

El nombre de esta ecuación es apropiado, pues a un bloque de material con n conocido se le pueden desbastar dos caras con radios r_1 y r_2 , obteniendo una lente con la f deseada.

Reemplacemos la ecuación 21.7 en la ecuación 21.5,

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f}. \tag{21.8}$$

Las lentes con $f > 0$ se llaman **convergentes** o **positivas**, con $f < 0$ se llaman **divergentes** o **negativas**.

Cuando $|p| \gg |q|$, a q se le llama **longitud focal imagen**, f_i , y $(1/p) - (1/q) \approx -(1/q) = -(1/f_i) = (1/f)$, de donde

$$f_i = -f. \tag{21.9}$$

Los focos objeto e imagen de una lente delgada rodeada del mismo medio en ambas caras son simétricos respecto al centro de la lente.

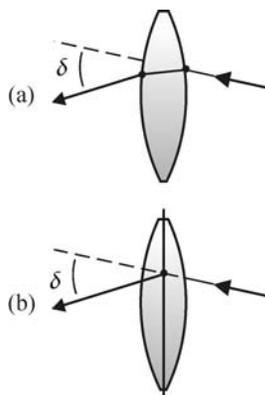


Figura 21.3 Desviación de un rayo (a) dibujando las dos refracciones en la lente, (b) simplificada.

Definimos la desviación δ de un rayo como el ángulo entre sus direcciones de entrada y de salida. Es engorroso dibujarle a cada rayo los dos quiebres que sufre, uno al entrar y el otro al salir de la lente (figura 21.3a). Se acostumbra, entonces, dibujar un solo quiebre con el δ neto en un punto donde físicamente no hay quiebre, en el plano central de la lente (figura 21.3b).

Una lente posee un punto, llamado **centro óptico**, O , con la propiedad de que todo rayo que pase por él emerge paralelo a como entró, esto es, tiene $\delta = 0$; el plano tangente en el punto de incidencia A es paralelo al plano tangente en el punto de emergencia B (figura 21.4) y dicho rayo no se desvía, igual a como le ocurre a un rayo que atraviesa un vidrio de caras planas y paralelas (vea el problema 3, p. 173).

Los rayos principales de una lente son tres: uno que llegue paralelo al eje principal, otro que salga paralelo y uno que pase por el centro O de la lente; en la figura 21.5 se dibujan para lentes convergentes y divergentes.

Usamos la figura 21.6 para otra deducción del aumento lateral de una lente. Construimos la imagen de un objeto extendido en P usando rayos principales. El aumento es $M = A'B'/AB = q \tan \theta_i / p \tan \theta_i = q/p$; esta fórmula es igual a la ecuación 21.6.

La potencia de una lente, que nada tiene que ver con la potencia de energía cuyas unidades son W , excepto que se utiliza el mismo nombre, se define como 1 metro dividido por f , y el resultado se expresa en dioptrías, D ,

$$P = 1 \text{ m}/f, \quad \text{en dioptrías, } D. \quad (21.10)$$

Si se necesita construir una lente de determinadas dioptrías, con la anterior ecuación se halla f , y con la ecuación 21.7 se encuentran los radios de curvatura adecuados si se conoce el índice de refracción del material de la lente.

21.2 Principio de reversibilidad óptica

Imagínese un rayo en un medio 1 que incida con θ_i en una interfaz y se refracte θ_t en un medio 2. Con la ley de Snell se comprueba que si incidiera con θ_t en el medio 2, se refractaría en el medio 1 con θ_i ; esto es, se devolvería por donde vino. Igual ocurre en la reflexión, ya que $\theta_i = \theta_r$. Esto es una consecuencia del **principio de reversibilidad óptica** que dice: *si no se absorbe luz, un rayo luminoso que se refleje o se refracte volverá a describir su trayectoria original cuando se le invierta la dirección.* O con otras palabras: *si un sistema óptico forma una imagen de un punto P en un punto Q , al poner a P donde estaba Q , la nueva imagen se formará en P .* El análogo mecánico del principio es que si no hubiera fricción cualquier fenómeno se podría repetir exactamente como devolviéndose en el tiempo.

Ejemplo 21.1 Dos personas A y D se miran a los ojos y D usa lentes con caras B y C ; determine las caras S_1 y S_2 de las lentes (figura 21.7).

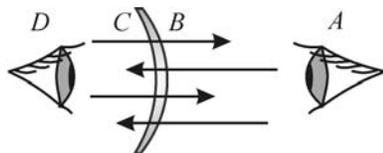


Figura 21.7 Las caras S_1 y S_2 son relativas.

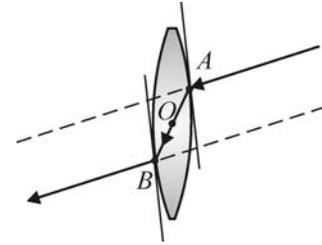


Figura 21.4 Centro óptico.

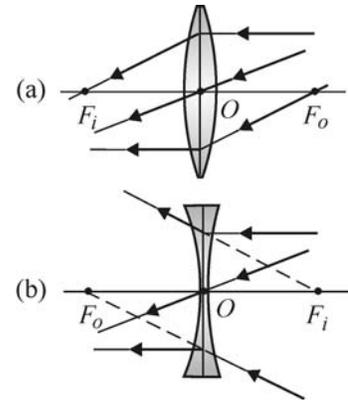


Figura 21.5 Rayos principales para (a) lente convergente, (b) lente divergente.

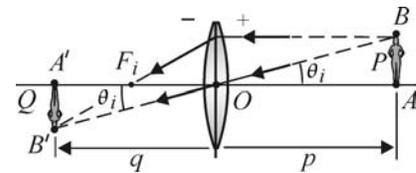


Figura 21.6 Aumento de una lente.



Vea en el multimedia de Física de las ondas la experiencia Principio de reversibilidad óptica.

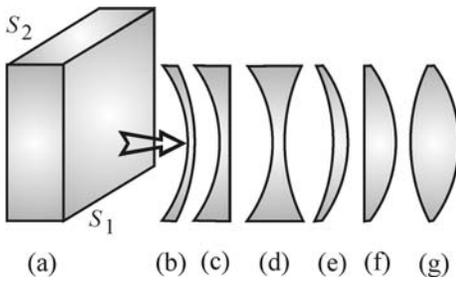


Figura 21.8 Diversas lentes.

Solución. Como para A la luz proveniente de D entra por C y sale por B , entonces, según A , C es S_1 y B es S_2 ; para D es al contrario, pues la luz proveniente de A entra por B y sale por C , siendo así B igual a S_1 y C igual a S_2 , según D . S_1 y S_2 son relativas a la dirección de la luz.

Ejemplo 21.2 Para fabricar una lente se dispone de un bloque de caras planas y paralelas, e índice de refracción n . Las caras se desbastan hasta que queden como casquetes esféricos de radios de curvatura r_1 y r_2 , respectivamente. Dibuje las diferentes lentes que se pueden obtener, y determine si son convergentes o divergentes.

Solución. En la figura 21.8a se ilustra, con perspectiva, el bloque original y de b a g , sin perspectiva, las diferentes lentes que se pueden obtener desbastando las caras S_1 y S_2 . Suponemos que la luz incide desde la derecha. Escojamos la lente b para hallarle su signo; para las demás lentes se procede de igual manera. La ecuación 21.7, p. 200, aplicada a esta lente nos dirá si es convergente o divergente.

La lente es cóncava-convexa (figura 21.9). La perpendicular a S_1 pasa por C_1 , la perpendicular a S_2 pasa por C_2 . Notamos que r_1 y r_2 son negativos, pues ambos centros de curvatura están en el lado opuesto por donde le llega la luz a la lente. Como los radios de curvatura son negativos, debemos escribir $r_1 = -|r_1|$ y $r_2 = -|r_2|$, y no, como se hace a menudo, $r_1 = -r_1$ y $r_2 = -r_2$. Las circunferencias a trazos representan las esferas imaginarias a las que pertenecen los casquetes esféricos S_1 y S_2 . La superficie S_1 es más aplanada que S_2 , o sea que $|r_1| > |r_2|$ (en este caso, la desigualdad no se cumpliría sin los valores absolutos). Esto lleva a que la lente sea más gruesa en los bordes que en el centro, y se le llama **lente de borde grueso**. Con este tipo de lente se corrige la miopía.

Reemplacemos a $r_1 = -|r_1|$ y $r_2 = -|r_2|$ en la ecuación del constructor de lentes,

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \frac{-|r_1| + |r_2|}{|r_1||r_2|}.$$

Procedamos a analizar los signos en esta ecuación. Como en cualquier medio $v < c$, entonces $n > 1$ y $(n - 1) = (+)$. El numerador es negativo, pues, para esta lente, $|r_1| > |r_2|$. Es obvio que el denominador es positivo.

$$\frac{1}{f} = (+) \frac{(-)}{(+)} = (-).$$

Como la longitud focal es negativa, la lente es divergente. Las lentes de borde grueso b a d son negativas; las de borde delgado e a g son positivas, o sea convergentes, y con ellas se corrigen la hipermetropía y la presbicia. Por estética, en las gafas solo se usan las lentes b y e .

Para la lente plano-cóncava c , $r_1 = \infty$. Dividiendo el numerador y el denominador de la ecuación 21.7 por r_1 ,

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \frac{1 - r_2/r_1}{r_2} = (+) \frac{1 - 0}{-|r_2|} = (+) \frac{(+)}{(-)} = (-).$$

Para la lente bicóncava d , C_1 está por donde llega la luz, y el radio de curvatura de S_1 es positivo, $r_1 = |r_1|$ (y no $r_1 = +r_1$), $r_2 = -|r_2|$. Ya no importa cuál de las dos caras es más curva, f siempre es negativa. Reemplacemos en la ecuación 21.7,

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \frac{|r_1| + |r_2|}{-|r_1||r_2|} = (+) \frac{(+)}{(-)} = (-).$$

Para las gafas deportivas, $r_1 = r_2$ (por supuesto, en signo y en magnitud), lo que da un grosor uniforme y $f = \infty$. Este valor de f significa que los rayos salen con la dirección que entran a la lente, que el objeto es la imagen, y que $M = 1$.

Aunque la curvatura de ambas caras de las lentes d y g fueran iguales, diferirían en el signo, $r_1 = -r_2$, y $f \neq \infty$; f es $(-)$ para d y $(+)$ para g .

Ejemplo 21.3 Los extremos de una barra de vidrio de 10 cm de diámetro e índice de refracción 1.5 se desbastan y pulen como casquetes esféricos de 5 cm de radio en el extremo derecho y 10 cm de radio en el extremo izquierdo. La longitud de la barra entre vértices es 60 cm (figura 21.10). Un objeto físico P de 1 mm de altura se

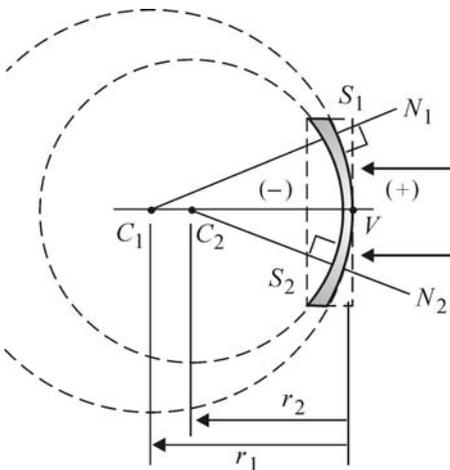


Figura 21.9 Lente de borde grueso.

ubica a 20 cm del extremo derecho. (a) ¿Cuál es el objeto y cuál es la distancia objeto para la segunda superficie; es real o virtual, y de qué tamaño? (b) ¿Cuáles son la posición y la altura de la imagen formada por la segunda superficie?

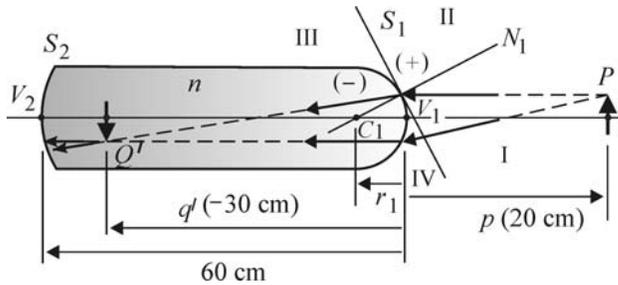


Figura 21.10 Refracción en la primera cara.

Solución. No podemos aplicar la ecuación 21.8, p. 200, pues la barra no se puede tratar como una lente delgada. En su lugar, debemos aplicar la ecuación 20.1, p. 193, a la superficie por donde llega la luz, S_1 , sin tener en cuenta a S_2 . Después la aplicamos a la superficie por donde sale la luz de la barra, S_2 , sin tener en cuenta a S_1 . Si S_2 fuera un espejo, le aplicaríamos, en lugar de dicha ecuación, la ecuación 19.2, p. 185.

(a) En la figura se ilustran dos de los rayos incidentes y refractados en S_1 . Como la luz llega por la derecha de S_1 , este es el lado positivo, y a la izquierda es negativo. Los rayos llegan divergentes, se intersecan en sentido opuesto, el objeto es real, como se sabía de antemano, pues es un objeto físico. Para el rayo superior se muestran los cuadrantes I a IV (vea, además, la figura 15.3, p. 150).

Para aplicar la ecuación 20.1, identifiquemos sus términos: la luz que llega está en el aire, $n_1 = 1.0$; la luz que sale está en la barra, $n_2 = 1.5$; los rayos que llegan se intersecan a 20 cm, $p = +20$ cm; los que salen se intersecan en Q' , $q = q'$; C_1 está al otro lado de donde llega la luz, $r_1 = -|r_1| = -5$ cm. Reemplacemos los anteriores valores,

$$\frac{1.0}{20} - \frac{1.5}{q'} = \frac{1.0 - 1.5}{-5}.$$

Despejando, obtenemos $q' = -30$ cm: los rayos refractados salen hacia un punto al otro lado (signo negativo) de donde llega la luz, a 30 cm del vértice V_1 . Como salen convergentes, se intersecan en el mismo sentido de ellos, Q' es real y, como el medio es homogéneo hasta los 60 cm de V_1 , se intersecan físicamente en Q' . Pero si la barra tuviera una longitud menor que 30 cm, los rayos ya no se intersecarían físicamente en Q' , solo sus prolongaciones (figura 21.11); la imagen seguiría siendo Q' , real, y a -30 cm de V_1 . Los rayos que le llegan a S_2 , y que salieron de S_1 , es obvio que se intersecan en Q' , siendo este punto el objeto para esa cara. Como la barra tiene más de 30 cm de longitud (figura 21.10), los rayos llegan divergentes, se intersecan en una dirección opuesta a ellos y Q' es un objeto real para S_2 , $p > 0$. Pero si tuviera menos de 30 cm (figura 21.11), los rayos llegarían convergentes, se intersecarían en igual sentido, y el mismo Q' sería un objeto virtual para S_2 , $p < 0$. El aumento (ecuación 20.5, p. 194) debido a S_1 es

$$M_1 = \frac{1.0(-30)}{1.5 \times 20} = -1.$$

El signo (-) quiere decir que la imagen tiene sentido opuesto al objeto, el 1 significa que es de igual tamaño, o sea 1 mm. Altura h de Q' ,

$$h_{Q'} = M_1 h_P = -1 \times 1 = -1 \text{ mm}.$$

(b) Traslademos el origen de coordenadas a V_2 (figura 21.12) para aplicar la ecuación 20.1 a S_2 , e identifiquemos sus términos: la luz que le llega a S_2 está en el vidrio, $n_1 = 1.5$; la luz que sale está en el aire, $n_2 = 1.0$; los rayos que llegan se intersecan en el lado por donde llegan, a una distancia horizontal de V_2 igual a

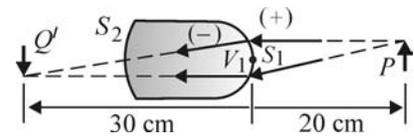


Figura 21.11 Imagen real Q' para S_1 .

$p' = (60 - 30) = +30$ cm; la distancia imagen final es q (los rayos que salen se intersecan en Q); C_2 está en el lado por donde llega la luz, $r_2 = |r_2| = +10$ cm. Reemplacemos estos valores,

$$\frac{1.5}{30} - \frac{1.0}{q} = \frac{1.5 - 1.0}{10}.$$

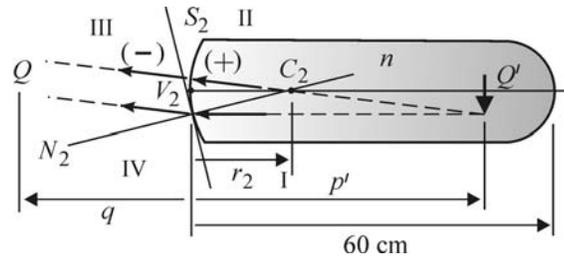


Figura 21.12 Objeto real Q' para S_2 .

Al despejar obtenemos $q = -\infty$: los rayos refractados salen paralelos y no forman una imagen. Esto quiere decir que el objeto original P está sobre el foco objeto F de la barra, $f = +20$ cm. Así, la barra es una lente gruesa convergente. El aumento debido a S_2 es

$$M_2 = \frac{1.5(-\infty)}{1.0 \times 30} = -\infty.$$

La altura de la imagen final Q es

$$h_Q = M_2 h_{Q'} = M_2 M_1 h_P = -\infty(-1)1 = +\infty.$$

Resumen

En un sistema compuesto por varios subsistemas, la imagen de un subsistema es el objeto del próximo subsistema, puesto que la luz que sale de uno llega al otro. El origen de coordenadas para las diferentes variables (p , q , r) está en el vértice de cada subsistema en cada caso, o en el centro de la lente si esta es delgada. Para esta se cumple, si está en aire, que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f'}, \quad \text{con} \quad \frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

El aumento transversal es $M = q/p$, el longitudinal es $M_L = M^2 = (q/p)^2$; como $M_L > 0$, longitudinalmente la lente nunca invierte la orientación de la imagen respecto a la del objeto, aunque transversalmente sí es posible.

Para una lente delgada rodeada del mismo medio en ambas caras, los focos objeto e imagen son simétricos: $f = -f_i$.

El principio de reversibilidad óptica establece que si donde se forma la imagen se pusiera el objeto, la nueva imagen estaría donde estaba originalmente el objeto.

Módulo 22

El ojo. Descomposición de la luz

Contenido

- 22.1 El ojo humano
 - 22.1.1 Los puntos cercano y lejano
- 22.2 Descomposición de la luz: el prisma, el arco iris

Objetivos

1. Mostrar la estructura básica del ojo.
2. Interpretar la aparición de colores en un prisma y en el arco iris.

Preguntas básicas

1. ¿Cuáles son los subsistemas que forman el sistema óptico llamado ojo?
2. ¿Qué quiere decir, en términos de la estructura del ojo, la afirmación "estoy mirando un objeto"?
3. ¿Los colores que aparecen en un prisma, este los crea o ya venían en la luz que ilumina el prisma?
4. ¿Cómo se genera el arco iris? ¿Por qué este es circular?

Introducción

Sin duda, el instrumento óptico más importante es el ojo. Cuando un observador aprecia una imagen, sea producida por un microscopio, un telescopio o unos anteojos, se vuelve parte de un sistema más complejo: su ojo y el instrumento que le envía luz. Por lo tanto, para completar la descripción física de las imágenes que apreciamos es esencial tener una comprensión mínima del ojo. Pero la comprensión completa de la visión es multidisciplinaria y es indispensable conocer la química que se desarrolla en la retina, el proceso de transmisión al cerebro a través del nervio óptico y cómo procesa el cerebro la información que le llega; es decir, son necesarias la física, la química, la fisiología, la neurología y la psicología.

Estrictamente, todos los medios dispersan las ondas que en él se propaguen; solo como aproximación un medio no es dispersivo. Por ejemplo, a frecuencias audibles (20 Hz a 20 kHz) el aire no es dispersivo; o expresándolo mejor: la dependencia de la velocidad del sonido con la frecuencia es tan baja que no tiene ninguna influencia observable. En el vacío la luz blanca no se dispersa, pero cuando penetra en un medio material como el agua, cada color se propaga con una rapidez característica, y de acuerdo con la ley de Snell esto se manifiesta con una dirección diferente para cada color. Lo anterior lo revela la existencia del arco iris.



Newton demostró que los colores que salen del prisma no son creación del prisma, sino que ya vienen en la luz blanca que incide en él.

22.1 El ojo humano

El ojo es aproximadamente esférico, formando lo que se llama el **globo ocular** (figura 22.1), con un radio de ~ 1.2 cm. La parte central externa es un poco más curva, con un radio de curvatura de ~ 0.8 cm, y está formada por una membrana dura y transparente, la **córnea**,¹ con índice de refracción 1.376. El resto del globo ocular está limitado por la **esclerótica**, que es una capa opaca y blanca, con una parte externa visible a simple vista, cubierta a su vez por una capa transparente llamada **conjuntiva**.

Detrás de la córnea hay un líquido *A*, el **humor acuoso**, en contacto con el **iris** *I* y el **crystalino** *C*.

El iris es un arreglo, con un agujero central o **pupila**, de músculos circulares y radiales, cuya acción conjunta determina, según la intensidad de la luz presente, el diámetro de la *pupila*. El color del iris determina el color de los ojos, y su diámetro interior, que es el diámetro de la pupila, la cantidad de luz que penetra al ojo.

El cristalino es una lente compuesta por unas 22 000 capas como una cebolla, de índice de refracción decreciente del centro hacia afuera, entre 1.406 y 1.386; es mantenido en su lugar por unos ligamentos *L* que van unidos al **músculo ciliar** *M*. La longitud focal del cristalino la varía el músculo ciliar a través de los ligamentos; cuando está relajado, el cristalino es aplinado; cuando está contraído, el cristalino se curva y disminuye su *f*. A esta capacidad de variar *f* se le llama **acomodación**.

Detrás del cristalino, el ojo está lleno de un líquido gelatinoso, el **humor vítreo** *V*, compuesto casi únicamente de agua. El índice de refracción de los humores acuoso y vítreo es de 1.336 y 1.337 respectivamente.

En el fondo del ojo se encuentra la **retina**, una capa extensa donde están las células responsables de transformar la luz en señales eléctricas (células fotosensibles), los **bastones** y los **conos**. El **nervio óptico** conduce las señales eléctricas hasta las neuronas del cerebro responsables de interpretarlas como imágenes. Los bastones, ~ 125 millones, responden a muy baja intensidad de la luz, pero no son sensibles al color, y no posibilitan la percepción de imágenes nítidas; en cambio, los conos, ~ 6 millones, sí son sensibles al color y son los responsables de la nitidez. La distribución de ambas células varía ampliamente en la retina; hay un sitio, de ~ 0.3 mm de diámetro, la **fóvea** *F*, donde solo hay conos. La mejor visión se logra cuando los rayos de luz se intersectan o enfocan en la fóvea. Donde el nervio óptico entra al globo ocular se encuentra el **punto ciego** *PC*, que es una estructura carente de células fotosensibles.

Cuando queremos mirar un objeto o una imagen, el ojo se mueve de manera que el objeto o imagen quede en el eje visual del ojo; después el cristalino se acomoda con el fin de dirigir los rayos hacia la fóvea.

Si esto no se logra, la visión es *deficiente*. Se utilizan lentes y cirugía ocular para lograr el ideal de que la luz que penetra al ojo se enfoque en la fóvea. Para un ojo *enfocar* quiere decir formar la imagen en la fóvea.

El **eje visual** del ojo es la línea determinada por la fóvea y el centro del cristalino. En la visión binocular, o sea con los dos ojos, los ejes visuales se deben intersectar en el objeto o imagen que se mire (figura 22.2).

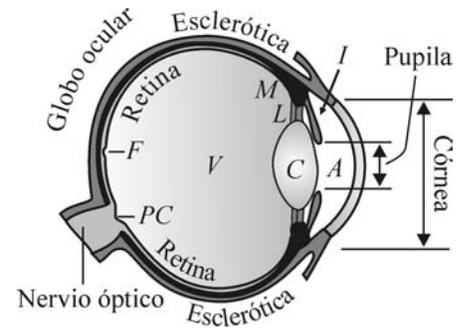


Figura 22.1 El ojo humano.

¹ Córnea proviene del femenino del adjetivo latino *cōrnĕus*, que quiere decir duro y transparente como el cuerno.

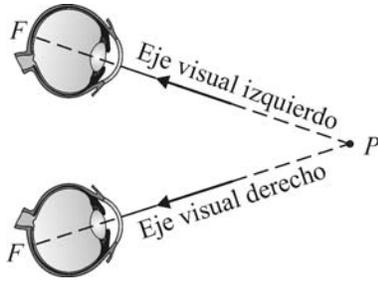


Figura 22.2 Visión binocular.

La perpendicular en el centro de la córnea es el **eje óptico** del ojo y no coincide con el eje visual.

La córnea es el componente que hace la mayor parte del trabajo de enfoque, pues es donde los rayos sufren el mayor cambio de dirección. El cristalino hace el trabajo restante, fino, de terminar de dirigir los rayos hacia la fovea (ejemplo 22.4).

La luz penetra al ojo por la parte de la córnea que está al frente de la pupila. Por lo tanto, el lado positivo siempre está en el aire, o en el agua si tenemos abiertos los ojos dentro del agua.

Es común encontrar en las fotos tomadas con *flash* pupilas rojas. Esto se debe a que parte de la luz que penetra en el ojo se refleja en la retina, que es roja por la alta irrigación sanguínea, y sale de regreso hacia la cámara fotográfica. Solo para esta luz roja el lado positivo de la córnea queda dentro del ojo.

22.1.1 Los puntos cercano y lejano

Hay una distancia mínima o **distancia óptima** a la que una persona se puede ubicar de lo que mira, para verlo con el máximo detalle posible. Esta distancia se llama **punto cercano** o **mínima distancia de visión nítida**, δ , de la persona. Leyendo algún escrito, determine su δ personal. A mayor edad mayor es δ debido al endurecimiento progresivo o pérdida de la acomodación del cristalino. Un valor común para un adulto es $\delta = 25$ cm. Esta persona, si quisiera ver nítida la Luna y con el máximo detalle, debería acercar sus ojos hasta 25 cm de su superficie, cosa que de ordinario es imposible, pues debe verla desde la Tierra, desde donde se ve nítida, pero con poco detalle.

El otro extremo entre los que se da la visión nítida es el **punto lejano**, y es la máxima distancia de visión definida a la que la persona enfoca bien. Para un ojo normal es infinita y puede enfocar una estrella o la Luna.

Como δ es una distancia mínima entre el ojo y lo que se mira, entonces la imagen tiene su máximo tamaño en la retina y por lo tanto se aprecia con el máximo detalle. Para una distancia menor la imagen no se forma en la retina y lo que se mira se ve borroso o desenfocado; para una distancia mayor la imagen se forma en la retina, se ve nítida, pero como es de menor tamaño la apreciamos con menos detalle. Mientras más alejado esté lo que se mire, menor es su imagen en la retina y por lo tanto se aprecia con menor detalle. Recuerde que para una lente $M = q/p$ y que la altura de la imagen es

$$h_Q = Mh_P = qh_P/p,$$

donde q es, aproximadamente, el negativo del diámetro del ojo y es constante; para un objeto determinado h_P también es constante y solo cambia p en la anterior ecuación. Este párrafo también se cumple para una superficie refractiva como la córnea.

Si queremos ver con un sistema óptico como una lente o un espejo, los rayos que penetran en nuestros ojos son los que *salen* del sistema, por lo tanto lo que miramos es la imagen producida por el sistema, no el objeto que da lugar a esa imagen. Como nos interesa mirar la imagen, nos ubicamos a δ de la imagen si la queremos apreciar lo mejor posible (figura 22.3a); si nos interesara mirar el sistema, nos ubicaríamos a δ del sistema (figura 22.3b), y si quisiéramos mirar el objeto, nos ubicaríamos a δ del objeto (figura 22.3c). En la figura del ejemplo 19.1, p. 187, un objeto P está a 1.2 m al frente de un espejo y su imagen Q está a 2.4 m detrás. Si un observador

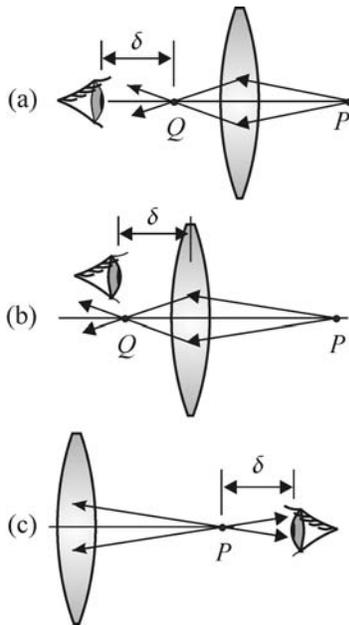


Figura 22.3 El punto cercano del ojo. El observador mira en (a) la imagen, en (b) la lente, en (c) el objeto.

quiere mirar el objeto a una distancia óptima, se ubica a δ de P , a la derecha o a la izquierda. La imagen no la puede observar a δ , pues se forma *detrás* del espejo, a una distancia mayor que el punto cercano, y la puede ver enfocada en su retina desde *cualquier distancia* a la derecha del espejo, inclusive a una distancia nula.

22.2 Descomposición de la luz: el prisma, el arco iris

La variedad de prismas es muy alta en cuanto a forma, tamaño y material. Se utilizan como medios dispersivos o, más comúnmente, para cambiar la dirección de propagación de la luz. Fue con prismas que Newton concluyó (1672) que la luz blanca es una combinación de varios colores.

En la figura 22.4a se hace incidir luz azul sobre la cara derecha de un prisma triangular y se ilustra la desviación δ de uno de sus rayos. Suponemos que el prisma está en aire ($n = 1.00029 \approx 1.00$). Apliquemos la ley de Snell en A , $\text{sen } \theta_i = n \text{sen } \theta_t$; despejemos el índice de refracción e igualémoslo a $n = c/v$,

$$n = \frac{\text{sen } \theta_i}{\text{sen } \theta_t} = \frac{c}{v}$$

En la figura 22.4b se hace incidir luz blanca procedente de un gas a baja presión, con el mismo θ_i de la figura a. Cada color se refracta un ángulo característico θ_t que, según la última ecuación, se debe interpretar como que cada color tiene, en ese prisma, su propio índice de refracción o su propia v . Como cada color en el prisma tiene una longitud de onda característica, llegamos a que el índice de refracción depende de λ y dicha ecuación la podemos escribir

$$n(\lambda) = \frac{\text{sen } \theta_i}{\text{sen } \theta_t(\lambda)} = \frac{c}{v(\lambda)}$$

El que v dependa de λ es la razón para calificar de *dispersivo* al prisma; todo medio material es dispersivo. Se dice con frecuencia que el índice de refracción de una sustancia tiene determinado valor, sin mencionar para qué λ . Esto se justifica ya que la dependencia de λ no es muy fuerte, como se ilustra en la figura 22.5 donde se grafica a n en función de λ en nm ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$) para el espectro visible, en el cuarzo fundido. El que no sea fuerte no quiere decir que sea secundario; como ejemplo, tenemos que el arco iris se debe a que en el agua $n = n(\lambda)$. El índice de refracción no solo depende de λ sino también de la sustancia en la que se propague la onda. En general, a mayor λ menor es n .

Mirando la ecuación ecuación 21.7, p. 200, vemos que la longitud focal de la lente depende del color, ya que como n depende de λ , f también. Supongamos que el objeto puntual P es una fuente de luz blanca (figura 22.6). Como el rojo se refracta menos que el azul, aquel forma su imagen más lejos que este otro, y aunque la lente no tuviera aberración esférica, la imagen de un objeto puntual P no sería puntual, cada color teniendo su imagen según sea su n . En la figura se ha exagerado la separación entre las imágenes R del rojo y A del azul; V corresponde al verde. Este defecto se denomina **aberración cromática**. Newton creyó que era un problema insuperable, pero actualmente se construyen sistemas **acromáticos** combinando lentes convergentes y divergentes de materiales diferentes.

Volvamos a las figuras 22.4a y b. Existe un θ_i para el que δ es mínimo, $\delta_{\text{mín}}$, y lo presenta el rayo que sea paralelo a la base del prisma; todos los

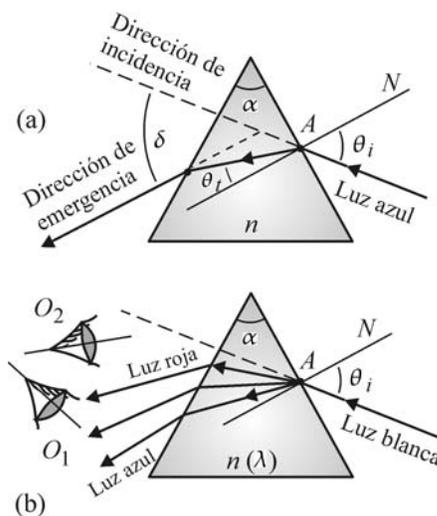


Figura 22.4 (a) Desviación de un rayo, (b) dispersión de la luz blanca.

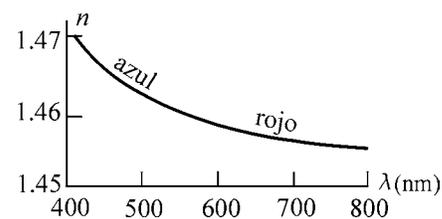


Figura 22.5 Índice de refracción del cuarzo fundido.

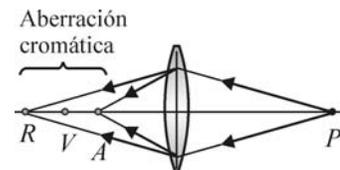


Figura 22.6 La posición de la imagen depende del color.

demás rayos tienen $\delta > \delta_{\text{mín}}$. Esto da un método muy preciso para medir n : se construye un prisma de la sustancia de interés y determinado α , se ilumina con luz para la que se va a medir n y se halla experimentalmente $\delta_{\text{mín}}$; por último se aplica la ecuación, que damos sin demostrar,

$$n = \frac{\text{sen } \frac{1}{2}(\delta_{\text{mín}} + \alpha)}{\text{sen } \frac{1}{2}\alpha}.$$

Si toda la cara izquierda se ilumina con luz de cierto λ y en todas las direcciones, la existencia de $\delta_{\text{mín}}$ da como resultado que por la cara derecha no se observe luz en determinadas direcciones; por ejemplo, el observador O_1 de la figura *b* no detecta luz en la dirección en que está mirando, mientras que O_2 sí.

El arco iris es producido por un gran número de gotas de agua, que son prismas esféricos. Al incidir la luz solar, que tiene polarización aleatoria, en una gota, parte de la luz se refracta (figura 22.7a), cada color con su ángulo, luego sufre una reflexión interna en *A* y sale de regreso al aire produciendo el **arco iris primario**. En esta reflexión la componente π del campo eléctrico se disminuye notablemente respecto a la componente σ y la luz del arco iris queda así altamente polarizada en la dirección σ . En la figura *b* la luz que sale al aire sufre *dos* reflexiones dentro de la gota, en *A* y en *B*, dando origen al **arco iris secundario**, que es menos intenso que el primario porque en cada reflexión parte de la luz incidente se refracta. Es muy común poder observar ambos arcos iris; el secundario se forma en ángulos mayores con la superficie terrestre que el primario. El prisma esférico presenta un ángulo de desviación máxima, análogo al $\delta_{\text{mín}}$ del prisma triangular, y en consecuencia hay unas direcciones en las que no sale luz de las gotas. Esto explica la **banda oscura de Alejandro** presente entre el arco iris primario y el secundario, caracterizada por ser menos luminosa que el resto del firmamento. Cuando observe un arco iris, trate de localizar el secundario y comprobar la presencia de la banda oscura mencionada. Debajo del arco iris primario se forman otros arcos conocidos como **super-numerarios**, y su explicación no se basa en la óptica geométrica sino en la interferencia de varios rayos de luz, tema de un capítulo aparte.²

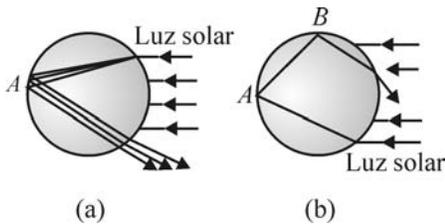


Figura 22.7 Arco iris (a) primario, (b) secundario.

Ejemplo 22.1 Discuta la formación de la imagen de una persona que se mira en un espejo plano.

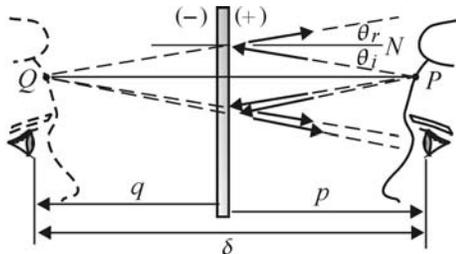


Figura 22.8 Imagen virtual y derecha.

Solución. Este ejemplo es la explicación de la experiencia cotidiana de mirarnos en un espejo casero. Es equivalente al ejemplo 22.2, pero la longitud focal es ahora infinita. Supongamos que es usted quien se mira en el espejo, y que su δ es 25 cm. Si va a mirar el espejo, por ejemplo una mancha en él, se debe ubicar a 25 cm del espejo; pero si va a mirar su imagen, se acerca a $\frac{1}{2}25$ cm (figura 22.8; ya desenfoca el espejo en su retina, pero enfoca su cara), pues de la geometría de la figura se deduce que $p = -q$ (por favor, compruébelo geoméricamente), o, utilizando la ecuación 19.2, p. 185, con $f = \infty$, también se llega a que $p = -q$; $\delta = p - q = p - (-p) = 2p$, de donde $p = \delta/2 = 25/2 = 12.5$ cm.

Aplicando la ley de reflexión se ve que los rayos se reflejan divergentes entre sí, dando una imagen virtual (lugar de intersección en el sentido opuesto al que se reflejan), con un aumento $M = -q/p = -(-p)/p = +1$. El 1 significa que la altura de la imagen es igual a la del objeto; el (+) significa que es derecha, o sea con la misma orientación que el objeto.

Una nube o una montaña que esté a varios kilómetros en frente del espejo forma una imagen virtual a esa misma distancia, pero detrás del espejo. Por esto, sus ojos

² El siguiente artículo, publicado en junio de 1977, da una explicación excelente sobre el arco iris: Herch Moysés Nussenzeig, "Teoría del arco iris", en las revistas *Investigación y Ciencia* y *Scientific American*.

enfocan la imagen, así los ‘pegue’ al espejo. Obvio que usted no se puede ubicar a δ de la imagen de la montaña.

Determine su punto cercano δ , consígase un espejo plano y *haga ya las experiencias descritas en este ejemplo, no lo deje para después.*

Ejemplo 22.2 Una persona P , con $\delta = 25$ cm, se mira en un espejo cóncavo de longitud focal 15 cm. Encuentre la distancia óptima de P al espejo. ¿Cuál es el aumento?

Solución. (En el Almacén del Instituto de Física hay un espejo con esta misma f , con el que se puede hacer la experiencia descrita en este problema).

La distancia óptima al espejo se presenta cuando P está a una distancia óptima δ de lo que mira, en este caso, su imagen. Se debe diferenciar entre *mirarse en el espejo* y *mirar el espejo*. La diferencia entre mirar una imagen y mirar el sistema óptico que la produce se explica, pero con una lente, en la figura 22.3.

Si P se acerca al espejo más de lo que muestra la figura 22.9, ya no se enfoca; si se aleja, disminuye el detalle con que se ve. Así es como reconoce que está a δ de su imagen. *Para el caso particular* de la figura citada, $p - q = \delta$; en cambio, en la figura 22.3 no hay ecuación que relacione estas tres cantidades. Despejemos,

$$q = p - \delta;$$

reemplacemos en la ecuación 19.2,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p - \delta} = \frac{1}{f}.$$

Despejando p obtenemos la ecuación cuadrática

$$p^2 - p(2f + \delta) + f\delta = 0,$$

con soluciones, después de reemplazar los valores de f y δ ,

$$p_1 = 8 \text{ cm}, \quad p_2 = 47 \text{ cm};$$

a las que les corresponden las respectivas distancias imagen

$$q_1 = -17 \text{ cm}, \quad q_2 = 22 \text{ cm};$$

y aumentos

$$M_1 = 2.1, \quad M_2 = -0.47.$$

En resumen, tenemos la primera solución, $p_1 = 8$ cm, $q_1 = -17$ cm, $M_1 = 2.1$; y la segunda solución, $p_2 = 47$ cm, $q_2 = 22$ cm, $M_2 = -0.47$.

La imagen de la primera solución es virtual, la persona P se ve derecha y 2.1 veces mayor; la segunda es real, la persona se ve invertida y con un tamaño casi la mitad. La primera solución corresponde a la figura 22.9, la segunda a la figura 22.10. *En ambos casos, los ejes visuales del observador convergen en el punto de Q que P mire* (en la figura 22.2, p. 208, ese punto de Q corresponde al punto P).

Ejemplo 22.3 Un recipiente se llena de agua hasta una profundidad h . ¿A qué distancia de la superficie, mirando directamente desde arriba, se ve el fondo del recipiente?

Este ejemplo lo llamamos *profundidad aparente*, pues discute la observación común de que cuando se observa desde arriba un vaso de agua o una piscina, el fondo parece acercarse al observador, dando la sensación de que la profundidad es menor a la real.

Solución. Este ejemplo es sobre formación de imágenes por refracción, cuya solución la encontramos con la ecuación 20.1, p. 193.

En la figura 22.11, P es un pequeño cuerpo en el fondo y H es el observador. ‘Mirar directamente desde arriba’ quiere decir que la línea PH es perpendicular a la interfaz aire-agua. Se muestran el punto de incidencia A , la normal en A a

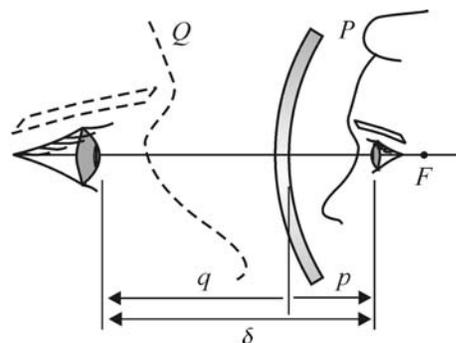


Figura 22.9 Espejo cóncavo, imagen virtual.

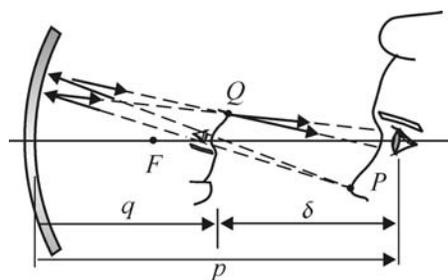


Figura 22.10 Espejo cóncavo, imagen real.

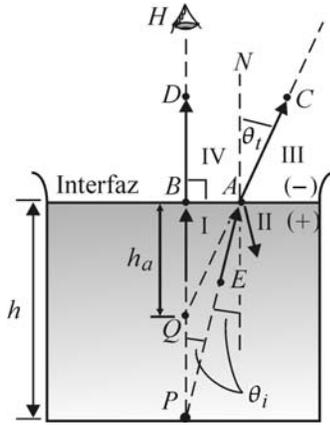


Figura 22.11 Profundidad aparente.

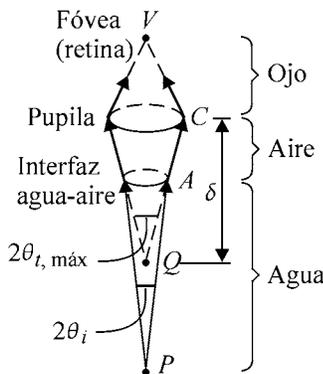


Figura 22.12 Los rayos van del objeto a la retina. Por simplicidad no se muestran la córnea ni el cristalino.

la interfaz, el rayo incidente EA , el plano de incidencia definido por N y EA y coincidente con el plano de la hoja, los cuadrantes I a IV, los ángulos de incidencia y refracción. Los rayos con igual θ_i forman un cono con vértice en P y de ángulo $2\theta_i$, cada uno con su plano de incidencia conteniendo el eje PH .

Como la óptica que hemos desarrollado es paraxial, θ_i y θ_r son mucho menores que 57.3° , y el rayo refractado AC alcanza a penetrar en el ojo, a pesar de que en la figura no sea así. Por claridad, los ángulos están exagerados.

Los rayos que penetran por la pupila forman un cono de ángulo $2\theta_{i,\text{máx}}$, con vértice en Q , y $\theta_{i,\text{máx}}$ dado por el rayo AC que toque el borde de la pupila (figura 22.12). Si el observador tiene bien enfocada la imagen Q (Q es imagen respecto a la interfaz agua-aire, pero objeto respecto al ojo), esta Q tiene su respectiva imagen en la fovea V . Dentro del ojo la luz forma un cono con vértice en V y con la pupila como base. El proceso de la visión humana representado por la figura 22.12 lo explicó por primera vez Kepler en 1604, y con ello fundó la óptica moderna. En la anterior explicación la trayectoria de la luz en el ojo se ha simplificado. Por llegar divergentes a la interfaz, los rayos se intersecan en un punto P en sentido opuesto a ellos, y P es real; esto era de esperarse ya que P es un objeto físico. Los rayos que llegan están en el agua, este es el medio 1, $n_1 = 1.33$. El lado positivo está por debajo de la interfaz. Los rayos que salen por refracción están en el aire, $n_2 = 1.00029 \approx 1.00$; el lado negativo está encima de la interfaz. Como salen divergentes, su intersección es en sentido opuesto a ellos y la imagen es virtual. Esto es forzoso, puesto que los rayos que salen refractados siempre están en el cuadrante III; para que la imagen fuera real se necesitaría que salieran convergentes, ¡por el cuadrante IV! Como $n_1 > n_2$, la luz refractada se aleja de la normal (figura 16.2, p. 155), y Q está entre B y P (figura 22.11). Si n_1 fuera menor que n_2 , el rayo refractado se acercaría a la normal, y la imagen estaría por debajo de P .

Como la interfaz aire-agua es plana, su radio de curvatura es infinito y la ecuación 20.1 la escribimos

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = 0.$$

Despejemos la distancia imagen y hagamos las equivalencias $p = h$ y $q = h_a$,

$$h_a = n_2 h = \frac{1.00}{1.33} h = \frac{h}{1.33}.$$

Si P es una moneda en el fondo de un vaso que se ha llenado hasta una profundidad de 7 cm, $h_a = (7/1.33) = 5.3$ cm: la imagen de la moneda se acerca 1.7 cm hacia el observador, pero sin cambiar de tamaño,

$$M = \frac{n_1 q}{n_2 p} = \frac{n_1 h_a}{n_2 h} = \frac{n_1 (n_2/n_1) h}{n_2 h} = 1.$$

En la aproximación paraxial, una interfaz plana no cambia el tamaño de las imágenes formadas por reflexión ni por refracción.

Haga ya la siguiente experiencia, no la postergue: mire una moneda en el fondo de un vaso sin agua. Acérquesele desde arriba hasta que empiece a desenfocarla; en este momento la distancia entre sus ojos y la moneda es su punto cercano δ (figura 22.13a). A esta distancia se pone usted de lo que mira si lo quiere ver con el máximo detalle. A continuación, llene el vaso hasta 7 cm. Ya no puede mirar la moneda, sino su imagen. Acérquese a la imagen hasta cuando empiece a desenfocarla; como está 1.7 cm más cerca de usted que el objeto, notará que se debe alejar del vaso esta misma distancia para ver la imagen de la moneda, respecto a cuando miraba la moneda sin el agua (figura 22.13b).

Ejemplo 22.4 Haga un estimativo de la longitud focal imagen de los ojos de una persona y halle si son convergentes o divergentes, cuando la persona está (a) en el aire y (b) en el agua. Tenga en cuenta solo la refracción en la córnea.

Solución

(a) Debemos utilizar la ecuación para imágenes por refracción, $(n_1/p) - (n_2/q) = (n_1 - n_2)/r$. Identifiquemos sus diferentes términos: la luz que llega a la córnea está en el aire, $n_1 = 1.00$; la luz que sale está en la córnea, $n_2 \approx 1.38$; los rayos llegan

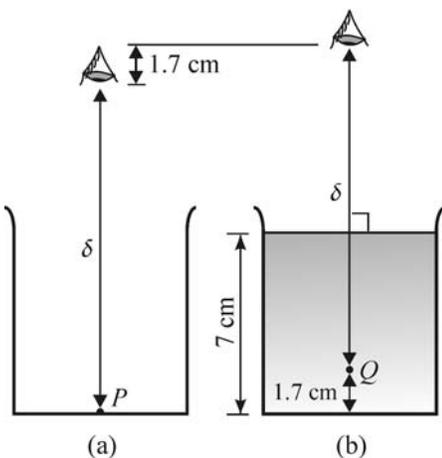


Figura 22.13 La imagen se acerca al observador.

paralelos, $|p| \gg r$ y $|p| \gg |q|$ ($p \rightarrow \infty$); $q = f_i$; la córnea es convexa para la luz que le llega desde el aire, $r = -0.8$ cm. Reemplacemos en la ecuación 20.1,

$$\frac{1.00}{p} - \frac{1.38}{f_i} = \frac{1.00 - 1.38}{-0.8} \approx -\frac{1.38}{f_i}. \quad (22.1)$$

Despejemos,

$$f_i = -2.9 \text{ cm.}$$

El signo menos significa que los rayos que lleguen paralelos o casi paralelos se refractan dirigiéndose hacia un punto opuesto al lado por donde llegan, a 2.9 cm de la córnea (figura 22.14). Como esto es mayor que el diámetro del ojo, 2.4 cm, no hay una imagen puntual en la retina del objeto lejano, y la imagen sería borrosa. El cristalino hace el trabajo faltante, $2.9 - 2.4 = 0.5$ cm, de quebrar aun más los rayos y enfocarlos hacia la retina. Vemos que el trabajo mayor de enfoque lo hace la córnea, y el cristalino hace el trabajo fino, de ajuste. Si se tuviera en cuenta el cristalino, la f_i del ojo debería ser igual al negativo de su diámetro, -2.4 cm. Despejemos de la ecuación 20.4, p. 194, la longitud focal objeto o primera distancia focal,

$$f_o = r - f_i = -0.8 - (-2.9) = +2.1 \text{ cm.}$$

Como es positiva, entonces el ojo es convergente. El valor para f_o de +2.1 cm quiere decir que los rayos provenientes de un punto a 2.1 cm del ojo salen paralelos al refractarse en la córnea.

Con la edad el cristalino pierde elasticidad, o sea que disminuye su capacidad de acomodación, y no puede hacer el trabajo fino de enfoque; a esta limitación se le llama **presbicia**. Si el ojo es más largo de lo normal, $|f_i| < \text{diámetro}$, los rayos se enfocan más acá de la fovea y se presenta **miopía**. Si es más corto, $|f_i| > \text{diámetro}$, los rayos se enfocan más allá de la fovea y se presenta **hipermetropía**. Tradicionalmente estos defectos del ojo se han corregido con gafas, pero en su reemplazo ya es común cambiar la curvatura de la córnea mediante cirugía; para la miopía se aplanan un poco la córnea, para la hipermetropía se curva un poco más. La nueva curvatura debe dar la f_i deseada.

Los peces hacen el trabajo fino de enfoque cambiando la distancia entre el cristalino y la córnea; algunos moluscos cambian el tamaño del ojo; las aves de rapiña cambian, mientras vuelan, la curvatura de la córnea.

(b) Cuando el ojo está dentro del agua, la luz sufre un cambio menor en su dirección que cuando está en el aire, pues el ojo por estar constituido principalmente de agua representa un pequeño cambio para la propagación de la luz. Basta con cambiar en el literal (a) a $n_1 = 1.00$ por $n_1 = 1.33$,

$$-\frac{1.38}{f_i} = \frac{1.33 - 1.38}{-0.8}.$$

Despejemos,

$$f_i = -22 \text{ cm.}$$

Ya los rayos al salir de la córnea se orientan hacia un punto alejado 22 cm, y no 2.9 cm, y por mucho que se contraigan los músculos ciliares, el cristalino no logra redirigirlos hacia la fovea, siendo así imposible enfocar cuando el ojo mira dentro del agua, sin ayuda de una careta.

Dentro del agua el ojo sigue siendo convergente, pues $f_o > 0$: $f_o = r - f_i = -0.8 - (-22) = +21.2$ cm.

Ejemplo 22.5 A un paciente que se le enseña un dibujo o un escrito, lo aprecia bien, con su ojo izquierdo, hasta una distancia de 80 cm; un poco más allá empieza a verlo borroso. Es decir, su *punto lejano* es dicha distancia. Halle la potencia necesaria de una lente para corregir este caso de miopía, si la distancia entre la lente y el ojo será de 2.0 cm.

Solución. Las figuras figura 22.15a y b no están a escala. La circunferencia representa el ojo izquierdo, la línea horizontal central es el eje visual, F es la fovea. La persona ve bien un objeto P situado entre los puntos A (punto cercano, puede ser 25 cm) y el punto lejano B . *Ver bien* quiere decir que los rayos que le llegan al ojo procedentes de P se intersecan en F , después que el ojo los procesa.

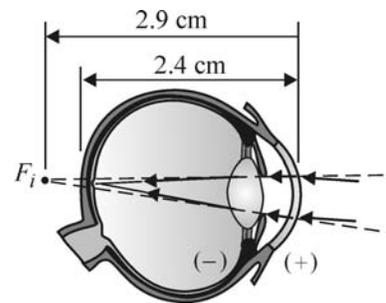


Figura 22.14 Función de la córnea y el cristalino.

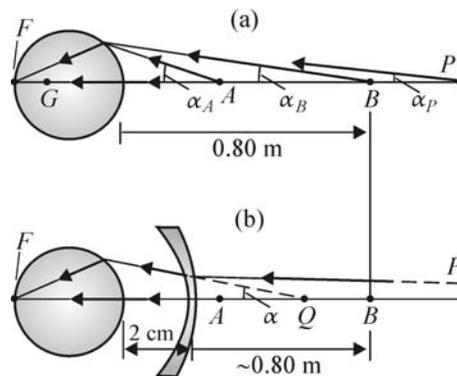


Figura 22.15 Corrección de un ojo miope.

Caractericemos la posición de P por el máximo ángulo de inclinación α de los rayos que penetran en el ojo procedentes de P . Cuando la visión es buena, *los rayos que llegan al ojo cumplen* (figura 22.15a)

$$\alpha_A \geq \alpha_p \geq \alpha_B. \quad (22.2)$$

Cuando P está más allá de B , $\alpha_p < \alpha_B$ y la imagen se forma no en F sino dentro del ojo en G , a una fracción de milímetro a la derecha de F ; para un ojo hipermetrope G está a la izquierda.

Debemos usar una lente de manera que el ojo miope pueda enfocar objetos lejanos, a una distancia mucho mayor que 80 cm (figura 22.15b); por ejemplo, que pueda leer un letrero P en la calle a 10 o 20 metros de distancia. La prolongación de los rayos que *salgan* de la lente y lleguen al ojo tienen que cumplir la relación (figura 22.15b)

$$\alpha_A \geq \alpha \geq \alpha_B. \quad (22.3)$$

Por los rayos salir de la lente, son imagen para esta en el segmento AB , como se debe entender de comparar la anterior relación con la relación 22.2. Los rayos que llegan a la lente procedente de P son objeto para ella, y como P está lejos, $1/p - 1/q \approx -1/q$. Cuando se cumpla la parte derecha de la relación 22.3, $\alpha \geq \alpha_B$, la persona ya enfocará bien el objeto lejano, y para la lente $q = 0.80 - 0.02 = 0.78$ m. Usemos la ecuación 21.8, p. 200,

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \approx -\frac{1}{q} = \frac{1}{f}.$$

De donde $f = -q = -0.78$ m. La potencia es (ecuación 21.10, p. 201)

$$P = \frac{1 \text{ m}}{-0.78 \text{ m}} = -1.28 \text{ D.}$$

Solo hay una diferencia apreciable en la visión entre lentes que difieran como mínimo en 0.25 D. Las lentes se fabrican en múltiplos de 0.25 D, y el anterior resultado se debe aproximar a -1.25 D.

En conclusión, cuando mira sin lentes a P lejano (figura 22.15a), los ejes visuales del observador se intersecan en P y la imagen se forma en G ; con lentes, el observador reorienta sus ojos de manera que ya no mira a P sino a su imagen Q (figura 22.15b), a la que le corresponde una imagen final en F . Gracias al quiebre que las lentes les hacen a los rayos procedentes de P lejano, la imagen final se puede formar en F , pues los rayos ya no llegan al ojo con $\alpha_p < \alpha_B$ sino con α_Q tal que $\alpha_Q \geq \alpha_B$.

Con *lentes de contacto*, en lugar de los 2.0 cm que se restaron, ya se resta cero y la potencia es

$$P = \frac{1 \text{ m}}{-0.80 \text{ m}} = -1.25 \text{ D.}$$

Note que es menor que si se usara gafas.

Ejemplo 22.6 Un sistema óptico consta de tres lentes delgadas que se representan mediante los rectángulos α , β y γ de la figura 22.16. La luz entra al sistema por la derecha y sale por la izquierda. Cada cuadrícula representa un cuadrado de una unidad de longitud u.l. de lado, donde 1 u.l. es cualquier distancia, p. ej., 1 cm, 15 cm o 1 m. El tamaño de las lentes se ha exagerado en aras de la claridad. La imagen que α forma del objeto puntual A es B , la imagen que β forma de B es C , y

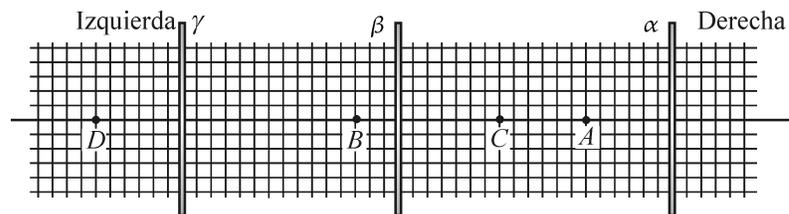


Figura 22.16 Objetos e imágenes.

la imagen que γ forma de C es D . (a) Escoja dos rayos, uno por encima y otro por debajo del eje principal y trace el recorrido total de ellos (como se trata de lentes, no tenga en cuenta rayos reflejados, solo transmitidos); caracterice a A , B , C y D como objeto real o virtual, e imagen real o virtual, respecto a la lente que sea del caso. Halle la longitud focal de las lentes. (b) ¿Es perfecto el sistema óptico? (c) Si A tuviera una altura de 2 mm, ¿cuál sería la altura de D ? (d) ¿Cuál de las imágenes es posible observar en una pantalla? (e) Un observador O tiene un punto cercano de 25 cm. ¿Si O se sitúa a la izquierda de γ , puede observar la imagen C ?, ¿y la imagen D ? ¿Dónde se debe ubicar para observar con el máximo detalle a C ? (f) Especifique exactamente dónde se encuentra el foco objeto F del sistema.

Solución. Hemos escogido dos rayos con un ángulo de incidencia en $S_{1\alpha}$ notablemente mayor que 0° (ver a la derecha de α , figura 22.17a) para aumentar la claridad del dibujo, aunque las ecuaciones que utilizamos solo son válidas para rayos paraxiales, esto es, con $\theta_i \ll 1$ ($1 = 1 \text{ rad} \approx 57.3^\circ$). Las caras de las lentes aparecen planas, pero realmente son casquetes esféricos; los rectángulos son meras representaciones.

(a) *Análisis para α .* El sentido de propagación de la luz determina la convención de signos (+) y (-) que asignamos a las lentes. Los rayos llegan convergentes, por la derecha de la lente α , a la superficie $S_{1\alpha}$ (figura 22.17a), dirigiéndose hacia A ; su intersección, mediante prolongaciones, está en la dirección de propagación. A es un objeto virtual, $p_\alpha = -6$ u. l. A puede ser producido por una lente convergente que no se muestra en la figura. Los rayos refractados salen convergentes por $S_{2\alpha}$ dirigiéndose hacia B ; su intersección está en la dirección de propagación. B es una imagen real, $q_\alpha = -22$ u. l.

Reemplacemos en la ecuación para lentes delgadas rodeadas de aire, $1/p_\alpha - 1/q_\alpha = 1/f_\alpha$, los anteriores valores de la distancia objeto y la distancia imagen respecto a α para obtener

$$\frac{1}{-6} - \frac{1}{-22} = \frac{1}{f_\alpha}.$$

Despejamos la longitud focal,

$$f_\alpha = -8.25 \text{ u. l.}$$

Análisis para β . Los rayos que salen convergentes de α hacia B son los que llegan convergentes a β ; o sea que B es imagen real para α y simultáneamente objeto virtual para β . Los rayos refractados por β salen divergentes, intersecándose mediante prolongaciones en C , en sentido opuesto al de su propagación, lo que califica a C como una imagen virtual. El sistema de referencia lo trasladamos del centro C_α al centro C_β , y obtenemos $p_\beta = -3$ u. l. y $q_\beta = +7$ u. l. Reemplazamos en la ecuación $1/p_\beta - 1/q_\beta = 1/f_\beta$ y despejamos la longitud focal,

$$f_\beta = -2.1 \text{ u. l.}$$

Análisis para γ . El punto C es objeto real para γ ; su distancia a C_γ es $p_\gamma = 22$ u. l. Además, D es una imagen real, $q_\gamma = -6$ u. l. Reemplazamos en la ecuación de lentes delgadas y despejamos la longitud focal para obtener

$$f_\gamma = 4.71 \text{ u. l.}$$

Las trayectorias a través del sistema de los dos rayos seleccionados se muestran en la figura 22.17b.

Vemos que α y β son lentes de borde grueso o divergentes, mientras que γ es de borde delgado o convergente.

(b) La imagen D del objeto puntual A también es puntual, por lo tanto el sistema de las tres lentes es perfecto, esto es, no tiene aberraciones.

(c) Debemos hallar el aumento transversal M de D respecto a A . Una lente es un sistema formado por dos subsistemas: las superficies refringentes S_1 por donde entra la luz, y S_2 por donde sale; su aumento es $M = M_{S_1} M_{S_2}$. De igual manera, el aumento de nuestro sistema es el producto (¿por qué no es la suma?) de los aumentos parciales que hace cada uno de los subsistemas α , β y γ ,

$$M = M_\alpha M_\beta M_\gamma = \frac{q_\alpha}{p_\alpha} \frac{q_\beta}{p_\beta} \frac{q_\gamma}{p_\gamma} = \left(\frac{-22}{-6} \right) \left(\frac{+7}{-3} \right) \left(\frac{-6}{+22} \right) = \frac{7}{3} \approx 2.33.$$

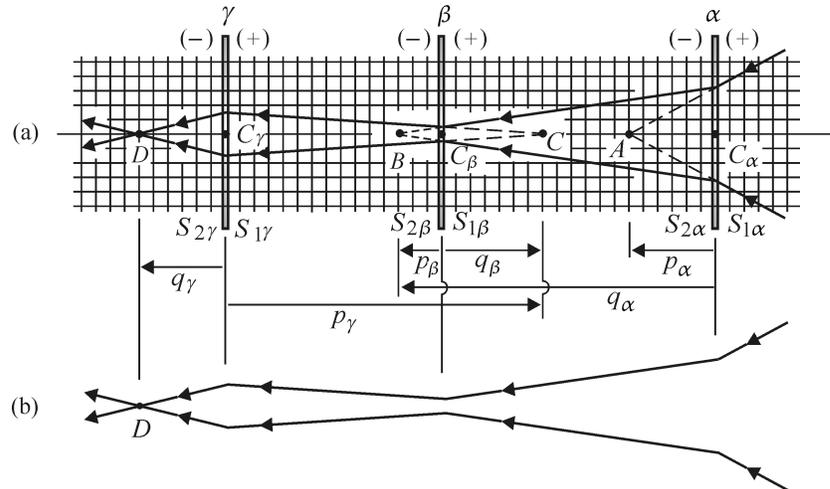


Figura 22.17 (a) Construcción de la trayectoria de los rayos refractados, (b) trayectoria resultante.

La altura de D es

$$h_D = Mh_A = 2.33(2 \text{ mm}) \approx 4.7 \text{ mm}.$$

La imagen D es real, derecha y 2.33 veces mayor que el objeto inicial A .

(d) Solo en el punto D se intersecan físicamente los rayos (figuras 22.17a y b); D es la única imagen que es posible observar en una pantalla.

(e) A la izquierda de γ solo está la luz refractada por γ , no la refractada por β ; o sea que O sí puede observar a D , ubicándose como mínimo a 25 cm a la izquierda de D . Para observar a C tiene que ubicarse entre β y γ , como mínimo a 25 cm de C .

(f) Debemos hallar la longitud focal objeto f del sistema, esto es, debemos hallar en qué punto sobre el eje principal debe estar un objeto puntual para que su imagen D se forme en el infinito, o equivalentemente, los rayos de γ salgan paralelos entre sí. Procedemos, al contrario del literal (a), de izquierda a derecha:

Análisis para γ . Reemplacemos en la ecuación de lentes $1/p - 1/q = 1/f$ a $q_\gamma = -\infty$ (o mejor, $|q_\gamma| \gg |p_\gamma|$), y $f_\gamma = 4.71$ u. l. Despejamos la distancia objeto y obtenemos

$$p_\gamma = f_\gamma = 4.71 \text{ u. l.}$$

Análisis para β . La distancia del anterior punto, el foco de γ , a β es $q_\beta = -(15 - 4.71) = -10.29$ u. l. Además, $f_\beta = -2.1$ u. l. Reemplacemos en la ecuación de lentes y despejemos,

$$p_\beta = -1.74 \text{ u. l.}$$

Análisis para α . La distancia del punto con la anterior distancia objeto, a α , es $q_\alpha = -[19 - (-1.74)] = -20.74$ u. l. Además, $f_\alpha = -8.25$ u. l. Reemplacemos en la ecuación de lentes y despejemos,

$$p_\alpha = -5.9 \text{ u. l.}$$

El punto al que le corresponde esta distancia es el foco objeto F del sistema de las tres lentes; está sobre el eje principal, a 5.9 u. l. a la izquierda de C_α .

Resumen

Para la física de la visión, las componentes principales del ojo son la córnea, el cristalino y la retina. El mayor trabajo de enfoque hacia la fovea lo hace la córnea, el cristalino hace el trabajo fino faltante. Cuando algo se ve bien, es porque su imagen se forma en la retina, más exactamente, en la fovea.

La visión nítida se da entre el punto cercano y el lejano. A menor distancia de lo que se mira, mayor es el tamaño de su imagen en la retina y se aprecia con mayor detalle.

La descomposición en colores de la luz blanca que hace un prisma es una manifestación de que el índice de refracción depende de la longitud de onda, esto es, que el prisma es dispersivo. El arco iris es producido por gotas de agua que son prismas esféricos. Existen el arco iris primario, el secundario y los supernumerarios. La luz del arco iris es altamente polarizada.

Módulo 23

Instrumentos ópticos

Contenido

- 23.1 La lupa
- 23.2 El microscopio
- 23.3 El telescopio refractor

Objetivos

1. Estudiar con detalle la experiencia elemental de leer con una lupa.
2. Introducir el concepto de aumento angular.
3. Mostrar la importancia del observador en el diseño de instrumentos ópticos.
4. Mostrar las características básicas de un microscopio y de un telescopio refractor.

Preguntas básicas

1. ¿La imagen que produce una lupa de un escrito siempre es derecha?
2. ¿En qué se diferencian y qué tienen en común un microscopio y un telescopio?
3. ¿Un telescopio con un aumento de 100 quiere decir que la imagen es 100 veces más grande que el objeto?

Introducción

El principal instrumento óptico, el ojo, ya lo estudiamos en el anterior módulo con un enfoque físico. A continuación analizaremos la lupa, el microscopio y el telescopio, y no como instrumentos aislados, sino teniendo en cuenta que por donde sale de ellos la luz está un ojo humano que la recibe y que se esfuerza por formar una imagen final del objeto inicial en la retina. Tenemos, entonces, un gran sistema óptico conformado por objeto-instrumento-ojo; cada uno de ellos, a su vez, puede ser un subsistema conformado por subsistemas. La luz, en cualquier caso, tiene el sentido determinado por el objeto inicial y la fovea, que es lugar de llegada.



Nuestros ojos solos no son suficientes para contemplar todas las maravillas de la naturaleza; los instrumentos ópticos nos revelan aspectos del mundo que permanecerían ocultos de no ser por ellos.

23.1 La lupa

Cuando leemos nos ubicamos a una distancia de las letras próxima al punto cercano δ . Pero cuando leemos con una lente o una **lupa** ya lo que está a δ nuestro no es la letra sino su imagen. Por supuesto que podemos leer a una distancia mayor que δ , pero se pierde detalle de lo que se lee o se mira (vea la sección 22.1.1, p. 208). Sea el objeto P observado con la lupa una letra, por ejemplo la **E** (figura 23.1a), cuya imagen queremos ver derecha, aumentada y con el máximo detalle (visión óptima).

Deduzcamos primero qué lente debemos usar para que la imagen tenga las características anteriores. La **E** es un objeto físico extendido (o sea macroscópico, no puntual); de cada uno de sus infinitos puntos llegan a la lente infinitos rayos divergentes, que como se recordará, definen a **E** como un objeto real, $p > 0$. Para leer, la imagen debe ser derecha, $M = q/p > 0$; por lo tanto, $q > 0$. Esto quiere decir que los rayos salen divergentes, para que se intersequen en dirección opuesta a ellos, al lado donde está el objeto **E**: *la imagen derecha de un objeto real es virtual, cuando es producida por una sola lente o un espejo*. El ejemplo más común de esta situación es cuando nos miramos en un espejo plano.

Dado que la lupa se utiliza para aumentar, M debe ser mayor que 1, lo que implica $q > p$; de la ecuación 21.8, p. 200, $f = pq/(q - p) = \frac{(+)}{(+)} = (+)$: la lupa debe ser de borde delgado. De las ecuaciones 21.8 y 21.6, se halla que $M = f/(f - p)$. Despejemos, $p = f - (f/M)$; como $M > 1$, entonces $p < f$: la **E** está entre la lente y F (figura 23.1a).

Sea una lupa con $f = +8$ cm y supongamos que la tenemos ‘pegada’ al ojo. Podemos entonces hacer la aproximación $q \approx \delta$; reemplacemos en la ecuación 21.8,

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{\delta} = \frac{1}{f}.$$

Despejemos,

$$p = \frac{\delta f}{\delta + f} = \frac{25 \times 8}{25 + 8} = 6.1 \text{ cm}.$$

El aumento es

$$M = \frac{q}{p} = \frac{25}{6.1} = +4.1.$$

En resumen, cuando una persona con $\delta = 25$ cm lee con una lupa de $f = 8$ cm, ubica las letras a ~ 6 cm de la lupa, logrando una imagen virtual, derecha, con un aumento de ~ 4 . (Este ejemplo explica por qué se ve más grande la imagen de los ojos de quienes usan lentes para corregir la hipermetropía o la presbicia). Si el escrito se pone más allá de F , el escrito se ve invertido; o mejor, la imagen es invertida.

Si las letras se ubican en el foco, cada uno de los puntos de las letras producen rayos que salen de la lente paralelos hacia el ojo, formando una imagen en el infinito, a lo que le corresponde un aumento infinito. Sin embargo, el ojo logra enfocar estos rayos en la fovea, dando una imagen de tamaño finito, pues *el ojo es un sistema complejo que logra hacer el trabajo de enfoque. Es distinto si en lugar del ojo se pone una pantalla y se mira la pantalla*.

Definimos el **aumento angular**, M_θ , como la relación entre el ángulo subtendido θ' por la imagen y el centro de la lente (figura 23.1c) y el ángulo θ subtendido por el objeto y uno de los ojos del observador (figura 23.1b),

$$M_\theta = \frac{\theta'}{\theta} \approx \frac{A'B'/\delta}{AB/\delta} = \frac{A'B'}{AB} = M.$$

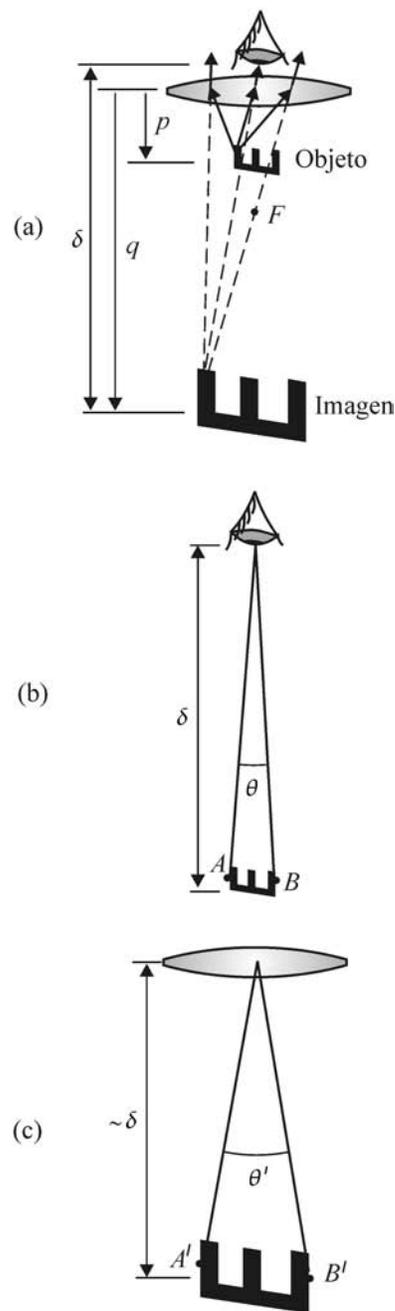


Figura 23.1 (a) Lectura con una lupa, (b) tamaño angular del objeto, (c) tamaño angular de la imagen.

Cuando usamos una lupa, lo que queremos ampliar lo ponemos a una distancia aproximadamente igual a f , y su imagen la observamos a una distancia δ . Los aumentos lateral y angular son

$$M_\theta = M = \frac{q}{p} \approx \frac{\delta}{f}. \tag{23.1}$$

Recordemos que δ es característico de cada individuo, en cambio f es una característica invariable de la lente.

23.2 El microscopio

El microscopio fue inventado por Zacharias Janssen en 1590. Es sorprendente que tuvieron que transcurrir 250 años después del inicio de la observación de microorganismos con el microscopio para que Louis Pasteur (1822-1895) demostrara el origen microbiano de muchas enfermedades. Algunos "tratamientos médicos" de hoy en día parecen ignorar esta difícil conquista.

Cuando queremos un aumento mayor que el que da una sola lente convergente (o microscopio simple o lupa), usamos una combinación de mínimo dos lentes positivas y obtenemos el **microscopio compuesto** o, simplemente, el **microscopio**. La lente más cercana a la muestra a examinar, por donde *entra* la luz a nuestro instrumento, es el **objetivo**, de longitud focal f_1 (figura 23.2, no está a escala); la lente a donde el microscopista acerca sus ojos, por donde *sale* la luz del instrumento, es el **ocular**, de longitud focal f_2 . Ambas longitudes focales son de varios centímetros, con $f_1 \ll f_2$; y estas son mucho menores que la separación L entre el objetivo y el ocular. Con el subíndice 1 nos referimos a la primera lente u objetivo, y con el 2 a la segunda lente u ocular.

La muestra AB a examinar se coloca a una distancia del objetivo *un poco mayor* que f_1 y se forma una primera imagen real e invertida $A'B'$ con un aumento lateral (ecuación 21.6, p. 200) M_1 respecto a AB ,

$$M_1 \approx q'/f_1.$$

La imagen $A'B'$ del objetivo es objeto para el ocular. Este se dispone de manera que $A'B'$ quede a una distancia *un poco menor* que f_2 del ocular. La imagen final que el ocular forma de $A'B'$ es $A''B''$ y está a una distancia δ con un aumento

$$M_2 \approx \delta/f_2.$$

El aumento lateral y angular total es

$$M = M_1 M_2 = \frac{\delta q'}{f_1 f_2}.$$

El microscopio se construye tal que $q' \approx L$.

La imagen final está a una distancia del ocular igual al punto cercano δ de la persona que usa el microscopio; *por esto cada individuo debe mover el ocular para que la imagen se forme a su δ* . Que la imagen final esté a δ quiere decir que la prolongación de los rayos que *salen* del microscopio se intersecan en el punto cercano del observador, y así puede observar con el máximo detalle; además, la imagen que sus ojos forman de la imagen $A''B''$ cae en la fovea de ambos ojos.

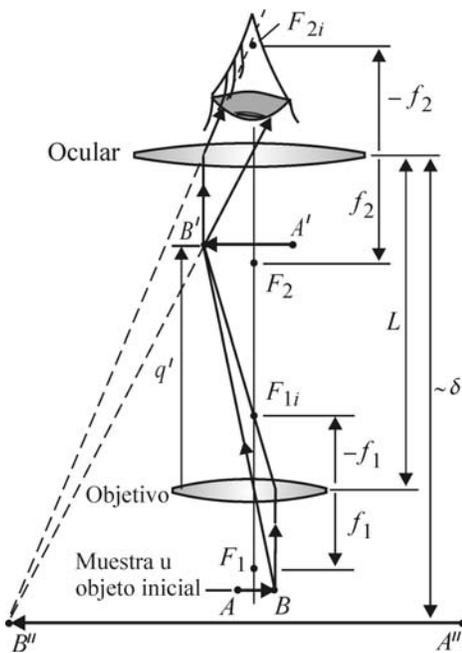


Figura 23.2 El microscopio.

23.3 El telescopio refractor

Cuando observamos con un microscopio un microbio o un insecto, la muestra está muy cerca de nosotros, mientras que con un telescopio está muy lejos, ya sea la Luna o un planeta. Examinaremos un **telescopio refractor** (figura 23.3); su construcción y funcionamiento son similares a los del microscopio.

Por estar muy alejado el objeto que se mira (la Luna en nuestra figura, a $r \approx 380\,000$ km de la Tierra), la primera imagen $A'B'$ (simbolizada por una flecha), formada por el objetivo, está en su foco imagen F_{1i} (ecuación 21.9, p. 200), y es una imagen reducida del objeto, no aumentada como en el microscopio; además, es invertida y real. Como los ángulos son pequeños, los segmentos rectos AB (diámetro lunar) y $A'B'$ (diámetro de la primera imagen) podemos igualarlos a los respectivos arcos y escribir

$$\theta \approx \frac{AB}{r} = -\frac{A'B'}{f_1}. \quad (23.2)$$

Escribimos $(-)$ porque la primera imagen es invertida respecto al objeto. Despejemos el primer aumento lateral,

$$M_1 = \frac{A'B'}{AB} = -\frac{f_1}{r}.$$

Para la Luna y un telescopio con un objetivo de longitud focal 1 m, el primer aumento lateral es $M_1 = -1\text{ m}/380\,000\,000\text{ m} = -1/380\,000\,000$; o sea que la primera imagen es casi cuatrocientos millones de veces menor que el objeto, pero *los ángulos respectivos que subtienen con el objetivo son iguales*, y el objetivo no cambia *angularmente* la imagen respecto al objeto, o sea que $M_{\theta 1} = -1$.

El ocular se dispone de manera que la imagen $A''B''$ que forma de $A'B'$ esté a una distancia igual al punto cercano de la persona que esté mirando; por esto cada persona debe mover el ocular para que se acomode a su δ particular. La posición de F_2 es muy cercana a la posición del foco imagen del objetivo F_{1i} , pero sus longitudes focales no, ya que para el telescopio $f_1 \gg f_2$; f_1 puede ser de varios metros.

La primera imagen es el objeto para el ocular, con el que subtende un ángulo

$$\theta' \approx \frac{A'B'}{f_2} = \frac{A''B''}{\delta}.$$

El aumento angular del telescopio es $M_\theta = \theta'/\theta$; con la anterior ecuación y la ecuación 23.2 obtenemos

$$M_\theta = \frac{\theta'}{\theta} = -\frac{A'B'/f_2}{A'B'/f_1} = -\frac{f_1}{f_2}.$$

Cuando hablamos del aumento de un telescopio nos referimos al aumento angular, ya que lateralmente siempre hay una disminución. Un aumento de 100 quiere decir que la imagen del astro que se observe es, *angularmente*, 100 veces mayor que el astro visto a simple vista; note que el ángulo que el objeto (la Luna) subtende con el objetivo es igual al ángulo que subtende con el ojo del observador, ya que la longitud del telescopio es despreciable frente a la distancia del objeto a él. Tanto con el microscopio como con el telescopio la imagen final que producen está a δ del observador; cuando leemos un libro también nos ubicamos a δ de este.

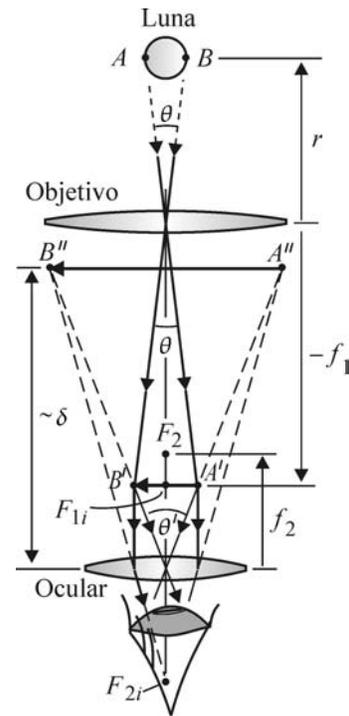


Figura 23.3 El telescopio refractor.

El aumento lateral del ocular es $M_2 = \delta/f_2$; el aumento lateral total es

$$M = M_1 M_2 = -\frac{f_1}{r} \frac{\delta}{f_2} = -\frac{f_1}{f_2} \frac{\delta}{r} = -M_\theta \frac{\delta}{r}.$$

Vemos que mientras que para la lupa los aumentos lateral y angular son iguales, para el telescopio son muy distintos, ya que δ es del orden de 0.25 m y r puede ser de miles o millones de kilómetros. Cuando observamos la Luna con un telescopio de 100 aumentos, el aumento lateral es

$$M = -100 \frac{0.25 \text{ m}}{380\,000\,000 \text{ m}} = -6.6 \times 10^{-8}.$$

Esto es una reducción de más de 15 millones de veces, pero la Luna se ve más grande porque su imagen $A''B''$ está a solo 25 cm del observador; es mayor el acercamiento (porcentualmente) que el telescopio hace de la imagen de la Luna al observador, que su reducción porcentual lateral, y así se logra un aumento angular.

Los binoculares son, en su funcionamiento, iguales a un par de telescopios. Se caracterizan por dos números, por ejemplo, 20×50 . El 20 es M_θ ; el 50 es el diámetro D , en mm, del objetivo. A mayor D más luz capta el binocular.

Todos los telescopios de investigación son **reflectores** porque la lente objetivo se reemplaza por un espejo. Galileo hizo sus descubrimientos (1609) con un telescopio refractor; Newton fue el primero en construir un reflector (1668). Una de las ventajas de estos es que no tienen aberración cromática, ya que el ángulo de reflexión no depende de λ , en cambio el ángulo de refracción sí. El peso del espejo colector de luz puede ser de varias toneladas y su diámetro D de varios metros. El mayor telescopio refractor (observatorio Yerkes, Wisconsin) tiene una lente con $D = 1 \text{ m}$ y $f_1 \approx 19 \text{ m}$; los grandes reflectores tienen D de varios metros: el de Monte Palomar es de 5 m; los telescopios Keck en Hawái tienen cada uno un espejo compuesto de 36 espejos hexagonales, de 10 m de diámetro total.

Resumen

El aumento M de una lupa —o lente convergente o microscopio simple— cuando el observador está *inmediatamente* después de la lupa es $M = \delta/f$. Esta es una relación entre la altura de la imagen y la altura del objeto. El tamaño angular de la imagen sobre el tamaño angular del objeto es el aumento angular, M_θ , y para una lupa y un microscopio compuesto coincide con el valor de M : $M = M_\theta = q/f \approx \delta/f$.

Para un microscopio, $M \approx \delta L/f_1 f_2$, donde δ es el punto cercano del microscopista, f_1 es la longitud focal del objetivo, f_2 es la del ocular y L es la separación entre estas dos lentes.

Para un telescopio, $M_\theta = -f_1/f_2$ y $M = -M_\theta \delta/r$, donde r es la distancia del objeto observado al telescopio.

Problemas del capítulo 4

- Localice la imagen de P formada por reflexión en el ejemplo 22.3, p. 211; ¿es virtual o real; la puede mirar el observador H de la figura 22.11, p. 212?
- Se quiere que un pequeño objeto puesto a 1.80 m del vértice de un espejo y sobre su eje tenga una imagen virtual y de un cuarto de la altura del objeto. (a) Halle la longitud focal. (b) Ilustre gráficamente con rayos principales y a escala este problema (nota: el objeto no se puede dibujar a escala, se debe exagerar su tamaño relativo). (c) Repita los anteriores literales si se quiere que tenga la mitad de la altura. (d) Repita si la imagen debe ser real y el doble de alto. En todos los casos determine si la imagen es derecha o invertida, real o virtual.
- (a) ¿Puede un observador a la derecha de la superficie refringente de la figura 20.1, p. 193, ver la imagen por refracción Q ? (b) Si $q = +20$ cm y el punto cercano del observador es 35 cm, especifique exactamente dónde se debe ubicar el observador sobre el eje principal para ver a Q . (c) ¿Cómo ve la imagen dicho observador si se ubica a 5 cm a la izquierda de V ?
- Aplicando las definiciones de imagen virtual e imagen real (figura 18.4, p. 181), ¿es positiva o negativa q para una imagen virtual producida por (a) un espejo y (b) una lente (o por una superficie refractiva), y para una imagen real?
- ¿En la figura 22.9, p. 211, por qué la relación entre p , q y δ no es $p + q = \delta$, sino $p - q = \delta$? (Recuerde que esta ecuación no es general; no se cumple en la figura 22.3, p. 208, ni en la figura 23.1, p. 221).
- Resuelva, en coordenadas polares, el ejemplo 19.5, p. 189.
- En la figura 23.4 se muestra un objeto físico al frente de un espejo. El centro del objeto está a una distancia x del espejo, el ancho del objeto es L , los puntos extremos son A y B . El aumento lateral de un pequeño objeto que se pusiera en A sería M_A y en B sería M_B . La distancia imagen de A es q_A y de B es q_B . El aumento longitudinal se define como $M_L = (q_A - q_B)/L$. Demuestre que (a) $M_L = -M_A M_B$, (b) si $L \ll x$, entonces $M_L \approx -M^2 = -(q/p)^2$, donde p y q corresponden al punto medio del objeto.
- Cuando un objeto que está a 60 cm de un espejo se acerca 5 cm a él, la nueva distancia objeto-imagen se duplica. Halle la longitud focal del espejo.
- Una capa de agua ($n = 1.33$) de 5.00 cm de espesor está sobre un bloque acrílico ($n = 1.50$) de 3.00 cm de espesor. Un observador mira, perpendicularmente desde arriba, la superficie más baja del acrílico. ¿A qué distancia parece estar de la superficie del agua? O lo que es lo mismo: ¿cuál es el espesor aparente para el observador del conjunto agua-acrílico? *Sugerencia:* vea el ejemplo 22.3, p. 211.
- Un vaso contiene un líquido de índice de refracción n . Un lápiz se introduce parcialmente en el líquido formando un ángulo α con la normal (figura 23.5). (a) ¿Qué ángulo β forma la imagen de la sección sumergida según un observador que mira directamente desde arriba? (b) Si el líquido es agua y $\alpha = 45^\circ$, encuentre el ángulo δ que parece quebrarse el lápiz según dicho observador. *Sugerencia:* puede estudiar el ejemplo 22.3, p. 211.
- Dos lentes L_1 y L_2 , con longitudes focales de 15.0 cm y 30.0 cm respectivamente, están separadas 75.0 cm. La posición de la imagen final Q de un objeto P está entre las lentes, como se muestra en la figura 23.6 (esta no está a escala); la altura de P es de medio centímetro. (a) Halle la distancia de P a L_1 . (b) ¿La imagen final es real o virtual, cuál es su altura, es derecha o invertida? (c) Ilustre, con rayos principales y a escala (con excepción de la altura del objeto y el diámetro de las lentes), la solución hallada en los literales anteriores.
- Un **expansor de haz** está conformado por dos lentes convergentes 1 y 2 separadas entre sí una distancia $f_1 + f_2$ (figura 23.7). El haz incide en la lente 1 con un diámetro D_1 y sale de la lente 2 con un diámetro D_2 . Los rayos entrantes y salientes son paralelos al eje del sistema. (a) Pruebe que

$$D_2 = (f_2/f_1)D_1.$$

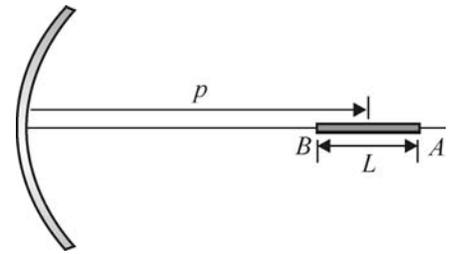


Figura 23.4

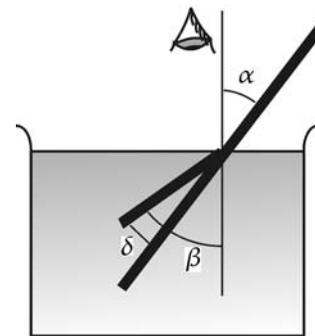


Figura 23.5

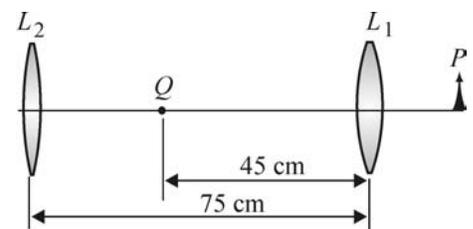


Figura 23.6

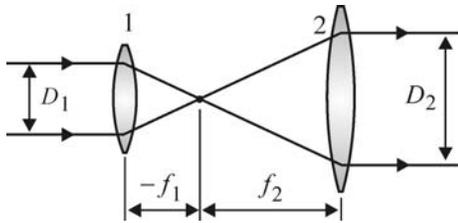


Figura 23.7

(b) Pruebe que la relación entre la intensidad emergente I_2 y la incidente I_1 es

$$\frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2.$$

(c) Muestre cómo se deben disponer una lente convergente y otra divergente para expandir el haz.

13 Dos objetos puntuales A y B están sobre el eje principal de una superficie refractiva, con $p_B > p_A$ (A y B pueden ser dos puntos en extremos opuestos de un objeto macroscópico o extendido). (a) Demuestre que $q_B > q_A$. (b) ¿Según el literal anterior, la imagen longitudinal que produce una superficie refractiva puede estar invertida respecto al objeto? Explique.

14 Muestre que el aumento longitudinal que una interfaz refractiva hace de un objeto pequeño puesto en el eje óptico es

$$M_L = \frac{n_1 q^2}{n_2 p^2} = n_{21} M^2.$$

¿Según esta ecuación, una imagen formada por refracción longitudinalmente puede ser invertida respecto al objeto? Explique.

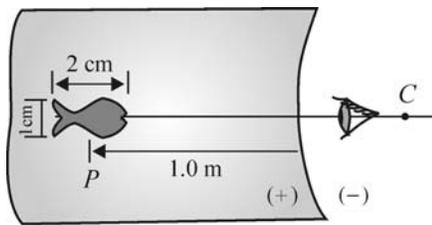


Figura 23.8

15 Un acuario dispone de varios sitios de observación. En uno de ellos, los turistas observan los peces a través de un casquete esférico acrílico de 0.50 m de radio de curvatura. No tenga en cuenta el grosor del casquete. Un pez que mide 2 cm × 1 cm está a 1.00 m de la interfaz (figura 23.8). (a) Halle las longitudes focales objeto e imagen de la interfaz acrílica; ¿es convergente o divergente? (b) Halle la posición y el aumento lateral de la imagen del pez; ¿es real o virtual, derecha o invertida? (c) Halle las dimensiones de la imagen (para la dimensión longitudinal vea el problema 14). (d) En un gráfico a escala (con excepción del pez), sitúe a C , F_o , F_i y halle la imagen con rayos principales. (e) Un observador con vista normal (punto cercano cerca de 20 cm), ¿a qué distancia mínima se puede situar del acrílico para ver bien el pez? Si el observador tiene una presbicia que, sin anteojos, solo le permite ver bien a partir de los 80 cm, ¿a qué distancia mínima se debe situar?

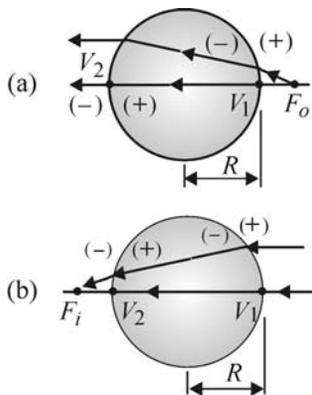


Figura 23.9

16 Halle la posición de los focos objeto e imagen de una esfera maciza de vidrio de radio de magnitud R e índice de refracción 1.5. Utilice las ecuaciones de la aproximación paraxial. Debe tener en cuenta la refracción de los rayos en ambos lados de la esfera.
Ayuda: no puede tratar a la esfera como una lente delgada. Recuerde que preguntar por el foco objeto equivale a preguntar dónde se debe poner un objeto puntual sobre el eje para que la imagen se forme en el infinito (figura 23.9a), y que preguntar por el foco imagen equivale a preguntar dónde está la imagen de un objeto en el infinito (figura 23.9b). Una vez hallado un foco, con el principio de reversibilidad óptica puede hallar el otro.

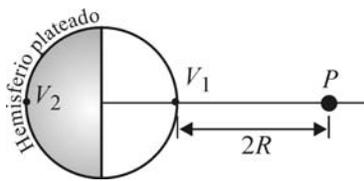


Figura 23.10

17 Una esfera maciza de vidrio de radio de magnitud R e índice de refracción 1.5 está plateada en un hemisferio. La superficie de la esfera queda así conformada por un hemisferio refractivo sin platear y otro hemisferio reflectivo. Un pequeño objeto está sobre el eje definido por los vértices de ambos hemisferios, a una distancia $2R$ del vértice de la parte refractiva (figura 23.10). (a) Halle la posición de la imagen del objeto formada por una primera refracción hacia el interior de la esfera, una reflexión en el hemisferio plateado y una segunda refracción hacia el aire. (b) Trace el recorrido completo de dos rayos, compatible con la solución del literal anterior. (c) ¿Dónde se debe ubicar un observador en el eje para observar con el máximo detalle la imagen?

18 Un líquido transparente de índice n está dentro de un espejo cóncavo de radio de curvatura r . La máxima profundidad es g . Un pequeño objeto P está sobre el eje óptico del sistema, a una altura h respecto al líquido (figura 23.11). La luz proveniente de P penetra en el líquido, se refleja en el espejo, y por último sale de regreso al aire para formar la imagen final. (a) Demuestre que para que la imagen coincida con el objeto,

$$h = (r - g)/n.$$

Utilice la aproximación paraxial. (b) Evalúe h para un espejo de 30.0 cm de curvatura y una profundidad de 5.00 mm; el líquido es agua.

Ayuda: pedir dicha coincidencia equivale a pedir que los rayos se devuelvan por donde vinieron; ¿qué es necesario para que esto ocurra en un espejo? En una interfaz plana se cumple que $n_1/p - n_2/q = 0$.

19 Un escrito se observa a través de una botella de gaseosa de paredes delgadas y diámetro 6.00 cm, llena de agua. *Paredes delgadas* quiere decir que su grosor es mucho menor que 6.00 cm y no es necesario, por lo tanto, tenerlas en cuenta en la solución del problema. La botella se comporta así como una lente cilíndrica gruesa biconvexa, con índice de refracción $1.33 \approx 4/3$; la lente es *astigmática* pues su curvatura no tiene un único valor. La perpendicular en el centro P del escrito pasa por el eje de simetría de la botella, y en dicha perpendicular está un observador. La menor distancia entre la hoja y la botella es D (figura 23.12).

Considere solo los rayos que salen de una letra en P y que sean casi paralelos a dicha perpendicular. La luz procedente de la letra sufre una primera refracción en la superficie más cercana, con polo V_1 ($V_1P = D$), y luego una segunda refracción en la más lejana, con polo V_2 , para así llegar luego al observador. (a) Halle la magnitud del radio de curvatura de la botella si usted se desplaza verticalmente sobre ella y si se desplaza horizontalmente. (b) Muestre que verticalmente (o sea rayos que lleguen a una línea paralela al eje de la botella y que pasen por V_1) la imagen final se forma a una distancia q_v de V_1 , $q_v = D - 1.5$ cm con un aumento total $M_v = 1$. (c) Muestre que horizontalmente la imagen se forma a una distancia q_h de V_1 , $q_h = 9(1 \text{ cm} + D)/(3 \text{ cm} - D)$, con un aumento total $M_h = M_1M_2 = 6 \text{ cm}/(3 \text{ cm} - D)$. (d) Evalúe los dos anteriores literales cuando la botella está pegada al escrito. *Sugerencia: llene de agua una botella y compruebe este literal y el próximo.* (e) Muestre que si el escrito está a más de 3 cm de la botella las imágenes se invierten horizontalmente, y a menos de 3 cm no hay inversión.

Nota: si la botella solo se llena hasta la mitad y se pone horizontal, el agua forma una lente cilíndrica plano-convexa gruesa (figura 23.13).

20 (a) Tome medidas con una regla en la figura 20.2, p. 194, y compruebe que la ecuación 20.4 se cumple. (b) Trace los cuadrantes I, II, III y IV en el punto de incidencia A de dicha figura, señale θ_i , θ_r y θ_t ; ¿es mayor n_1 que n_2 ? (c) Mida los ángulos; ¿cuánto es n_{21} ? (d) ¿Es convergente o divergente dicha superficie refractiva? (e) Halle, gráficamente, los focos si la superficie fuera convexa. Suponga que la magnitud del radio de curvatura y los índices de refracción no cambian.

21 Demuestre que las lentes de borde delgado cóncava-convexa e , plano-convexa f , y biconvexa g del ejemplo 21.2, p. 202, son positivas o convergentes, esto es, tienen $f > 0$. Demuestre también que si la luz llegara por la izquierda, lo que equivale a rotar las lentes 180° (figura 23.14), no cambiarían el signo ni la magnitud de f .

22 El material de unas gafas deportivas cóncava-convexas es de grosor constante e índice de refracción n . Halle su longitud focal, para cualquier valor del radio de curvatura de las caras.

23 Demuestre que el aumento longitudinal de una lente delgada es el cuadrado del aumento lateral: $M_L = M^2$.

24 Señale θ_i , θ'_r y θ_r para el rayo superior de la figura 21.10. Marque los cuadrantes I a IV y los mismos ángulos, pero para el rayo inferior. Señale los ángulos para el rayo inferior de la figura 21.12.

25 Se dispone de una lente de borde delgado con f conocida y de un objeto físico. Para que la imagen sea derecha (y virtual), halle si el objeto debe estar entre la lente y el foco, o más allá del foco; ¿y para que sea invertida (y real)? Compruébelo con una lupa; cuando observe una imagen invertida, *solo moviendo su cabeza*, acérquese hasta cuando empiece a desenfocar la imagen. En este momento usted está a δ de lo que mira, la imagen del objeto (figura 22.3a, p. 208).

26 Muestre que la imagen producida de un objeto real, por una lente de borde grueso, es virtual, derecha, con $M \in (0, 1)$, para cualquier distancia del objeto a la lente. (Esto explica por qué los objetos se ven más pequeños y derechos cuando se miran a través de lentes para corregir la miopía).

27 (Antes de resolver el problema repase el ejemplo 22.5, p. 213). Cierta persona

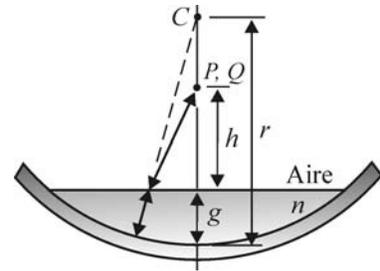


Figura 23.11

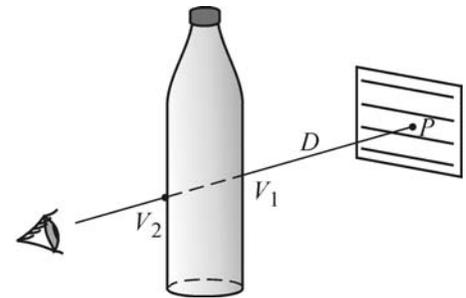


Figura 23.12

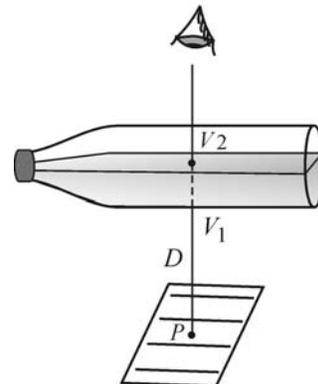


Figura 23.13



Figura 23.14

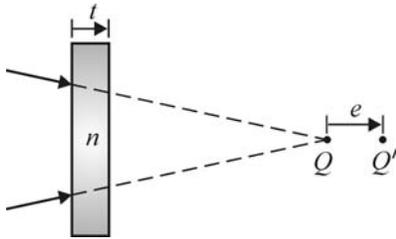


Figura 23.15

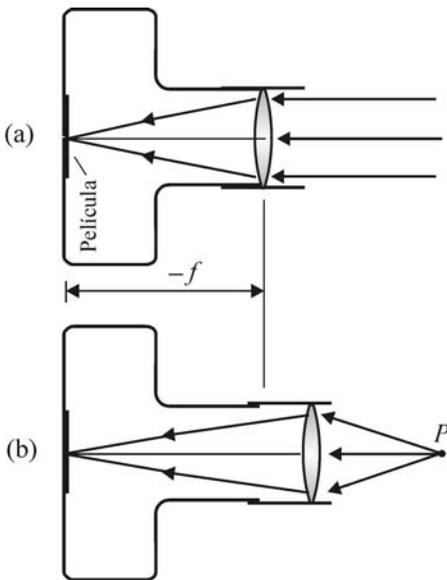


Figura 23.16

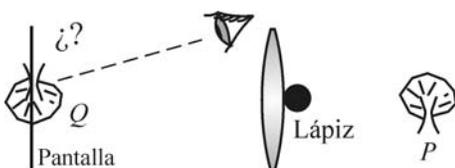


Figura 23.17

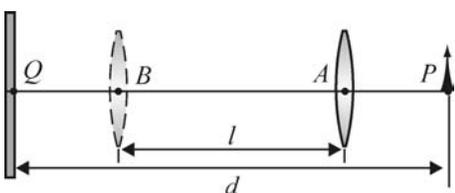


Figura 23.18

que sufre de hipermetropía tiene un punto cercano de 50 cm. (a) Halle, en dioptrías, la potencia de las lentes para que pueda leer el escrito a 25 cm de él, si usará las gafas a 2.2 cm de sus ojos. (b) ¿Son de borde grueso o delgado? (c) Haga un dibujo análogo a la figura 22.15b donde muestre el objeto P , o sea el escrito, la imagen Q y todo lo demás de tal figura. (d) ¿Cuando la persona usa las lentes, debe mirar más allá o más acá de donde está el escrito? (e) Calcule la potencia de las lentes si la distancia lentes-ojos tendiera a cero.

28 Una persona que sufre de miopía puede leer cómodamente a una distancia de 25 cm cuando utiliza lentes con una potencia de -2.75 D. Halle el punto lejano de dicha persona.

29 Resuelva, pero con una lente delgada, el ejemplo 19.3, p. 188.

30 Los rayos provenientes de una lente convergen en un punto Q . Cuando un vidrio de grosor t e índice de refracción n , de caras planas y paralelas, se interpone como se muestra en la figura 23.15, la imagen se forma a una distancia e de Q , en Q' . Halle a t en función de n y e ; evalúela para $n = 1.5$ y $e = 0.5$ cm. Utilice la aproximación paraxial.

31 La figura 23.16a muestra, simplificada, una cámara fotográfica. En la película (o arreglo de fotosensores si la cámara es electrónica) se forma la imagen real e invertida de un objeto lejano ($p \gg q$), y $q \approx -f$. En la figura 23.16b el objeto está más cercano, y para que la imagen caiga en la película se debe aumentar la distancia lente-película; en esto consiste el proceso de **enfoque** (¿cómo enfoca el ojo humano?). En una cámara de 35 mm, cada fotografía ocupa, en la película, un rectángulo de 36 mm de ancho por 24 mm de alto.

Usted toma una fotografía de una amiga que tiene una estatura de 168 cm, con una lente cuya distancia focal es 85 mm y con una cámara de 35 mm; además, rota la cámara 90° para aprovechar la dimensión mayor de la película. ¿Cuál es la distancia de la amiga a la cámara para que case exactamente en la foto? ¿Cuál es la distancia entre la película y la lente?

32 Una persona con un punto cercano de 20 cm quiere un aumento de 5 con una lupa; halle su longitud focal.

33 En una pantalla se observa la imagen de un objeto. Explique qué le ocurre a dicha imagen si los rayos que llegan al centro de la lente se bloquean, por ejemplo, con un lápiz, como se muestra en la figura 23.17. (La figura está sin escala ni perspectiva. Lo que usted observa es muy distinto si en lugar de mirar a la pantalla situara sus ojos donde está la pantalla). ¿Qué ocurre si se cubre media lente, y tres cuartos de lente? Haga la experiencia con una lente y con cualquier superficie como pantalla.

34 El conductor de un carro en reposo ve, a través de un espejo retrovisor convexo, acercarse a un peatón que está a 3.00 m del espejo, caminando a 1.00 m/s. El radio de curvatura del espejo es de magnitud 2.00 m. (a) Halle la rapidez de la imagen observada. (b) Con rayos principales, halle la posición de la imagen. (c) Si el conductor tiene un punto cercano de 30 cm, ¿cuál es la mínima distancia a que se puede acercar al espejo para continuar viendo nítidamente la imagen del peatón? Explique.

Nota: aunque la imagen está más cerca del espejo que el objeto, el cerebro interpreta que está más lejos porque es más pequeña, y el conductor puede creer que el peatón está lejos. Por esto en los retrovisores está escrita la advertencia de que los objetos están más cerca de lo que parecen.

35 Una pantalla está a una distancia fija d de un objeto P . Una lente convergente de longitud focal f forma una imagen Q en dos posiciones A y B , separadas entre sí una distancia l (figura 23.18). Tenga presente que $l, d > 0$. Demuestre que (a) con base en el principio de reversibilidad óptica, p. 201, $PA = BQ$, y por lo tanto $PA = (d - l)/2$ y $PB = (d + l)/2$. (b) $f = (d^2 - l^2)/4d$; este es el método de Bessel para hallar f . (c) En la primera posición el aumento es $M_A = (l + d)/(l - d)$, y en la segunda es $M_B = (l - d)/(l + d)$. (d) Para que haya dos posiciones de la lente, se debe cumplir que $d > 4f$.

36 Una lente de longitud focal f forma una imagen real de un objeto real. ¿Cuál es la mínima distancia entre el objeto y la imagen? (vea el problema 35 y su figura).

37 Los radios de curvatura de las caras de una lente delgada biconvexa son de magnitud 24.0 cm; el índice de refracción es 1.60. Halle la distancia focal de la lente (a) cuando está rodeada de aire, (b) cuando se sumerge en agua.

38 Una lente proyecta en una pantalla la imagen de un objeto real. La pantalla está a 12.0 cm de la lente. Al alejar 2.00 cm la lente del objeto, la pantalla se debe acercar 2.00 cm al objeto para que la imagen se observe en la pantalla. Halle la longitud focal de la lente.

39 Una lente tiene un índice de refracción n y una longitud focal f . (a) Muestre que si se rodea de un medio de índice n' , su nueva longitud focal es

$$f' = \frac{n'(n-1)}{n-n'}f.$$

(b) ¿Si la lente es convergente, qué es necesario para que siga siendo convergente cuando se rodea del nuevo medio, y qué para que se convierta en divergente?

40 Una lente de índice de refracción n tiene una longitud focal f . (a) Demuestre que si el índice cambia en una pequeña cantidad Δn , el cambio en la longitud focal es

$$\Delta f \approx \frac{\Delta n}{1-n}f.$$

(b) Para el amarillo una lente de índice 1.65 tiene una longitud focal de 40.0 cm. Si para el violeta el índice es 1.67, mediante la anterior ecuación halle la longitud focal para este color.

41 Una bombilla pequeña se pone a 40.0 cm de una lente, sobre su eje óptico. Su imagen es derecha y a 10.9 cm de la lente. (a) Halle la longitud focal de la lente; ¿es de borde grueso o delgado? (b) Con rayos principales, ilustre gráficamente el problema. (c) ¿Es real o virtual la imagen? (d) ¿Dónde se debe ubicar un observador con un punto cercano de 30 cm para observar con el máximo detalle la imagen? (e) Además de la anterior imagen por refracciones, por reflexión en la primera cara de la lente se forma una imagen real a 8.00 cm; ¿cuál es el radio de curvatura de esta cara? (f) Cuando se voltea la lente, la nueva imagen por reflexión se forma a 25.1 cm; ¿cuál es el radio de curvatura de esta otra cara? (g) ¿La lente es biconvexa, bicóncava o cóncava-convexa? (h) ¿Cuál es el índice de refracción de la lente? (i) ¿Cuál imagen es más intensa, la reflejada o la transmitida; por qué?

42 Un objeto pequeño de altura h está a una distancia $2f_1$ de un espejo cóncavo de longitud focal f_1 ; el objeto está sobre el eje óptico. A una distancia $2(f_1 + f_2)$ del espejo se encuentra una lente delgada convergente de longitud focal f_2 . La luz del objeto se refleja en el espejo y luego atraviesa la lente para formar así la imagen final. (a) Encuentre la posición de la imagen, si es derecha o invertida, virtual o real, y su tamaño. (b) Ilustre la solución gráfica del problema, trazando rayos principales tanto para el espejo como para la lente.

43 Dos lentes delgadas, de longitudes focales f_1 y f_2 respectivamente, están en contacto. Pruebe que la longitud focal f de la combinación está dada por

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$

44 El objetivo de un microscopio tiene una longitud focal de 1.00 cm; el ocular contribuye con un aumento angular de 8 a una persona con un punto cercano de 25 cm. La distancia entre ambas lentes es de 15 cm. Halle (a) el aumento lateral del objetivo, (b) la longitud focal del ocular, (c) la potencia de las lentes, (d) el aumento del microscopio.

45 La longitud focal del objetivo de un microscopio es de 8.00 mm y la del ocular es de 20.0 mm. La distancia entre ambas lentes es 20.0 cm. La imagen final está en el infinito. Halle (a) la distancia entre el objetivo y el objeto observado, (b) el aumento lateral debido al objetivo, (c) el aumento total para un microscopista con un punto cercano de 25.0 cm.

46 La distancia focal del objetivo de un telescopio es de 96.0 cm y la del ocular es de 12.0 cm. El objeto y la imagen final están en el infinito. (a) Halle el aumento

angular del telescopio. (b) Si observa un árbol de 15.0 m de altura que está a 4.00 km de distancia, ¿cuál es el tamaño angular del objeto? (c) ¿Cuál es la altura de la imagen que el objetivo forma del árbol? (d) ¿Cuál es el tamaño angular de la imagen final para un observador muy cercano del ocular?

47 Se mira la Luna con un telescopio que tiene un objetivo de longitud focal 122 cm y un ocular de 4.00 cm de longitud focal. El ángulo que subtiende la Luna respecto a un observador en la Tierra es 0.52° . Tome como distancia a la Luna 380 000 km. Halle (a) el diámetro de la imagen formada por el objetivo, (b) el ángulo que subtiende la imagen final, (c) el aumento del telescopio, (d) el aumento lateral para un observador con un punto cercano de 25 cm.

48 Reubique al azar, sobre el eje principal, los puntos A , B , C y D de la figura 22.16 y, conservando el resto de la información, repita el ejemplo 22.6. (Si los rayos caen fuera de alguna lente, reduzca el ángulo de incidencia en $S_{1\alpha}$).



Capítulo 5

Interferencia

Contenido

Módulo 24

Desfase entre campos

Módulo 25

Interferencia de ondas de dos fuentes

Módulo 26

Interferencia de ondas de más de dos fuentes

Módulo 27

Interferencia en películas delgadas

La luz no solo se descompone por refracción como en un prisma, sino que cuando se refleja en una superficie con millones de escalones microscópicos como en un disco compacto, el desfase creado por ellos, y que depende de λ , hace que los campos reflejados interfieran y originen los intensos colores que se observan.

Presentación

A los efectos de la coincidencia espacial y temporal de dos o más ondas se les llama **efectos de interferencia**. El primer ejemplo que vimos fue el de ondas viajeras en sentidos opuestos e igual frecuencia en una cuerda, y que dieron lugar a ondas estacionarias; el segundo fue el de pulsos creados por la interferencia de ondas de frecuencia cercana e igual sentido de propagación. En este capítulo veremos la interferencia de ondas luminosas de la misma frecuencia que genera los colores de una burbuja de jabón, de una película de aceite sobre agua o los vivos colores de un disco compacto cuando refleja la luz solar o de una lámpara. Estos fenómenos no podemos explicarlos basándonos en el concepto de rayo, sin tener en cuenta la naturaleza ondulatoria de la luz, como ocurrió en el capítulo "Óptica geométrica". Ya debemos tener en cuenta parámetros específicos de las ondas, como son la fase, la frecuencia, la longitud de onda y la amplitud de los campos. Al tener en cuenta estos parámetros, entramos en el terreno de la "Óptica física", comprendido por los capítulos "Interferencia" y "Difracción".

La interferencia de la luz visible tiene importantes aplicaciones tecnológicas, en particular en el control de calidad en la industria y en la toma de medidas muy pequeñas.

Módulo 24

Desfase entre campos

Contenido

- 24.1 La interferencia y el desfase
 - 24.1.1 Incoherencia: dependencia temporal del desfase
 - 24.1.2 Coherencia: independencia temporal del desfase
 - 24.1.3 Plan para analizar la interferencia de dos campos
- 24.2 El principio de superposición y la ecuación de onda
- 24.3 Desfase entre dos puntos en un mismo rayo

Objetivos

1. Mostrar la importancia del desfase en el análisis de la interferencia de dos campos.
2. Plantear las condiciones para la interferencia constructiva y la interferencia destructiva.
3. Mostrar, como en el caso de las ondas elásticas, la conexión entre la ecuación lineal de onda y el principio de superposición.

Preguntas básicas

1. ¿Qué importancia tiene la coherencia en la interferencia?
2. ¿Qué es necesario para que un campo anule a otro, en todo instante, en un punto del espacio?
3. ¿La fase de una onda es relativa, esto es, depende del sistema de referencia, o es absoluta? ¿Y el desfase entre dos ondas?

Introducción

En el capítulo "Óptica geométrica", cuando varios rayos se encontraban nunca nos preguntamos por el desfase entre los campos. Suponemos que en el punto de encuentro la intensidad era más alta que en donde había menos rayos. Sin embargo, es posible que en ese punto los campos se cancelen y den un campo eléctrico neto cero y la intensidad sea nula. A veces luz más luz da oscuridad y no una mayor intensidad, así como un sonido puede cancelar otro y dar silencio. A continuación veremos cómo son posibles la interferencia destructiva y la interferencia constructiva con la luz; con ondas elásticas ya vimos tales interferencias en el fenómeno de pulsos y en la presencia de nodos y antinodos en una cuerda y en el aire dentro de un tubo.



Cuando los osciladores alcanzan sus posiciones de equilibrio en instantes diferentes decimos que están desfasados.

24.1 La interferencia y el desfase

En el punto P de la figura 24.1 se presenta interferencia entre los campos de los rayos de luz 1 y 2. Las características de la interferencia las determina el desfase en ese punto, $\delta(P, t)$, entre los campos allí presentes en el mismo instante t . Por definición de desfase,

$$\delta(P, t) = \phi_2(P, t) - \phi_1(P, t). \quad (24.1)$$

Para analizar la interferencia es esencial hallar, ante todo, el desfase.

Sea $\phi(A, t)$ la fase en el punto A y en el instante t del rayo 1, y $\Delta\phi_{PA}$ lo que difiere la fase en P respecto a la fase en A . La fase en P es, entonces,

$$\phi_1(P, t) = \phi(A, t) + \Delta\phi_{PA}. \quad (24.2)$$

De manera análoga, en el rayo 2,

$$\phi_2(P, t) = \phi(B, t) + \Delta\phi_{PB}. \quad (24.3)$$

Después de reemplazar en la ecuación general para el desfase, ecuación 24.1, las ecuaciones 24.2 y 24.3, obtenemos

$$\delta(P, t) = [\phi(B, t) - \phi(A, t)] + (\Delta\phi_{PB} - \Delta\phi_{PA}). \quad (24.4)$$

A los puntos A y B siempre los escogemos lo más cerca posible de P y que estén en el mismo frente de onda, pues debido a la propia definición de frente de onda como superficie cuyos puntos están en fase, se cumple que

$$\phi(A, t) = \phi(B, t), \quad (24.5)$$

y la ecuación 24.4 queda así,

$$\delta(P) = \Delta\phi_{PB} - \Delta\phi_{PA}. \quad (24.6)$$

Cuando $\delta(P)$ es un número par G_P (G_P : generador de pares) por π la interferencia es constructiva, y si es un impar G_I (G_I : generador de impares) por π es destructiva; si no es par ni impar, la interferencia no es constructiva ni destructiva. Existen infinitas formas de escribir los generadores de pares y de impares. Por ejemplo, G_I se puede escribir como

$$G_I = \dots, (2m - 1), (2m + 1), \dots, (2m + 1645), \dots; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Para generar el 3, quien escoja $G_I = 2m - 1$ debe hacer $m = 2$; quien escoja $G_I = 2m + 1$, debe hacer $m = 1$; quien escoja $G_I = 2m + 1645$, debe hacer $m = -821$. O sea que con $m = 2, 1$ o -821 se estaría describiendo lo mismo, solo que se ha escogido un G_I distinto en cada caso. En general, se debe escoger a $G_I = 2m - 1$ o $G_I = 2m + 1$, pues se debe preferir un número pequeño a un número grande si con ambos se describe lo mismo. En resumen, tenemos las tres siguientes condiciones:

Condición para interferencia constructiva,

$$\delta(P, t) = 2m\pi; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (24.7)$$

Condición para interferencia destructiva,

$$\delta(P, t) = (2m \pm 1)\pi; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (24.8)$$

No hay interferencia constructiva ni destructiva cuando

$$\delta(P, t) \neq m\pi; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (24.9)$$

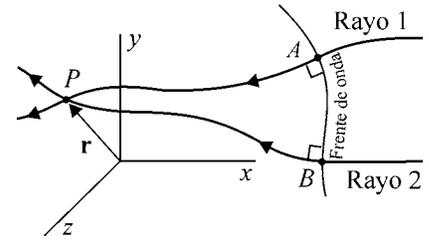


Figura 24.1 Interferencia en un punto P .

24.1.1 Incoherencia: dependencia temporal del desfase

La mesa de la figura 24.2a está iluminada por dos fuentes A y B , que emiten de una manera completamente independiente la una de la otra. Hablamos, en este caso, de fuentes incoherentes, y el desfase en P_1 depende del tiempo. De la ecuación 24.7 se pueden despejar los instantes, dados por m , en los que se presenta interferencia constructiva.

Si en cierto instante dicha ecuación se cumple para determinado m , como t siempre va en aumento, a continuación se deja de cumplir y se empieza a cumplir la desigualdad 24.9, más tarde se cumple la ecuación 24.8 y luego se repite este ciclo para el próximo m , y así indefinidamente. La frecuencia con que se pasa de interferencia constructiva a destructiva puede ser tan alta, que a nuestra vista, o para otro instrumento de detección, parece haber una iluminación continua. Esto mismo ocurre en cualquier otro punto P_2 y toda la superficie se ve iluminada en todo momento, sin contraste entre zonas oscuras y zonas brillantes.

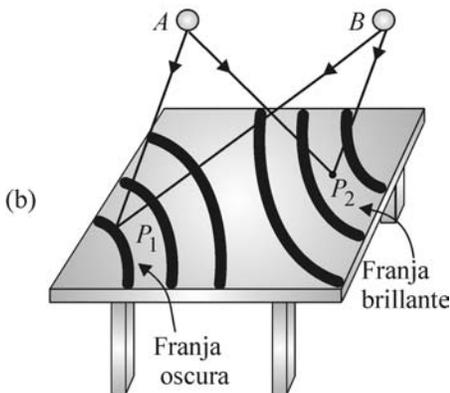
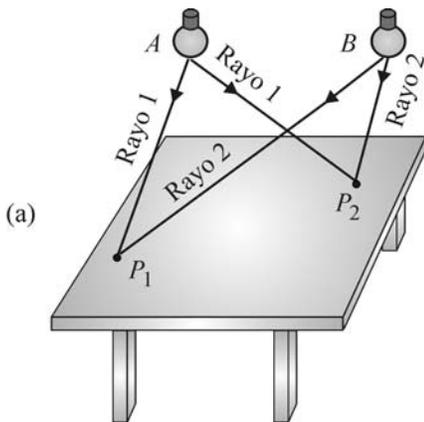


Figura 24.2 Mesa iluminada con fuentes (a) incoherentes, (b) coherentes.

24.1.2 Coherencia: independencia temporal del desfase

Cuando el desfase no depende del tiempo sino únicamente de la posición, se dice que las ondas son coherentes y la situación cambia notablemente respecto a la situación de *incoherencia* que acabamos de describir. Supongamos que las fuentes de la figura 24.2b son coherentes.

Sean $\delta(P_1) = -5\pi$ y $\delta(P_2) = 4\pi$. Las ondas en P_1 interfieren destructivamente y el campo es siempre 0 (suponemos que los campos tienen la misma amplitud y son colineales); lo mismo ocurre en puntos vecinos a P_1 con desfase de -5π , y así se genera una franja oscura o mínimo de interferencia. Las ondas en P_2 , en cambio, interfieren constructivamente y la magnitud del campo resultante varía entre 0 y $2E_0$, por estar en fase. En la vecindad de P_2 hay otros puntos donde el desfase es 4π , dando lugar a franjas brillantes, o máximos de interferencia.

A la distribución de intensidad, con contrastes altos entre zonas oscuras y zonas brillantes, como la de la figura 24.2b, se le conoce como **patrón de interferencia**.

En la situación real de que las fuentes A y B sean bombillas, los campos son incoherentes en toda la mesa, y no se observan, por supuesto, franjas.

24.1.3 Plan para analizar la interferencia de dos campos

El plan lo dan las ecuaciones 24.6, 24.7, 24.8 y 24.9; consiste de dos pasos:

1. Escogemos los dos puntos A y B más cercanos a P y que estén en un mismo frente de onda (figura 24.1); luego calculamos el desfase entre los puntos P y B , $\Delta\phi_{PB}$, y entre los puntos P y A , $\Delta\phi_{PA}$; restamos estos cambios para obtener δ .
2. Para interferencia constructiva o máximos, hacemos $\delta = 2m\pi$, con m entero; para interferencia destructiva o mínimos, hacemos $\delta = (2m \pm 1)\pi$; si δ no es ningún entero por π , la interferencia no es constructiva ni destructiva.

24.2 El principio de superposición y la ecuación de onda

El campo eléctrico de una onda que se propaga en el vacío, paralela al eje x , cumple la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2}.$$

La ecuación es lineal, pues ninguna de sus derivadas está a una potencia diferente a 1, por ejemplo, $(\partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2)^2$. La teoría de ecuaciones diferenciales dice que si N funciones son solución de una ecuación lineal, la suma de ellas también es solución. En estas condiciones formulemos, entonces, el *principio de superposición*:

El campo resultante de la presencia de N campos eléctricos \mathbf{E}_i es $\mathbf{E} = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i$. El campo \mathbf{E} cumple la ecuación de onda y representa, por lo tanto, una situación física posible.

24.3 Desease entre dos puntos en un mismo rayo

La fase del campo eléctrico de una onda electromagnética cuyo campo eléctrico se exprese como $E(r, t) = E_0 \text{sen}(\omega t - kr)$ es $\phi(r, t) = \omega t - kr$. La fase en un punto P_1 especificado por r_1 (figura 24.3) en el instante t es $\phi_1(r_1, t) = \omega t - kr_1$; en P_2 y en el mismo instante es $\phi_2(r_2, t) = \omega t - kr_2$. El desease es

$$\Delta\phi_{21} = \phi_2 - \phi_1 = (\omega t - kr_2) - (\omega t - kr_1) = k(r_1 - r_2) \equiv k\Delta r. \quad (24.10)$$

En lugar de usar Δr para conocer a $\Delta\phi$, podemos utilizar el tiempo Δt que la onda tarda en ir de P_1 a P_2 : multipliquemos y dividamos la anterior ecuación por la rapidez v de la onda, $\Delta\phi = vk\Delta r/v$. Como $vk = \omega$ y $\Delta r/v = \Delta t$, tenemos

$$\Delta\phi_{21} = \omega\Delta t. \quad (24.11)$$

Para averiguar $\Delta\phi$ podemos aplicar la ecuación 24.10 o la 24.11.

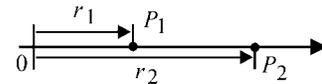


Figura 24.3 Desease entre dos puntos.

Resumen

El desease entre dos campos es $\delta(P) = \Delta\phi_{PB} - \Delta\phi_{PA}$; en A y B los campos están en fase. En interferencia constructiva, $\delta(P) = \text{par } \pi$ y en interferencia destructiva $\delta(P) = \text{impar } \pi$. Además de estas dos condiciones, los campos deben ser colineales, pues de no ser así aunque estuvieran en contrafase su suma no sería cero.

Para que se cree un patrón de interferencia es necesario que las ondas sean coherentes; una consecuencia de la exigencia de coherencia es que tengan igual frecuencia.

El desease entre dos puntos 1 y 2 en un mismo rayo, separados una distancia Δr a lo largo del rayo, es $\Delta\phi_{21} = k\Delta r = \omega\Delta t$, donde Δt es el tiempo que tarda la onda en recorrer Δr . Los puntos 1 y 2 pueden ser P y A o P y B de la figura 24.1, p. 235.

Módulo 25

Interferencia de ondas de dos fuentes

Contenido

- 25.1 Desfase entre las ondas
- 25.2 Patrón de interferencia
- 25.3 Máximos y mínimos de intensidad
- 25.4 Intensidad debida a dos ondas incoherentes

Objetivos

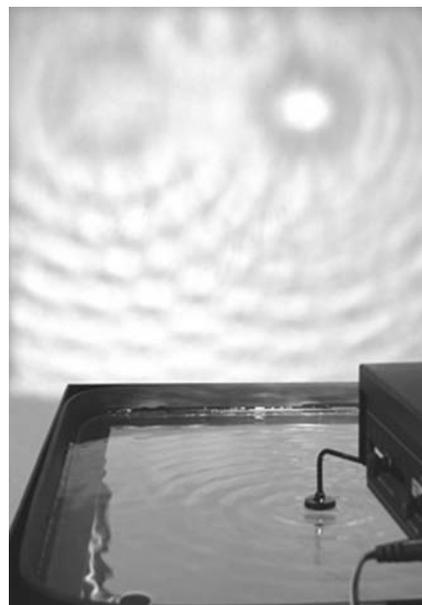
1. Obtener la amplitud resultante del campo resultante de la interferencia de dos ondas procedentes de fuentes puntuales.
2. Hallar la posición de los máximos y mínimos de intensidad.
3. Hallar el ancho de los máximos.
4. Comparar la intensidad debida a dos campos coherentes con la de dos campos incoherentes.

Preguntas básicas

1. ¿Cuál es el procedimiento para hallar la intensidad debida a la interferencia de varias ondas?
2. ¿Qué ocurre en el patrón de interferencia si en el trayecto de una de las ondas se cambian las propiedades del medio?

Introducción

Cuando una onda incide sobre varios agujeros en una superficie, cada uno de ellos actúa como un nuevo emisor de ondas; el campo resultante es la suma de los campos procedentes de los agujeros. Cuando los agujeros son dos rendijas paralelas, el experimento se conoce como **experimento de Young**, y está entre los experimentos más importantes de la física. A continuación iniciamos su estudio considerando dos fuentes puntuales; pero como un agujero realmente tiene un ancho, aún queda faltando tener en cuenta este hecho, asunto del que se encarga el próximo capítulo, "Difracción".



En una pantalla se proyecta amplificada la interferencia de dos ondas en la superficie del agua de una cubeta, mostrando zonas donde se refuerzan y zonas donde se cancelan. Thomas Young es célebre por este experimento, pero por haberlo hecho con luz en lugar de ondas mecánicas.

25.1 Desfase entre las ondas

Consideremos el caso de la presencia en el espacio de dos ondas coherentes y examinemos la interferencia o superposición de ellas en un punto P . La distancia de P a una fuente es r_1 y a la otra fuente es r_2 . Las ondas son

$$E_1(P, t) = E_{01}(P) \text{sen}(\omega_1 t - k_1 r_1), \quad E_2(P, t) = E_{02}(P) \text{sen}(\omega_2 t - k_2 r_2). \quad (25.1)$$

Las fases son $\phi_1(P, t) = \omega_1 t - k_1 r_1$ y $\phi_2(P, t) = \omega_2 t - k_2 r_2$; el desfase es

$$\delta(P, t) = \phi_2(P, t) - \phi_1(P, t) = (\omega_2 - \omega_1)t + k_1 r_1 - k_2 r_2. \quad (25.2)$$

Como los campos son coherentes, δ no depende del tiempo y $\omega_1 = \omega_2$. Esto quiere decir que para observar un patrón de interferencia y no una iluminación sin contrastes, las ondas deben ser de la misma frecuencia. Las frecuencias ópticas son del orden de 10^{15} Hz (esta es ν , no ω), y garantizar que las frecuencias sean exactamente iguales, y no aproximadamente iguales, especialmente a estas frecuencias tan altas, es imposible utilizando fuentes independientes. La igualdad la garantizamos haciendo incidir una onda monocromática (monocromática quiere decir una única frecuencia) sobre una superficie opaca con dos pequeños agujeros A y B (figura 25.1); de acuerdo con el principio de Huygens, cada agujero se convierte en un emisor secundario de ondas.

No hablaremos de ω_1 ni de ω_2 , ya que las frecuencias angulares son iguales, sino simplemente de ω . Además, el medio donde está todo el rayo 1 es el mismo del rayo 2, y la rapidez de las ondas es igual. Esto hace que k_1 sea igual a k_2 , $k_1 = \omega/v_1 = \omega/v_2 = k_2$. No hablaremos tampoco de k_1 ni de k_2 , sino de k . La ecuación 25.2 toma la forma

$$\delta(P) = (\omega - \omega)t + kr_1 - kr_2 = k(r_1 - r_2). \quad (25.3)$$

Si en el trayecto de uno de los rayos se intercalara un lámina transparente, la expresión para δ no sería la anterior, puesto que v_1 ya no sería igual, en todo el trayecto r_1 , a v_2 .

Note que la ecuación 25.3 coincide con la ecuación 24.6, con $\Delta\phi(PB) = -kr_2$ y $\Delta\phi(PA) = -kr_1$, y que la longitud PA de la figura 24.1 es r_1 de la figura 25.1, y PB es r_2 . Hemos escrito $\Delta\phi(PA) = -kr_1$ porque en la fase de las ecuaciones 25.1 la parte espacial tiene signo negativo; sería $\Delta\phi(PA) = kr_1$ si los campos se hubieran escrito como $E_1(P) = E_{01}(P) \text{sen}(k_1 r_1 - \omega_1 t)$ y $E_2(P) = E_{02}(P) \text{sen}(k_2 r_2 - \omega_2 t)$.

Sea $\Delta r \equiv r_1 - r_2$. A Δr se le denomina **diferencia de trayectos** o **de caminos geométricos**. La ecuación 25.3 se escribe

$$\delta(P) = k(r_1 - r_2) = k\Delta r. \quad (25.4)$$

Es muy importante mantener presente que las ecuaciones 24.6 y 25.4 se cumplen cuando $\phi(A, t) = \phi(B, t)$. En la figura 25.1 se ilustra cómo logramos esta igualdad de fases: se hace incidir *perpendicularmente* una onda plana sobre una pantalla plana con dos agujeros. Como los frentes de onda y los rayos son perpendiculares entre sí, entonces la pantalla coincide con un frente de onda y así A y B quedan en fase en todo instante. (Recuerde que un frente de onda es una superficie conformada por puntos en fase). Si la luz llegara inclinada (ejemplo 25.1, p. 245), los campos en las rendijas no estarían en fase entre sí por estar en diferentes frentes de onda y no se cumpliría la ecuación 25.3.

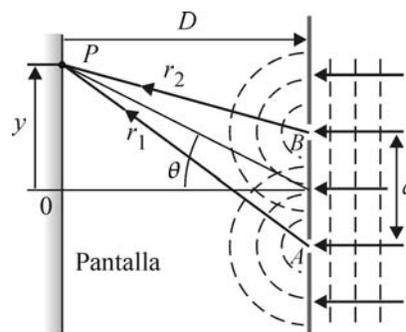


Figura 25.1 Interferencia por ondas de dos fuentes.

25.2 Patrón de interferencia

Definamos otras variables necesarias para el tratamiento cuantitativo de la interferencia: la separación entre las fuentes es a ; la pantalla con los agujeros y la pantalla de observación son paralelas y la distancia que las separa es D ; el origen de coordenadas es el punto de intersección entre la mediatriz del segmento AB y la pantalla; θ se denomina **ángulo de observación**; la coordenada y también se define en la figura.

En un primer acercamiento al problema de hallar la intensidad debida a la interferencia de N ondas, se piensa fácilmente en hallar primero la intensidad de cada una de ellas con la ecuación $I_i = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E_{0i}^2$, y luego sumarlas, $I = \sum_{i=1}^N I_i$. Este acercamiento no da lugar a efectos de interferencia como, por ejemplo, que una onda pueda cancelar a otra y dar como resultado una intensidad nula. *El camino correcto es hallar primero la amplitud del campo resultante E_0 y luego aplicar*

$$I = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E_0^2. \quad (25.5)$$

Suponemos que los campos en P son colineales, lo que lleva a que los rayos AP y BP de la figura 25.1 sean, aproximadamente, paralelos. Esta aproximación es válida si la luz utilizada tiene polarización lineal y P está alejado de las fuentes, donde alejado quiere decir $r_1 \gg a$ y $r_2 \gg a$; así podemos tratar a los campos como escalares positivos o negativos.

Las fuentes A y B son de la misma potencia, lo que se traduce en que tienen la misma área, ya que $P = IA$. Al ser de la misma potencia, y como $r_1 \approx r_2$, la amplitud $E_{01}(P) \approx E_{02}(P)$, debido a que A y B emiten ondas esféricas por ser agujeros pequeños, y para las ondas esféricas $E_0 \propto 1/r$. Las ecuaciones 25.1 adoptan la forma

$$E_1(P, t) = E_{01}(P) \sin(\omega t - kr_1), \quad E_2(P, t) = E_{01}(P) \sin(\omega t - kr_2). \quad (25.6)$$

El campo resultante es (sección 24.2, p. 237)

$$E(P, t) = E_1(P, t) + E_2(P, t) = E_{01}(P) \sin(\omega t - kr_1) + E_{01}(P) \sin(\omega t - kr_2).$$

En P la fase del primer campo es

$$\phi_1 = \omega t - kr_1. \quad (25.7)$$

Despejando a kr_2 de la ecuación 25.4, la fase de E_2 se escribe como $\phi_2 = \omega t - kr_2 = \omega t - (kr_1 - \delta) = \phi_1 + \delta$. Podemos escribir los campos, entonces, como

$$E_1 = E_{01} \sin \phi_1, \quad E_2 = E_{01} \sin(\phi_1 + \delta). \quad (25.8)$$

La suma de dos funciones seno de la misma frecuencia angular da otra función seno de igual frecuencia, con amplitud E_0 y constante de fase α ,

$$E(P, t) = E_{01} \sin \phi_1 + E_{01} \sin(\phi_1 + \delta) = E_0(P) \sin(\omega t + \alpha).$$

El máximo valor que E adopta es su amplitud E_0 y es independiente de α . Para hallar a $I(P)$, hallemos primero a $E_0(P)$; el método más sencillo es el de **fasores**, figura 25.2 (**fasor** quiere decir *vector rotante*): en esta figura E_1 es la componente vertical de un *vector ficticio* E_{01} que forma un ángulo ϕ_1 con el eje horizontal (ecuación 25.8); como $\phi_1 = \omega t - kr_1$, quiere decir que E_{01} rota con una frecuencia $\nu = \omega/2\pi$ a medida que pasa el tiempo, y con igual frecuencia varía su proyección E_1 . De igual manera, E_2 es la componente vertical de un *vector ficticio* E_{02} que forma un ángulo δ con E_{01}

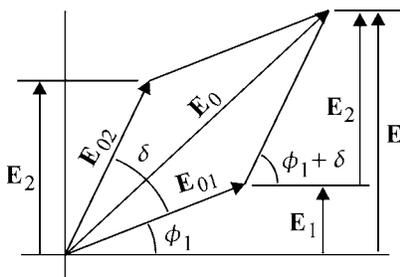


Figura 25.2 Diagrama de fasores para hallar E_0 .

(ecuación 25.8). Vemos que E es la componente vertical de la diagonal del paralelogramo de lados E_{01} y E_{02} . El máximo valor de E se logra cuando la diagonal está vertical, de donde concluimos que esta es E_0 . Según la ley del coseno, y aplicando la identidad $1 + \cos \delta = 2 \cos^2(\delta/2)$, obtenemos

$$E_0(P) = \sqrt{E_{01}^2 + 2E_{01}E_{01} \cos \delta + E_{01}^2} = E_{01} \sqrt{2(1 + \cos \delta)} = 2E_{01} \cos(\delta/2).$$

La intensidad promedio es

$$I(P) = \frac{1}{2} c \epsilon_0 [2E_{01}(P) \cos(\delta/2)]^2 = 2c \epsilon_0 E_{01}^2(P) \cos^2(\delta/2).$$

Definamos a I_0 como

$$I_0(P) = 2c \epsilon_0 E_{01}^2(P). \tag{25.9}$$

Con esta definición, la intensidad se expresa como

$$I(P) = I_0(P) \cos^2(\delta/2). \tag{25.10}$$

25.3 Máximos y mínimos de intensidad

En el origen, $r_1 = r_2$, y como $\phi(A) = \phi(B)$, entonces las ondas llegan a P en fase ($\delta = 0$), lo que significa que hay un máximo de interferencia en el origen. Cuando nos alejamos del origen, $r_1 \neq r_2$ y $\delta \neq 0$. Hay ciertos θ para los que $\delta = 2m\pi$, presentándose interferencia constructiva; hay otros ángulos de observación en los que $\delta = (2m \pm 1)\pi$, presentándose interferencia destructiva; en los demás ángulos la interferencia no es ni constructiva ni destructiva.

Hallemos a δ en términos de θ : con centro en P tracemos el arco BE (figura 25.3). Vemos que $r_1 = AP$, $r_2 = BP = EP$, y por lo tanto $r_1 - r_2 = AE$. Como r_1 y r_2 son mucho mayores que a , el arco BE es casi igual a la cuerda BE , y podemos tratar como un triángulo rectángulo a ABE en el que se cumple

$$\Delta r = r_1 - r_2 = a \text{ sen } \theta. \tag{25.11}$$

Reemplacemos en la ecuación 25.4,

$$\delta(P) = \frac{2\pi}{\lambda} a \text{ sen } \theta. \tag{25.12}$$

El pequeño segmento AE determina cómo es la interferencia, pues es el causante del desfase cuando las ondas llegan a P .

Los máximos de intensidad se presentan cuando en la ecuación 25.10, $\cos^2(\delta/2) = 1$; esto implica que $\delta/2 = m\pi$. Aunque un máximo tiene determinado ancho ($\Delta\theta$ o Δy), a la posición del máximo valor de I llamamos posición de ese máximo (θ o y). En la figura 25.8 se ilustran la posición angular del máximo de orden 2, θ_2 ; la posición, en unidades de longitud, del mismo máximo, y_2 ; y su ancho, $\Delta\theta$ y Δy . Reemplacemos en esta igualdad a la ecuación 25.12 para obtener la ecuación que da la posición angular de los máximos de interferencia,

$$\Delta r = a \text{ sen } \theta = m\lambda; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{25.13}$$

Al entero m se le llama **máximo de interferencia de orden m** . La anterior ecuación es casi que obvia, puesto que los campos en A y B están en fase, y si el trayecto r_1 es λ mayor que r_2 (figura 25.4), entonces los campos están en fase en P , o más exactamente, desfasados 2π . Físicamente, un desfase de 0 (o sea estar en fase) es igual a un desfase de $2m\pi$, con m entero.

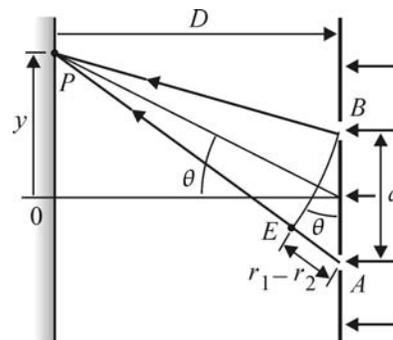


Figura 25.3 El segmento AE causa el desfase en P cuando A y B emiten en fase.

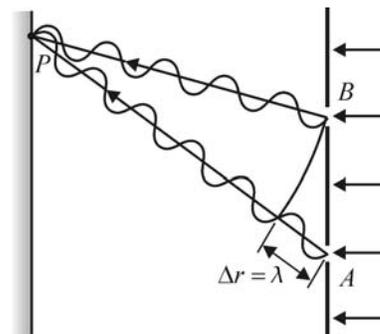


Figura 25.4 La interferencia la determina Δr a partir de los puntos en fase A y B .

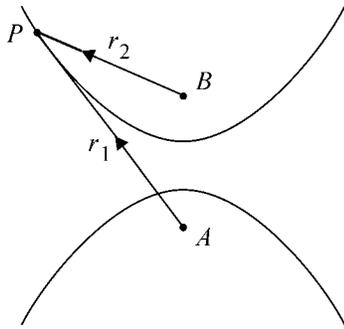


Figura 25.5 Hiperboloides de revolución.

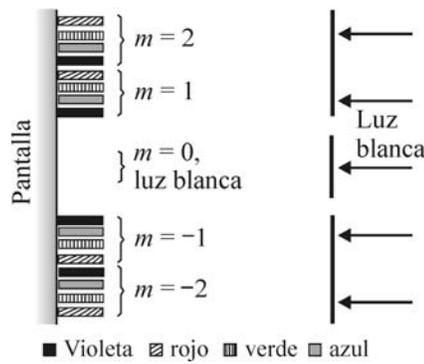


Figura 25.6 Descomposición espectral de la luz blanca.

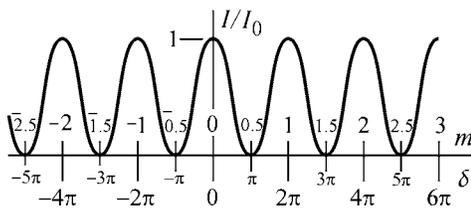


Figura 25.7 Patrón de interferencia debido a ondas de dos fuentes puntuales.

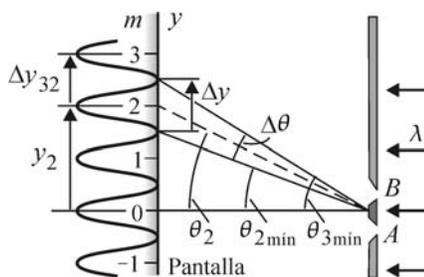


Figura 25.8 Posición de máximos, mínimos y ancho de un máximo.

Si A y B son fuentes puntuales tridimensionales, $r_1 - r_2 = m\lambda$ es la ecuación de hiperboloides de revolución, un hiperboloide por cada m (figura 25.5), con eje la línea recta determinada por las fuentes.

En $\theta = 0$, $m = 0$ para cualquier λ ; esto quiere decir que cuando utilizamos luz blanca, todos los colores se mezclan en el origen (figura 25.6), pero se separan desde el primer orden, el cual ocurre en $\theta = \lambda/a$ si $\theta \ll 1$. Como a menor λ menor θ , el violeta es el color que menos se desvía y el rojo es el que más, dentro de cierto m ; *el rojo se difracta más que el violeta*. Este ordenamiento es contrario a la separación de colores por refracción, por ejemplo, con un prisma o una gota de agua, que viene a ser un prisma esférico; el arco iris es producido por un gran número de gotitas de agua. Al conjunto de colores con igual m se le llama **espectro de orden m** .

Los mínimos cumplen que

$$a \sin \theta = (2m - 1) \frac{\lambda}{2} = (m - \frac{1}{2})\lambda; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (25.14)$$

Escogimos como contador de impares a $(2m - 1)$ simplemente para que el primer mínimo a la derecha de $\theta = 0$ coincida con $m = 1$. Cuidemos en la cuenta de que para obtener las ecuaciones 25.13 y 25.14 no es necesario haber encontrado previamente la ecuación 25.10. Bastaba con igualar la ecuación 25.4 a $2m\pi$ o $(2m + 1)\pi$ y hacer la aproximación $\Delta r \approx a \sin \theta$.

Para obtener la intensidad en función de θ , reemplacemos la ecuación 25.12 en la ecuación 25.10,

$$I(\theta) = I_0(P) \cos^2[\pi(a/\lambda) \sin \theta]. \quad (25.15)$$

El patrón de intensidad de dos fuentes puntuales está regido por la función coseno cuadrado. En la figura 25.7 graficamos a I/I_0 contra m en la parte superior del eje horizontal, con $m = (a \sin \theta)/\lambda$, y contra los respectivos δ en la parte inferior; note que a mayor θ mayor es m . Cuando m es entero se obtienen máximos (interferencia constructiva), cuando es $\pm 0.5, \pm 1.5, \pm 2.5, \dots$ se obtienen mínimos (interferencia destructiva); para valores distintos, ni máximos ni mínimos.

En muchas situaciones reales importa solo lo que ocurre muy cerca del origen, esto es, en puntos P con $y \ll D$, o sea en $\theta \ll 1$ (vea la figura 25.3). En estos casos, son útiles las aproximaciones $\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta \approx y/D$. Reemplazando $\sin \theta \approx y/D$ en la ecuación 25.15, obtenemos la intensidad en función de y ,

$$I(y) = I_0(P) \cos^2 \frac{\pi a y}{D \lambda}, \quad \text{para } y \ll D. \quad (25.16)$$

La ecuación 25.13 se aproxima a

$$a\theta = m\lambda; \quad \theta \ll 1 \quad \text{y} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad (25.17)$$

y la ecuación 25.14 se aproxima a

$$a\theta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}; \quad \theta \ll 1 \quad \text{y} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (25.18)$$

El ancho angular $\Delta\theta$ (figura 25.8) de un máximo es la *separación angular entre los mínimos que limitan el máximo*. Apliquemos el operador Δ a ambos lados de la ecuación 25.18 y despejemos,

$$\Delta\theta = (\lambda/a)\Delta m.$$

Para el ancho de cualquier máximo, $\Delta m = 1$,

$$\Delta\theta = \lambda/a, \quad \text{para } \theta \ll 1. \quad (25.19)$$

Reemplazando a $\theta \approx y/D$ en las anteriores ecuaciones y despejando a y se obtienen las variables respectivas, en unidades de longitud, para los puntos P con $y \ll D$.

En la figura 25.8 se ilustran la posición del segundo y tercer mínimos, $\theta_{2 \text{ mín}}$ y $\theta_{3 \text{ mín}}$; el ancho angular del máximo de segundo orden, $\Delta\theta = \theta_{3 \text{ mín}} - \theta_{2 \text{ mín}}$; y la separación, Δy_{32} , entre los máximos de orden 3 y 2. Debajo del eje horizontal, θ , y y m son negativos; el espectro es simétrico respecto a este eje.

25.4 Intensidad debida a dos ondas incoherentes

La intensidad debida a una sola rendija es $I_1 = (1/2)c\epsilon_0 E_{01}^2$. Para hallar la debida a las dos rendijas, reemplacemos la ecuación 25.13 en la ecuación 25.15, $I = I_0 \cos^2 m\pi = I_0$. Según la ecuación 25.9, $I_0 = 4I_1$. Vemos que en los máximos la intensidad es cuatro veces mayor con dos rendijas que con una, y no el doble, como se podría pensar. Como la energía se conserva, quiere ello decir que con dos rendijas coherentes emitiendo simultáneamente la intensidad se redistribuye y en algunos lugares aumenta hasta al cuádruple, mientras que en otros se reduce a cero.

Veamos qué ocurre si el desfase cambia continuamente con el tiempo en todos los puntos de la pantalla, esto es, si las dos fuentes son incoherentes. Debemos promediar temporalmente la ecuación 25.10; como el promedio de coseno cuadrado es $1/2$, la intensidad es $I = I_0/2 = 4I_1/2 = 2I_1$. En todos los puntos de la pantalla la intensidad es el doble a si solo hubiera una fuente, y el patrón de máximos y mínimos es reemplazado por una iluminación uniforme, como es el caso de una habitación iluminada por dos bombillas.

Ejemplo 25.1 Una onda plana incide sobre dos rendijas con un ángulo θ' (figura 25.9). Halle las ecuaciones, en función del ángulo de observación θ , que dan la posición de los máximos y los mínimos en una pantalla alejada de las rendijas.

Solución. Pantalla alejada quiere decir que los rayos que salen de las rendijas y se encuentran en P se pueden tratar como paralelos, aunque en la figura no lo sean por no estar a escala.

Sigamos el plan de la sección 24.1.3, p. 236, para hallar lo pedido. Escogemos los puntos A y B como se indica en la figura 25.9, que es equivalente a la figura 24.1, p. 235. Con un compás centrado en P trazamos el arco AE , y entonces $PA = PE$.

$$\Delta\phi_{PB} = k(PE + EF + FB) \quad \text{y} \quad \Delta\phi_{PA} = kPA = kPE.$$

Restemos (ecuación 24.6, p. 235),

$$\delta(P) = \Delta\phi_{PB} - \Delta\phi_{PA} = k(EF + FB).$$

Como $a \ll D$, el arco AE es casi igual a la cuerda AE y podemos tratar a AEF como un triángulo rectángulo en el que $EF \approx a \sin \theta$; además, $FB = a \sin \theta'$. Reemplacemos,

$$\delta(P) = k(a \sin \theta + a \sin \theta') = (2\pi/\lambda)a(\sin \theta + \sin \theta').$$

Igualemos esta ecuación a la ecuación 24.7, p. 235, para obtener la ecuación que da los máximos,

$$a(\sin \theta + \sin \theta') = m\lambda; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (25.20)$$

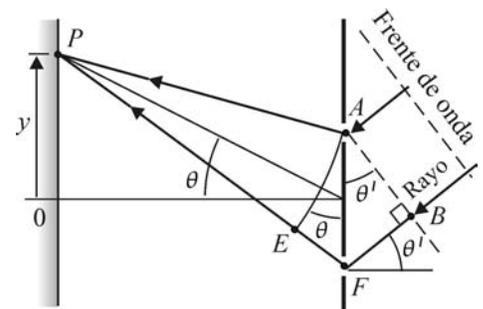


Figura 25.9 La onda no incide normalmente en las rendijas.

Con la ecuación 24.8 obtenemos la ecuación que da la posición angular de los mínimos,

$$a(\sin \theta + \sin \theta') = (m + \frac{1}{2})\lambda; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Cuando a , θ , θ' y λ son tales que no se cumple ninguna de las dos últimas ecuaciones, entonces en ese θ no hay ni un máximo ni un mínimo.

Una consecuencia de importancia es que *el máximo de orden cero se obtiene en la dirección en que la onda incide sobre las rendijas*. Hagamos $m = 0$ en la ecuación 25.20 y cancelemos a para obtener $\sin \theta = -\sin \theta'$ o $\theta = -\theta'$. En la figura 25.9 están dibujadas θ y θ' , entonces $\theta = -\theta'$ estará al otro lado de la normal trazada en F (figura 25.10). Vemos en esta figura que *el máximo de orden cero ya no se obtiene en $\theta = 0$ sino en $\theta = -\theta'$* .

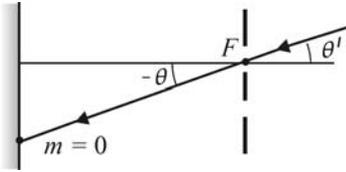


Figura 25.10 El patrón se desplaza.

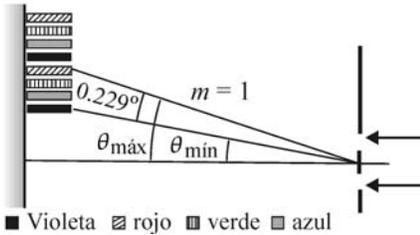


Figura 25.11 Espectro de primer orden.

Ejemplo 25.2 En un dispositivo de dos ranuras la separación entre ellas es de 0.1 mm. Si el dispositivo se ilumina con luz blanca, halle el ancho angular del espectro de primer orden. El valor de λ visible está entre 380 y 780 nm.

Solución. Los datos son: $a = 0.1 \text{ mm} = 10^{-4} \text{ m}$, primer orden quiere decir $m = 1$ para cualquier λ , $\lambda_{\text{mín}} = 3.80 \times 10^{-7} \text{ m}$, $\lambda_{\text{máx}} = 7.8 \times 10^{-7} \text{ m}$.

De la ecuación 25.13,

$$\sin \theta_{\text{mín}} = \frac{m\lambda_{\text{mín}}}{a} = \frac{1(3.80 \times 10^{-7} \text{ m})}{10^{-4} \text{ m}} = 3.80 \times 10^{-3}.$$

Como este ángulo es mucho menor que 1, $\theta_{\text{mín}} \approx \sin \theta_{\text{mín}} = 0.0038$ (figura 25.11). De igual manera,

$$\sin \theta_{\text{máx}} = \frac{m\lambda_{\text{máx}}}{a} = \frac{1(7.80 \times 10^{-7} \text{ m})}{10^{-4} \text{ m}} = 0.0078 \approx \theta_{\text{máx}}.$$

El ancho angular del espectro de primer orden es

$$\Delta\theta = \theta_{\text{máx}} - \theta_{\text{mín}} = 0.0078 - 0.0038 = 0.0040 = 0.229^\circ.$$

Ejemplo 25.3 Un dispositivo de dos ranuras se ilumina con luz monocromática; el patrón de interferencia se observa a una distancia de 80 cm del dispositivo. La separación entre las ranuras es de 0.1 mm. Se halla que la segunda franja brillante está a 8.0 mm de la franja central. Encuentre (a) la longitud de onda de la luz utilizada, (b) el ancho, en mm, de un máximo principal cerca del origen.

Solución. Identifiquemos los datos (figura 25.3): $a = 0.1 \text{ mm} = 10^{-4} \text{ m}$, $D = 0.80 \text{ m}$, $m = 2$, $y = 8 \text{ mm} = 8 \times 10^{-3} \text{ m}$.

(a) Como $\theta \ll 1$ porque $y \ll D$ ($8 \text{ mm} \ll 800 \text{ mm}$), podemos escribir

$$\theta \approx \sin \theta \approx \tan \theta = \frac{y}{D} = \frac{8 \times 10^{-3} \text{ m}}{0.8 \text{ m}} = 0.01 = 0.573^\circ.$$

Despejemos a λ de la ecuación 25.17,

$$\lambda = \frac{a\theta}{m} = \frac{(10^{-4} \text{ m})0.01}{2} = 500 \text{ nm}.$$

(b) Cerca del origen quiere decir $\theta \ll 1$ y $\theta \approx \tan \theta = y/D$. Reemplacemos en la ecuación 25.19,

$$\Delta\left(\frac{y}{D}\right) = \frac{\lambda}{a};$$

despejemos,

$$\Delta y = \frac{D\lambda}{a} = \frac{(0.8 \text{ m})(5 \times 10^{-7} \text{ m})}{10^{-4} \text{ m}} = 4 \times 10^{-3} \text{ m} = 4 \text{ mm}.$$

Ejemplo 25.4 En la trayectoria de uno de los rayos procedentes de una de las rendijas en un dispositivo de dos rendijas se intercala una laminilla de grosor d e índice de refracción n (figura 25.12). Halle el mínimo grosor para que en $\theta = 0$ se observe un mínimo en lugar de un máximo y evalúelo para $n = 1.5$. (La figura no está a escala, $a \ll D$, y los rayos se deben considerar paralelos al eje horizontal en $\theta = 0$; el grosor se ha exagerado).

Solución. Sigamos el plan de la página 236. El campo en A de la figura 25.12 está en fase con el campo en B por estar en el mismo frente de onda. Aunque en $\theta = 0$ los caminos r_1 y r_2 sean iguales, en P no están en fase ya que los medios no son idénticos. La velocidad de la onda disminuye en la laminilla y en consecuencia la longitud de onda también disminuye en ella, por lo que hay más ciclos del campo en r_1 que en r_2 , produciéndose así un mayor cambio de fase a lo largo de r_1 que de r_2 .

Los rayos de la figura 25.13 se encuentran en un punto P lejano que no se muestra. La laminilla está entre las líneas L_1 y L_2 paralelas a la línea AB . Cuando las ondas pasan por L_1 aún están en fase, pero cuando pasan por L_2 están desfasadas debido a que aunque ambas recorran la misma distancia d , la periodicidad espacial λ de la onda 1 ha disminuido. El desfase cuando pasan por L_2 se conserva hasta que se encuentren en la pantalla, ya que después de L_2 las ondas recorren trayectos iguales con periodicidad igual. En conclusión, el desfase en P se causa por el cambio de fase de cada onda al ir de L_1 a L_2 ,

$$\begin{aligned} \delta(P) &= (\Delta\phi_{L_2L_1})_{\text{Onda 1}} - (\Delta\phi_{L_2L_1})_{\text{Onda 2}} = k'd - kd \\ &= \frac{2\pi}{\lambda'}d - \frac{2\pi}{\lambda}d = \frac{2\pi n}{\lambda}d - \frac{2\pi}{\lambda}d = \frac{2\pi d}{\lambda}(n - 1). \end{aligned}$$

En la interferencia destructiva el desfase debe ser un número impar por π (ecuación 24.8, p. 235),

$$\frac{2\pi d}{\lambda}(n - 1) = (2m + 1)\pi; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Despejemos el grosor de la laminilla,

$$d = \frac{(2m + 1)\lambda}{2(n - 1)}.$$

El mínimo grosor se consigue con $m = 0$,

$$d_{\text{mín}} = \frac{\lambda}{2(n - 1)} = \frac{\lambda}{2(1.5 - 1)} = \lambda.$$

Cuando la laminilla tiene un grosor de λ en el vacío, en ella se acomodan $1.5\lambda'$, y aunque en L_1 las ondas estén en fase, al pasar por L_2 tienen un desfase de π porque la onda 1 recorre media longitud de onda más que la onda 2 en el trayecto d (figura 25.13). Al intercalar la laminilla, todo el patrón de interferencia se desplaza, y donde antes había un máximo ahora hay un mínimo.

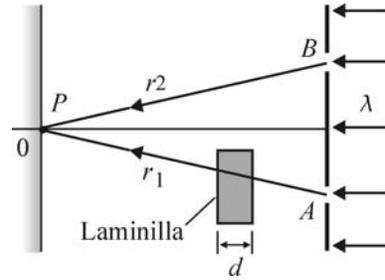


Figura 25.12

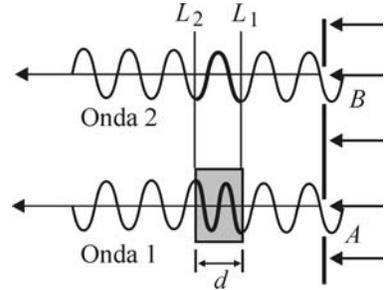


Figura 25.13

Resumen

Para que dos ondas sean coherentes es necesario que $\nu_1 = \nu_2$. Para hallar la intensidad producida por la presencia de varias ondas no se deben sumar las intensidades individuales, sino que primero se debe hallar la amplitud resultante E_0 y luego aplicar la fórmula $I = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E_0^2$ (ondas en el vacío).

El patrón de interferencia producido por dos fuentes puntuales que emiten en fase está dado por la función coseno cuadrado,

$$I = I_0 \cos^2[\pi(a/\lambda) \text{sen } \theta].$$

La posición angular θ de los máximos de interferencia cumplen que $a \sin \theta = m\lambda$; m es el orden del máximo. Los mínimos de interferencia cumplen que $a \sin \theta = (2m \pm 1)\lambda/2$; m es un entero.

Cuando $\theta \ll 1$, $\sin \theta \approx \theta$ y el ancho angular de los máximos es $\Delta\theta \approx \lambda/a$. Esta es también la separación angular entre máximos contiguos.

Cuando las ondas son coherentes, la interferencia da un patrón estable de máximos y mínimos, con zonas contrastantes de baja y de alta intensidad, y la intensidad no es la suma de intensidades de las ondas individuales. Cuando son incoherentes se pierde el contraste y la intensidad sí es la suma de las intensidades. Como la energía que llega a la pantalla de observación es la misma sean coherentes o no las fuentes, quiere decir que cuando se aprecia un patrón la energía se redistribuye sobre la pantalla, comparando con la distribución de energía cuando son incoherentes.

Módulo 26

Interferencia de ondas de más de dos fuentes

Contenido

- 26.1 Patrón de interferencia
- 26.2 Máximos y mínimos de intensidad

Objetivos

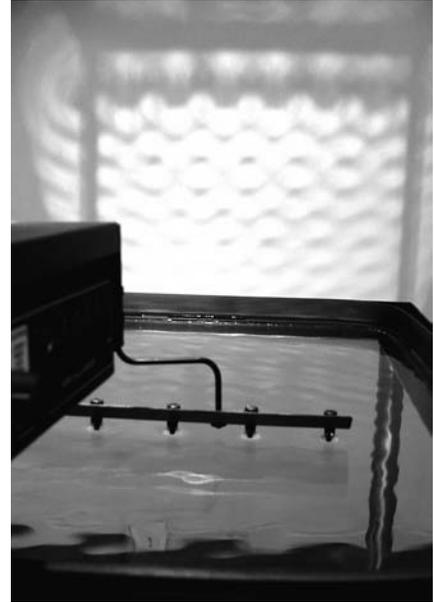
1. Obtener la amplitud del campo resultante de la interferencia de ondas procedentes de más de dos fuentes.
2. Hallar la posición de los máximos y mínimos del patrón de interferencia.
3. Definir qué es un máximo secundario.
4. Ver los diferentes contadores que se presentan en el estudio de la interferencia de varias ondas.

Preguntas básicas

1. ¿Cómo se redistribuye la intensidad cuando aumenta el número de fuentes?
2. ¿Qué se mantiene constante y qué no al cambiar el número de fuentes?

Introducción

Un paso obvio después de examinar la interferencia de dos ondas es examinar la interferencia de cualquier número de ellas, objetivo del presente módulo. Veremos que el procedimiento es una generalización del caso de dos fuentes. Además de los máximos principales presentes con dos fuentes, aparecen máximos menos intensos llamados **máximos secundarios**.



En una pantalla se proyecta amplificada la interferencia de ondas de varias fuentes en la superficie del agua de una cubeta. A mayor número de fuentes más estrechos son los máximos.

26.1 Patrón de interferencia

Consideremos N fuentes puntuales, colineales, de igual potencia y que emiten en fase ondas armónicas (figura 26.1). Como en el caso anterior de dos fuentes, la potencia igual la conseguimos haciendo pequeños agujeros de igual diámetro en una pantalla y la emisión en fase la conseguimos haciendo incidir, perpendicularmente sobre esa pantalla, una onda monocromática plana. Los N agujeros, de acuerdo con el principio de Huygens, se convierten en emisores de ondas. En un punto P donde estén presentes las ondas, la amplitud del campo resultante depende del desfase entre ellas, causado por los diferentes caminos que deben recorrer desde los agujeros hasta P . Supondremos que el segmento que ocupan las N fuentes, o sea la separación entre la primera y la última, es mucho menor que la distancia de cualquiera de ellas a P ; esto no se cumple en la figura 26.1, ya que no está a escala. Tal suposición nos garantiza que los diferentes rayos que llegan a P son, aproximadamente, paralelos. Para no tener que ubicar demasiado lejos la pantalla de observación y poder tratar como paralelos los rayos que salen de las fuentes, se ubica la pantalla en el plano focal de una lente convergente; es decir, la lente "nos acerca el infinito" al plano focal de ella (figura 26.2). En esta figura mostramos dos puntos de observación arbitrarios P_1 y P_2 donde hay interferencia. Después de un análisis se puede saber en cuál de ellos se presenta un máximo o un mínimo de intensidad, o una intensidad intermedia.

La suposición de que el punto de observación está alejado de las fuentes implica que los N campos eléctricos son coplanares. Pero además de coplanares deben ser colineales y así se nos simplifica el tratamiento de los N vectores a simples escalares con signo (+) o (-).

En P el campo eléctrico procedente de la fuente i -ésima es

$$E_i(P) = E_{0i}(P) \text{sen}(\omega t - kr_i). \tag{26.1}$$

Debido a que el punto de observación está alejado de las fuentes, y que estas emiten con la misma potencia, $E_{01}(P) \approx E_{02}(P) \approx \dots \approx E_{0N}(P)$. La ecuación 26.1 se puede aproximar a

$$E_i(P) = E_{01}(P) \text{sen}(\omega t - kr_i). \tag{26.2}$$

De acuerdo con el principio de superposición, sección 24.2, p. 237, el campo resultante debido a las N ondas es

$$E(P, t) = \sum_{i=1}^N E_{01}(P) \text{sen}(\omega t - kr_i).$$

La suma de N funciones seno de frecuencia angular ω da otra función seno de igual frecuencia, con una amplitud E_0 que depende de los desfases entre las funciones individuales. La anterior ecuación se puede escribir como

$$E(P, t) = \sum_{i=1}^N E_{01}(P) \text{sen}(\omega t - kr_i) = E_0(P) \text{sen}(\omega t + \alpha).$$

Para hallar el patrón de interferencia, o sea una expresión para la intensidad resultante de la suma (en lugar de suma se puede decir superposición o interferencia) de las N ondas, hallemos primero la amplitud del campo resultante E_0 (segmento FH) con el diagrama de fasores de la figura 26.4. Recuerde que tal figura es solo un artificio geométrico para hallar a E_0 , pues los N campos eléctricos son colineales en P y no forman un ángulo δ entre ellos.

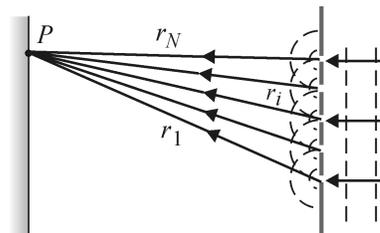


Figura 26.1 Interferencia de ondas de más de dos fuentes.

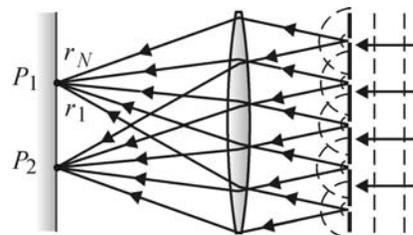


Figura 26.2 La lente convergente "acerca el infinito".

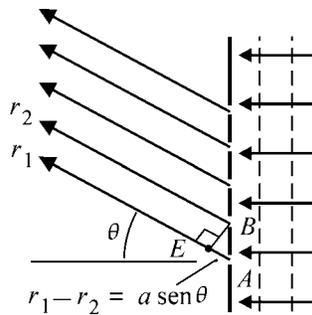


Figura 26.3 Los rayos se tratan como paralelos si P está muy alejado.

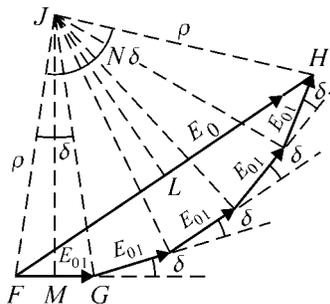


Figura 26.4 Diagrama de fasores para hallar la amplitud resultante.

La separación entre fuentes contiguas es a (segmento AB de la figura 26.3). Puesto que A y B están en fase, el desfase entre rayos vecinos lo da la ecuación 25.4, p. 241 (vea, además, la figura 25.3),

$$\delta(P) = (2\pi/\lambda)a \text{ sen } \theta. \quad (26.3)$$

Tracemos la mediatriz del segmento FG , ascendamos desde M hasta un punto J donde el ángulo FJG sea igual a δ . Se puede mostrar que habrá N triángulos, cada uno con un ángulo δ , determinados por J y cada uno de los N vectores E_{01} ; el ángulo FJH es así igual a $N\delta$. La mediatriz a FH pasa por J y el ángulo LJH es igual a $N\delta/2$. En el triángulo rectángulo LJH vemos que

$$\text{sen}(N\delta/2) = \frac{LH}{JH} = \frac{E_0/2}{\rho}.$$

Despejemos la amplitud del campo resultante,

$$E_0 = 2\rho \text{ sen}(N\delta/2). \quad (26.4)$$

Debemos expresar a ρ en función de parámetros del problema. En el triángulo FJM ,

$$\text{sen}(\delta/2) = \frac{FM}{FJ} = \frac{E_{01}/2}{\rho}.$$

Despejemos a ρ y reemplacemos en la ecuación 26.4 para obtener

$$E_0 = E_{01} \frac{\text{sen}(N\delta/2)}{\text{sen}(\delta/2)}. \quad (26.5)$$

Para obtener el patrón de interferencia, reemplacemos a E_0 en la ecuación 25.5, p. 242,

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_{01}^2 \left[\frac{\text{sen}(N\delta/2)}{\text{sen}(\delta/2)} \right]^2 = I_0 \left[\frac{\text{sen}(N\delta/2)}{\text{sen}(\delta/2)} \right]^2, \quad (26.6)$$

donde $I_0(P) = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_{01}^2(P)$ es la intensidad debida a una sola fuente.

Para obtener la intensidad en función de θ , reemplacemos a δ , ecuación 26.3, en la ecuación 26.6,

$$I(\theta) = I_0 \left[\frac{\text{sen}(N\pi(a/\lambda) \text{ sen } \theta)}{\text{sen}(\pi(a/\lambda) \text{ sen } \theta)} \right]^2. \quad (26.7)$$

26.2 Máximos y mínimos de intensidad

Para los θ que cumplan que

$$a \text{ sen } \theta = m\lambda; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (26.8)$$

la expresión en corchetes de la ecuación 26.7 es $\text{sen } mN\pi / \text{sen } m\pi = 0/0$. Mediante la regla de L'Hôpital esta indeterminación da $\pm N$ y la intensidad es, entonces, $I = I_0(\pm N)^2 = N^2 I_0$. Si m no es entero, la intensidad en el θ respectivo es menor que $N^2 I_0$. Notemos que la ecuación 26.8 es idéntica a la ecuación 25.13, lo que nos dice que *la posición de los máximos de orden m no depende del número de fuentes*.

Para hallar la posición de los mínimos hagamos cero el numerador de la ecuación 26.7, pero mantengamos diferente de cero su denominador pues,

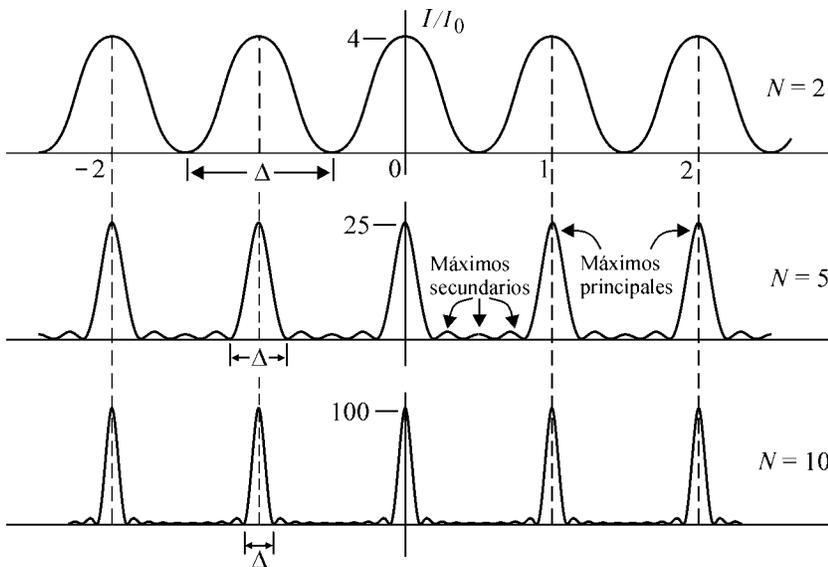


Figura 26.5 Patrón de interferencia de ondas de varias fuentes.

como acabamos de ver, si ambos son cero lo que se obtiene es un máximo de magnitud $N^2 I_0$. El numerador igual a cero implica que

$$a \sin \theta = (m'/N)\lambda; \quad m' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{y} \quad m' \neq mN. \quad (26.9)$$

La última desigualdad proviene de exigir que el denominador sea diferente de cero, $m'/N \neq m$ o $m' \neq mN$. Esto nos dice que los mínimos los dan los números enteros m' que no sean múltiplos de N ; también nos dice que *el contador del mínimo a la izquierda del máximo de orden m es $m' = mN - 1$, y a la derecha es $m' = mN + 1$.*

La intensidad de dos fuentes se expresa con la función coseno cuadrado, en la que solo hay un mínimo entre dos máximos; al aumentar N , aumenta el número de mínimos entre dos máximos (figura 26.5), pero sin cambiar la posición de estos, lo que nos lleva a concluir que el ancho de los máximos disminuye con N mayor. Entre cada par de nuevos mínimos hay nuevos máximos menos intensos que los principales y se llaman **máximos secundarios**. Como entre cada par de máximos principales hay $N - 1$ mínimos, hay entonces $N - 2$ máximos secundarios entre ellos. En la figura se ilustran los patrones de 2, 5 y 10 fuentes, donde se aprecia claramente lo expuesto. El eje horizontal representa, para $\theta \ll 1$, la variable y o θ ; se muestra el ancho Δ del máximo de orden -1 ; el máximo valor del eje vertical es 4 para $N = 2$, es 25 para $N = 5$ y es 100 para $N = 10$. *A mayor N más estrechos son los máximos y también se vuelven más intensos.*

Ejemplo 26.1 Una pantalla con cinco pequeños agujeros se ilumina, perpendicularmente, con luz de longitud de onda λ ; la separación entre agujeros contiguos es a . (a) Discuta el patrón de interferencia. (b) Halle la posición angular del tercer máximo secundario después del origen; suponga $\theta \ll 1$. (c) Evalúe la intensidad del máximo del literal anterior en términos de I_0 ; ¿cuántas veces más intenso es un máximo principal que dicho máximo secundario?

Solución

Nota: la solución de este y otros ejemplos es didáctica; antes que hallar una respuesta, el objetivo es aclarar la teoría.

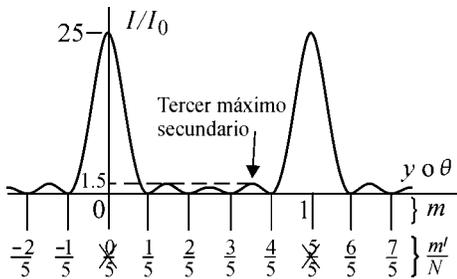


Figura 26.6 Patrón producido por cinco fuentes.

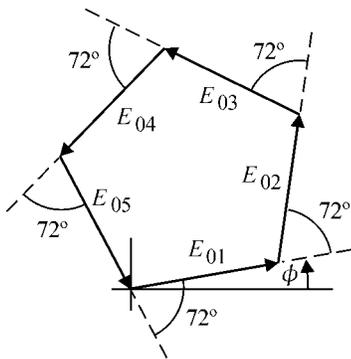


Figura 26.7 Fasores en el primer mínimo.

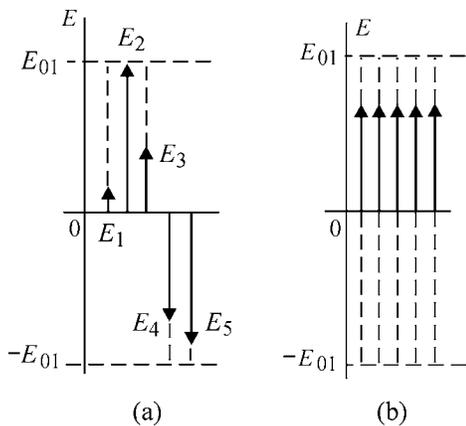


Figura 26.8 Campos eléctricos (a) en un mínimo de interferencia, (b) en los máximos principales.

(a) El máximo de orden 1 se obtiene, despejando de la ecuación 25.13, en $\text{sen } \theta = 1\lambda/a$. Hay cuatro ángulos menores que este valor, que cumplen la ecuación 26.9 y se despejan de la ecuación en mención: con $m' = 1$, $a \text{ sen } \theta = (1/5)\lambda$; con $m' = 2$, $a \text{ sen } \theta = (2/5)\lambda$; con $m' = 3$, $a \text{ sen } \theta = (3/5)\lambda$; y con $m' = 4$, $a \text{ sen } \theta = (4/5)\lambda$. El contador de mínimos m' no puede ser 5, porque este es el número de fuentes, o de forma más general, m' es cualquier entero diferente de $0, \pm 5, \pm 10, \pm 15, \dots$. El número de mínimos entre dos máximos principales es $N - 1 = 5 - 1 = 4$; el número de máximos secundarios es $N - 2 = 5 - 2 = 3$ (figura 26.6).

El desfase en el primer mínimo, entre rayos procedentes de fuentes consecutivas, es

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} a \text{ sen } \theta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{5} \lambda = \frac{2}{5} \pi = \frac{2}{5} 180^\circ = 72^\circ.$$

En la figura 26.7 se dibuja el diagrama de fasores con $\delta = 72^\circ$ entre vectores consecutivos; como $5\delta = 360^\circ$, el diagrama se cierra y $E_0 = 0$. Igual ocurre con todo m' no múltiplo de N .

En la figura 26.8a se muestran los cinco campos eléctricos en el primer mínimo a la derecha de los máximos principales, en un t arbitrario; cada vector está desfasado 72° respecto al vector que le precede y varía entre E_{01} y $-E_{01}$; la suma de ellos es siempre cero. Esta figura representa mejor lo que sucede en P que la figura 26.7; la figura 26.8a corresponde a la proyección en el eje vertical, en un instante arbitrario, de los cinco vectores del pentágono rotante con frecuencia angular ω de la figura 26.7 (vea, además, las ecuaciones 25.7 y 25.8, p. 242).

En la figura 26.8b se representan, en un t arbitrario, los campos eléctricos en un máximo de orden m , desfasados entre sí $2m\pi$, lo que equivale a decir que físicamente están en fase. Todos alcanzan simultáneamente el valor E_{01} , o sea que la amplitud del campo resultante es NE_{01} ; como la intensidad es proporcional a la amplitud al cuadrado, se sigue que $I = N^2 I_0$.

(b) Usemos la aproximación $\text{sen } \theta \approx \theta$, cuando $\theta \ll 1$, en la ecuación 26.9 y despejemos la posición de los mínimos adyacentes al tercer máximo secundario (figura 26.6),

$$\theta = \frac{m' \lambda}{N a} \quad \therefore \quad \theta_3 = \frac{3 \lambda}{5 a} \quad \text{y} \quad \theta_4 = \frac{4 \lambda}{5 a}.$$

El máximo está en el medio de estos mínimos, por lo que su posición angular es el promedio,

$$\theta = \frac{\theta_3 + \theta_4}{2} = \frac{7 \lambda}{10 a}.$$

(c) Con la aproximación $\text{sen } \theta \approx \theta$, reemplacemos el anterior ángulo en la ecuación 26.7,

$$I = I_0 \left[\frac{\text{sen}(5\pi(a/\lambda)(7/10)(\lambda/a))}{\text{sen}(\pi(a/\lambda)(7/10)(\lambda/a))} \right]^2 = I_0 \left(\frac{\text{sen } 3.5\pi}{\text{sen } 0.7\pi} \right)^2 = I_0 \left(\frac{-1.00}{0.81} \right)^2 = 1.53 I_0.$$

Un máximo principal es $N^2 I_0 / 1.53 I_0 = 25 / 1.53 = 16.3$ veces mayor que el tercer máximo secundario.

Resumen

El patrón de interferencia de N fuentes puntuales está dado por

$$I = I_0 \left[\frac{\text{sen}(N\delta/2)}{\text{sen}(\delta/2)} \right]^2 = I_0 \left[\frac{\text{sen}(N\pi(a/\lambda) \text{ sen } \theta)}{\text{sen}(\pi(a/\lambda) \text{ sen } \theta)} \right]^2;$$

I_0 es la intensidad de una sola fuente en $\theta = 0$.

La posición angular de los máximos principales cumplen

$$a \text{ sen } \theta = m\lambda.$$

m , llamado el orden del máximo, es un entero cualquiera, siempre y cuando no haga mayor que 1 a $\sin \theta$. Si no es un entero, en ese θ no hay un máximo.

La posición angular de los mínimos de interferencia cumplen

$$a \sin \theta = (m'/N)\lambda;$$

m' es cualquier entero, siempre y cuando no haga mayor que 1 a $\sin \theta$ ni sea un múltiplo del número de fuentes: $m' \neq mN$.

El contador del mínimo a la izquierda del máximo de orden m es $m' = mN - 1$, y a la derecha es $m' = mN + 1$. Entre dos máximos principales consecutivos hay $N - 2$ máximos secundarios y $N - 1$ mínimos de interferencia.

Módulo 27

Interferencia en películas delgadas

Contenido

- 27.1 Máximos y mínimos en la reflexión y la refracción
- 27.2 Recubrimientos reflectivos y antirreflectivos

Objetivos

1. Mostrar que los principios físicos y el procedimiento para examinar la interferencia de la luz en una película delgada son los mismos que para dos fuentes o una cuña.
2. Mencionar algunas aplicaciones prácticas de las interferencias constructiva y destructiva en recubrimientos delgados.
3. Examinar la interferencia en el espejo de Lloyd y el biprisma de Fresnel.
4. Estudiar la formación de los anillos de Newton.

Preguntas básicas

1. ¿Cómo se generan los colores de una burbuja de jabón?
2. ¿Sin variar el ángulo de incidencia, es posible eliminar la reflexión de una onda o por lo menos reducirla?
3. ¿En qué consisten los *anillos de Newton*?
4. ¿Qué diferencias se presentan entre el patrón de interferencia de una película y el de una cuña?

Introducción

La explicación de los colores de las burbujas de jabón nos lleva a una importante aplicación de la interferencia: los recubrimientos o películas delgadas reflectivas y antirreflectivas que se utilizan sobre algunos materiales. Empezaremos con una película rodeada en ambas caras por aire y luego se verá el caso cuando el medio circundante no es aire. Se debe tener presente que el análisis que haremos se basa exactamente en los mismos principios físicos utilizados en el análisis de dispositivos físicos tan diferentes a una película, estudiados en módulos precedentes, como lo son dos o más rendijas.



Una burbuja está conformada por una película delgada de agua. Parte de la luz incidente se refleja en la cara más externa de la burbuja, pero otra parte que penetra en la película sale al aire después de haberse reflejado en la cara más interna, e interfiere con la luz inicialmente reflejada produciendo los colores que nos son familiares.

27.1 Máximos y mínimos en la reflexión y la refracción

Una **película delgada** es una lámina de grosor a no mucho mayor que la longitud de onda λ de la luz que la ilumine. Consideramos como película delgada a la solución jabonosa de una burbuja de jabón o a la capa de aceite que a veces dejan los carros sobre charcos de agua después de llover. Los colores de estas películas nos son familiares y su explicación se debe a Robert Hooke, quien dijo que se producen por la interferencia entre la luz reflejada en la superficie más externa de la burbuja, y la que penetra en ella, se refleja en la cara más interna y sale de regreso al aire.

En la figura 27.1 mostramos una película rodeada de aire, de caras planas y paralelas e índice de refracción n . La película está iluminada por una onda plana con polarización σ , esto es, el campo eléctrico es perpendicular al plano de la hoja; el ángulo de incidencia es θ_i y el de refracción es θ_t . Llamemos rayo emergente o rayo 2 al que penetra en la película por la cara 1, se refleja en la cara 2 y después emerge al aire por la cara de entrada. Llamemos rayo 1 al rayo que incide y se refleja en P .

Procedamos a estudiar la interferencia en P de los campos de los rayos 1 y 2 siguiendo los dos pasos del plan expuesto en la página 236.

Paso 1

Los puntos A y B en los rayos incidentes 1 y 2 más cercanos a P se muestran en la figura. Es a partir de estos puntos que se genera el desfase en P , ya que los rayos siguen trayectorias diferentes en medios también distintos.

Hemos visto que la fase depende de las variables r y t . Pero además de estas variables, también es posible que la reflexión introduzca un cambio en la fase. Para una onda con polarización σ , si $n_1 > n_2$ en el lugar de reflexión, entonces R_σ es positivo y la reflexión no introduce cambio en la fase; pero si $n_1 < n_2$, R_σ es negativo y la reflexión introduce un cambio de $\pm\pi$. Este cambio quiere decir que el campo reflejado cambia instantáneamente de sentido respecto al incidente, en el sitio de reflexión, quedando ambos campos en contrafase. Debemos modificar, entonces, la ecuación 24.10, p. 237, para que incluya los posibles desfases por reflexión, en la eventualidad de que en su camino de P_1 a P_2 (figura 24.3, p. 237) la onda haya sufrido refle-

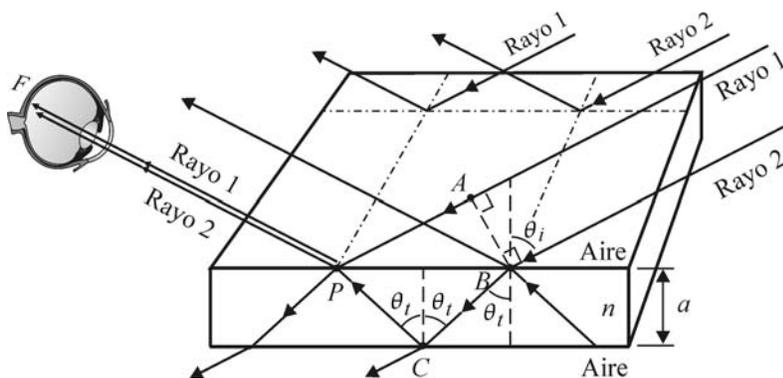


Figura 27.1 Interferencia en una película.

xiones. Inventemos una función \mathcal{S} que tome solo dos valores,

$$\mathcal{S} = \begin{cases} 0, & n_1 > n_2; \\ \pm\pi, & n_1 < n_2. \end{cases} \quad (27.1)$$

Teniendo en cuenta a \mathcal{S} , la ecuación 24.10 queda

$$\Delta\phi_{21} = k\Delta r + \mathcal{S}. \quad (27.2)$$

El rayo 2 se refleja en C , y el desfase causado entre el punto de entrada y el de salida de la película es, aplicando la anterior ecuación, con $k = k_2$ y $\Delta r = BC + CP$,

$$\Delta\phi_{PB} = k_2(BC + CP) + \mathcal{S}(C). \quad (27.3)$$

En C , $n_1 = n$ y $n_2 = 1.00$; esto hace que $\mathcal{S}(C) = 0$. Debemos expresar las ecuaciones finales en términos de los parámetros θ_i , θ_t , λ , a y n . De la geometría de la figura se sigue que $BC = CP = a/\cos\theta_t$; además, $k_2 = 2\pi/\lambda_2 = 2\pi n/\lambda$ (ecuación 15.2, p. 150). La ecuación 27.3 es igual a

$$\Delta\phi_{PB} = k_2(2BC) + 0 = 2\frac{2\pi n}{\lambda} \frac{a}{\cos\theta_t} = \frac{4\pi an}{\lambda \cos\theta_t}. \quad (27.4)$$

Procedamos a hallar una expresión para $\Delta\phi_{PA}$. Apliquemos la ecuación 27.2, con $k = k_1$ y $\Delta r = AP$,

$$\Delta\phi_{PA} = k_1 AP + \mathcal{S}(P). \quad (27.5)$$

En el aire, $\lambda_1 \approx \lambda$ y $k_1 = 2\pi/\lambda$; con trigonometría y la ley de Snell se puede demostrar que $AP = 2an \sin^2\theta_t/\cos\theta_t$; en P , para el rayo que incide desde el aire, $n_1 = 1 < n_2 = n$, lo que implica que $\mathcal{S}(P) = \pm\pi$. Reemplazando en la ecuación 27.5 obtenemos

$$\Delta\phi_{PA} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{2an \sin^2\theta_t}{\cos\theta_t} - \pi = \frac{4\pi an \sin^2\theta_t}{\lambda \cos\theta_t} - \pi. \quad (27.6)$$

Reemplacemos en la ecuación 24.6, p. 235, las ecuaciones 27.4 y 27.6,

$$\begin{aligned} \delta(P) &= \frac{4\pi an}{\lambda \cos\theta_t} - \frac{4\pi an \sin^2\theta_t}{\lambda \cos\theta_t} + \pi = \frac{4\pi an}{\lambda \cos\theta_t} (1 - \sin^2\theta_t) + \pi \\ &= 4\pi(a/\lambda)n \cos\theta_t + \pi. \end{aligned}$$

Paso 2

Para interferencia constructiva, $\delta(P) = 2m\pi$,

$$4\pi(a/\lambda)n \cos\theta_t + \pi = 2m\pi;$$

de aquí obtenemos la condición para que se presente máxima reflexión y, en consecuencia, mínima transmisión,

$$2an \cos\theta_t = (2m - 1)\frac{\lambda}{2}; \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (27.7)$$

Para interferencia destructiva, $\delta(P) = (2m + 1)\pi$,

$$4\pi(a/\lambda)n \cos\theta_t + \pi = (2m + 1)\pi.$$

Como contador de impares escogimos $(2m + 1)$ y no $(2m - 1)$ para que se cancele el $+\pi$ del miembro derecho de la anterior ecuación; de ella obtenemos la condición para que se presente mínima reflexión y, en consecuencia, máxima transmisión,

$$2an \cos \theta_t = m\lambda; \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (27.8)$$

Cuando la película se ilumina con luz blanca, determinado λ puede cumplir la ecuación 27.7, mientras que otro λ cumple la ecuación 27.8; o sea que la película se ve de diferente color según el lado que se mire. Cambiando el ángulo de incidencia podemos lograr que un color en particular cumpla una de las ecuaciones mencionadas.

También es interesante notar que si en determinado ángulo hay interferencia constructiva para, por ejemplo, el rojo, toda la película se ve roja, ya que lo que se cumple en el P mostrado en la figura 27.1 se cumple en cualquier otro punto de esa cara, incluido el punto B ; físicamente los puntos son indistinguibles entre sí y no se ven zonas oscuras y, simultáneamente, zonas luminosas, esto es, no hay franjas. La situación sería distinta si el grosor de la película fuera variable, como es el caso en una cuña de ángulo α (figura 27.2), pues ya los puntos no son indistinguibles el uno del otro y la longitud de la trayectoria BCP es diferente según el lugar de la cuña que se examine. Newton creó una cuña circular de aire con una lente plano-convexa sobre una placa de vidrio; cuando miró desde arriba el dispositivo, observó franjas oscuras y brillantes, llamadas **anillos de Newton**. En la periodicidad de las franjas vio él que la luz debía tener también una periodicidad (vea el ejemplo 27.3).

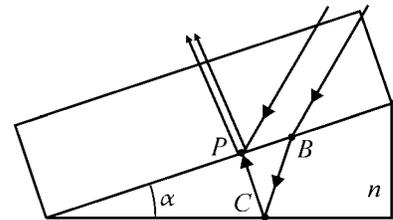


Figura 27.2 Interferencia en una cuña.

El desfase entre los campos de los dos rayos en cualquier punto entre P y la retina del observador de la figura 27.1 es constante e igual al valor $\delta(P)$, pues en su camino hacia el observador lo que cambia la fase en un rayo es idéntico al cambio en el otro; si en P interfieren constructivamente, también lo harán en la retina, más exactamente, en la fovea F .

27.2 Recubrimientos reflectivos y antirreflectivos

En muchos materiales comunes es conveniente disminuir la luz que se refleja: el vidrio que protege un cuadro, las lentes de los anteojos o de una cámara fotográfica, la pantalla de un computador. Según lo que acabamos de ver, ello es posible con una película delgada de índice de refracción n menor que el del material sobre el que va aplicada y de grosor un cuarto de longitud de onda en la película, λ' . Veámoslo: con *incidencia normal* (figura 27.1), la luz que penetra en la película recorre un camino de ida y regreso $BC + CP = 2BC = 2a = 2(\lambda'/4) = \lambda'/2$. Interfieren destructivamente la onda reflejada en P (rayo 1) con la onda emergente, ya que en una diferencia de camino de $\lambda'/2$ se genera un desfase de medio ciclo y los campos en el aire vibran en contrafase. Queda faltando analizar los desfases por reflexión, pero vemos que la función S vale π en P y en C , porque en C también se cumple que $n_1 < n_2 = n'$, ya que C está entre la película y el material sobre el que ella va aplicada ($n' < n$ del material). El desfase de π producido en P y en C da como resultado un desfase de 2π , lo que físicamente equivale a un desfase de cero, y así en el desfase final queda solo la distancia $2a$.

Mínima reflexión implica máxima transmisión, ya que la energía que deja de reflejarse se transmite. Esto es útil en celdas solares, en las que se utiliza una capa delgada de monóxido de silicio, cuyo índice es 1.45.

Se entiende que el grosor de un cuarto de λ' ($a = \lambda'/4$) es el *mínimo grosor* para mínima reflexión, debido a que si el grosor se incrementa en un entero por $\lambda'/2$, la onda en la película recorre ese entero por λ' de más y vuelve a salir en contrafase con la onda reflejada en P ,

$$a = \frac{\lambda'}{4} + m \frac{\lambda'}{2} = \frac{\lambda'}{4} (2m + 1); \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Para la interferencia destructiva los campos deben estar en contrafase y la anulación es total si las amplitudes son iguales, pero vimos que la amplitud reflejada depende de los coeficientes de Fresnel y la amplitud del campo resultante puede ser diferente de cero. Se puede demostrar que cuando $n_{\text{material}} = n^2$ la anulación es total debida a la reflexión en ambas caras de la película.

Basta con depositar una película de *índice mayor* que la del material sobre la que se aplica, para que se pase a la situación opuesta de máxima reflexión y mínima transmisión y la última ecuación ya no sea la condición de mínimos sino de máximos de reflexión, bajo incidencia normal.

Cuando se usa luz blanca, donde hay toda una gama de longitudes de onda, solo una de estas cumple la condición $\lambda' = 4a$. La película se fabrica de modo que la condición de interferencia constructiva o destructiva se cumpla para la longitud de onda en la que el ojo humano es más sensible, y es para un verde amarillo de $\lambda = 550$ nm. Los colores que más se alejan de este valor corresponden a los extremos del espectro visible, el rojo y el violeta, y la luz reflejada adquiere un tono morado, mezcla de esos dos colores. Bajo incidencia normal, cuando se vio el tema de coeficientes de Fresnel, se calculó que el 4% (ejemplo 17.3, p. 167) de la luz se refleja en una interfaz aire-vidrio. Con un recubrimiento se puede reducir a menos del 1%.

Ejemplo 27.1 En la figura 27.3 una onda plana de longitud de onda λ incide perpendicularmente sobre una lámina con una rendija delgada B . Más a la izquierda, un espejo horizontal está perpendicular a una pantalla de observación. La línea QR es una prolongación de la cara superior del espejo; se interseca en R con el plano donde está la rendija. La distancia perpendicular de la rendija a dicha cara es $BR = d$, con $d \ll D$. El ángulo de observación θ y y se definen en la figura. El dispositivo descrito se llama **espejo de Lloyd**.

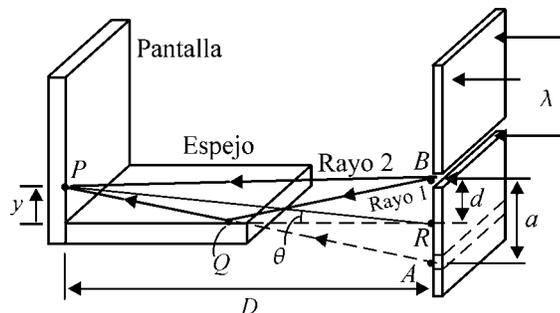


Figura 27.3 Espejo de Lloyd.

A P llegan dos rayos: uno que viene directamente de B o rayo 2 y otro por reflexión o rayo 1; se presenta, entonces, interferencia entre ellos. Halle (a) la ecuación que da la posición angular de los máximos, (b) la distancia y del primer máximo y evalúela para $d = 2$ mm, $\lambda = 633$ nm y $D = 1.00$ m.

Solución

(a) En B los rayos 1 y 2 están en fase pero a P llegan desfasados debido a que siguen trayectos distintos y a que uno de ellos sufre una reflexión en Q . Haciendo la analogía con la figura 24.1, p. 235, los puntos A y B de esta figura son el punto B de la figura 27.3, y la ecuación 24.6 la escribimos

$$\delta(P) = (\Delta\phi_{PB})_{\text{rayo 1}} - (\Delta\phi_{PB})_{\text{rayo 2}}.$$

Este es el desfase por diferencia de caminos; para el desfase total falta tener en cuenta los posibles desfases por reflexión y la anterior ecuación queda

$$\delta(P) = [(\Delta\phi_{PB})_{\text{rayo 1}} + S(Q)] - (\Delta\phi_{PB})_{\text{rayo 2}}. \quad (27.9)$$

Según la ecuación 27.1, $S(Q) = \pm\pi$ porque en Q el índice n_1 es menor que n_2 . Hallemos los demás términos de la ecuación 27.9:

$$(\Delta\phi_{PB})_{\text{rayo 1}} = k(PQ + QB). \quad (27.10)$$

Un observador en P ve dos rendijas: la rendija física B y su imagen especular A . Como el espejo es plano, su radio de curvatura es $r = \infty$ y la ecuación 19.2, p. 185, da como resultado que $q = -p$; esto quiere decir que A está una distancia d por debajo del plano del espejo y la separación entre A y B es $a = 2d$. Por geometría se ve que $QB = QA$; reemplacemos en la ecuación 27.10,

$$(\Delta\phi_{PB})_{\text{rayo 1}} = k(PQ + QA) = kPA.$$

Para el rayo 2,

$$(\Delta\phi_{PB})_{\text{rayo 2}} = kPB.$$

Reemplacemos en la ecuación 27.9,

$$\delta(P) = kPA + \pi - kPB = k(PA - PB) + \pi.$$

Como ya vimos (figura 25.3, p. 243, y ecuación 25.11), $PA - PB = a \sin \theta$,

$$\delta(P) = ka \sin \theta + \pi = 2\pi(a/\lambda) \sin \theta + \pi. \quad (27.11)$$

En la interferencia constructiva, $\delta = (\text{número par})\pi$,

$$2\pi(a/\lambda) \sin \theta + \pi = 2m\pi; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Despejemos la ecuación que da la posición de los máximos (recordemos que $a = 2d$),

$$a \sin \theta = (m - \frac{1}{2})\lambda; \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (27.12)$$

Excluimos $m = 0, -1, -2, \dots$ porque darían $\theta < 0$, y debajo del espejo no existen franjas. Esta ecuación coincide con la que da la posición de los mínimos de dos fuentes que emiten en fase (ecuación 25.14, p. 244). Podemos ver, entonces, al espejo de Lloyd como un dispositivo de dos rendijas: una rendija física B y otra que es su imagen A . La diferencia con las dos rendijas físicas es que en el rayo que llega a P procedente de la rendija imagen se genera un desfase de π en el punto de reflexión Q .

Note que $\delta(0^\circ) = \pi$ (ecuación 27.11), lo que significa que donde se unen el espejo y la pantalla la interferencia es destructiva y allí se forma una franja oscura. En el ejemplo 25.4, p. 247, también se obtiene oscuridad en $\theta = 0$. La laminilla de tal ejemplo tiene el mismo efecto que la reflexión en Q , y es cambiar la fase de la onda inferior en π respecto a la otra onda.

(b) A la primera franja brillante le corresponde $m = 1$. Para $\theta \ll 1$, $\theta \approx \sin \theta \approx \tan \theta = y/D$. Reemplacemos en la ecuación 27.12 y despejemos y ,

$$y = (m - \frac{1}{2}) \frac{D\lambda}{a} = (1 - \frac{1}{2}) \frac{D\lambda}{2d} = \frac{D\lambda}{4d} = \frac{(1.00 \text{ m})(6.33 \times 10^{-7} \text{ m})}{4(2 \times 10^{-3} \text{ m})} \approx 0.08 \text{ mm}.$$

Efectivamente, $y = 0.08 \text{ mm}$ es mucho menor que $D = 1.00 \text{ m}$ y la aproximación $\sin \theta \approx y/D$ es válida. Si no se cumple que $y \ll D$, tal aproximación no se puede hacer y es necesario trabajar con $\sin \theta$.

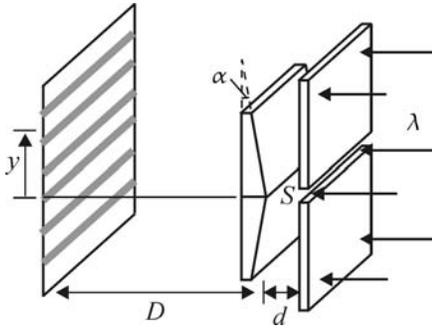


Figura 27.4 Biprisma de Fresnel.

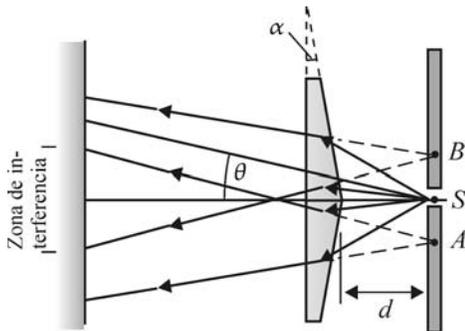


Figura 27.5 Biprisma de Fresnel.

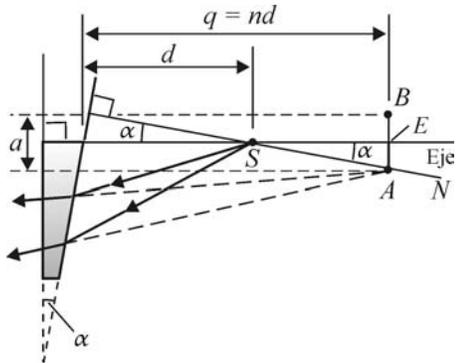


Figura 27.6 Formación de la imagen por el biprisma.

Ejemplo 27.2 En la figura 27.4 una onda incide perpendicularmente sobre una rendija S . Exactamente al frente de la rendija, a una distancia d , se encuentra un biprisma, conocido como *biprisma de Fresnel*, de índice de refracción n . El ángulo entre las dos caras de cada prisma es α , con $\alpha \ll 1$, y las caras son casi paralelas. La figura no está a escala. Parte de la luz es refractada por el prisma superior y parte por el inferior creando franjas de interferencia en una pantalla de observación.

En la figura 27.5 se muestra el mismo dispositivo, pero sin perspectiva. Un observador en la pantalla, en la zona de interferencia, no ve la rendija física S sino a sus imágenes A y B . El dispositivo es equivalente a dos rendijas físicas (figura 25.3, p. 243), presentándose interferencia en una zona donde llega luz de ambos prismas, superior e inferior. (a) Demuestre que la distancia entre las imágenes A y B es $a = 2\alpha d(n - 1)$. (b) Calcule la separación angular y en milímetros entre franjas consecutivas brillantes para luz roja de $\lambda = 633 \text{ nm}$. La pantalla está a 2.00 m de la rendija; el índice de refracción del biprisma es 1.5 y este se encuentra a 10 cm de la rendija; el ángulo del biprisma es 0.20° .

Solución

(a) Hallemos la imagen A que la cara derecha del prisma inferior forma de S ; A está sobre la perpendicular N a la cara (figura 27.6). Este es un problema de refracción por una superficie plana (recuerde el ejemplo sobre profundidad aparente, ejemplo 22.3, p. 211). Con $r = \infty$ y de la ecuación 20.1, p. 193, despejemos el lugar de intersección que dicha cara forma de los rayos refractados, o sea, despejemos la distancia imagen q a esa cara con $n_2 = n$, $n_1 = 1.00$ (aire) y $p \approx d$: $q = nd$ ($q > d$ porque $n > 1$). En la figura vemos que $SA \approx nd - d = d(n - 1)$. La distancia de A al eje horizontal del sistema es $AE = SA \sin \alpha \approx SA\alpha = \alpha d(n - 1)$. Por simetría, la imagen B formada por el prisma superior está a esta misma distancia del eje, pero por encima, $AE = BE$ y la distancia entre A y B es

$$AB = a = 2AE = 2\alpha d(n - 1).$$

Cuando la luz sale por la cara izquierda del prisma da lugar a una nueva imagen sobre la perpendicular a esta cara, que es paralela al eje, y esta segunda imagen se desplaza sobre tal perpendicular hacia el prisma (¿por qué?: vea el ejemplo 22.3, p. 211), y por lo tanto no cambia la distancia vertical entre A y B , con lo que para un observador a la izquierda del biprisma la distancia entre A se mantiene igual al valor hallado; en resumen, la separación (separación vertical, pues la separación horizontal es siempre cero) entre las imágenes la produce únicamente la cara derecha de los prismas.

(b) Como explicamos en el anterior literal, el biprisma de Fresnel es equivalente a dos rendijas y el patrón de interferencia se rige por la ecuación 25.15, p. 244, puesto que la fase no cambia por transmisión en las caras del biprisma (por reflexión, como en el espejo de Lloyd, sí). Si $\theta \ll 1$ podemos aplicar la ecuación 25.19 para hallar la separación entre máximos, ya que para la función coseno cuadrado tal separación es igual al ancho de los máximos,

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{a} = \frac{\lambda}{2\alpha d(n - 1)} = \frac{6.33 \times 10^{-7} \text{ m}}{2(0.20/57.3)(0.10 \text{ m})(1.5 - 1)} = 1.81 \text{ mrad}.$$

En milímetros,

$$\Delta y = D\Delta\theta = (2.00 \text{ m})(0.00181) = 3.6 \text{ mm}.$$

Ejemplo 27.3 Una lente plano-convexa de radio de curvatura R yace sobre una placa de vidrio; la lente se ilumina perpendicularmente con luz de longitud de onda λ (figura 27.7a).

El espesor variable del aire entre la lente y la placa produce franjas circulares de interferencia, conocidas como los **anillos de Newton** (figura 27.7b). Halle el radio r de los máximos y de los mínimos. Suponga que el lado convexo de la lente es casi plano, esto es, $r \ll R$.

Solución. Parte de la luz que incide en la cara inferior de la lente se refleja (esto equivale al rayo 1 que incide en P , figura 27.1) y parte se transmite al aire (equivale al rayo 2 que incide en B en la misma figura); esta se refleja después en la cara

superior de la placa de vidrio (punto C de la figura citada) y emerge hacia la lente, donde interfiere con la luz que allí se refleja (punto P).

Como la lente se ilumina perpendicularmente y su cara convexa es casi plana, podemos aproximar a que en ambas caras el ángulo de incidencia es cero y por lo tanto también incide perpendicularmente sobre la placa de vidrio, lo que lleva a que los puntos A, B y P sean el mismo punto; la luz se regresa por donde vino ($\theta_i = \theta_r = \theta_t = 0$).

Sigamos el plan de la sección 24.1.3, p. 236, para analizar la interferencia entre los campos de los rayos 1 y 2. Calculemos, con la ecuación 27.2, el desfase causado en el rayo que penetra en la cuña de aire en P (figura 27.7a), se refleja en C (PC = y) y emerge a la lente en P,

$$\Delta\phi_{PP} = k\Delta r + S(C) = k(PC + CP) + \pi = k(2y) + \pi = \frac{4\pi y}{\lambda} + \pi.$$

Para el rayo que se refleja en P, $\Delta r = 0$ y $S(P) = 0$ y no sufre desfase. El desfase entre ambos rayos se debe, entonces, únicamente al que tiene su recorrido en el aire,

$$\delta(P) = \Delta\phi_{PP} - 0 = \frac{4\pi y}{\lambda} + \pi.$$

En interferencia constructiva,

$$\delta(P) = 2m\pi = \frac{4\pi y}{\lambda} + \pi. \tag{27.13}$$

De la geometría de la figura deducimos

$$y = R - \sqrt{R^2 - r^2} = R - R\sqrt{1 - (r/R)^2}.$$

Como $r \ll R$, la última raíz se puede aproximar, utilizando el teorema del binomio de Newton, a $1 - (r^2/2R^2)$ (demostrarlo), y así

$$y \approx r^2/2R.$$

Reemplacemos este y en la ecuación 27.13 y despejemos r para obtener el radio de los máximos,

$$r = \sqrt{(m - \frac{1}{2})\lambda R}; \quad m = 1, 2, 3, \dots \tag{27.14}$$

En interferencia destructiva,

$$\delta = (2m + 1)\pi = \frac{4\pi y}{\lambda} + \pi.$$

Reemplacemos el valor aproximado de y y despejemos a r para obtener el radio de las franjas oscuras,

$$r = \sqrt{m\lambda R}; \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Vemos que en $r = 0$ está el mínimo con $m = 0$, como era de esperarse, ya que interfieren la onda reflejada, que como vimos no sufre desfase, con la emergente, que ha tenido un cambio de fase de π (para esta onda, en $r = 0$, y también es cero y $\Delta r = PC + CP = 0 + 0 = 0$); en el centro de los anillos siempre se ve un círculo negro. Cuando el dispositivo se ilumina con luz blanca, cada color (o sea cada λ) forma su conjunto de anillos concéntricos.

Los rayos que abandonan P, situado en el lado convexo de la lente, con determinado desfase, conservan el desfase mientras atraviesan la lente, cuando salen al aire, penetran en el ojo de un observador y llegan a su retina, debido a que el cambio en la fase a lo largo de un rayo es igual al cambio en el otro; si estaban desfasados, por ejemplo, 7π , llegan con exactamente este mismo desfase a la retina (más exactamente, a su fovea) y el observador ve oscuridad. Nos referimos aquí al rayo que hizo el recorrido PCP y al que se reflejó en P (figura 27.7a). En la periodicidad de los anillos Newton vio que la luz es un fenómeno periódico.

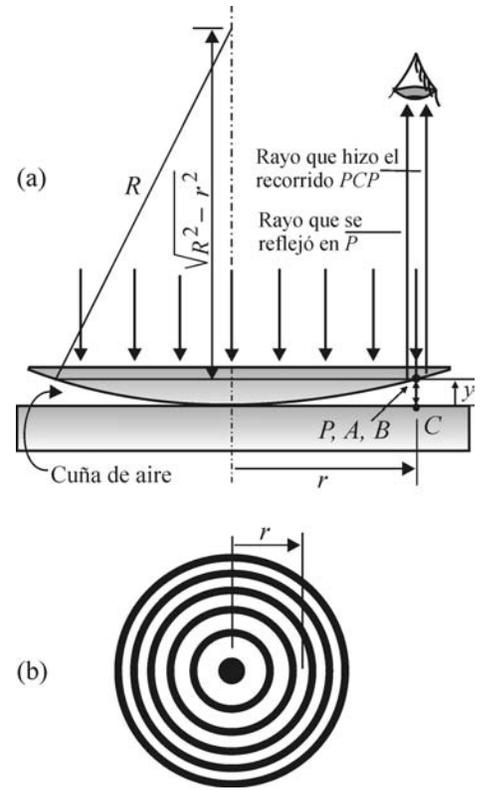


Figura 27.7 (a) Geometría para hallar los anillos de Newton, (b) los anillos se observan cuando se mira la lente desde arriba.

Ejemplo 27.4 Una película de grosor $2\ \mu\text{m}$ e índice de refracción 1.5 se ilumina con luz de longitud de onda de $600\ \text{nm}$ (figura 27.1). Encuentre el mínimo ángulo de incidencia para el que se presenta, en la reflexión, (a) interferencia constructiva o máximos y (b) interferencia destructiva o mínimos.

Solución. Según la ley de Snell, a menor ángulo de incidencia menor es el ángulo de refracción, y a menor ángulo (entre 0° y 90°) mayor es su coseno, o sea que lo que se pide en (a) y en (b) equivale a pedir el mayor valor de $\cos \theta_t$, con m entero, que cumpla las ecuaciones 27.7 y 27.8. Los datos son $a = 2 \times 10^{-6}\ \text{m}$, $\lambda = 6 \times 10^{-7}\ \text{m}$.

(a) Hagamos $\cos \theta_t = 1$ y despejemos a m de la ecuación 27.7,

$$m = \frac{2an}{\lambda} + \frac{1}{2} = \frac{2(2 \times 10^{-6}\ \text{m})1.5}{6 \times 10^{-7}\ \text{m}} + \frac{1}{2} = 10.5.$$

Pero para máximos m tiene que ser entero y el anterior valor se debe aproximar a 10 o a 11. Lo aproximamos a 10 porque si lo aproximáramos a 11, según la ecuación 27.7, el coseno sería mayor que 1. Despejemos a $\cos \theta_t$ de la ecuación 27.7 y reemplacemos los valores conocidos,

$$\cos \theta_t = \frac{(2m - 1)\lambda}{4an} = \frac{(2 \times 10 - 1)(6 \times 10^{-7}\ \text{m})}{4(2 \times 10^{-6}\ \text{m})1.5} = 0.95.$$

El ángulo de refracción es $\theta_t = \cos^{-1} 0.95 = 18.2^\circ$. De Snell,

$$\theta_i = \sin^{-1}(1.5 \sin 18.2^\circ) = 27.9^\circ.$$

(b) Hagamos $\cos \theta_t = 1$ y despejemos a m de la ecuación 27.8,

$$m = \frac{2an}{\lambda} = \frac{2(2 \times 10^{-6}\ \text{m})1.5}{6 \times 10^{-7}\ \text{m}} = 10.$$

Como m es entero, $\cos \theta_t$ tiene el valor que le dimos de 1, lo que dice que $\theta_t = 0^\circ$ y, por lo tanto, $\theta_i = 0^\circ$. O sea que cuando la luz incide perpendicularmente sobre la película se presenta interferencia destructiva y toda la película se ve oscura por la cara donde penetra la luz, y luminosa por el lado opuesto.

Ejemplo 27.5 Dos placas rectangulares de vidrio yacen una sobre la otra (figura 27.8). Una hoja *delgada* de papel se intercala entre ellas, formando entre las placas una cuña de aire. El dispositivo se ilumina perpendicularmente con luz amarilla de longitud de onda $600\ \text{nm}$. Se observan 20 franjas brillantes en cada centímetro de cuña. Halle el ángulo α de la cuña.

Solución. Este ejemplo es igual al de los anillos de Newton, salvo que en aquel las franjas de interferencia son circulares, mientras que aquí son rectas.

Como ya mencionamos en la página 261, la aparición de franjas se debe al grosor variable de la cuña; en una película de grosor constante si en un punto hay interferencia constructiva, la habrá en cualquier otro punto y no se observan franjas bajo determinado ángulo de observación. Para comprender la aparición de franjas no es necesario, entonces, tener en cuenta las placas de vidrio, pues son de grosor uniforme, sino únicamente la cuña entre ellas.

La figura no está a escala; en particular, α se ha exagerado, ya que en realidad es mucho menor que 1. La luz cae con $\theta_i = 0$ en la placa superior y, debido a que $\alpha \ll 1$, se puede despreciar la ligera desviación que sufre al penetrar en la cuña de aire, esto es, donde haya refracción hacemos $\theta_t \approx 0$.

El desfase en P entre el rayo que penetra a la cuña de aire en ese mismo punto, se refleja en C y sale de nuevo al vidrio, y el rayo que se refleja en P está dado por la ecuación 27.13 en la interferencia constructiva. Como $\alpha \ll 1$, $\alpha \approx \tan \alpha = y/x$, de donde $y \approx \alpha x$. Reemplacemos esta expresión en la ecuación 27.13,

$$\frac{4\pi\alpha x}{\lambda} + \pi = 2m\pi. \quad (27.15)$$

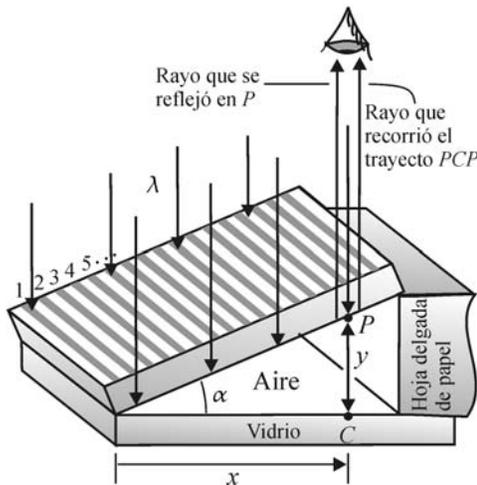


Figura 27.8 Interferencia en una cuña de aire.

Despejemos el ángulo de la cuña,

$$\alpha = \frac{(2m - 1)\lambda}{4x}. \quad (27.16)$$

La franja brillante más cercana al vértice de la cuña tiene $m = 1$ (tendría $m = 0$ si en la última ecuación en lugar de $2m - 1$ hubiera aparecido $2m + 1$). La vigésima franja tendrá entonces $m = 20$, y como hay 20 franjas por centímetro de cuña, el x de dicha franja es $x = 1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}$. Reemplacemos esto en la ecuación 27.16,

$$\alpha = \frac{(2 \times 20 - 1)(6 \times 10^{-7} \text{ m})}{4 \times 0.01 \text{ m}} = 5.85 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0.0335^\circ.$$

Como α es tan pequeño no importa si 1 cm lo medimos a lo largo de la placa horizontal o de la inclinada, en cualquier caso se llegaría a la vigésima franja brillante. Al igual que con los anillos de Newton, donde las placas se tocan hay oscuridad, esto es, se presenta interferencia destructiva.

Resumen

Cuando una película rodeada de aire se ilumina con luz blanca, solo la longitud de onda que cumpla la ecuación

$$2an \cos \theta_t = (2m - 1) \frac{\lambda}{2}, \quad m \text{ entero},$$

se refuerza por reflexión, y la película se ve del color respectivo; poca energía asociada con dicha λ atraviesa la película y sale al aire por el otro lado de la película (máxima reflexión y mínima transmisión).

La situación de mínima reflexión y máxima transmisión, opuesta a la anterior, ocurre para la longitud de onda que cumpla

$$2an \cos \theta_t = m\lambda.$$

Una película, de índice n y grosor $\lambda/4$ aplicada sobre un material de índice mayor, actúa como un recubrimiento antirreflectivo si la incidencia es normal; si se aplica sobre un material de índice menor, el recubrimiento se comporta al contrario, reforzando la luz reflejada.

Problemas del capítulo 5

- Si los rayos llegaran inclinados en la figura 25.1, p. 241, un ángulo θ_i respecto a la normal a la línea AB , ¿el desfase entre los campos en P estaría dado por la ecuación 25.4, p. 241?
- El dispositivo del ejemplo 25.3, p. 246, se encuentra sumergido en agua ($n = 1.33$); los datos son idénticos. Halle λ en el aire.
- A partir de la ecuación 25.18, muestre que el ancho angular de un máximo del patrón de interferencia de dos fuentes es $\Delta\theta = \lambda/a$.
- La primera franja oscura producida por un dispositivo de doble ranura se produce en un ángulo de 8° . Halle (a) la relación a/λ , (b) el número total de franjas oscuras y (c) el número total de franjas brillantes. (*Ayuda:* note que el ángulo de observación está entre $+90^\circ$ y -90° , y que el número de franjas es un número entero).
- Dos fuentes puntuales emiten en fase con longitud de onda λ ; la separación entre ellas es a . El patrón de interferencia se observa en una pantalla alejada de las fuentes ($D \gg a$); la pantalla es perpendicular a la línea de unión de las fuentes. El ángulo de observación θ es el ángulo entre dicha línea y la que va del punto medio entre las fuentes al punto de observación en la pantalla. Halle (a) las ecuaciones que dan la posición angular de los máximos y mínimos, (b) el mínimo a para el que se presenta interferencia constructiva en $\theta = 0$, (c) el literal anterior, pero para interferencia destructiva.
- Una emisora de radio AM transmite a través de dos antenas verticales iguales separadas 600 m. Las antenas emiten en fase con una frecuencia de 1000 kHz. Halle, en lugares alejados de las antenas (*alejados* quiere decir a distancias mucho mayores que 600 m), las direcciones en las que la intensidad es (a) máxima, (b) mínima.
- Un rayo de luz de longitud de onda λ pasa por P (figura 27.9), se refleja en los espejos A y B y luego pasa nuevamente por P . Los puntos P , A y B son los vértices de un triángulo equilátero de lado ℓ . Halle el desfase entre los campos en P y la condición para que la interferencia sea constructiva.
- Dos fuentes, separadas 10 m, emiten en fase ondas de radio con $\lambda = 5$ m. Halle, en la línea entre las fuentes, la distancia de los puntos a una de las fuentes en los que la interferencia es (a) constructiva, (b) destructiva.
- Una doble rendija se ilumina con luz de $\lambda = 550$ nm. En una pantalla a 1.45 m de las rendijas la distancia entre las franjas oscuras es 4.0 mm. Halle (a) la separación entre las rendijas, (b) la mínima distancia al centro del máximo central o de orden cero donde la intensidad en la pantalla se ha reducido a la mitad de la intensidad en ese centro, (c) en radianes, el desfase entre los campos eléctricos procedentes de las rendijas en un ángulo de observación de 1.0° , (d) el anterior desfase, pero el equivalente en grados entre 0° y 360° .
- Dos ondas coherentes con $\lambda = 500$ nm y $\lambda = 650$ nm pasan a través de un dispositivo de dos rendijas separadas 0.12 mm. El patrón de interferencia se observa a 1.2 m del dispositivo. Halle la separación, en mm, entre las franjas brillantes de ambas ondas en el espectro de segundo orden.

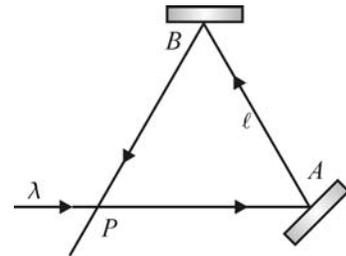


Figura 27.9

- Una emisora de FM transmite con una frecuencia de 108 MHz a través de dos antenas idénticas separadas 9.00 m; las antenas emiten en fase. La intensidad en un receptor a 200 m de cada una de las antenas es I_0 . Después el receptor se mueve de forma que queda 2.00 m más cerca de una antena que de la otra. Halle (a) el desfase δ entre las señales de las antenas en la primera y en la segunda posición, (b) la intensidad en la última posición en términos de I_0 .
- Una antena en la orilla de un lago recibe la señal de radio de longitud de onda λ de una estrella en el momento en que está apareciendo por el horizonte (figura 27.10). En el receptor P se mezclan la señal directa y la reflejada en el lago; la altura del receptor respecto al agua es h . Suponga $\lambda \ll h$ y $\theta \ll 1$. (a) Muestre que $\Delta r = PB - PA = 2h\theta$. (b) Halle la posición angular θ de la estrella cuando la antena detecta el primer máximo.

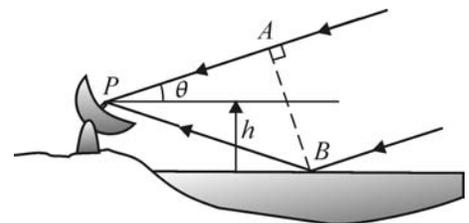


Figura 27.10

Nota: este problema es análogo al espejo de Lloyd, ejemplo 27.1, p. 262.

- 13** Cinco fuentes igualmente espaciadas emiten en fase con longitud de onda λ ; la separación a entre fuentes contiguas cumple que $a = \lambda/2$. (a) Halle la posición angular de los mínimos. (b) Calcule la máxima intensidad de los máximos principales y la intensidad en un ángulo de observación de 90° en términos de I_0 . (c) Dibuje un diagrama aproximado para la intensidad en función de θ , entre -90° y $+90^\circ$.
- 14** Una rejilla de N ranuras se ilumina perpendicularmente con luz de longitud de onda λ . Muestre que el ancho angular de un máximo secundario, para $\theta \ll 1$, es $\Delta\theta = \lambda/aN$ y el de un máximo principal es $\Delta\theta = 2\lambda/aN$.
- 15** En el ejemplo 26.1, p. 253, se dibuja el diagrama de fasores del primer mínimo, $m' = 1$, de un dispositivo de cinco rendijas. Muestre que el desfase δ en los tres mínimos siguientes es $\delta = 144^\circ, 216^\circ, 288^\circ$, respectivamente, y dibuje el diagrama de fasores en cada caso.
- 16** Una placa cuadrada de vidrio de 8 cm de lado está sobre otra placa de vidrio (figura 27.8); las placas están separadas en el extremo derecho por una tira de plástico de 0.0800 mm de grosor. Las placas se iluminan perpendicularmente con luz de $\lambda = 633$ nm. Halle el número de franjas brillantes que se observan en toda la placa y a lo largo de cada cm de la placa.
- 17** Se utiliza una película de fluoruro de magnesio, MgF_2 ($n = 1.38$), como recubrimiento antirreflector de una lente. Halle (a) el mínimo grosor del recubrimiento si se aplica sobre un vidrio de $n = 1.48$, (b) los próximos dos grosores para los que la película es antirreflectiva. Suponga incidencia normal y $\lambda = 550$ nm.
- 18** Halle el mínimo grosor de una película de agua jabonosa ($n = 1.33$) que cuando se ilumina perpendicularmente con luz de longitud de onda 550 nm se ve negra en el lado donde refleja y luminosa al otro lado. En ambos lados de la película hay aire.
- 19** Una onda plana de $\lambda = 550$ nm incide sobre una película con un ángulo de 45° (figura 27.1, p. 259). La película tiene un grosor de un micrómetro y un índice de refracción de 1.38. (a) Halle una expresión para el número de longitudes de onda o de ciclos de campo eléctrico que hay dentro de la película en el trayecto BCP y evalúela con los datos del problema. (b) ¿Cuál es el desfase del campo dentro de la película entre los puntos P y B en el mismo instante? (c) Halle una expresión para el número de longitudes de onda o de ciclos de campo eléctrico que hay en el trayecto AP y evalúela con los datos del problema. (d) ¿Cuál es el desfase entre el campo que incide en P desde el aire y el que hay en A en el mismo instante? (e) ¿Cuál es el desfase entre el rayo reflejado y el que emerge de la película en P ? (f) ¿El anterior desfase es el mismo que hay en la fovea F del observador? ¿Por qué?
-



Capítulo 6

Difracción

Contenido

Módulo 28

Difracción por una rendija

Módulo 29

Abertura circular. Experimento de Young

Módulo 30

Difracción por más de dos rendijas

Para explicar la compleja estructura del arco iris no basta con la *óptica geométrica*, pues esta sólo da cuenta de los arcos iris primario y secundario. Además de estos, se generan los arcos supernumerarios, cuya explicación, como lo advirtió Thomas Young, requiere de la *óptica ondulatoria* u *óptica física* cuyos principios se exponen en este capítulo ("Difracción") y en el anterior ("Interferencia").

Presentación

La interferencia es propia de las ondas: dos ondas de iguales características se pueden reforzar o cancelar; esto no ocurre con las partículas. Otro fenómeno distintivo de una onda, y que tampoco se asocia con una partícula, es la difracción, objetivo de este capítulo. Iniciamos su estudio considerando una rendija sobre la que incide una onda y lo terminamos con un conjunto de rendijas. Con ello completamos las tres maneras por las que una onda puede cambiar de dirección de propagación: reflexión, refracción y difracción.

Módulo 28

Difracción por una rendija

Contenido

- 28.1 Consideraciones generales
- 28.2 Difracción de Fraunhofer por una rendija
- 28.3 Poder de resolución

Objetivos

1. Definir qué es la difracción.
2. Estudiar el patrón de difracción de una rendija.
3. Definir qué es el poder de resolución de una rendija.

Preguntas básicas

1. ¿Qué ocurre cuando una onda pasa cerca de un borde?
2. ¿Mientras menor sea un agujero, menor es la imagen que proyecta en una pantalla cuando se ilumina?
3. ¿El sonido, al igual que la luz, también se difracta?
4. ¿Cómo se puede saber, observando en una pantalla la luz que atraviesa una rendija, el número de fuentes?

Introducción

La posición de los máximos y mínimos resultante de la interferencia de dos o más ondas depende de λ (ecuaciones 25.13, p. 243; 26.8, p. 252; 27.7, p. 260; 27.12, p. 263; 27.14, p. 265; 27.15, p. 266). Por ello, cuando se utiliza luz blanca el patrón de interferencia consiste en la descomposición espectral en varios colores. Pero veremos que aun con una sola fuente no puntual también se obtiene tal descomposición, aunque ya hablamos de patrón de difracción y no de patrón de interferencia.



John Rayleigh (1842-1919), físico inglés, hizo aportes fundamentales en acústica y óptica. Aisló el gas argón, por lo que recibió el premio Nobel en 1904. Escribió el libro *The theory of sound*, un clásico en el tema hasta el día de hoy. Explicó el color azul del cielo como resultado de la dispersión de la luz solar por pequeñas partículas.

28.1 Consideraciones generales

Para proyectar la sombra geométrica de un disco en una pantalla (figura 28.1) debido a una pequeña fuente, se trazan líneas rectas desde la fuente y tangentes al borde del disco. En este procedimiento se supone que la luz se propaga en línea recta. Francesco Grimaldi, en un libro póstumo de 1665, publicó su hallazgo de que en las sombras, cerca del borde, la luz forma franjas de varios colores. Debido al borde del disco, la luz no sigue, en consecuencia, una línea recta entre la fuente y la pantalla. Grimaldi dio el nombre de *difracción* a este fenómeno.

La propagación aparentemente rectilínea de la luz se aprecia claramente en los haces de luz solar que se filtran a través de las nubes o de una ventana. Esta observación la utilizó Newton en contra de una teoría ondulatoria de la luz.

Fresnel mostró, en 1818, que la difracción se puede explicar con el principio de Huygens y el principio de superposición. En 1882 Gustav Kirchhoff le dio una base matemática sólida al análisis de Fresnel. Los problemas de difracción están entre los más difíciles de la óptica; la difracción sonora también es de gran dificultad de abordar.

Aunque no hay una diferencia esencial entre los fenómenos de interferencia y difracción, se suele hablar de difracción cuando para explicar la intensidad en un punto es necesario considerar un gran número de rayos. Con dos fuentes puntuales hablamos de interferencia ya que para describir lo que ocurre en un punto basta con dos rayos, uno por fuente; pero si consideramos que cada una de ellas tiene un ancho finito, ya debemos considerar las fuentes como ranuras compuestas por un número infinito de ranuras de ancho infinitesimal, y para hallar el campo en un punto debemos sumar los aportes (principio de superposición) de los rayos provenientes de cada una de las ranuras infinitesimales; en este caso hablamos de difracción.

Los efectos de la difracción son especialmente notables cuando λ no es mucho menor que el tamaño b de los obstáculos que la onda encuentre en su camino; o sea que mientras más cerca esté de 1 la relación b/λ , más importante es la difracción. Cuando la luz solar pasa a través de una ventana y proyecta la forma de la ventana en el piso, las franjas de difracción cerca de los bordes de la proyección pasan desapercibidos, lo que podemos explicar como consecuencia de una relación b/λ muy alta: para una ventana de 58 cm de ancho y un λ promedio de la luz visible de 580 nm, la relación es $b/\lambda = 0.58 \text{ m}/(5.8 \times 10^{-7} \text{ m}) = 1$ millón. En cambio, si es un sonido de 440 Hz el que pasa por la ventana, su longitud de onda es, suponiendo una rapidez de 340 m/s, $\lambda = 340/440 = 0.77 \text{ m}$ y la relación vale $b/\lambda = 0.58 \text{ m}/0.77 \text{ m} = 0.75$. En la vida cotidiana la difracción sonora desempeña un papel fundamental: el valor de λ audible está entre 1.7 cm y 17 m, y muchas dimensiones cotidianas caen en este rango: una persona, un árbol, un edificio, una silla... Para todos ellos la relación b/λ no es muy diferente de 1.

El que los efectos de la difracción sean *especialmente notables* cuando λ no es mucho menor que b no quiere decir que no se aprecien en situaciones diferentes; la relación b/λ puede valer varios miles y aun así es posible que se puedan detectar fácilmente.

Las ondas de mayor λ tienen una relación b/λ menor y son las que más se difractan, esto es, son las que más se apartan de una propagación rectilínea ante un obstáculo: el rojo se difracta más que el azul al pasar por un agujero, o los sonidos graves se difractan más que los agudos. Cuando es-

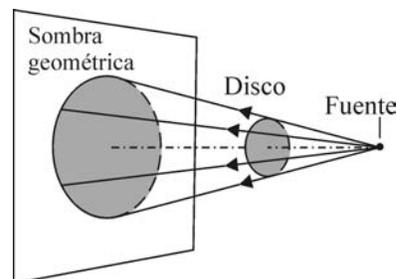


Figura 28.1 Proyección de una sombra en una pantalla.



Vea en el multimedia de Física de las ondas la experiencia Difracción por una barrera.

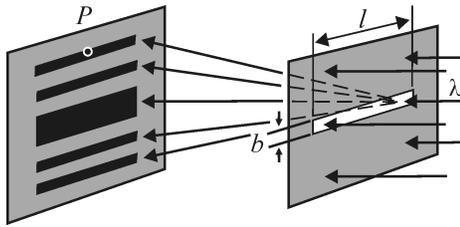


Figura 28.2 Difracción por una rendija.

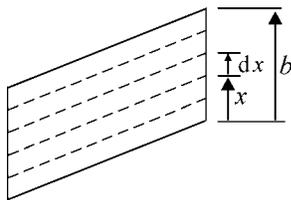


Figura 28.3 Emisores elementales de área.

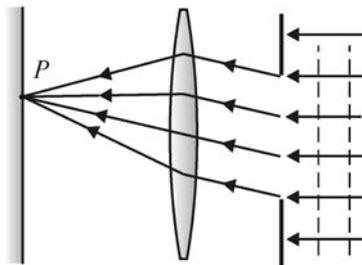


Figura 28.4 La lente convergente "acerca el infinito".

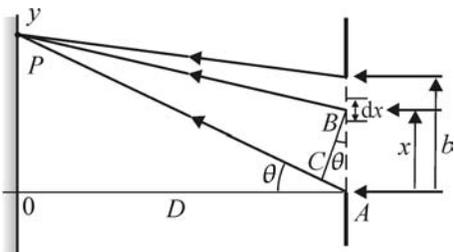


Figura 28.5 La rendija se divide en elementos infinitesimales emisores.

tamos en un concierto, para *ver* la orquesta debemos situarnos en un lugar en línea recta con ella, pero para *escucharla* podemos hacerlo detrás de una columna, ya que el sonido da vuelta a la columna y llega a nuestros oídos. Pero la composición de frecuencias sonoras cambia (análisis de Fourier), ya que los sonidos graves se difractan más que los agudos y aquellos se refuerzan respecto a estos.

La difracción es una característica de una onda, no de una partícula. Sin embargo, en la primera mitad del siglo XX se descubrió la naturaleza dual tanto de las ondas como de las partículas, consistente en que en algunos experimentos lo que tradicionalmente se había considerado ondas, como la luz, tenía comportamiento corpuscular —efecto fotoeléctrico—, y lo que se consideraba partículas, como el electrón, tenía comportamiento ondulatorio —difracción de electrones, en 1927, por Clinton Davisson, Lester Germer y George Thomson—.

28.2 Difracción de Fraunhofer por una rendija

Consideremos una onda plana —rayos paralelos— que incide sobre una rendija rectangular delgada de dimensiones b por l (figura 28.2), donde delgada quiere decir $b \ll l$; b es el ancho de la rendija. Siguiendo la enseñanza de Fresnel, apliquemos el principio de Huygens al frente de onda que incide en la rendija y luego usemos el principio de superposición.

Dividamos, imaginariamente, el área de la rendija en un número infinito de elementos de área de ancho infinitesimal dx (figura 28.3). Según Huygens, los elementos se convierten en emisores secundarios de ondas y el campo en un punto P es la suma de los infinitos campos provenientes de los infinitesimales. Para hallar $I(P)$ debemos hallar primero la amplitud $E_0(P)$ del campo resultante.

Haciendo incidir perpendicularmente una onda plana sobre la rendija logramos que los elementos de área estén sobre un mismo frente de onda, lo que nos garantiza que todos ellos emitan en fase, y así el desfase entre dos rayos en P se deba únicamente a la diferencia de caminos que siguen para llegar a P .

Consideramos solo puntos alejados de la rendija (*alejados* quiere decir $b \ll D$), de modo que los rayos se puedan considerar paralelos entre sí. Los rayos que llegan a ella ya son paralelos, porque la onda incidente es plana.

Poniendo la pantalla en el foco de una lente convergente (figura 28.4), se puede obtener, a poca distancia de la ranura, el patrón de difracción que se obtendría con la pantalla muy alejada de la rendija y sin lente. Se puede demostrar que la presencia de la lente introduce cambios de fase iguales en todos los rayos y el tratamiento del problema no se complica por la presencia de ella.

En la figura 28.5 mostramos, ya sin perspectiva, la rendija y la pantalla. El dibujo no está a escala, ya que b debe ser mucho menor que D para que los rayos sean, aproximadamente, paralelos. El desfase $\delta(P)$ entre el campo del primer elemento (rayo AP , $x = 0$) y el del elemento x (rayo BP) se debe únicamente a la diferencia de trayectos AC , ya que los campos en A y en B están en fase. Apliquemos, entonces, las ecuaciones 24.4, p. 235, o 25.4, p. 241, con $\Delta r = AC \approx x \text{ sen } \theta$,

$$\delta(P) = \frac{2\pi}{\lambda} x \text{ sen } \theta.$$

El desfase entre los campos del primer y el último ($x = b$) rayos es, según la anterior ecuación,

$$\alpha(P) = \frac{2\pi}{\lambda} b \text{sen } \theta. \quad (28.1)$$

En la construcción de fasores para hallar a E_0 (segmento FG de la figura 28.6), cada faser es un infinitesimal de amplitud de campo eléctrico, debido a cada elemento de área. El desfase entre dos rayos consecutivos es

$$d\delta(P) = \frac{2\pi}{\lambda} (dx) \text{sen } \theta.$$

Del triángulo rectángulo GHI deducimos

$$E_0 = 2 IG = 2\rho \text{sen}(\alpha/2). \quad (28.2)$$

De θ depende qué tanto se curva el arco de fasores de la figura; en el ángulo en el que la cabeza del último faser coincide con la cola del primero se presenta el primer mínimo de intensidad (figura 26.7, p. 254); cuando da dos vueltas, tenemos el segundo mínimo. Llamemos A_0 a la longitud del arco, que es una constante ya que no depende de θ , $A_0 = \rho\alpha$. Despejemos a ρ y reemplacémoslo en la ecuación 28.2,

$$E_0 = A_0 \frac{\text{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2}. \quad (28.3)$$

Reemplacemos en la ecuación $I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2$ para obtener la intensidad (hacemos $I_0 = \frac{1}{2} c \epsilon_0 A_0^2$),

$$I = I_0 \left[\frac{\text{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2} \right]^2.$$

Para obtener la intensidad en función del ángulo de observación, reemplacemos la ecuación 28.1 en la anterior ecuación,

$$I = I_0 \left[\frac{\text{sen}(\pi(b/\lambda) \text{sen } \theta)}{\pi(b/\lambda) \text{sen } \theta} \right]^2. \quad (28.4)$$

La intensidad es cero cuando

$$b \text{sen } \theta = m'' \lambda; \quad m'' = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (28.5)$$

En los ángulos θ de esta ecuación la intensidad debe ser cero; sin embargo, fue el resultado de varias aproximaciones. Ella se dedujo sobre la base de que tanto los rayos que llegan como los que salen del elemento difractor, en nuestro caso la rendija, son o se pueden aproximar a paralelos. Determinado medidor de intensidad puede dar cero, pero es posible que un medidor más sensible detecte alguna intensidad; *el que se cumpla o no la ecuación está íntimamente ligado a la sensibilidad del instrumento de medida*. Cuando la ecuación se cumple, la difracción se llama de **Fraunhofer** o de **campo lejano**, en caso contrario se llama **difracción de Fresnel** o de **campo cercano**.¹

En la figura 28.7a se grafica el patrón de difracción de una rendija. En b la figura a se ha rotado 90° y trasladado a la pantalla de observación. Cuando $m'' = 0$, o sea en $\theta = 0$, la intensidad es máxima y tiene el valor $I(0^\circ) = I_0$, independiente de λ . Para una rendija que se ilumine con luz blanca, todos los colores tienen el *máximo central de difracción* en el origen,

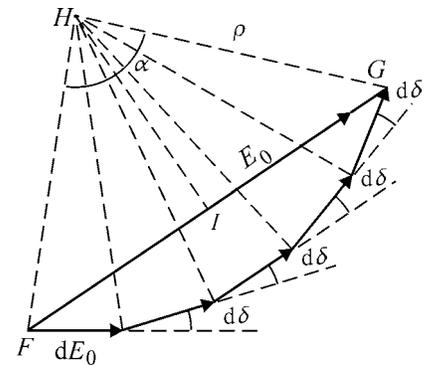


Figura 28.6 Diagrama de fasores para una rendija.

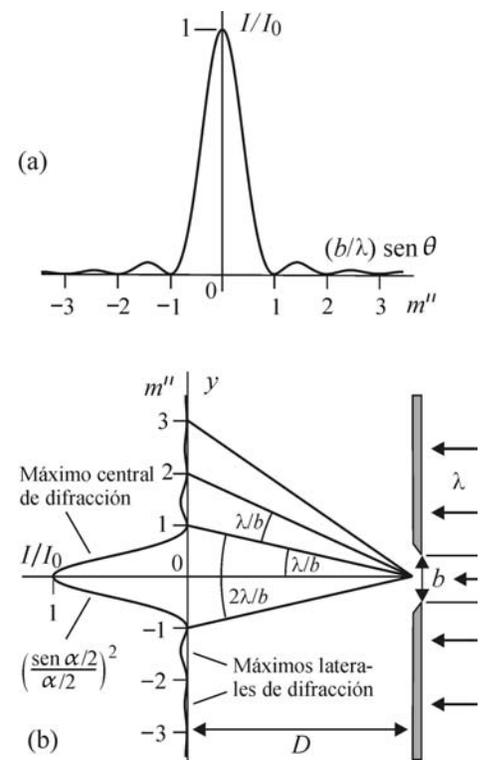


Figura 28.7 Patrón de difracción de una rendija.

¹ Para una discusión detallada sobre la distinción entre las difracciones de Fraunhofer y de Fresnel se puede consultar el artículo: Francisco Medina et al., "Angular criterion to distinguish between Fraunhofer and Fresnel diffraction", *Optik* 115, n.º 11, 2004.



Vea en el multimedia de *Física de las ondas* la experiencia *Difracción por una rendija*.

pero los *máximos laterales de difracción* están más desplazados a mayor λ , y la rendija separa los colores presentes en la luz blanca original. En el máximo central cae cerca del 85% de la energía que pasa a través la rendija.

Cerca del origen, esto es, en $y \ll D$, se cumple que $\theta \approx \sin \theta \approx \tan \theta = y/D$. La ecuación 28.5 es, aproximadamente, $b\theta \approx m''\lambda$. Despejemos el ángulo, $\theta = m''\lambda/b$. Apliquemos el operador Δ para obtener

$$\Delta\theta = (\lambda/b)\Delta m''; \quad \theta \ll 1.$$

Para el máximo central, $\Delta m'' = 1 - (-1) = 2$ y su ancho angular es

$$\Delta\theta = 2\lambda/b; \quad \theta \ll 1.$$

Para los máximos laterales, $\Delta m'' = (m'' + 1) - m'' = 1$, y el ancho angular de uno de ellos es

$$\Delta\theta = \lambda/b; \quad \theta \ll 1.$$

Vemos que si los máximos están cerca del origen ($\theta \ll 1$ o $b \gg \lambda$), el máximo central tiene un ancho el doble del de los laterales. Las anteriores ecuaciones podemos expresarlas en función de y , para $\theta \ll 1$, utilizando la aproximación $\theta \approx \sin \theta \approx y/D$.

La posición angular del primer mínimo, cuando $b \gg \lambda$, es, de acuerdo con la ecuación 28.5,

$$\theta = \lambda/b. \quad (28.6)$$

Note que, al contrario de lo que predice la óptica geométrica, a menor ancho de la rendija *más anchos son los máximos*.

Con una rendija de 1 cm o más de ancho y luz visible (λ entre 3.8×10^{-7} y 7.8×10^{-7} m), $\theta = \lambda/b$ es tan pequeño que podemos considerar el patrón de difracción coincidente con la proyección geométrica de los rayos a través de la rendija (no hay difracción), y que no se presentan franjas de máximos y mínimos; esto es, podemos dejar de tener en consideración el comportamiento ondulatorio de la luz.

Al contrario del anterior párrafo, para $b \approx \lambda$, el primer mínimo ocurre en un ángulo, según la ecuación 28.5, $\theta \approx \sin^{-1}(\pm 1) = \pm 90^\circ$; quiere decir esto que el máximo central abarca 180° , situación completamente impredecible con un mero trazado geométrico de rayos.

Ejemplo 28.1 Una rendija de 0.1 mm de ancho se ilumina perpendicularmente con luz proveniente de una lámpara de mercurio. El patrón de difracción se observa en una pantalla a 1 m de la rendija. La luz del gas de mercurio contiene, entre otras, luz violeta de $\lambda_{\text{vio}} = 435.8$ nm y luz amarilla de $\lambda_{\text{ama}} = 578.0$ nm. Cada λ produce franjas que corresponden con los máximos laterales en la pantalla. Para ambos colores halle (a) la relación b/λ , (b) la posición, en grados y en milímetros, del primer mínimo, (c) la posición, en grados y en milímetros, de la primera franja lateral, (d) la separación, en grados y en milímetros, entre estas franjas. (e) ¿A simple vista, se pueden observar separadas tales franjas?

Solución. Los datos son $b = 0.1 \text{ mm} = 10^{-4} \text{ m}$, $D = 1 \text{ m}$, $\lambda_{\text{vio}} = 435.8 \text{ nm} = 4.358 \times 10^{-7} \text{ m}$, $\lambda_{\text{ama}} = 578.0 \times 10^{-7} \text{ m}$.

$$(a) \quad \frac{b}{\lambda_{\text{vio}}} = \frac{10^{-4} \text{ m}}{4.358 \times 10^{-7} \text{ m}} \approx 230,$$

$$\frac{b}{\lambda_{\text{ama}}} = \frac{10^{-4} \text{ m}}{5.780 \times 10^{-7} \text{ m}} \approx 173.$$

En ambos casos la relación es mucho mayor que 1, lo que implica que para los primeros mínimos y máximos $\theta \ll 1$ y se pueden usar las aproximaciones $\theta \approx \sin \theta \approx \tan \theta = y/D$.

(b) Apliquemos la ecuación 28.6,

$$\theta_{\text{vio}} = \frac{1}{230} = 4.358 \times 10^{-3} = 57.3^\circ(4.358 \times 10^{-3}) = 0.250^\circ,$$

$$\theta_{\text{ama}} = \frac{1}{173} = 5.780 \times 10^{-3} = 57.3^\circ(5.780 \times 10^{-3}) = 0.331^\circ.$$

Multiplicando a θ por D obtenemos la posición en mm,

$$y_{\text{vio}} = D\theta_{\text{vio}} = (1000 \text{ mm})(4.358 \times 10^{-3}) \approx 4.4 \text{ mm},$$

$$y_{\text{ama}} = D\theta_{\text{ama}} = (1000 \text{ mm})(5.780 \times 10^{-3}) \approx 5.8 \text{ mm}.$$

Vea la figura 28.8 (no está a escala).

(c) Dentro de nuestra aproximación de θ pequeño, podemos decir que el centro de la primera franja lateral se encuentra a mitad de camino entre los dos primeros mínimos (figura 28.7),

$$\theta_{\text{vio}} = \frac{1.5}{230} = 6.522 \times 10^{-3} = 57.3^\circ(6.522 \times 10^{-3}) = 0.375^\circ,$$

$$\theta_{\text{ama}} = \frac{1.5}{173} = 8.671 \times 10^{-3} = 57.3^\circ(8.671 \times 10^{-3}) = 0.496^\circ.$$

Multipliquemos a θ por D ,

$$y_{\text{vio}} = (1000 \text{ mm})(6.522 \times 10^{-3}) \approx 6.5 \text{ mm},$$

$$y_{\text{ama}} = (1000 \text{ mm})(8.671 \times 10^{-3}) \approx 8.7 \text{ mm}.$$

(d) Una separación es un Δ . En grados,

$$\Delta\theta_{\text{ama, vio}} = \theta_{\text{ama}} - \theta_{\text{vio}} = 0.496^\circ - 0.375^\circ = 0.121^\circ.$$

En mm,

$$\Delta y_{\text{ama, vio}} = y_{\text{ama}} - y_{\text{vio}} = 8.7 - 6.5 = 2.2 \text{ mm}.$$

(e) El ojo humano, a una distancia igual al punto cercano, a simple vista puede distinguir dos líneas que estén separadas, como mínimo, ~ 0.1 mm. Las franjas amarilla y violeta están separadas, en $m'' = 1$, 2.2 mm, y podemos ver dos franjas sin ningún esfuerzo. Para máximos laterales más allá del primero, la separación es aun mayor.

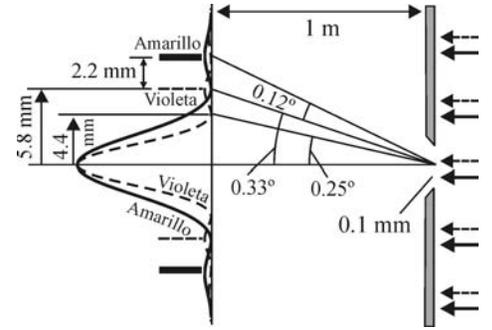


Figura 28.8 Difracción por una rendija.

28.3 Poder de resolución

La luz proveniente de dos fuentes puntuales lejanas, que emiten con la misma longitud de onda, penetra por una rendija de ancho b ; cada fuente produce un patrón de difracción en una pantalla. En la figura 28.9 es muy claro, mirando en la pantalla, que hay dos fuentes, pues hay dos máximos centrales. Se puede demostrar que el máximo central de una fuente está en la dirección en que la luz incide sobre la rendija (ejemplo 25.1, p. 245), y así el ángulo γ subtendido por las fuentes y la rendija es igual al ángulo subtendido por los máximos centrales y la rendija, por opuestos por el vértice.

Lord Rayleigh definió el poder de resolución R (R en su honor) de la rendija como el mínimo ángulo ($\gamma_{\text{mín}}$) subtendido entre las fuentes y la rendija que permite discernir los dos patrones, límite que se cumple cuando el máximo central de un patrón cae en el primer mínimo del otro patrón. Como la separación angular entre un máximo central y el mínimo más cercano es λ/b (vea la figura 28.9), se sigue entonces que $\gamma_{\text{mín}} \equiv R = \lambda/b$. Para $\gamma < R$ los patrones se superponen y solo se aprecia uno solo, siendo imposible detectar la existencia de más de una fuente. Para $\gamma > R$ las fuentes quedan más que resueltas, esto es, no hay duda de que hay dos fuentes, cada una produciendo un patrón de difracción.

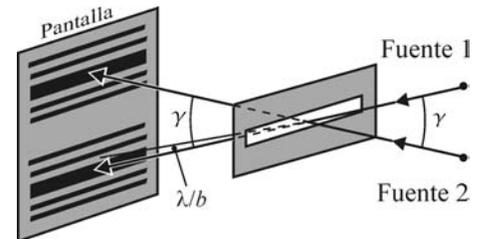


Figura 28.9 Difracción de dos ondas por una rendija.

Resumen

La difracción es la aparición de nuevas direcciones de propagación alrededor de esquinas y bordes cuando una parte de un frente de onda se encuentra con un obstáculo.

El patrón de difracción de una rendija delgada de ancho b que se ilumina perpendicularmente es

$$I = I_0 \left[\frac{\text{sen}(\pi(b/\lambda) \text{sen } \theta)}{\pi(b/\lambda) \text{sen } \theta} \right]^2. \quad (28.7)$$

La intensidad es cero cuando $b \text{sen } \theta = m''\lambda$; $m'' = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Si $b \gg \lambda$ o $\text{sen } \theta \ll 1$, el primer mínimo se forma en $\theta = \lambda/b$, y este es el poder de resolución de la rendija: $R = \lambda/b$. El ancho angular del máximo central de difracción es $\Delta\theta = 2\lambda/b$; el ancho de los máximos laterales es $\Delta\theta = \lambda/b$.

Módulo 29

Abertura circular. Experimento de Young

Contenido

- 29.1 Difracción de Fraunhofer por una abertura circular
- 29.2 Experimento de Young

Objetivos

1. Mostrar las características principales de la difracción por una abertura circular.
2. Relacionar la difracción con la imposibilidad de tener un sistema óptico perfecto.
3. Ver cómo se manifiesta el ancho de las rendijas en el patrón producido por dos rendijas.
4. Plantear algunas inquietudes que se suscitan cuando la luz se interpreta como partículas.

Preguntas básicas

1. ¿Sufre difracción la luz que penetra en nuestros ojos?
2. ¿Qué diferencias existen entre la reflexión, la refracción y la difracción?
3. ¿La luz es un onda o un flujo de partículas?
4. ¿Qué diferencias y semejanzas presenta el patrón de difracción de dos rendijas respecto al de una sola?

Introducción

La difracción producida por un obstáculo circular como una abertura o una lente es de especial importancia, ya que muchos sistemas ópticos fundamentales también son circulares: la pupila por la que pasa la luz en su camino hacia la retina o las lentes de un microscopio.

En el anterior módulo estudiamos el patrón de difracción producido por una rendija (figura 28.7, p. 277), pero si muy cerca existe otra rendija igual, ese patrón sufre cambios importantes (figura 29.7, p. 287), explicables fácilmente con un modelo ondulatorio pero no con un modelo corpuscular. En cursos más avanzados se da una explicación corpuscular.



Si el ojo fuera un sistema óptico perfecto formaría en la retina una imagen puntual de una fuente puntual. Sin embargo, el agujero circular que es la pupila difracta la luz y forma un máximo central no puntual en la retina, con varios anillos luminosos concéntricos de pequeño radio.

29.1 Difracción de Fraunhofer por una abertura circular

En la figura 29.1 una onda plana incide perpendicularmente sobre una abertura o una lente circular de diámetro b . La intensidad en P se calcula sumando (o mejor, integrando) los aportes al campo de los elementos de área en que dividamos la abertura. En la integración aparecen las funciones de Bessel de orden cero y no la vamos a desarrollar aquí. Pero la difracción por una abertura circular es tan importante, que algunos resultados sí los debemos mencionar, aunque no hagamos el desarrollo matemático detallado. Es importante porque muchos sistemas ópticos esenciales captan una porción circular de un frente de onda aproximadamente plano: la luz que penetra en nuestros ojos a través de la pupila, la que penetra en una cámara a través de una lente, o en un microscopio o un telescopio.

En el máximo central, llamado **disco de Airy**, cae el 84% de la energía que pasa por la abertura y en el primer anillo luminoso cae el 7%. Cuando $\lambda \ll b$, el radio angular del disco de Airy es

$$\theta = 1.22\lambda/b, \tag{29.1}$$

que es, por supuesto, el radio del primer mínimo o anillo oscuro; el radio del segundo anillo oscuro es $2.23\lambda/b$.

El poder de resolución (figura 29.2), según el criterio de Rayleigh ya expuesto, es

$$R = 1.22\lambda/b. \tag{29.2}$$

Cuando el primer mínimo cae en el anterior ángulo, la difracción se llama de Fraunhofer; si no, se llama de Fresnel. Repase el párrafo siguiente a la ecuación 28.5 donde se define esta clasificación de la difracción.

Las dos fuentes de la figura 29.2 pueden ser dos estrellas, las dos farolas de un carro, dos puntos en una bacteria, dos puntos de una letra en un escrito que estemos leyendo, dos puntos en la superficie de la Luna...; el agujero puede ser la pupila de un ojo, la lente de una cámara, de un microscopio o de un telescopio...; la pantalla puede ser la retina de nuestro ojo, la película de una cámara fotográfica, el arreglo de fotosensores CCD de una cámara fotográfica digital...

En el capítulo "Óptica geométrica" definimos como **sistema óptico perfecto** a aquel que forma una imagen puntual de un objeto puntual; cuando esto no se logra, decimos que el sistema tiene aberraciones. De un objeto puntual P sobre el eje principal de una lente esférica le llegan a la lente rayos paraxiales y no paraxiales (figura 29.3). Los rayos paraxiales dan lugar a una imagen puntual Q , mientras que los no paraxiales, al salir de la lente, tienen diferentes puntos de intersección diferentes a Q , dando lugar a **aberración esférica**. O sea que para disminuir la aberración esférica debemos eliminar los rayos no paraxiales usando un diafragma (pantalla con un agujero) de diámetro b que solo permita el ingreso de los rayos paraxiales (las pupilas de nuestros ojos son diafragmas). A menor b , menos aberración esférica, y pensaríamos que nos acercamos al ideal de obtener una imagen puntual. Sin embargo, hemos visto que a menor b mayor difracción, y en Q obtenemos un patrón de difracción como el de la figura 29.1, ampliándose a medida que disminuimos b . La difracción producida por una lente pasa desapercibida de ordinario, por la razón de que $b/\lambda \gg 1$ y los mínimos de difracción están a un ángulo $\theta \approx \lambda/b \ll 1$ del máximo central, dando la *aparencia*, a simple vista, de una imagen puntual. En conclusión, un sistema óptico perfecto es inalcanzable, no por una limitación tecnológica

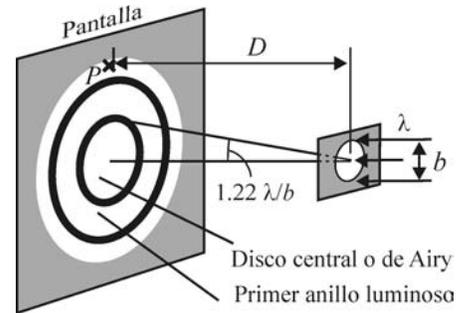


Figura 29.1 Difracción por una abertura o una lente circular.

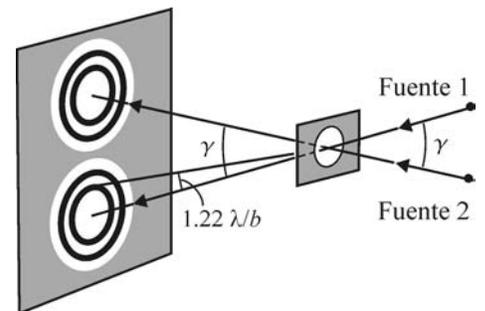


Figura 29.2 Difracción de dos ondas por una abertura o una lente circular.

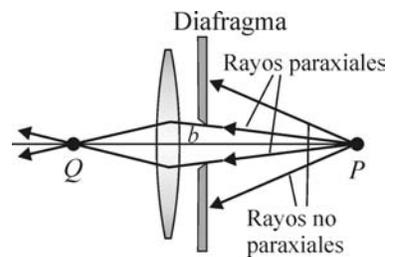


Figura 29.3 Diafragma para mermar la aberración esférica.



Vea en el multimedia de Física de las ondas la experiencia Difracción por una abertura circular.

nuestra, sino por la naturaleza ondulatoria de la luz. Vemos que una disminución de la aberración esférica conlleva un aumento de la difracción, y viceversa. Un costo adicional e importante es que a menor b menos intensa es la imagen.

Ejemplo 29.1 En la noche un observador mira una bombilla lejana que tiene su máximo de emisión en una longitud de onda de 520 nm. El diámetro de su pupila es de 4 mm y el de su ojo es de 2.4 cm. Halle el diámetro en la fovea del disco central de difracción correspondiente a la bombilla. Suponga un índice de refracción, dentro de todo el ojo, de 1.35 (el del agua es 1.33).

Solución. Los datos son: la longitud de onda dada es en el vacío o en el aire, $\lambda = 520 \text{ nm} = 5.2 \times 10^{-7} \text{ m}$, $b = 4 \text{ mm} = 0.004 \text{ m}$, $D = 2.4 \text{ cm} = 0.024 \text{ m}$, $n = 1.35$.

Dentro del ojo la longitud de onda cambia a (ecuación 15.2, p. 150) $\lambda' = \lambda/n$. El radio angular en la pantalla de observación, o sea en la retina, del disco central es (ecuación 29.1 y figura 29.1)

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda'}{b} = 1.22 \frac{\lambda}{nb}.$$

El radio del disco es, aproximadamente,

$$r = D\theta = 1.22 \frac{D\lambda}{nb};$$

el diámetro d es el doble,

$$d = 2r = 2.44 \frac{D\lambda}{nb} = 2.44 \frac{(0.024 \text{ m})(5.2 \times 10^{-7} \text{ m})}{1.35(0.004 \text{ m})} = 5.6 \times 10^{-6} \text{ m} = 5.6 \mu\text{m}.$$

Por comparación, el diámetro de las células fotosensoras de la fovea, o conos, es de 1-4 μm , y su longitud es de 50-80 μm ; por fuera de la fovea el diámetro de los conos es de 4-10 μm . En una cámara digital, el papel de los conos lo hacen diodos fotosensibles; un diodo se cuenta como un *pixel*. El diámetro hallado es del orden de milésimas de mm, y allí llega el 84% de la energía que penetra al ojo; por ser mucho más intenso el disco de Airy no percibimos los anillos que lo rodean y la bombilla la apreciamos puntual; en los diferentes anillos cae el 16% restante de la energía.

Podemos cambiar la bombilla lejana, sin que se modifique en nada (con la excepción de que λ cambiaría un poco) el ejemplo presente, por un punto P_1 de la Luna, a la que estaríamos mirando, o por un punto de una pintura que estemos apreciando. Nos podemos preguntar: ¿qué tan cerca puede estar sobre la Luna o la pintura otro punto P_2 de P_1 para que los resolvamos, esto es, para que se aprecien dos puntos y no uno? Esto equivale a preguntar por el detalle con que podemos observar la Luna o la pintura y está determinado por la difracción que sufre la luz al pasar por la pupila, y es a la que hace referencia el ejemplo 29.2.

Ejemplo 29.2 En el consultorio de un optómetra un paciente puede leer las letras más pequeñas que se le ponen a prueba, y corresponde a un poder resolutivo de 1/60 de grado. Suponiendo que esta resolución esté determinada únicamente por el diámetro b de la pupila, ¿cuánto vale b ? Sea $\lambda = 550 \text{ nm}$.

Solución. Los datos son: $R = \theta_{\text{mín}} = (1/60)/57.3 = 2.91 \times 10^{-4} \text{ rad}$, $\lambda = 5.50 \times 10^{-7} \text{ m}$.

Despejemos de la ecuación 29.2,

$$b = 1.22 \frac{\lambda}{R} = 1.22 \frac{5.50 \times 10^{-7} \text{ m}}{2.91 \times 10^{-4}} = 2.3 \times 10^{-3} \text{ m} = 2.3 \text{ mm}.$$

A mayor oscuridad más se dilata la pupila (b aumenta) y R disminuye, o sea que dos puntos P_1 y P_2 podrían estar más cerca y verse separados.

Ejemplo 29.3 La bombilla del ejemplo 29.1 es de 100 W, tiene una eficiencia del 5%, está a 4 km del observador y radia isotrópicamente. Halle la intensidad promedio del disco de Airy en la fovea del observador.

Solución. La solución depende fundamentalmente de la relación entre tres áreas: la del frente de onda, la de la pupila y la del disco de Airy; procedamos a hallarlas.

La luz se distribuye uniformemente en un frente de onda esférico de área $A = 4\pi r^2 = 4\pi(4000 \text{ m})^2 = 2.01 \times 10^8 \text{ m}^2$. Del ejemplo 29.1: área de la pupila, $A_{\text{pup}} = \pi b^2/4 = \pi(0.004 \text{ m})^2/4 = 1.26 \times 10^{-5} \text{ m}^2$; área del disco de Airy, $A_{\text{disco}} = \pi d^2/4 = \pi(5.6 \times 10^{-6} \text{ m})^2/4 = 2.45 \times 10^{-11} \text{ m}^2$.

Una eficiencia del 5% significa que de los 100 W nominales solo 5 se transforman en luz y los otros 95 se gastan en calor, $P = 5 \text{ W}$. Al ojo logra penetrar solo la potencia que pasa por la pupila,

$$P_{\text{ojo}} = \frac{A_{\text{pup}}}{A} P = A_{\text{pup}} \frac{P}{A} = A_{\text{pup}} I.$$

De esta potencia, el 84% va al disco central de difracción en la fovea, $P_{\text{disco}} = 0.84 A_{\text{pup}} P/A$. Como esta potencia se distribuye en el área del disco, la intensidad promedio por área en él es

$$I_{\text{prom}} = \frac{P_{\text{disco}}}{A_{\text{disco}}} = \frac{0.84 A_{\text{pup}} P}{A_{\text{disco}} A} = \frac{0.84(1.26 \times 10^{-5} \text{ m}^2)(5 \text{ W})}{(2.45 \times 10^{-11} \text{ m}^2)(2.01 \times 10^8 \text{ m}^2)} = 0.011 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

29.2 Experimento de Young

La difracción de Fraunhofer por dos rendijas paralelas e iguales se conoce con el nombre de **experimento de Young** o **experimento de la doble rendija** (Thomas Young, 1805). Es uno de los experimentos fundadores de la física, junto con los experimentos del plano inclinado (Galileo, 1638), dispersión de la luz por un prisma (Newton, 1666), efecto fotoeléctrico (explicación de Einstein, 1905), difracción de electrones (Davisson, Germer, Thomson; 1927) y unos pocos más.

Young fue el primero en obtener franjas brillantes y oscuras con dos agujeros, y en explicar la aparición de franjas oscuras como resultado de la interferencia destructiva de las ondas provenientes de los agujeros. Grimaldi lo había intentado en 1655, pero fracasó por haber utilizado directamente la luz solar sobre los agujeros. Young hizo incidir la luz solar primero sobre un pequeño agujero y de allí salía la luz que incidiría sobre dos agujeros cercanos entre sí, hechos en una pantalla. La tercera pantalla era la pantalla en la que observó las franjas. Hoy en día el primer agujero se reemplaza por una fuente láser.

En el capítulo "Interferencia" estudiamos la interferencia debida a dos fuentes puntuales (figura 25.1, p. 241). Por ser puntuales, para describir la intensidad en P bastó con dos rayos. Pero las fuentes tienen algún tamaño, y de una sola de ellas, según el principio de Huygens, llegan infinito número de rayos a P , los que se deben tener en cuenta para hallar $I(P)$. Al tener en cuenta el ancho de las fuentes, hablamos, entonces, de **difracción** por dos fuentes, debido al gran número de rayos necesarios para describir lo que ocurre en P . Cuando son necesarios pocos rayos, se habla de **interferencia**. A las características del patrón de intensidad debidas al ancho de las fuentes se les asigna el adjetivo *de difracción* y a las debidas a la separación entre ellas se le asigna el adjetivo *de interferencia*.

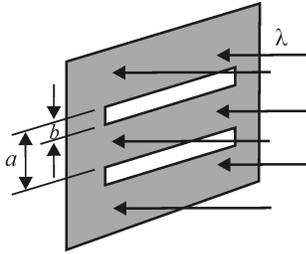


Figura 29.4 Dispositivo de doble rendija

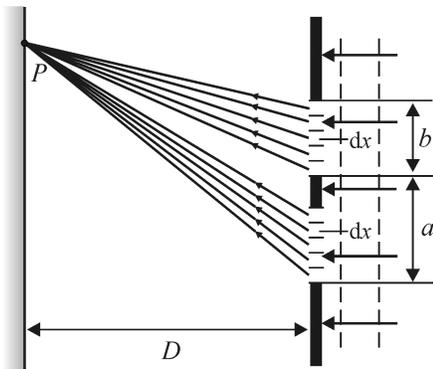


Figura 29.5 Experimento de Young.

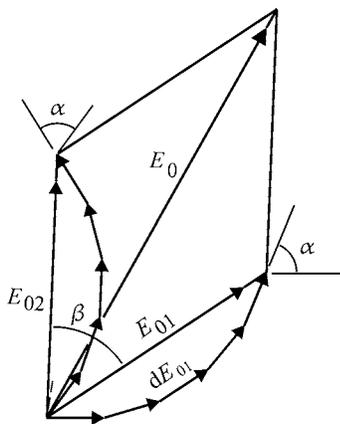


Figura 29.6 Fasores para la doble rendija.

El ancho de una sola fuente es b , la separación entre ellas es a (figura 29.4). Por separación entre fuentes definimos la distancia entre comienzo de una a comienzo de la otra, o también la distancia entre sus centros. Esto difiere de lo que comúnmente se entiende por *separación*; por ejemplo, de dos objetos iguales que estén en contacto se dice en la vida cotidiana que la separación entre ellos es cero, pero en óptica decimos que es el ancho de uno de ellos.

El problema de hallar $E_0(P)$ es una composición de los problemas, ya resueltos, de hallar la amplitud de dos rendijas de ancho infinitesimal y el de hallar la amplitud de una sola de ancho finito b . Como siempre, consideramos P alejado de las fuentes de modo que los rayos provenientes de las rendijas se puedan tomar como paralelos, inclinados un ángulo θ respecto a la horizontal. *Alejado* quiere decir que D es mucho mayor que el espacio que ocupan las dos rendijas. En la figura 29.5 cada rayo tiene un θ distinto, pero es por no estar a escala.

Para construir el diagrama de fasores que permita hallar E_0 dividimos en rendijas imaginarias de ancho infinitesimal dx —principio de Huygens— cada una de las dos rendijas (figura 29.5). La suma de los fasores de la rendija inferior coincide con la figura 28.6, p. 277 y, en consecuencia, la contribución E_{01} de esa rendija la da la ecuación 28.3,

$$E_{01} = A_0 \frac{\text{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2}, \quad (29.3)$$

donde α está dado por la ecuación 28.1. Como las rendijas son iguales, la contribución de la rendija superior es idéntica a la de la inferior,

$$E_{02} = E_{01} = A_0 \frac{\text{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2}. \quad (29.4)$$

Pero E_{02} está desfasado respecto a E_{01} en una cantidad β (figura 29.6),

$$\beta = k\Delta r = \frac{2\pi}{\lambda} a \text{sen } \theta.$$

Con la ley del coseno obtenemos la amplitud del campo resultante en P (figura 29.6),

$$\begin{aligned} E_0(P) &= \sqrt{E_{01}^2 + 2E_{01}E_{01} \cos \beta + E_{01}^2} = E_{01} \sqrt{2(1 + \cos \beta)} \\ &= 2E_{01} \cos(\beta/2) = 2A_0 \frac{\text{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2} \cos(\beta/2). \end{aligned}$$

Elevemos al cuadrado para obtener la intensidad buscada,

$$I = I_0 \left[\frac{\text{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2} \right]^2 \cos^2(\beta/2), \quad (29.5)$$

donde $I_0 = 2c\epsilon_0 A_0^2$. Para obtener la intensidad en función del ángulo de observación θ reemplacemos en la ecuación 29.5 a $\alpha = 2\pi(b/\lambda) \text{sen } \theta$ y $\beta = 2\pi(a/\lambda) \text{sen } \theta$,

$$I(\theta) = I_0 \left[\frac{\text{sen}(\pi(b/\lambda) \text{sen } \theta)}{\pi(b/\lambda) \text{sen } \theta} \right]^2 \cos^2[\pi(a/\lambda) \text{sen } \theta]. \quad (29.6)$$

En esta función apreciamos lo dicho de que el patrón de difracción de Young es una composición de dos situaciones: la interferencia de dos fuentes infinitesimales (o puntuales) y la difracción de una fuente finita. Denominemos función de difracción F_d y función de interferencia (por dos fuentes) F_i a

$$F_d = \left[\frac{\text{sen}(\pi(b/\lambda) \text{sen } \theta)}{\pi(b/\lambda) \text{sen } \theta} \right]^2, \quad F_i = \cos^2[\pi(a/\lambda) \text{sen } \theta].$$

La ecuación 29.6 podemos escribirla como

$$I = I_0 F_d F_i.$$

En la figura 29.7 graficamos a F_d , F_i y su producto I/I_0 , que corresponde con lo que se observa en la pantalla. La gráfica la dibujamos con las suposiciones $a, b \gg \lambda$, que implican las aproximaciones, ya usadas varias veces, $\theta \approx \text{sen } \theta \approx \tan \theta = y/D$. En el eje horizontal está el contador de máximos principales, $m = (a/\lambda) \text{sen } \theta$, y el de mínimos de difracción, $m' = (b/\lambda) \text{sen } \theta$. Como $a > b$, entonces $\lambda/a < \lambda/b$; esto quiere decir que el primer máximo de interferencia cae en un ángulo $\theta = \lambda/a$ menor que el del primer mínimo de difracción $\theta = \lambda/b$.

La intensidad de los máximos no cambiaría con θ (función F_i) si el ancho de las rendijas fuera infinitesimal; es un efecto del ancho finito de ellas (función F_d) el que la intensidad de los máximos sí dependa de θ .

También apreciamos en la misma figura que el tercer máximo principal no es observable por coincidir con el primer mínimo de difracción. Esta observación nos sirve para hallar la relación a/b con que fue construida la doble rendija a la que le corresponde tal patrón de difracción: $3(\lambda/a) = 1(\lambda/b)$, de donde $a = 3b$. Cuando la separación entre rendijas es el triple del ancho de una de ellas, no son observables los máximos principales de orden $\pm 3, \pm 6, \pm 9 \dots$ por coincidir con los mínimos de difracción $\pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ respectivamente. Es este un ejemplo sencillo de un fenómeno de gran utilidad práctica:

Examinando la distribución de intensidad en una pantalla debida a un dispositivo difractor, esto es, examinando su patrón de difracción, podemos conocer la geometría del dispositivo.

La geometría de una red cristalina se puede investigar examinando el patrón de difracción de una muestra del cristal (p. ej. aluminio) irradiado con rayos X.

La formación de máximos y de mínimos de la figura 29.7 se explica fácilmente con un modelo ondulatorio para la luz. Por ejemplo, decimos que un mínimo se da porque las ondas están en contrafase. ¿Pero cómo lo explicamos si interpretamos la luz como partículas, como fotones? ¿Podremos decir que en los mínimos los fotones se anulan? ¿Cómo respondemos esta pregunta elemental: por cuál de las dos rendijas pasa una partícula? Se halla que cualquier experimento que intente determinar cuál es la rendija destruye el patrón de difracción y en consecuencia lo invalida para responder la pregunta. Una onda atraviesa simultáneamente ambas rendijas, ¿será que un fotón puede hacer lo mismo? Cuando interpretamos la luz como partículas no lo podemos hacer con los conceptos newtonianos; por ejemplo, es necesario renunciar al concepto de trayectoria, que es básico a toda la física clásica, incluyendo la teoría de la relatividad. El concepto de trayectoria, $\mathbf{r}(t)$, conlleva que conozcamos el pasado, presente y futuro de la partícula; esto se denomina *física determinista*. La *mecánica cuántica* es la ciencia adecuada para interpretar la luz como partículas; es una *física probabilista* que fue desarrollada en las primeras décadas del siglo XX.¹



Vea en el multimedia de *Física de las ondas* la experiencia *Experimento de Young o de la doble ranura*.

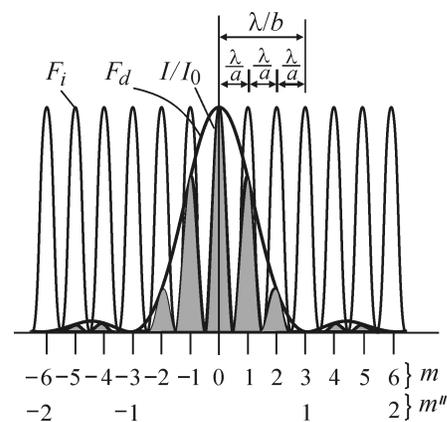


Figura 29.7 Patrón de difracción de Young.

¹ En los tres primeros capítulos del siguiente libro se discute el experimento de hacer pasar partículas por rendijas, aunque las partículas son electrones y no fotones: Richard Feynman, *Física, volumen III: Mecánica cuántica*, Addison Wesley, 2000.

Resumen

El patrón de difracción de una abertura circular de diámetro b consta de un círculo, o disco de Airy, de radio angular $\theta = 1.22\lambda/b$ (se supone que $\theta \ll 1$) y una serie de anillos concéntricos. El poder de resolución es $R = 1.22\lambda/b$.

El patrón de difracción, en el experimento de la doble rendija o experimento de Young, está dado por

$$I = I_0 F_d F_i, \text{ donde } F_d = \left[\frac{\text{sen}(\pi(b/\lambda) \text{sen } \theta)}{\pi(b/\lambda) \text{sen } \theta} \right]^2, \quad F_i = \cos^2[\pi(a/\lambda) \text{sen } \theta].$$

Módulo 30

Difracción por más de dos rendijas

Contenido

- 30.1 La rejilla de difracción
- 30.2 Poder de resolución

Objetivos

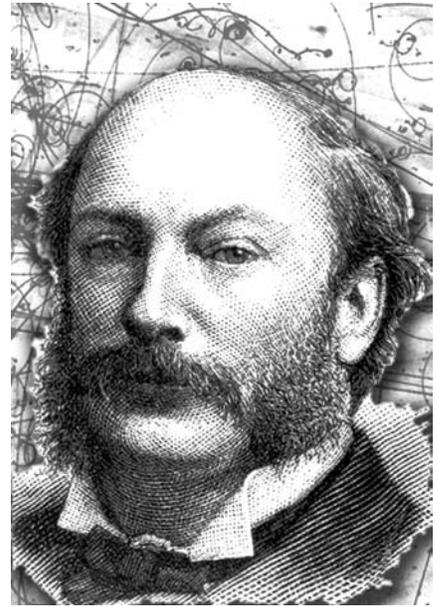
1. Estudiar la difracción por un conjunto de N rendijas.
2. Redefinir el poder de resolución del anterior conjunto.

Preguntas básicas

1. ¿Qué ocurre en el patrón de difracción al aumentar el número de fuentes?
2. ¿Qué diferencias existen entre el poder de resolución de una rendija y el de un número alto de rendijas?
3. ¿Qué tipos de rejillas existen?
4. ¿Existen rejillas no hechas por el hombre?

Introducción

La precisión de algunas medidas se puede mejorar aumentando el número de rendijas por las que pasa la luz procedente de una fuente que se necesita analizar, como ocurre cuando se analiza la luz del Sol u otra estrella, o de un gas en el laboratorio. Es útil, entonces, estudiar la difracción por varias rendijas.



Joseph von Fraunhofer (1787-1827), físico alemán, fundador de la espectroscopía, inventó y usó ampliamente las rejillas de difracción, con las que midió con precisión longitudes de onda de la luz. Fue el primero en estudiar las líneas oscuras del espectro solar —líneas de Fraunhofer— y fabricó los mejores vidrios de su época para instrumentos ópticos.

30.1 La rejilla de difracción

Un conjunto de N rendijas se conoce como **rejilla de difracción por transmisión**. (No se debe confundir *rendija* con *rejilla*). La superficie de los discos compactos y la caparazón de algunos insectos se comportan como *rejillas de reflexión*; las irregularidades de estas superficies causan, por difracción de las ondas reflejadas, la separación de la luz blanca en los colores del espectro visible.

En la figura 30.1 se muestra una rejilla de transmisión compuesta por varias rendijas idénticas, colineales, de ancho b y separación entre rendijas contiguas a . La rejilla la iluminamos perpendicularmente con luz monocromática de longitud de onda λ ; el patrón de difracción lo examinamos en una pantalla lejana (*lejana* quiere decir D mucho mayor que el tamaño de la rejilla), paralela a la rejilla (figura 30.2; es obvio que la figura no está a escala), o en el plano focal de una lente convergente. Así, podemos aproximar a paralelos tanto los rayos que llegan como los que salen de la rejilla y calificar **de Fraunhofer** a la difracción. El origen de coordenadas lo determina la perpendicular en el centro de la rejilla.

Reemplazando en la ecuación 28.3, p. 277, a E_0 por E_{0i} , obtenemos la contribución de la rendija i -ésima ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) a la amplitud en P ,

$$E_{0i} = A_0 \frac{\text{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2}, \quad \text{con } \alpha = 2\pi(b/\lambda) \text{sen } \theta. \quad (30.1)$$

Debido a que las rendijas son idénticas y a que la primera y última son, aproximadamente, equidistantes de P (por la aproximación de pantalla lejana o difracción de Fraunhofer) se cumple que

$$E_{01} \approx E_{02} \approx \dots \approx E_{0N}.$$

En el diagrama de fasores para hallar $E_0(P)$ (figura 30.3), entre dos vectores E_{01} procedentes de rendijas contiguas existe un desfase

$$\beta = k\Delta r = 2\pi(a/\lambda) \text{sen } \theta. \quad (30.2)$$

Reemplazando a β por δ la figura citada coincide con la figura 26.4, p. 252, y, en consecuencia, la amplitud buscada la da la ecuación 26.5, p. 252,

$$E_0(P) = E_{01} \frac{\text{sen}(N\beta/2)}{\text{sen}(\beta/2)} = A_0 \frac{\text{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2} \frac{\text{sen}(N\beta/2)}{\text{sen}(\beta/2)}.$$

Para obtener la intensidad en el vacío o en el aire, elevamos la anterior expresión al cuadrado y multiplicamos por $(1/2)c\epsilon_0$,

$$I(P) = \frac{1}{2}c\epsilon_0 A_0^2 \left[\frac{\text{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2} \right]^2 \left[\frac{\text{sen}(N\beta/2)}{\text{sen}(\beta/2)} \right]^2.$$

Definimos $I_0 = \frac{1}{2}c\epsilon_0 A_0^2$ y reemplazamos $\alpha = 2\pi(b/\lambda) \text{sen } \theta$ y $\beta = 2\pi(a/\lambda) \text{sen } \theta$ para obtener la intensidad en función del ángulo de observación,

$$I(\theta) = I_0 \left[\frac{\text{sen}(\pi(b/\lambda) \text{sen } \theta)}{\pi(b/\lambda) \text{sen } \theta} \right]^2 \left[\frac{\text{sen}(N\pi(a/\lambda) \text{sen } \theta)}{\text{sen}(\pi(a/\lambda) \text{sen } \theta)} \right]^2. \quad (30.3)$$

El patrón de difracción de la rejilla es una composición de dos situaciones: la interferencia de N fuentes infinitesimales y la difracción de una fuente finita de ancho b . Sean F_d la función de difracción de una rendija y F_i la función de interferencia de N fuentes definidas por

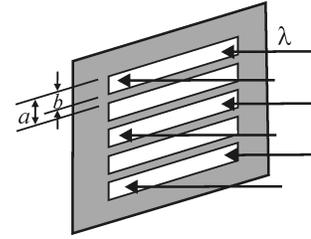


Figura 30.1 Dispositivo de varias rendijas.

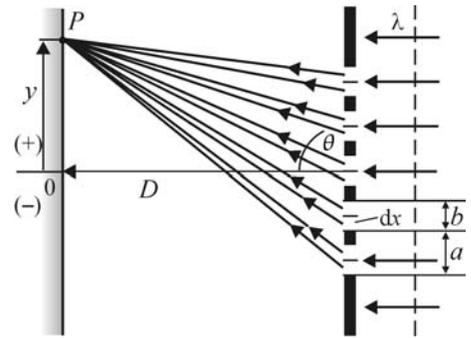


Figura 30.2 Difracción por una rejilla.

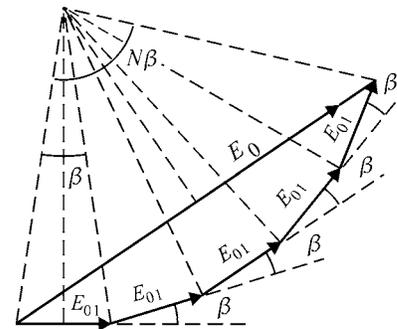


Figura 30.3 Diagrama para hallar E_0 .

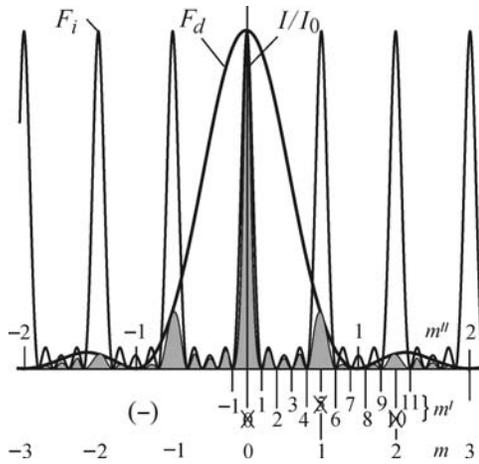


Figura 30.4 Difracción por N fuentes.

$$F_d = \left[\frac{\text{sen}(\pi(b/\lambda) \text{sen } \theta)}{\pi(b/\lambda) \text{sen } \theta} \right]^2, \quad F_i = \left[\frac{\text{sen}(N\pi(a/\lambda) \text{sen } \theta)}{\text{sen}(\pi(a/\lambda) \text{sen } \theta)} \right]^2.$$

La ecuación 30.3 podemos expresarla como

$$I = I_0 F_d F_i. \tag{30.4}$$

En la figura 30.4 graficamos a F_d , F_i y su producto I/I_0 , representado por la curva llena. La intensidad es cero cuando F_d o F_i es cero. Ya vimos que los mínimos de difracción cumplen la ecuación 28.5, p. 277; los mínimos de interferencia la ecuación 26.9, p. 253; y los máximos de interferencia la ecuación 26.8, p. 252. Note en la figura los contadores de máximos principales de interferencia m , de mínimos de interferencia m' y de mínimos de difracción m'' .

30.2 Poder de resolución

La luz emitida por una sustancia es la huella digital que la identifica; conociendo las longitudes de onda y las intensidades respectivas podemos obtener información muy valiosa sobre su composición. Con este objetivo la luz se hace incidir sobre una rejilla de centenares de rendijas por milímetro. Como la difracción depende de λ , la rejilla descompone la luz en elementos monocromáticos, cada color o λ con determinado ángulo. El dispositivo utilizado se llama **espectrómetro**, y la disciplina especializada en estudiar los espectros se llama **espectrometría**.

Supongamos que la fuente solo emite dos longitudes de onda que difieren en $\Delta\lambda$ pequeño (*pequeño* quiere decir $\Delta\lambda \ll \lambda$), $\lambda_1 = \lambda$ y $\lambda_2 = \lambda + \Delta\lambda$. Las ondas emitidas llegan con un solo ángulo a la rejilla, usualmente con un ángulo de incidencia de 0° . Para *una* abertura definimos el poder de resolución R como el mínimo ángulo subtendido por ondas procedentes de dos fuentes lejanas y la abertura que permite distinguir los dos patrones de difracción, pero *para una rejilla* R no se define como un ángulo, ya que todas llegan con 0° . La resolución de la rejilla la podemos llamar **resolución cromática**, puesto que es su capacidad para distinguir entre dos longitudes de onda, en cambio para una rendija es la capacidad para distinguir entre dos puntos.

En la figura 30.5 se ilustran las funciones de interferencia para las dos ondas, correspondientes a las intensidades que se observan en una pantalla después de que las ondas han traspasado la rejilla. El espectro de orden cero está en $\theta = 0^\circ$, en cambio para órdenes distintos ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$) cada λ tiene su θ , según la ecuación 26.8. En $m = 1$ el máximo de cada onda cae en un ángulo ligeramente diferente y es posible que se aprecien como un solo máximo, ya que $\Delta\lambda$ es pequeño; en $m = 2$ la separación $\Delta\theta$ entre los máximos es mayor que la separación que tienen en $m = 1$ y vemos que el máximo de la onda 2 cae en el primer mínimo a la derecha del máximo de la onda 1. Decimos que en $m = 2$ las dos ondas están *justamente resueltas*; a partir de $m = 3$ están más que resueltas y no hay duda de que efectivamente en la rejilla inciden dos longitudes de onda.

Definimos el poder de resolución de una rejilla como

$$R = \lambda/\Delta\lambda, \tag{30.5}$$

donde $\Delta\lambda$ es la mínima diferencia entre dos longitudes de onda que la rejilla permite ver separadas. Como a mayor m mayor separación entre los

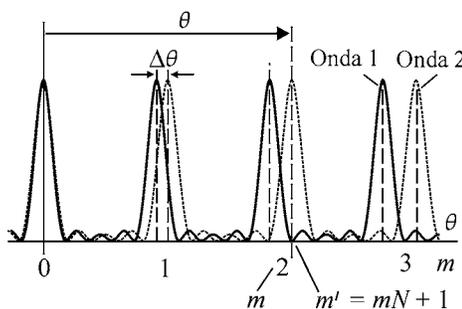


Figura 30.5 Resolución de una rejilla.

máximos de las dos ondas, quiere decir que R depende de m , y como la resolución justa ocurre cuando el máximo de una cae en el primer mínimo más cercano de la otra, entonces también depende de N , ya que la ecuación que da la posición angular de los mínimos de interferencia, ecuación 26.9, involucra el número de fuentes.

Hallemos una expresión para R . El primer mínimo a la derecha del máximo de orden m de la onda 1 tiene el contador $m' = mN + 1$ y su posición angular cumple la ecuación 26.9,

$$a \operatorname{sen} \theta = \frac{(mN + 1)\lambda}{N}.$$

En el mismo ángulo está el máximo de orden m de la onda 2 y cumple la ecuación 26.8,

$$a \operatorname{sen} \theta = m\lambda_2 = m(\lambda + \Delta\lambda).$$

Las dos últimas ecuaciones son iguales,

$$\frac{(mN + 1)\lambda}{N} = m(\lambda + \Delta\lambda).$$

Esta ecuación se simplifica y queda $\lambda = mN\Delta\lambda$. Despejando obtenemos que $\lambda/\Delta\lambda = mN$. Como esta es la definición del poder de resolución de la rejilla, llegamos a que

$$R = mN. \quad (30.6)$$

Ejemplo 30.1 La luz de sodio contiene dos líneas amarillas con longitudes de onda muy cercanas entre sí, conocidas como un **doblete**, $\lambda_1 = 589.00 \text{ nm}$ y $\lambda_2 = 589.59 \text{ nm}$. Halle (a) el poder de resolución de una rejilla que permita apreciar separadas las líneas, (b) el mínimo número de rendijas que se deben iluminar de una rejilla para poder ver separado el doblete en el segundo orden.

Solución. Según los datos, $\lambda = \lambda_1 = 589.00 \text{ nm}$, $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 0.59 \text{ nm}$, $m = 2$.

(a) Apliquemos la ecuación 30.5,

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589.00 \text{ nm}}{0.59 \text{ nm}} = 998.3.$$

(b) De la ecuación 30.6 despejemos el número de rendijas,

$$N = \frac{R}{m} = \frac{998.3}{2} = 499.15 \approx 500.$$

Hemos redondeado a 500 porque N es entero. En el primer orden el doblete se aprecia como una sola línea, en órdenes superiores a 2 el doblete se ve más que resuelto. Para poder apreciarlo en el primer orden se debe duplicar N .

Resumen

El patrón de difracción por una rejilla de N rendijas delgadas, iguales y colineales, de separación a y ancho individual b , lo dan las ecuaciones

$$I = I_0 F_d F_i, \text{ con } F_d = \left[\frac{\operatorname{sen}(\pi(b/\lambda) \operatorname{sen} \theta)}{\pi(b/\lambda) \operatorname{sen} \theta} \right]^2, F_i = \left[\frac{\operatorname{sen}(N\pi(a/\lambda) \operatorname{sen} \theta)}{\operatorname{sen}(\pi(a/\lambda) \operatorname{sen} \theta)} \right]^2.$$

Es posible que algunos máximos principales no sean visibles porque coinciden o están muy cerca de un mínimo de difracción. El efecto más notable

de la difracción es la disminución de intensidad de los máximos principales: compare la curva llena con la de interferencia de la figura 30.4.

El poder de resolución R de una rejilla es su capacidad de separar los máximos principales de dos longitudes de onda que difieren en $\Delta\lambda$ y depende del orden del máximo y del número de rendijas iluminadas: $R = \lambda/\Delta\lambda = mN$, con $\Delta\lambda \ll \lambda$.

Problemas del capítulo 6

1 Luz violeta procedente del mercurio, de longitud de onda 435.8 nm, incide perpendicularmente sobre una rendija; esta se encuentra muy cerca de una lente convergente de 50 cm de longitud focal (figura 28.4, p. 276). El ancho del máximo central, medido en el plano focal de la lente, es de 4 mm. Halle, en mm, el ancho de la rendija.

2 Una onda luminosa plana cae perpendicularmente sobre una rendija rectangular delgada cuyo ancho es mucho mayor que la longitud de onda. (Recuerde que $b \gg \lambda$ implica que $\theta \ll 1$). Utilizando la aproximación $\theta \approx \sin \theta$ para $\theta \ll 1$, (a) halle la posición angular del primer y el segundo máximos laterales del patrón de difracción, (b) muestre que la intensidad de los máximos laterales es

$$I \approx \frac{I_0}{\pi^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}; \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

y evalúe la intensidad de los dos primeros máximos en términos de I_0 .

3 En los capítulos "Interferencia" y "Difracción" nos hemos referido a la luz, pero el sonido, y cualquier onda, experimentan un comportamiento análogo. Las ecuaciones que se dedujeron para la intensidad, máximos y mínimos, tienen igual forma si en lugar de campos eléctricos y magnéticos hablamos de ondas de presión Δp ; resuelva, entonces, el siguiente problema:

A través de una ventana de 0.50 m de ancho incide perpendicularmente una onda sonora plana de 875 Hz; la rapidez del sonido es de 350 m/s. (a) ¿Cuánto vale la relación λ/b ? ¿es aplicable la aproximación $\sin \theta \approx \theta$? (b) ¿A qué ángulos y qué distancias y (figura 28.7, p. 277) es nula la intensidad debida al sonido que pasa a través de la ventana, si $D = 5.00$ m?

4 Una onda plana incide normalmente sobre una rendija de 0.1 mm de ancho. A 3° del máximo central el desfase entre las onditas provenientes de los extremos de la rendija (repase el principio de Huygens, p. 149) es 52 rad. Halle (a) la longitud de onda utilizada y el color respectivo, (b) a 3° , la intensidad en términos de la intensidad I_0 en el centro del máximo central.

5 Una lámina metálica tiene una rendija muy delgada; su coeficiente de expansión térmica lineal es α . (a) ¿Porcentualmente, cuánto cambia el ancho de la rendija cuando la temperatura cambia ΔT ? (b) La anterior pregunta, pero para el máximo central de difracción. (c) ¿Por qué las dos respuestas anteriores difieren solo en el signo? (d) Evalúe el primer literal para el cobre cuando la temperatura aumenta 100°C ; $\alpha_{\text{Cu}} = 1.7 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$.

6 Con un telescopio y luz de longitud de onda 550 nm se observan dos fuentes pequeñas distantes, separadas 2.00 m. El objetivo del telescopio está cubierto por una rendija de medio milímetro de ancho. Halle la máxima distancia a la que es posible distinguir las dos fuentes. Suponga que la resolución está determinada únicamente por la difracción y aplique el criterio de Rayleigh.

7 El patrón de difracción de Fraunhofer de la figura 28.7 corresponde a una rendija iluminada perpendicularmente con una onda plana monocromática. Si la dirección de incidencia en la rendija formara 20° con el eje horizontal, dibuje el nuevo patrón de difracción y justifíquelo. (Ayuda: vea el ejemplo 25.1, p. 245).

8 Halle la relación a/b entre la separación a de dos rendijas y el ancho b de una de ellas para que no se observe el máximo de interferencia de orden 2 por coincidir con el primer mínimo de difracción.

9 Los rectángulos negros de la figura 30.6 son las dos rendijas de un dispositivo de Young. Cada cuadrado pequeño mide 0.1 mm de lado. El dispositivo se ilumina con luz de longitud de onda $\lambda = b/150$, donde b es el ancho de una de las rendijas. Halle (a) la separación entre las rendijas, (b) el orden de los máximos principales que se pierden por coincidir con mínimos de difracción. (c) Grafique, hasta el tercer mínimo de difracción, el patrón de difracción de campo lejano para este dispositivo, análogo a la figura 29.7. (d) ¿Cuántos máximos principales completos contiene

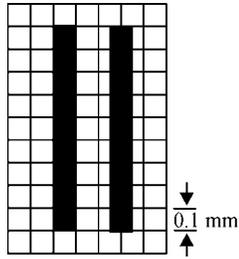


Figura 30.6

el máximo central de difracción? (e) ¿Cuál es el orden del máximo más lejano que se puede, en principio, observar en la pantalla, y a qué ángulo? (f) ¿Cuál es la intensidad de este máximo en términos de I_0 ?

10 Examinando el patrón de difracción de la figura 30.4 halle (a) el valor de la relación a/b que le corresponde a la rejilla que produce dicho patrón, (b) el número de fuentes que lo produce. Halle analíticamente, esto es, con la ecuación 30.4, los siguientes literales: (c) la intensidad del máximo principal de orden 0 en términos de I_0 , (d) la intensidad de los máximos principales de orden ± 1 y ± 2 en términos de I_0 .

11 La cuarta franja brillante después del origen producida por una rejilla se observa a 37.40° con luz verde de longitud de onda de 546.1 nm. (a) Halle el número de rendijas por cm de rejilla. (b) ¿Se puede observar una séptima franja brillante? ¿Por qué?

12 Discuta el patrón de difracción de campo lejano de cuatro rendijas igualmente espaciadas. Suponga luz monocromática e incidencia normal.

13 Una rejilla de 13 400 ranuras por pulgada se ilumina perpendicularmente con luz blanca. En el vacío o aire la longitud de onda visible está entre 380 y 780 nm. Halle (a) el orden que se observa a 90° y a qué longitud de onda corresponde, (b) el orden más alto del espectro que contiene todo el rango visible.

14 Una rejilla de difracción se ilumina con luz blanca. Muestre que para cualquier espaciamiento a de la rejilla, el tercer orden del extremo violeta del espectro visible se observa en un ángulo menor que el orden 2 del otro extremo rojo. Decimos que estos dos órdenes se traslapan.

15 Una rejilla plana de transmisión, de 4000 rendijas/cm, se ilumina normalmente con luz de hidrógeno, cuyas líneas α y β tienen longitudes de onda de $\lambda_\alpha = 656$ nm y $\lambda_\beta = 486$ nm, respectivamente. La aproximación $\sin \theta \approx \theta$ solo se aplica si $a/m\lambda \gg 1$. Halle, en grados, la separación angular entre tales líneas en los órdenes 1 y 2 (a) sin la mencionada aproximación, (b) con la aproximación.

16 Cierta longitud de onda del espectro de emisión del hidrógeno (átomo con un electrón, un protón y sin neutrones) mide 656.45 nm. La longitud de onda correspondiente para el isótopo del hidrógeno denominado **deuterio** (átomo con un electrón, un protón y un neutrón) mide 656.27 nm. Halle el mínimo número de rendijas que se deben iluminar con las longitudes de onda mencionadas para que se puedan distinguir las respectivas líneas en el tercer orden (con menos rendijas solo se vería una línea).

17 Dos ondas planas con longitudes de onda muy cercanas λ y $\lambda + \Delta\lambda$ inciden sobre una rejilla con separación entre rendijas a . *Muy cercanas* quiere decir $\Delta\lambda \ll \lambda$. Demuestre que la separación angular entre los órdenes m de ambas ondas es

$$\Delta\theta \approx \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{(a/m)^2 - \lambda^2}}.$$

Ayuda: como $\Delta\lambda \ll \lambda$, entonces $\Delta\theta \ll 1$ y se pueden hacer las aproximaciones $\cos \Delta\theta \approx 1$ y $\sin \Delta\theta \approx \Delta\theta$ en la identidad $\sin(\theta + \Delta\theta) = \sin\theta \cos \Delta\theta + \cos\theta \sin \Delta\theta \approx \sin\theta + \cos\theta \Delta\theta$. Además, $\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta}$.

18 Suponiendo que la resolución del ojo la determina únicamente la difracción de la luz al pasar por la pupila, y que esta tiene un diámetro de 5 mm, halle la mínima distancia entre dos puntos en el centro de la superficie lunar para que el ojo los resuelva, esto es, para que los vea como dos y no como un solo punto. Aplique el criterio de resolución de Rayleigh. Tome $\lambda = 530$ nm, y la distancia entre la Luna y la Tierra 380 000 km.

19 Dos satélites geoestacionarios están separados 1000 km y emiten microondas de 3.6 cm de longitud de onda. La altura de las órbitas geoestacionarias es de 35 700 km. Halle el mínimo diámetro de un plato o antena receptora en la superficie terrestre para resolver, de acuerdo con el criterio de resolución de Rayleigh, ambas transmisiones.

20 La estrella más cercana a la Tierra es Alfa Centauri, a una distancia de 4.28 años luz; el mayor planeta de nuestro sistema solar es Júpiter, con un diámetro medio de

137 000 km; el espejo del mayor telescopio tiene un diámetro de 10.0 m (telescopio Keck en Hawái). ¿Con el mencionado telescopio podríamos resolver un planeta del tamaño de Júpiter que orbitara dicha estrella? Suponga una longitud de onda de 500 nm. (*Resolver* quiere decir que veamos que tiene superficie, o sea que dos puntos diametralmente opuestos del planeta se alcancen a apreciar separados; vea la figura 29.2, p. 283).

Respuestas a los problemas

Capítulo 1 Ondas elásticas

- 2 $(kx - \omega t + 1.5\pi)$ o $(kx - \omega t - 0.5\pi)$
- 3 (a) adimensional, (b) L^{-1} , (c) L^{-2} , (d) LT^{-1} , (e) LT^{-2}
- 4 (a) $\xi(x, t) = A[2 + 3(x + 5t)^2]$
- 5 0.44
- 6 $\ell/2$
- 7 (a) Entre 17 m y 1.7 cm, (b) entre 75 m y 7.5 cm
- 8 2.00 m, 170 Hz
- 9 (c)
- 12 317 km
- 14 *Algunas respuestas:* los valores son aproximados, pues dependen de las medidas que se estimen con la regla. (b) $i = 5, 15, 25$; $x_5 \approx 2.6$ cm, $x_{15} \approx 7.9$ cm, $x_{25} \approx 13.2$ cm; $\xi(2.6 \text{ cm}) = \xi_5 \approx +6.5$ mm, $\xi_{15} \approx -6.5$ mm, $\xi_{25} \approx +6.5$ mm. (c) $i = 5, 15, 25$; los x respectivos son los del literal anterior. (e) $\rho_{\text{máx}} = \rho_{10} = \rho_{30}$, $\rho_{\text{mín}} = \rho_{i=0} = \rho_{20}$; $\xi_{i=0} = \xi_{10} = \xi_{20} = \xi_{30} = 0$. (g) $\nu \approx 3255$ Hz. (h) $I \approx 3.06 \times 10^6$ W/m², $\beta \approx 185$ dB; este nivel es irreal por lo alto y se origina en el valor exagerado de ξ_0 . (i) $\mathcal{P}_0 \approx 355$ mm Hg; entre 285 y 995 mm Hg
- 15 (a) 639 y 641 mm Hg, (b) 0.0011 kg/m³; 0.9989 y 1.0011 kg/m³
- 17 0.605 m/s · K o 0.605 m/s · °C
- 18 (a) 0.0200 s, $4\xi_0$; (b) 0.0553 s; (c) 0.542 m
- 19 (a) 2.64 m/s, (b) 3.98×10^{-3} N, (c) 0.435 W, 0.218 W
- 21 (c) 2. (d) $\xi_{or} \approx \xi_{oi}$, $\xi_{ot} \approx 2\xi_{oi}$
- 22 (a) 85.5 m/s, 38.4 m/s; (b) -0.190 mm, 0.310 mm; (c) 0.1154 J/s, 0.0167 J/s; (d) por conservación de la energía, $P_t = 0.1154 - 0.0167 = 0.0987$ J/s
- 23 (a) 0.0303 s, (b) 0.57 ms, (c) 8/9
- 24 (a) 54.7°, (b) 5.44×10^{-8} m, (c) 3.14×10^{-8} m, (d) distancia en m, tiempo en s: $\xi_x(P, t) = 3.14 \times 10^{-8} \text{ sen}(87.1 - 1400\pi t)$, (e) 6.87 μ J
- 25 9.54%
- 26 (a) 1/90 s; (b) 1/9 s, 9.00 Hz, 1.20 m, 10.8 m/s; (c) 7.56 g; (d) 0.565 m/s
- 27 (a) 20.0 Hz, (b) 4 y 5, (c) 32.0 m/s
- 28 (b) 3 y 2; (c) 85.2 Hz; (d) en b ; (e) figura 1; (f) 170.4 Hz, 6 y 4
- 29 (a) 216 Hz; (b) 5 y 7; (c) 346 m/s, 25.4 °C
- 30 (a) $\xi_0 \cos kx \cos \omega t$; (b) el origen es un nodo, el otro extremo es un antinodo; (c) $-\xi_0 \cos \omega t$; (d) $\xi_0/2$
- 31 (a) 447 Hz, 894 Hz, 1341 Hz; (b) 440 Hz, 880 Hz, 1320 Hz
- 32 (a) Transversal, estacionaria; (b) $2\pi \text{ m}^{-1}$; (c) 30°, 90°, 60°; (d) 3000 m/s; (e) A es un nodo, B es un antinodo; (f) 1000 Hz; (g) 3
- 33 (a) 6 dB, (b) $0 < I < 10^{-12}$ W/m²
- 34 1000
- 35 Un millón de veces
- 37 100
- 38 6.25, 900
- 39 18 100 J
- 40 (a) 0.0545 mm; (b) y en m y t en s: $\xi(y, t) = (5.45 \times 10^{-5}/y) \text{ sen}(7.9y - 2768t)$, paralelo a y ; (c) perpendicular a y
- 41 (a) 18.4 m/s, 947 Hz; (c) 0.143 s
- 42 En los puntos de tangencia a la circunferencia de las dos rectas que pasan por el observador; sin cambio en los puntos de la circunferencia más cercano y más lejano al observador
- 43 (a) A: 45.4 Hz, B: 44.1 Hz; (b) 0.680 m, 0.720 m, no; (c) 360 m/s, 370 m/s
- 46 469 y 531 Hz
- 47 1.84 Hz
- 48 (a) 2.6 Hz, (b) no, (c) 0 Hz
- 49 (a) 437 y 443 Hz; (b) con el armónico de orden 2, 6 Hz; (c) 443 Hz
- 50 (a) 113.4 km/h
- 52 (a) 15.9 s, (b) 3.46 km

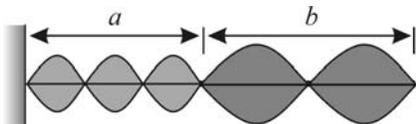


Figura 1

Capítulo 2 Ondas electromagnéticas

- 4 (a) 0.0258 V/m; (b) 4.80×10^{-4} T; (c) 9.86 W/m^2 , hacia el eje de la resistencia; (d) 0.0215 Ω , 0.0310 W
- 6 (a) $\mathbf{E} = 27.4 \frac{\text{V}}{\text{m}} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - ct \right) \mathbf{u}_z$, $\mathbf{B} = \frac{E(\mathbf{r},t)}{c} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{u}_x - \frac{1}{2}\mathbf{u}_y \right)$; (b) $\mathbf{S} = 1.00 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \left(\frac{1}{2}\mathbf{u}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{u}_y \right)$
- 7 (a) Figura 2
- 8 5.96 h
- 9 (a) 4.08×10^{-9} N; (b) 0; (c) 1.47×10^{-5} kg·m/s, 3.68×10^{-5} m/s
- 10 No
- 11 (a) $\mathbf{E}_1 = E_0 \sin(kx - \omega t)\mathbf{u}_z$, $\mathbf{E}_2 = E_0 \sin(ky - \omega t)\mathbf{u}_z$, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0[\sin(ky - \omega t) + \sin(kx - \omega t)]\mathbf{u}_z$; (b) lineal; (c) $x - y = (m + 1/2)\lambda$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; (d) no; (e) $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = (E_0/c) \sin(ky - \omega t)\mathbf{u}_x - (E_0/c) \sin(kx - \omega t)\mathbf{u}_y$; (f) $x - y = m\lambda/2$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; (g) $x - y = (m + 1/2)\lambda/2$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; (i) $\epsilon_0 E_0^2$, $c\epsilon_0 E_0^2$
- 12 Dextrógira
- 13 (a) $3P(200 - \alpha)/(1600\pi c G \rho M)$, (c) $0.24 \mu\text{m}$

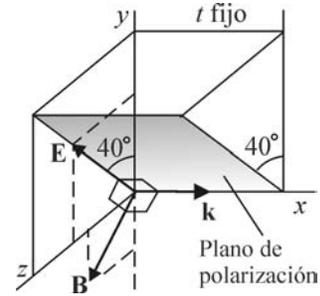


Figura 2

Capítulo 3 Reflexión y refracción

- 1 $0.71c = 212\,000 \text{ km/s}$
- 2 35.3°
- 6 489 nm, no
- 7 $\sqrt{2.5} = 1.58$
- 8 (a) 52.4° , (b) 35.8°
- 9 (a) 54.3° , (b) 68.9° y 90° , (c) 51.3° y 90°
- 10 1.37 m
- 11 (a) 31 595.6, (b) 33 175.4
- 16 36.9° , no
- 20 (a) -0.150 , -0.217 , 0.793 , 0.783 ; (b) -21.7 V/m , 78.3 V/m ; (c) $0.333 \mu\text{T}$, $0.072 \mu\text{T}$, $0.378 \mu\text{T}$
- 21 (a) Igual; (b) -15.0 V/m , 79.3 V/m ; (c) $0.333 \mu\text{T}$, $0.05 \mu\text{T}$, $0.383 \mu\text{T}$
- 22 (a) 0.75 mW , 0.25 mW ; (b) 0.029 mW , 0.971 mW

Capítulo 4 Óptica geométrica

- 2 (a) -0.60 m , espejo divergente. Imagen derecha y virtual; (b) figura 3
- 8 33.2 cm o 49.7 cm
- 9 5.8 cm
- 10 (a) $\arctan(n \tan \alpha)$, (b) 8.06°
- 11 (a) 20.0 cm; (b) virtual, -3.00 cm , invertida
- 13 (b) No
- 14 No, porque siempre $M_L > 0$
- 15 (a) -2.0 m , $+1.5 \text{ m}$, divergente; (b) $+0.50 \text{ m}$, 0.665 , virtual y derecha; (c) $0.66 \text{ cm} \times 0.66 \text{ cm}$; la imagen que se ve es cuadrada aunque el pez no lo sea; (d) figura 4; (e) 0 cm, 30 cm

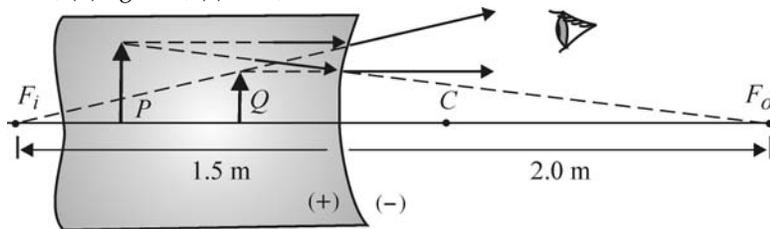


Figura 4

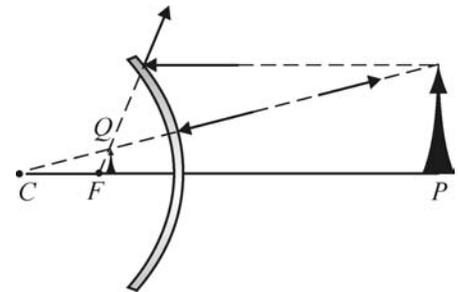


Figura 3

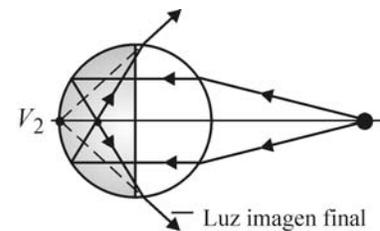


Figura 5

- 16 F_o está a $R/2$ a la derecha de V_1 , F_i está a la izquierda de V_2
- 17 (a) En V_2 , figura 5; (c) a δ a la derecha de V_2 ; ¿por qué no a la izquierda?
- 18 (b) 22.2 cm
- 19 (a) ∞ , 3 cm; (d) $q_o = -1.5 \text{ cm}$, $M_v = 1$; $q_h = 3 \text{ cm}$, $M_h = 2$

- 22 ∞
 27 (a) 2.29 D, (b) borde delgado, (d) más allá, (e) 2.00 D
 28 14.8 cm
 30 $t = ne/(n-1)$, 1.5 cm
 31 4.05 m, 86.8 mm
 32 5 cm
 34 1/16 m/s, en sentido opuesto a la velocidad del peatón; (c) 0 m
 36 $4f$
 37 (a) 20.0 cm, (b) 59.1 cm
 38 4.00 cm
 39 (b) $n' < n$, $n' > n$
 40 38.8 cm
 41 (a) -15.0 cm, grueso o lente divergente; (c) virtual; (d) a 19.1 cm de la lente, en el lado opuesto a la bombilla; (e) 13.3 cm; (f) 30.9 cm; (g) bicóncava; (h) 1.62; (i) es mucho más intensa la transmitida, según lo explican los valores de la transmitancia y la reflectancia para incidencia casi normal (óptica paraxial). Vea el ejemplo 17.3, p. 167.
 42 (a) $A 2(f_1 + 2f_2)$ del espejo, derecha, real, h
 44 (a) 15; (b) 3.12 cm; (c) 100 D, 32 D; (d) 120
 45 (a) 8.37 mm, (b) -21.5, (c) 312
 46 (a) -8.00, (b) 0.00375 rad = 0.215°, (c) -3.60 mm, (d) 1.72°
 47 (a) 11 mm, (b) 15.7°, (c) 30.5, (d) 2×10^{-8}

Capítulo 5 Interferencia

- 2 665 nm
 4 (a) 3.59, (b) 8, (c) 7
 5 (a) $a \cos \theta = m\lambda$, $a \cos \theta = (m + \frac{1}{2})\lambda$; (b) $a = \lambda$; (c) $a = \lambda/2$
 6 (a) 0°, ±30°, ±90°; (b) ±14.5°, ±48.6°
 7 $\delta(P) = (2\pi/\lambda)3\ell + 2\pi$. $\ell = m\lambda/3$; $m = 1, 2, 3, \dots$
 8 (a) 2.5 m, 5 m, 7.5 m; (b) 1.25 m, 3.75 m, 6.25 m, 8.75 m
 9 (a) 0.20 mm; (b) 1.0 mm; (c) 39.88 rad; (d) 124.7°
 10 3 mm
 11 (a) 0, 4.52 rad = 259°, (b) $0.4I_0$
 12 (b) $\lambda/4h$ (recuerde el espejo de Lloyd, figura 27.3, p. 262)
 13 (a) ±23.5°, ±53.1°; (b) $25I_0, I_0$
 16 253, 31.6
 17 (a) 100 nm; (b) 300 nm, 500 nm
 18 206.8 nm
 19 (a) $2an/\lambda \cos \theta_t$, 5.84; (b) $2\pi \times 5.84 = 36.7$ rad que equivale (¿por qué?) a 5.28 rad = 302°; además, $S(C) = 0$; (c) $AP/\lambda = 2an \sin^2 \theta_t / \lambda \cos \theta_t$, 1.53; (d) $2\pi \times 1.53 = 9.61$; (e) $36.7 - 9.61 - S(P) = 27.01 - \pi = 23.9$ rad, que equivale a 5.02 rad = -72.4°; (f) sí

Capítulo 6 Difracción

- 1 0.11 mm
 2 (b) $0.045 I_0, 0.016 I_0$
 3 (a) 0.8; no, porque 0.8 no es mucho menor que 1; (b) ±53.1°, ±6.67 m
 4 (a) 632.4 nm, rojo; (b) $0.00086 I_0$.
 5 (a) $100\alpha \Delta T$; (b) $-100\alpha \Delta T / (1 + \alpha \Delta T) \approx -100\alpha \Delta T$; (c) porque el ancho del máximo es inversamente proporcional al de la rendija; cuando uno aumenta el otro disminuye en la misma proporción; (d) -0.17%; el (-) significa una disminución al aumentar T
 6 1818 m
 8 2
 9 (a) 0.25 mm; (b) $5n$; $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$; (d) 5; (e) 374, 85.81°; (f) $4.1 \times 10^{-6} I_0$
 10 (a) 1.5; (b) 5; (c) $25I_0$; (d) $4.27I_0, 1.04I_0$
 11 (a) 2781; (b) no, porque tendría $\sin \theta > 1$
 13 (a) 4, 473.9 nm; (b) 2
 15 (a) 4.00°, 8.77°; (b) 3.89°, 7.79°

- 16 1216
 - 18 49 km
 - 19 1.57 m
 - 20 No
-

Bibliografía

1. Alonso, M. y E. Finn, *Física*, Addison Wesley, Buenos Aires, 1995.
2. Beyer, R., *Sounds of our times*, Editorial Springer-Verlag, Nueva York, 1999.
3. Cajory, F., *A history of mathematical notations*, Dover Publications, Nueva York, 1993.
4. Cremer, L. y J. Allen, *Physics of the violin*, MIT Press, 1984.
5. Crowe, M., *A history of vector analysis*, Dover Publications, Nueva York, 1994.
6. Dobbs, B., *The Janus faces of genius. The role of alchemy in Newton's thought*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
7. Elmore, W. y M. Heald, *Physics of waves*, Dover Publications, Nueva York, 1969.
8. Feynman, R., *Física*, vols. I, II y III, Addison Wesley, 2000.
9. Fletcher, N. y T. Rossing, *The physics of musical instruments*, Springer, Nueva York, 2005.
10. Garber, E., *The language of physics. The calculus and the development of theoretical physics*, Editorial Birkhäuser, Boston, 1999.
11. Hecht, E., *Óptica*, Addison Wesley, Madrid, 2000.
12. Jeans, J., *Science & Music*, Dover Publications, Nueva York, 1968.
13. Kinsler, L. et al., *Fundamentos de acústica*, Limusa, México, 1988.
14. Maxwell, J. C., *A treatise on electricity and magnetism*, Dover Publications, Nueva York, 1954.
15. Olson, H., *Music, physics and engineering*, Dover Publications, Nueva York, 1967.
16. Pierce, A., *Acoustics*, Acoustical Society of America, Nueva York, 1994.
17. Ronchi, V., *Optics. The science of vision*, Dover Publications, Nueva York, 1991.
18. Sears et al., *Física universitaria*, vols. I y II, Addison Wesley, México, 2005.
19. Serway, R. y J. Jewett, *Física*, vols. I y II, Thomson, México, 2005.
20. Truesdell, C., *Ensayos de historia de la mecánica*, Editorial Tecnos, Madrid, 1975.

Ude@

Educación no presencial