# ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

FISICA III

2020

# *ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS*

## *I. Ecuaciones de Maxwell*

Maxwell reunió el conjunto de ecuaciones que gobiernan los fenómenos de la electrostática; la magnetostática y la Ley de Faraday, la cual está presente en fenómenos donde los campos eléctricos y magnéticos varían con el tiempo y se inducen mutuas variaciones. Asimismo, y mediante la ecuación de conservación de la carga eléctrica, pudo compatibilizar las ecuaciones reunidas.

De la magnetostática se aporta la *Ley de Coulomb* que, expresada en forma diferencial y con validez para sistemas materiales, es:

$$\nabla.\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = 4\pi\rho(\boldsymbol{r},t) \tag{1}$$

Donde:

$\rho$ ***(r**, t)* es la densidad volumétrica de carga o carga por unidad de volumen.

***D** (**r**, t)* es el *vector desplazamiento eléctrico* el cual incorpora el campo debido a los dipolos moleculares y resulta igual a:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + 4\pi\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t) \tag{2}$$

Donde ***E** (**r**, t)* es el campo eléctrico y ***P** (**r**, t)* la *polarización del material* o momento dipolar por unidad de volumen. La ecuación anterior puede ser simplificada teniendo en cuenta que:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t) = \chi_e\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{3}$$

Que establece la proporcionalidad de la polarización y el campo eléctrico, para el caso de medios lineales e isótropos, siendo $\chi_e$ la *susceptibilidad eléctrica.*

Combinando la ec.2 y la ec.3 se obtiene:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{4}$$

Siendo:

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi_e \quad (5)$$

La *permitividad* del medio.

Por otra parte, desde la magnestostática se aporta la ecuación:

$$\nabla . \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \quad (6)$$

La cual significa la ausencia de masas magnéticas aisladas, es decir que, a diferencia de la electrostática, no se presentan masas magnéticas *norte* o *sur* separadas (ausencia de monopolos magnéticos.

En tercer término, se tiene la *Ley de Ampére* de la magnetostática:

$$\nabla x \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t) \quad (7)$$

En la cual ***J** (**r**, t)* es la densidad de corriente de conducción, protagonizada por las cargas libres dentro del material. ***H** (r, t)* es el campo magnético.

Finalmente se tiene la *Ley de Faraday*:

$$\nabla x \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \quad (8)$$

Que establece que las variaciones temporales de la inducción magnética ***B*** (***r***, t) determinan variaciones espaciales en el campo eléctrico.

La relación entre el campo magnético y la inducción magnética está definida por:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) - \boldsymbol{4\pi M}(\boldsymbol{r}, t) \quad (9)$$

Y, para un medio lineal e isótropo se cumple:

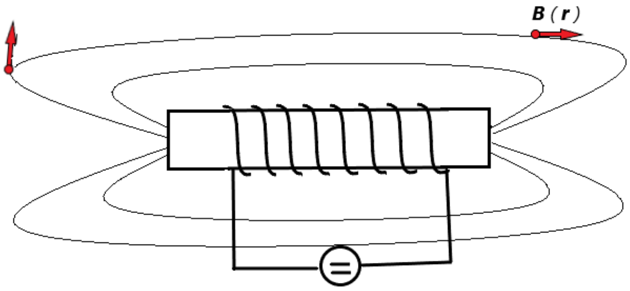
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{\mu H}(\boldsymbol{r}, t) \quad (10)$$

Siendo $\mu$: la permeabilidad magnética.

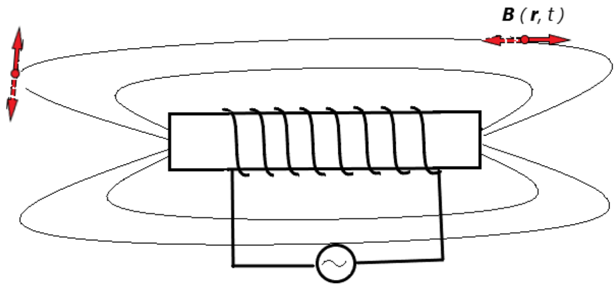
En una cantidad de textos se refiere a ***B** (r, t)* , simplemente, como el *campo magnético* y a ***H** (r, t)* como campo *magnético macroscópico*

Las magnitudes expresadas en las ecuaciones anteriores dependen de la posición y, explícitamente del tiempo; y se refieren a *fenómenos electromagnéticos* para los cuales los campos eléctrico y magnético se inducen mutuamente variaciones.

Para comparar este tipo de fenómenos con los ya conocidos de magnetostática o electrostática consideremos el caso de un solenoide al cual se le aplica una tensión constante (magnetostática) o bien si la tensión aplicada es variable con el tiempo, por ejemplo, una tensión sinusoidal, en cuyo caso se tiene un fenómeno electromagnético (figura 1 a y b)




*(a)*




*(b)*

*Figura 1: a) Campo magnético de un solenoide por el que circula una corriente constante; b) campo magnético del solenoide cuando circula una corriente variable (sinusoidal), En este caso, el campo magnético en cada punto del espacio varia su intensidad invirtiendo su signo a intervalos iguales al periodo de la tensión aplicada.*

Al aplicar una tensión constante al solenoide se desarrollan líneas de campo como las indicadas en la *Figura 1 a.* El campo magnético es tangente a la línea de campo y tiene una intensidad constante con una dirección y sentido definida. Al cambiar el punto de la línea de campo el vector cambia, pero para cada punto tiene su intensidad definida como su orientación y sentido.

Por otra parte, al aplicar una tensión variable, por ejemplo, sinusoidal, y se analiza en los mismos puntos del caso magnetostático anterior se observa que el campo magnético, si bien mantiene su intensidad máxima la intensidad del mismo varia armónicamente invirtiendo su sentido a intervalos de tiempo igual al periodo. Esto es un ejemplo de la dependencia explícita del tiempo para el campo magnético, ***B*** (***r***, t). En forma análoga se puede analizar la generación de un campo eléctrico estático, ***E** (**r**)*. y un campo eléctrico variable con el tiempo cuando en vez de tener una densidad de carga constante, *ρ (**r**)* se tiene que la misma varia con el tiempo, *ρ (**r**, t).*

Maxwell analizó las ecuaciones reunidas e incorporó la ecuación de conservación de la carga (ver Apéndice A):

$$\nabla.\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\rho(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = 0 \tag{11}$$

Si se calcula la divergencia de la ecuación correspondiente a la ley de Ampère resulta que:

$$\nabla.(\nabla x\boldsymbol{H}) = 0 \tag{12}$$

Esto se cumple para cualquier campo vectorial (ver Apéndice A) que se obtiene como el rotacional de otro; o sea que siempre es nulo independientemente de que sea ***H**.*

Lo que observó Maxwell es la contradicción entre la ley de Ampère por un lado y la ley de Coulomb junto con la conservación de la carga por otro. En efecto, la ec.12 determina que $\nabla.\boldsymbol{J}=0$ y sin embargo, por la ec.11 se tiene que: $\nabla.\boldsymbol{J}=-(1/c)\,\partial\rho/\partial t$ *la cual sólo es nula si los fenómenos son electrostáticos o magnetostáticos.*

Para resolver esta contradicción, Maxwell utiliza la ley de Coulomb en conjunto con la conservación de la carga para introducir una corriente adicional a la de conducción y necesaria para compatibilizar las ecuaciones. En efecto, de la *ec.1* y la *ec.11* se obtiene:

$$\nabla.[\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}] = 0 \tag{13}$$

Por lo tanto, es necesario agregar a la corriente de conducción el término:

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$$

Que se denomina *corriente de desplazamiento*. Con esta corriente que se debe agregar para cuando los campos varían con el tiempo y a fin de que las ecuaciones sean compatibles entre sí.

Así, las ecuaciones de Maxwell adquieren la forma:

$$\nabla.\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = 4\pi\rho(\boldsymbol{r},t)$$

$$\nabla.\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0$$

$$\nabla x\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\ t)}{\partial t}$$

$$\nabla x\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$$

## *II. Ondas electromagnéticas*

Las ecuaciones de Maxwell permiten comprobar que los campos ***E*** y ***B*** se comportan como ondas. Para esto se supone un medio lineal e isótropo es decir con $\varepsilon$ y $\mu$ constantes. Además, no existen fuentes de campos: cargas libres, $\rho$ (***r***, t), ni densidades de corriente ***J*** (***r, t***. La no consideración de las fuentes es a los fines de no complicar el desarrollo pues involucraría resolver el problema de las ondas electromagnéticas con fuentes.

Con estas suposiciones, las ecuaciones de Maxwell resultan:

$$\nabla.\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = 0$$

$$\nabla.\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0$$

$$\nabla x\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\ t)}{\partial t}$$

$$\nabla x\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$$

Aplicando el rotacional a la tercera ecuación:

$$\nabla x[\nabla x\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)] = -\frac{1}{c}\frac{\partial[\nabla x\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\ t)]}{\partial t}$$

Por la identidad vectorial (ver *Apéndice A*) y la cuarta ecuación:

$$\nabla(\nabla.\boldsymbol{E}) - \nabla^2\boldsymbol{E} = -\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}$$

Como $\nabla.$ ***E =0,*** entonces queda la ecuación de ondas para ***E (r, t)***:

$$\nabla^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = 0$$

Con:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Análogamente para ***B***(***r***,t), si se calcula el rotor de la cuarta ecuación y luego usando la segunda y la tercera:

$$\nabla^2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = 0$$

Las ecuaciones para ***E*** y para ***B*** representan tres ecuaciones escalares, una para cada componente:

$$\nabla^2 E_x(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathrm{E}_x(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 E_y(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathrm{E}_y(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 E_z(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathrm{E}_z(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = 0$$

-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-

$$\nabla^2 B_x(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathrm{B}_x(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 B_y(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathrm{B}_y(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 B_z(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 B_z(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = 0$$

***Resolución usando el método de separación de variables***

Las ecuaciones de onda que satisfacen las componentes de los campos pueden resolverse, al igual que el caso de ondas mecánicas, usando el método de separación de variables. Se comienza con aguna de ellas, por ejemplo, *$E_x$ (x, y, z, t)* proponiendo:

$$E_x(x, y, z. t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$$

Siendo,

$$\nabla^2 E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$$

La ecuación, desarrollada es:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

Reemplazando por la factorización y dividiendo por *XYZT*:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} - \frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}}{T} = 0$$

Separando en x:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} + \frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}}{T} = -{k_x}^2$$

Donde se asume una constante definida negativa para que la solución sea armónica lo cual ocurre, como se analizó para las ondas mecánicas, si satisface una ecuación del tipo:

$$X'' + {k_x}^2 X = 0$$

Cuya solución es de la forma:

$$X \approx E_{0x} \cos(k_x x)$$

Por razones que se explicitarán seguidamente se adopta la solución expresada en forma de complejo o fasorial:

$$X \approx e^{i k_x x}$$

La equivalencia entre ambas formas de presentar la solución estriba en que la primera resulta de tomar parte real de la segunda.

Procediendo, ahora a la separación según *"y"*:

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{Z''}{Z} + \frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}}{T} + {k_x}^2 = -{k_y}^2$$

Resultando para *Y(y)*:

$$Y'' + {k_y}^2 Y = 0$$

$$Y \approx e^{ik_y y}$$

Continuando con la separación según *"z"*:

$$\frac{Z''}{Z} = \frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}}{T} + {k_x}^2 + {k_y}^2 = -{k_z}^2$$

Resultando para Z*(z)*:

$$Z'' + {k_z}^2 Z = 0$$

$$Z \approx e^{ik_z z}$$

Finalmente, para *T(t)*:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -\left({k_x}^2 + {k_y}^2 + {k_z}^2\right)v^2 = -\omega^2$$

$$T'' + \omega^2 T = 0$$

$$T(t) \approx e^{-i\omega t}$$

La solución completa, expresada en forma compleja es:

$$E_x = E_{0x} e^{i(k_x x + k_x x + k_x x - \omega t)}$$

Donde:

1) Se ha incorporado una constante, $E_{ox}$ que representa la componente *x* del campo en *x=y=z=t=0.* La misma se asume compleja por razones de mayor utilidad en el cálculo sobre todo en lo referido a *Polarización de las Ondas electromagnéticas* (tema que se analiza a posteriori).
2) La función *T(t)* se asume de la forma $e^{-i\omega t}$ para que resulte, en conjunto con las soluciones X, Y, Z, una onda que progresa en el sentido positivo (ver capítulo referido a *Pulsos y ondas mecánicas*).
3) Si definimos:
   a) Vector de propagación, ***k***, que le *confiere naturaleza vectorial* al número de onda, definido inicialmente como un escalar, k=2π/λ:

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{u_x}k_x + \boldsymbol{u_y}k_y + \boldsymbol{u_z}k_z$$

b) De la separación para *T(t)*, el módulo de ***k*** es, *k=ω/v* en total coherencia con lo desarrollado para ondas mecánicas.

c) La solución para $E_x$, resulta:

$$E_x = E_{0x}e^{i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

Donde, k es el vector ya definido en el punto (b) y ***r*** es el punto del espacio donde se mide la amplitud del campo:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u_x}x + \boldsymbol{u_y}y + \boldsymbol{u_z}z$$

***resolución para*** $E_y$ **y** $E_z$**…**

El planteo para resolver las dos restantes componentes del campo eléctrico es idéntico al ya desarrollado para la componente *x ca*mbiando, adecuadamente, las constantes intervinientes. Así queda:

$$E_y = E_{0y}e^{i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

$$E_z = E_{0z}e^{i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

Y, el vector completo expresado en forma de complejo:

$$\boldsymbol{E_c} = \boldsymbol{\varepsilon_E}E_0e^{i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

Fórmula en la cual $\boldsymbol{\varepsilon_E}$ representa el versor unitario cuya dirección y sentido indica la dirección y sentido del campo eléctrico. $E_0$ es la amplitud compleja obtenida a partir de $E_{ox}$, $E_{oy}$, $E_{oz}$:

$$E_0 = \sqrt{{E_{ox}}^2 + {E_{oy}}^2 + {E_{oz}}^2}$$

Esta amplitud compleja puede expresarse en notación exponencial:

$$E_0 = |E_0|e^{i\varphi_E}$$

Por lo tanto, el campo complejo queda:

$$\boldsymbol{E_c} = \boldsymbol{\varepsilon_E}|E_0|e^{i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}-\omega t+\varphi_E)}$$

Y, el campo eléctrico *real* resulta de tomar la parte real de $\boldsymbol{E_C}$:

$$\boldsymbol{E} = Re\{\boldsymbol{E_c}\}$$

En consecuencia:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\varepsilon_E}|E_0|\cos(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r} - \omega t + \varphi_E)$$

***¿Y el campo magnético?...***

Siguiendo un procedimiento totalmente análogo al desarrollado para el campo eléctrico se llega a las ecuaciones correspondientes al campo magnético. Así se tiene un campo magnético complejo:

$$\boldsymbol{B_c} = \boldsymbol{\varepsilon_B}|B_0|e^{i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r} - \omega t + \varphi_B)}$$

A partir del cual y, tomando parte real de $\boldsymbol{B_c}$:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\varepsilon_B}|B_0|\cos(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r} - \omega t + \varphi_B)$$

***Un ejemplo concreto de generación de una onda electromagnética***

Hasta este punto se ha llegado a ecuaciones para ***E*** y ***B*** que contienen constantes, como así también vectores, sin definir. Las primeras son: *|Eo|*, *|Bo|* $\varphi_E$ y $\varphi_B$. Por su parte las segundas: $\boldsymbol{\varepsilon_E}$ y $\boldsymbol{\varepsilon_B}$. En un apartado posterior se obtendrá un resultado totalmente general, pero en el presente apartado se desarrollará un ejemplo de generación de una onda electromagnética en el cual se obtienen, usando las leyes de Maxwell, los campos eléctrico y magnético y las constantes y vectores desconocidos.

Consideremos que en z=0 se desarrolla un campo eléctrico variable con el tiempo, dirigido en la dirección x, con una dependencia temporal A.cos(ωt)

Por lo tanto, la dependencia en *z, t*

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{u_x}Acos(kz - \omega t)$$

En forma simular al caso en que se excitaba una cuerda en x=0. La diferencia con ese caso es que en el caso de la cuerda sólo se tiene el desplazamiento *y(x, t)* como variable oscilatoria. En el presente caso, además del campo eléctrico se tiene el campo magnético.

Recurrimos a la ley de Faraday para determinar la propagación:

$$\nabla x\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

A partir de la cual:

$$B = -c\int \nabla x\boldsymbol{E}dt$$

Calculemos el rotor:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_x & \boldsymbol{u}_y & \boldsymbol{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A.cos(kz-wt) & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\nabla x\boldsymbol{E} = \boldsymbol{u_y}\frac{\partial}{\partial z}[Acos(kz-\omega t)]$$

$$\nabla x\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{u_y}kAsen(kz-\omega t)$$

Integrando, para determinar ***B***

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{u_y}kcA\int sen(kz-\omega t)dt$$

Resolviendo:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{u_y}\frac{kc}{\omega}Acos(kz-\omega t)$$

Para completar, hay que recordar que:

$$\omega = k.v$$

Y

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{u_y}\sqrt{\mu\varepsilon}Acos(kz - \omega t)$$

En definitiva, se ha resuelto el problema completo y con ello se determinan las constantes. En la *Figura 2* se muestra la forma de la onda que se propaga.

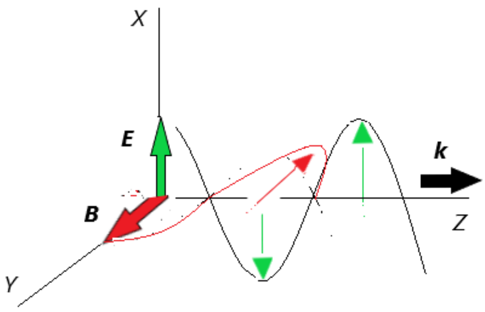



*Figura2: Campos eléctrico (verde) y magnético (rojo) componentes de una onda electromagnética.* ***k****: vector de propagación de la onda. Debe observarse que el vector de propagación* ***k*** *tiene sólo componente "z". En el tema siguiente, se generalizará este concepto.*

***Triedro electromagnético***

A partir de las ecuaciones generales deducidas para los campos E y B se procederá a utilizar las ecuaciones de Maxwell para deducir la relación que existe entre los vectores $\boldsymbol{\varepsilon_E}$, $\boldsymbol{\varepsilon_B}$ y $\boldsymbol{k}$. Asimismo se verificará la relación, encontrada en el punto anterior, entre la amplitud del campo eléctrico y el campo magnético. Es decir:

$$B_0 = \sqrt{\mu\varepsilon}$$

En primer término, se utilizarán las ecuaciones:

$$\nabla . \boldsymbol{E} = 0$$

$$\nabla . \boldsymbol{B} = 0$$

Para los campos:

$$\boldsymbol{E_c} = \boldsymbol{\varepsilon_E}|E_0|e^{i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r} - \omega t + \varphi_E)}$$

$$\boldsymbol{B_c} = \boldsymbol{\varepsilon_B}|B_0|e^{i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r} - \omega t + \varphi_B)}$$

Aplicaremos la identidad vectorial:

$$\nabla.[\varphi(x,y,z)\boldsymbol{M}(x,y,z)] = \boldsymbol{\nabla\varphi.M} + \boldsymbol{\varphi\nabla.M}$$

Identificando:

$$\varphi = |E_0|e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi_E)}$$

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\varepsilon_E}$$

Calculando el gradiente de φ:

$$\nabla\varphi = \boldsymbol{u_x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{u_y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{u_z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\nabla\varphi = i(\boldsymbol{u_x}k_x + \boldsymbol{u_y}k_y + \boldsymbol{u_z}k_z)\varphi$$

$$\nabla\varphi = i\boldsymbol{k}\varphi$$

Por otra parte, siendo $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ un vector constante, $\boldsymbol{\nabla.M}=\boldsymbol{\nabla.}\ \boldsymbol{\varepsilon_E}=0$

Finalmente, la aplicación de $\boldsymbol{\nabla.}\ \boldsymbol{E} = 0$ determina que:

$$\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\varepsilon_E} = 0$$

En consecuencia, el vector de dirección del campo eléctrico, $\boldsymbol{\varepsilon_E}$, es perpendicular al vector de propagación, ***k.***

En forma similar y, utilizando $\boldsymbol{\nabla.B_c}=0$ se puede demostrar que:

$$\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\varepsilon_B} = 0$$

En definitiva, se prueba que, los dos campos son perpendiculares al vector de propagación.

Queda por determinar que ángulo forman, entre sí, $\boldsymbol{\varepsilon_E}$ y $\boldsymbol{\varepsilon_B}$. Para ello se recurre a la ley de Faraday:

$$\nabla x\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\ t)}{\partial t}$$

Se aplica, al primer miembro, la identidad vectorial:

$$\nabla x(\varphi\boldsymbol{M}) = \nabla\varphi x\boldsymbol{M} + \varphi\nabla x\boldsymbol{M}$$

con la misma identificación de funciones y, teniendo en cuenta que $\boldsymbol{\nabla} x\ \boldsymbol{M}$=0, resulta:

$$i(\boldsymbol{k}x\boldsymbol{\varepsilon_1})\boldsymbol{\varphi} = \{\frac{i\omega}{c}|B_0|e^{i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}-\omega t+\varphi_B)}\}\boldsymbol{\varepsilon_B}$$

Reemplazado la función φ:

$$(\boldsymbol{k}x\boldsymbol{\varepsilon_1})|E_0|e^{i\left(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t+\varphi_E\right)} = \frac{\omega}{c}|B_0|e^{i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}-\omega t+\varphi_B)}\}\boldsymbol{\varepsilon_B}$$

De donde se deduce que $\varphi_E$=$\varphi_B$. Conjuntamente con:

$$\boldsymbol{\varepsilon_B} = \frac{\boldsymbol{k}x\boldsymbol{\varepsilon_E}}{k}$$

$$|B_0| = \sqrt{\mu\varepsilon}|E_0|$$

En consecuencia, los tres versores, $\boldsymbol{\varepsilon_E}$ $\boldsymbol{\varepsilon_B}$ y $\boldsymbol{k}$/k forman un triedro al que se denomina *triedro electromagnético.* Esto constituye una generalización del ejemplo desarrollado en el párrafo anterior. La onda electromagnética tiene un vector de propagación con una orientación espacial arbitraria (Figura 3).

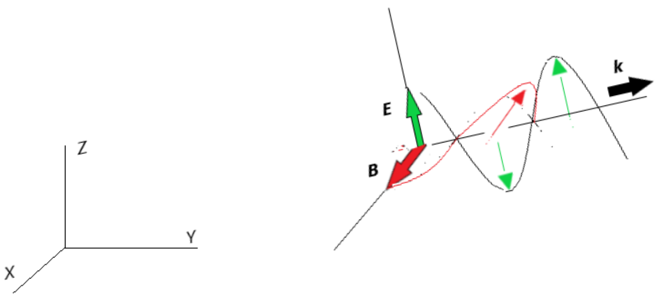



*Figura 3: Caso general para la propagación de una onda electromagnética.*

***Polarización de las ondas electromagnéticas***

Por polarización de las ondas electromagnéticas se refiere a la suma de los campos eléctricos de dos ondas cuyos campos eléctricos forman un ángulo de π/2. El campo resultante puede adoptar distintas formas según el desfasaje temporal entre los campos componentes y según el valor relativo de sus amplitudes.

Recurriendo a la expresión general del campo eléctrico de una onda y aplicando a los campos existentes según los ejes *x* e *y*:

$$\boldsymbol{E_x} = \boldsymbol{u_x}|E_{0x}|cos(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r} - \omega t + \varphi)$$

$$\boldsymbol{E_y} = \boldsymbol{u_y}|E_{0y}|cos(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r} - \omega t + \varphi + \Delta\varphi)$$

Se considera que Δφ es positivo y, según si el desfasaje es positivo o negativo se le asigna el signo (+) o el signo (-). Además, φ es el desfasaje inicial es decir para t=0 y en el origen de coordenadas ***r=0.***

Por otra parte, se define:

$$\alpha(t) = \boldsymbol{k}.\boldsymbol{r} - \omega t + \varphi$$

Con esto:

$$\boldsymbol{E_x} = \boldsymbol{u_x}|E_{0x}|cos\alpha(t)$$

$$\boldsymbol{E_y} = \boldsymbol{u_y}|E_{0y}|\cos[\alpha(t) + \Delta\varphi)$$

Distintos casos:

a) ***Δφ=0: Polarización lineal***

En este caso las amplitudes de los campos según los ejes *x* e *y* alcanzan sus valores máximos y mínimos al mismo tiempo. El campo resultante tiene una amplitud máxima:

$$E_0 = \sqrt{|E_{ox}|^2 + |E_{oy}|^2}$$

Y forma un ángulo con el eje *x*:

$$\theta_0 = arctg\frac{|E_{oy}|}{|E_{ox}|}$$

El ángulo con el eje x depende de la magnitud de los campos componentes.

b) ***Δφ= π/2.*** Las ecuaciones quedan:

$$E_x = |E_{0x}|cos\alpha(t)$$

$$E_y = |E_{0y}|\cos[\alpha(t) + \frac{\pi}{2})$$

Aplicando identidad trigonométrica para la segunda:

$$E_y = -|E_{0y}|\text{sen}\alpha(t)$$

Para este caso el extremo del vector resultante se desplaza en una elipse y gira en sentido horario. Es el tipo de *polarización elíptica dextrógira*. Para demostrar que se desplaza en una elipse despejemos, de las ecuaciones anteriores:

$$\frac{E_x}{|E_{0x}|} = cos\alpha(t)$$

$$\frac{E_y}{|E_{0y}|} = -\text{sen}\alpha(t)$$

Se tiene que:

$$(\frac{E_x}{|E_{0x}|})^2 + (\frac{E_x}{|E_{0y}|})^2 = 1$$

Como caso particular, cuando $|E_{0x}|=|E_{0y}|$ resulta la *polarización circular dextrógira.*

***c) Δφ=-π/2***

$$\frac{E_x}{|E_{0x}|} = cos\alpha(t)$$

$$\frac{E_y}{|E_{0y}|} = \text{sen}\alpha(t)$$

Entonces, se tiene una polarización levógira donde el campo eléctrico resultante gira en sentido anti horario. Finalmente, si los campos componentes tienen igual amplitud se tiene una *polarización circular levógira.*

# APÉNDICE A

# OPERADORES VECTORIALES

**1.-** ***Operador nabla,*** $\nabla$

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{u_x}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{u_y}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{u_z}\frac{\partial}{\partial z}$$

Donde, ***u****x*, ***u****y*, ***u****z* son los versores unitarios en las direcciones *x, y, z.*

**2.-** ***Gradiente de una función escalar****, f*

Es una función vectorial que resulta de aplicar el operador nabla a una función escalar, *f (x, y, z).*

$$\boldsymbol{\nabla f} = \boldsymbol{u_x}\frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{u_y}\frac{\partial f}{\partial y} + \boldsymbol{u_z}\frac{\partial f}{\partial z}$$

**3.-** ***Divergencia de una función vectorial,*** $\boldsymbol{A}$ *(x, y, z).*

Es una función escalar que resulta de la aplicación del operador nabla a una función vectorial. Si $\boldsymbol{A}$ (x, y, z) es una función vectorial:

$$\boldsymbol{A}(x, y, z) = \boldsymbol{u_x}A_x + \boldsymbol{u_y}A_y + \boldsymbol{u_z}A_z$$

Entonces, la divergencia de ***A*** es:

$$\nabla.\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{u_x}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{u_y}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{u_z}\frac{\partial}{\partial z}).(\,\boldsymbol{u_x}A_x + \boldsymbol{u_y}A_y + \boldsymbol{u_z}A_z)$$

(producto escalar de $\boldsymbol{\nabla}$ con $\boldsymbol{A}$)

Resultando:

$$\nabla.\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

En particular, si ***A***=$\nabla f$:

$$\nabla.(\boldsymbol{\nabla} f) = \nabla^2 f$$

Donde, a $\boldsymbol{\nabla}^2 f$ se le denomina *Laplaciano* de la función *f*:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

**4.- *Rotacional de una función vectorial.*** Se define como el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_x & \boldsymbol{u}_y & \boldsymbol{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\nabla x\boldsymbol{A} = \boldsymbol{u_x}(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}) + \boldsymbol{u_y}(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}) + \boldsymbol{u_z}(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})$$

***¡Un cálculo importante!***

Un cálculo importante para determinar las ecuaciones de Maxwell es el que surge de hacer la divergencia del rotor. En efecto:

$$\nabla.(\nabla x\boldsymbol{A}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

Resulta nulo por aplicación de la regla de Schwartz que establece la igualdad de las derivadas cruzadas con orden intercambiado (funciones bien comportadas).

Por lo tanto:

$$\nabla.(\nabla x\boldsymbol{A}) = 0$$

**5.- *Laplaciano de un vector***

Por definición, el *laplaciano de un vector* es otro vector cuyas componentes son el laplaciano de las respectivas componentes. Es decir:

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{u_x}\nabla^2 A_x + \boldsymbol{u_y}\nabla^2 A_y + \boldsymbol{u_z}\nabla^2 A_z$$

Un cálculo importante para el análisis de las ondas electromagnéticas se refiere a:

$$\boldsymbol{\nabla x}(\boldsymbol{\nabla xA}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{\nabla}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{A}$$

Para demostrar esta identidad vectorial se procede a calcular una de las componentes del primer miembro para luego comparar la misma con la homónima del segundo miembro. Para las dos componentes restantes se procede en forma similar.

$$\nabla x\boldsymbol{A} = \boldsymbol{u}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{u}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{u}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

Designando:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\nabla xA}$$

Se tiene:

$$\nabla x\boldsymbol{A} = \boldsymbol{u}_x M_{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{u}_y M_{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{u}_z M_{\boldsymbol{z}}$$

Aplicando nuevamente el rotacional:

$$\nabla x\boldsymbol{M} = \boldsymbol{u}_x\left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{u}_y\left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{u}_z\left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\right)$$

Si se analiza la primera componente:

$$\left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial z}$$

Por otra parte, la componente *x* del segundo miembro:

$$[\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A}]_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) - (\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2})$$

Simplificando, se cumple la igualdad con la primera coordenada del primer miembro.

# APÉNDICE B

# ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE LA CARGA

Si se considera, dentro de un material, que presenta una función densidad volumétrica de carga $\rho$ (***r***, *t*), un volumen arbitrario *V* limitado por una superficie cerrada *S. E*ntonces se puede plantear una condición de balance entre la variación temporal de la carga dentro del volumen y el flujo de cargas a través de la superficie (*Figura 1*)

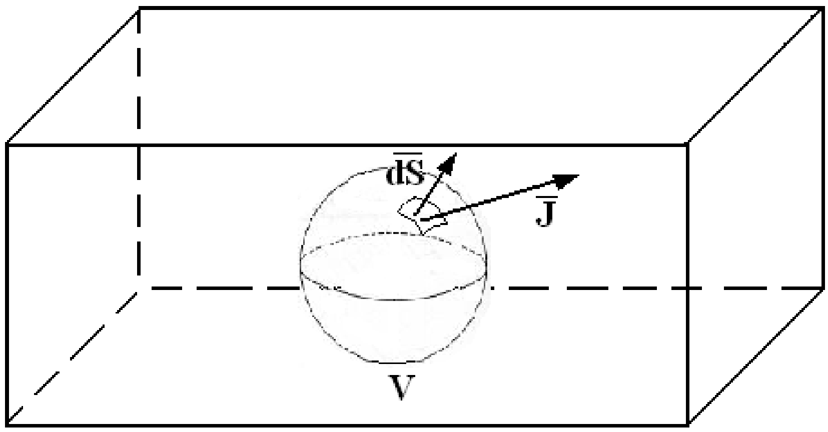



*Figura 1: Volumen cerrado dentro de un material cargado, con densidad de carga variable con el tiempo destinado a comprobar la conservación de la carga.*

En efecto, si se suma en todo el volumen las variaciones de carga en la unidad de tiempo para los elementos de volumen, esto equivale a efectuar el cálculo:

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint \frac{\partial \rho(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} d^3 r$$

Por otra parte, y, como la carga se conserva, el resultado anterior debe igualar al flujo neto de carga a través de la superficie. Para ello se usa el concepto de densidad de corriente, ***J*** (***r***, *t*) el cual representa la corriente eléctrica que atraviesa la unidad de área ubicada en el punto ***r*** y en el instante *t.* Por lo tanto, el flujo total de ***J*** (***r***, *t*) a través de la superficie S que limita V debe igualar a *–dQ/dt,* calculado en el paso anterior:

$$\iint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t).\boldsymbol{dS} = -\iiint \frac{\partial\rho(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\, d^3r$$

Ahora se puede transformar, usando el *teorema de la divergencia,* el primer miembro en una integral de volumen:

$$\iint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t).\boldsymbol{dS} = \iiint \nabla.\boldsymbol{J}(r,t)\, d^3r$$

Rrsultando:

$$\iiint (\nabla.\boldsymbol{J}(r,t) + \frac{\partial\rho(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}) d^3r = 0$$

Finalmente, como esta integral se debe cumplir para cualquier volumen se deduce que la única forma es si el integrando se anula. Por lo tanto:

$$\nabla.\boldsymbol{J}(r,t) + \frac{\partial\rho(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = 0$$

La cual constituye la *ecuación de conservación de la carga.*