

PULSOS Y ONDAS
MECANICAS
EFEECTO DOPPLER

FISICA III

2020

PULSOS Y ONDAS MECANICAS

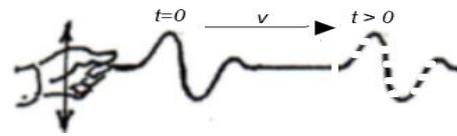
1. Introducción a los fenómenos ondulatorios (Ondas mecánicas)

Para que ocurra el fenómeno de *pulso* o de *onda mecánica* es necesario que en un punto de un medio elástico se aplique una fuerza variable con el tiempo durante un intervalo de tiempo corto, en cuyo caso se genera un pulso, o bien, si se aplica en forma permanente se tiene una onda sobre el medio elástico.

Algunos ejemplos de medio elástico son: ***cuerda elástica tensa; cuba de agua; membrana de tambor y, el aire mismo actúa como medio elástico*** (ver ondas longitudinales).

En la *Figura 1a* se muestra la generación de un pulso aplicando, mediante una fuerza, una deformación por un corto lapso de tiempo, en el inicio de la cuerda ($x=0$). Finalizado el tiempo de aplicación se observa que la deformación generada se traslada a lo largo de la cuerda generando un pulso. En la *Figura 1b* se repite la operación infinitas veces logrando, así, una sucesión infinita de pulsos, tren de ondas o, simplemente una onda en el medio elástico.

Un segundo ejemplo se tiene para el caso de pulsos y ondas mecánicas generadas sobre la superficie de un líquido (agua, por ejemplo). En la *Figura 2 a* se muestra la vista superior de una *cuba de agua* con una sucesión de flotadores (corchos) los cuales permitirán visualizar la generación de pulsos y ondas mecánicas mediante el pulsador, ***P***. En la *Figura 2 b* se presenta una vista lateral de la misma, previo al accionamiento del pulsador. Finalmente, en la *Figura 2 c*, se observa la vista lateral cuando el pulsador actúa.

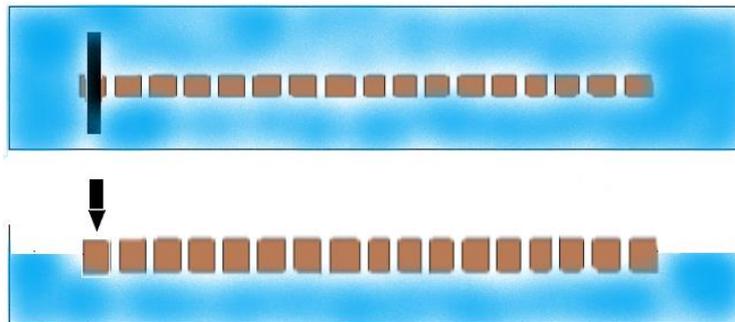


(a)

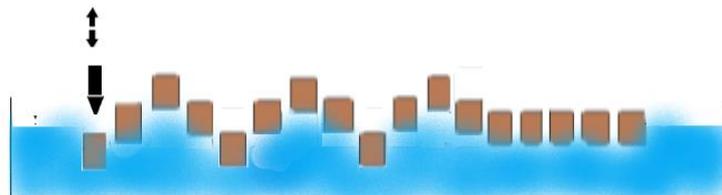


(b)

Figura 1: a) generación de un pulso mecánico; b) Onda mecánica en una cuerda (excitación permanente).



(a) y (b)



(c)

Figura 2: (a) Vista superior de una cuba con agua; (b) Vista lateral sin perturbar y, (c) Vista lateral con perturbación ondulatoria permanente.

Se presentan dos tipos de ondas mecánicas: *Ondas transversales* y *ondas longitudinales*. Las primeras se corresponden con un fenómeno donde los elementos de masa del medio elástico se desplazan en dirección perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Así, en el caso de la cuerda elástica y , siendo el sentido de propagación el definido por la cuerda, se observa que el movimiento de los elementos de masa se realiza según la dirección normal a la anterior; por lo tanto, estamos en presencia de una *onda transversal*.

Por otra parte, para el caso de la cuba de ondas de la Figura 2, el desplazamiento de la perturbación ondulatoria es en la dirección de la superficie del líquido mientras que los elementos de masa se desplazan perpendicular a la misma. Este hecho está evidenciado por el movimiento de los flotadores.

Finalmente, el aire como medio elástico, permite la propagación de otro tipo de ondas: *ondas longitudinales*, caracterizadas porque generan, por efecto de la perturbación ondulatoria, sucesivas compresiones y expansiones de las capas de aire contiguas. Es el principio de las ondas de sonido por las cuales al emitir un sonido se produce la compresión de la capa de aire próxima al punto de excitación (aparato de fonación, parlante, etc.) y la dilatación de la subsiguiente. De esta manera se trasmite el sonido hasta llegar al receptor.

Si se considera el caso de un pulso que se genera en un punto del medio elástico. Como se explicó anteriormente, este pulso tiene una extensión espacial limitada tal como se muestra en la *ec.1*. En esta se representa el desplazamiento vertical de los elementos de masa en una longitud pequeña. Para este caso la expresión matemática es una *Gaussiana*:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

Donde, a los fines de que se considere un pulso mecánico, se debe suponer que la dispersión, σ , es muy pequeña. Al aplicar esta deformación en $x=0$ del medio elástico la misma se trasmite en dirección horizontal generando una función que depende de x , t . Esta propagación se realiza sin deformación del pulso inicial, por lo tanto, su expresión matemática resulta (*ec.2*):

$$y(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-vt)^2}{2\sigma^2}} \quad (2)$$

Donde V representa la velocidad de propagación del pulso (*Figura 3*).

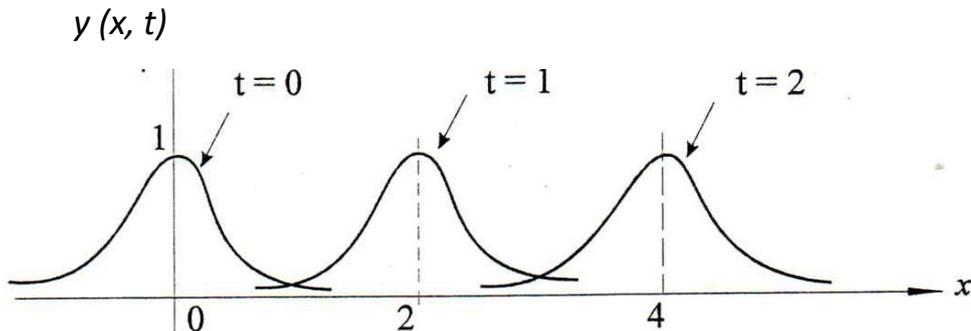


Figura 3: Propagación de un pulso gaussiano con velocidad de propagación, $v=2$

II. Ecuación diferencial de las ondas mecánicas o ecuación de D'Alembert

Las funciones matemáticas que describen adecuadamente los pulsos y las ondas mecánicas son de la forma general:

$$y(x, t) = y(x - vt) \quad (3)$$

La cual puede verificarse fácilmente para el caso del pulso gaussiano.

El físico-matemático D'Alembert dedujo la ecuación diferencial que satisface una función de este tipo. Nosotros lo haremos para el caso más simple que corresponde a un pulso u onda *unidimensional*. D'Alembert lo hizo para el caso *tridimensional*.

Comencemos definiendo la variable auxiliar:

$$u = x - vt \quad (4)$$

Por lo tanto:

$$y(x, t) = y(u) = y[u(x, t)] \quad (5)$$

Avancemos, pues, a fin de encontrar la ecuación diferencial que satisface $y(x, t)$. Para ello se procede a calcular la derivada parcial segunda respecto de x aplicando la derivada de una función implícita (regla de la cadena):

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \frac{dy(u)}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{d^2 y(u)}{du^2} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (7)$$

Con:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad (8)$$

En forma similar:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 y(u)}{du^2} \quad (9)$$

Con lo cual, la ecuación diferencial que satisface un pulso o una onda mecánica resulta:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

Esta constituye la *ecuación diferencial de D'Alembert* la cual gobierna este tipo de fenómenos.

III. Descripción matemática de las ondas mecánicas: Funciones armónicas

Si se efectúa una excitación oscilatoria en $x=0$, es decir que se aplica una fuerza variable con el tiempo tal que la deformación en el punto inicial varía con el tiempo según la ecuación:

$$y(0, t) = A \cos(\omega t) \quad (11)$$

Con esta función de deformación y , por la vinculación elástica entre los elementos de masa, la misma se trasmite a lo largo del medio generando la función $y(x, t)$:

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \quad (12)$$

Para esta función se puede comprobar que la misma satisface la ecuación de D'Alembert. Así, si se deriva parcialmente la *ec.12* respecto a x , t , se obtiene:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x, t) = -k^2 y(x, t) \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x, t) = -\omega^2 y(x, t) \quad (14)$$

Definiendo, ahora, la *velocidad de propagación de la onda* como:

$$v = \frac{\omega}{k} \quad (15)$$

Se puede verificar, en forma inmediata:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x, t) = 0 \quad (16)$$

La cual adopta la forma de una ecuación de D'Alembert.

Interpretación física de las constantes ω , k y v

Como se explicó respecto a la *ec.11* se realiza una excitación armónica en el punto inicial de la cuerda infinita de la forma indicada por esta ecuación.

En ella, la constante ω representa una pulsación angular, que es igual a:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (17)$$

Donde T es el periodo de la oscilación. A intervalos de tiempo T no sólo se repite la posición de dicho elemento de masa sino también su velocidad en módulo y signo.

Como se explicó, al referirse a la *ec.11*, este movimiento oscilatorio en $x=0$ se comunica a los siguientes elementos de masa debido a la condición elástica del medio, los cuales realizan movimientos oscilatorios a posteriori y desfasados entre sí.

Para interpretar los parámetros k y v es necesario visualizar el movimiento de la cuerda a lo largo de su extensión. Para ello podríamos marcar distintos puntos de la misma y a igual distancia suficientemente pequeña entre ellos. Por otra parte, se tendría que disponer de una cámara filmadora que pueda separar cuadros entre sí a intervalos de tiempo suficientemente pequeños respecto del periodo.

El experimento consistiría en tomar instantáneas de la forma que adopta la cuerda a lo largo de su extensión como se muestra en la *Figura 4* para dos instantes de tiempo. Supondremos que la curva roja es para un instante posterior a la negra. Los puntos de esta curva están definidos por las coordenadas de los elementos de masa que fueron marcados a lo largo de la cuerda en el primer paso del experimento. Cabe mencionar que, igual experimento se puede plantear para estudiar el movimiento de los elementos de masa en la superficie de un estanque como se planteó en la *Figura 2*.

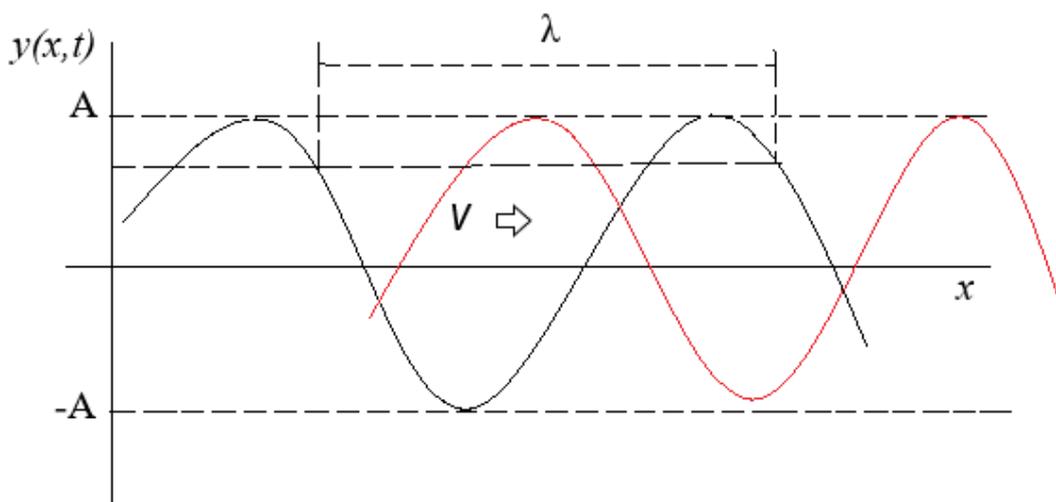


Figura 4: Desplazamiento transversal de los elementos de masa de una cuerda elástica

Si dejamos fija a la curva negra e imprimimos la curva roja para posteriores instantes de tiempo podemos concluir que la curva roja se desplaza a velocidad constante de forma tal que, en $\Delta t = T$ desde el instante en que se graficó la curva negra, la curva roja coincide nuevamente con la negra. Es como si se “desprendiese” de la negra, viajase con velocidad constante (como un fantasma o ghost) hasta reencontrarse con la negra la cual es,

como se precisó, el perfil de la cuerda para un instante que consideramos como inicial.

Debe observarse que, si se levanta una recta vertical para una determinada posición x_1 , el punto donde interseca esta recta a la curva roja define el *desplazamiento transversal*, y (x_1, t) del elemento de masa ubicado en $x=x_1$ en el instante t considerado.

El tiempo que tarda en reencontrarse la curva roja con la negra es T y, la distancia que recorre es λ , a la cual denominamos *longitud de onda*. Por lo tanto, se cumple que, la velocidad de desplazamiento resulta:

$$v = \frac{\lambda}{T} \quad (18)$$

Consecuentemente, en el medio elástico se genera una deformación $y(x, t)$ doblemente periódica en las variables x, t . El parámetro k representa la pulsación espacial y se le denomina *número de onda*:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (19)$$

Es inmediato concluir la compatibilidad entre la *ec.18* y la *ec.15*, previamente deducida, puesto que:

$$v = \frac{\omega}{k}$$

según la *ec.15* y, reemplazando ambas pulsaciones: espacial, k , y temporal ω en función de sus respectivos “periodos” se tiene:

$$v = \frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}}$$

resultando la *ec.18*.

Es importante puntualizar que la cuerda tiene su otro extremo libre y, desde el *punto de vista experimental*, para poder comprobar las ecuaciones desarrolladas aquí y en consecuencia el modelo físico se debería ubicar esta cuerda, a los fines de que no sea afectada por la gravedad, sobre una superficie horizontal con muy baja fricción entre la cuerda y la superficie. Finalmente, el eje x deberá coincidir con el sentido de desarrollo de la cuerda mientras que, el eje y será perpendicular al anterior.

Representación fasorial de las funciones armónicas.

La expresión matemática de las funciones armónicas puede ser analizada como la proyección de un vector rotante en una dirección paralela a la dirección en la cual se desarrolla el movimiento oscilatorio; para este caso correspondiendo a una oscilación transversal. El vector rotante lo hace con velocidad angular constante; entonces el ángulo barrido, a partir de un ángulo o fase inicial, en un tiempo t , es una función lineal del tiempo: ωt .

Si consideramos distintas posiciones a lo largo del medio elástico (cuerda o caba) vemos que el factor $k \cdot x$ introduce una fase a la función armónica y, por esta razón, los desplazamientos transversales en distintos puntos del medio elástico no alcanzan los máximos o mínimos sincrónicamente o al mismo tiempo, es decir que *están desfasados entre sí*.

Por otra parte, podemos decir que la velocidad de propagación puede tener un sentido, positivo, o el opuesto, negativo; esto lo determina el signo de la velocidad angular, ω , el cual, por convención se asume positivo si es en el sentido anti horario y negativo para el caso horario. En la *figura 5* se representa el vector rotante con $-\omega$. En todos los casos se designa con ω al valor absoluto de la velocidad angular y se le asigna el signo que corresponda (*Figura 5*).

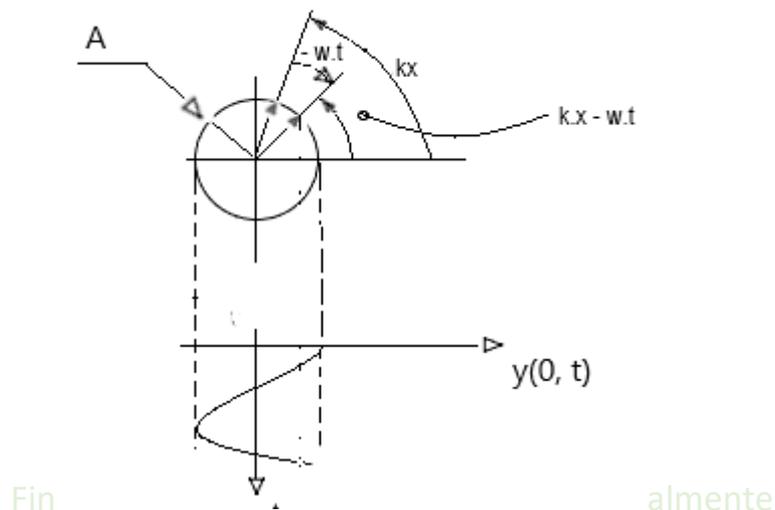


Figura 5: Representación fasorial de la función armónica correspondiente al movimiento ondulatorio (caba o cuerda)

El vector rotante puede, a su vez, ser representado por un *número complejo*:

$$\mathbf{A}(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} \quad (20)$$

En lo que se denomina la *expresión exponencial del complejo*. O también, puede representarse en *forma binómica*:

$$\mathbf{A}(x, t) = A \cos(kx - \omega t) + iA \sin(kx - \omega t) \quad (21)$$

Donde, $A \cos(kx - \omega t)$ es la parte real del complejo: proyección sobre el eje horizontal del vector rotante mientras que $A \sin(kx - \omega t)$ es la parte imaginaria, o la proyección sobre el eje vertical del mismo vector. A la función $y(x, t)$ del movimiento oscilatorio se la ubica en el eje horizontal y es, por lo tanto, la parte real del vector rotante. En fórmulas:

$$y(x, t) = \text{Re}\{\mathbf{A}(x, t)\} \quad (22)$$

Donde, con $\text{Re}\{\dots\}$ se representa la parte real de $\mathbf{A}(x, t)$.

(En el párrafo anterior se representa el módulo del complejo por A , por otra parte, al vector que se lo escribe: \mathbf{A}).

Es importante observar:

- a) Que se puede también trabajar con la parte imaginaria del vector rotante en vez de la parte real, en cuyo caso la función $y(x, t)$ es la parte imaginaria del complejo. En este texto, por razones de compatibilidad con la bibliografía utilizada ⁽¹⁾, se utiliza la parte real del complejo.
- b) La representación fasorial es aplicada a la *periodicidad temporal*. No tiene utilidad aplicarla a la *periodicidad espacial*.
- c) Normalmente, cuando se representa el complejo $\mathbf{A}(x, t)$, la parte real es la proyección de éste sobre el eje x de las coordenadas cartesianas (eje horizontal) mientras que, la parte imaginaria es la proyección de $\mathbf{A}(x, t)$ en la dirección del eje y (eje vertical). Por nuestra parte, por simplicidad en las construcciones gráficas, se considera como eje y al eje horizontal. Esto no afecta la claridad en la exposición toda vez que la designación de los ejes es convencional. Al no usar la parte imaginaria del complejo, se reserva la variable x para designar la coordenada longitudinal sobre la cuerda.

Utilidad de la representación fasorial

La utilidad más directa o inmediata reside en la facilidad para sumar dos o más funciones armónicas en un punto x , evitando, de esta forma, la suma punto a punto de estas funciones. El fasor resultante se obtiene como la suma vectorial de los fasores componentes. Esta suma se puede efectuar para $t=0$ ya que para $t > 0$ se mantiene el triángulo vectorial rotando, todo el conjunto, con la velocidad angular (*Figura 6*).

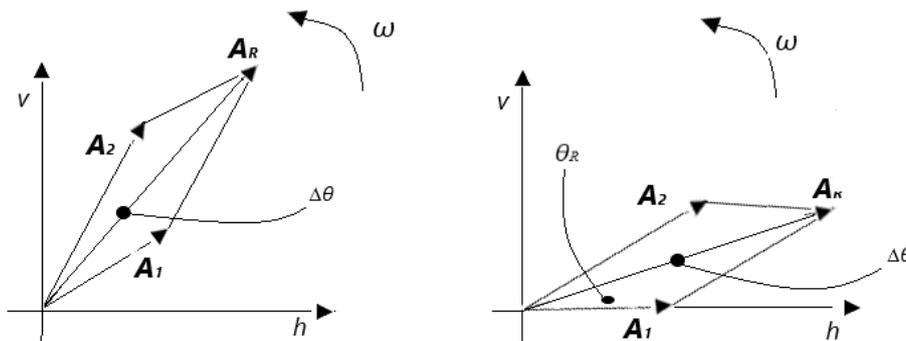


Figura 6: Suma de fasores para una rotación positiva

$$A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad (23)$$

$$\theta_R = \arctg \frac{A_2 v}{A_1 + A_2 h} \quad (24)$$

Con:

$$A_{2h} = A_2 \cos(\Delta\theta) \quad (25)$$

$$A_{2v} = A_2 \sin(\Delta\theta) \quad (26)$$

IV. Ecuación de la cuerda vibrante

Consideremos una cuerda infinita sobre la cual se desarrolla un movimiento oscilatorio (cuerda infinita con extremos tensados). Supondremos las siguientes hipótesis simplificativas:

I) *Hilo flexible.*

II) *El hilo es homogéneo y de densidad de masa constante.*

III) *Durante la oscilación el hilo se deforma y por lo tanto varia su longitud variando con ello su densidad, pero se considera esta variación despreciable.*

IV) *No presenta disipación interna de energía (roces internos).*

V) *No actúan fuerzas exteriores y se desprecia la gravedad.*

VI) *El movimiento se desarrolla en un plano.*

VIII) *Los desplazamientos son transversales y pequeños.*

IX) *No hay desplazamientos longitudinales.*

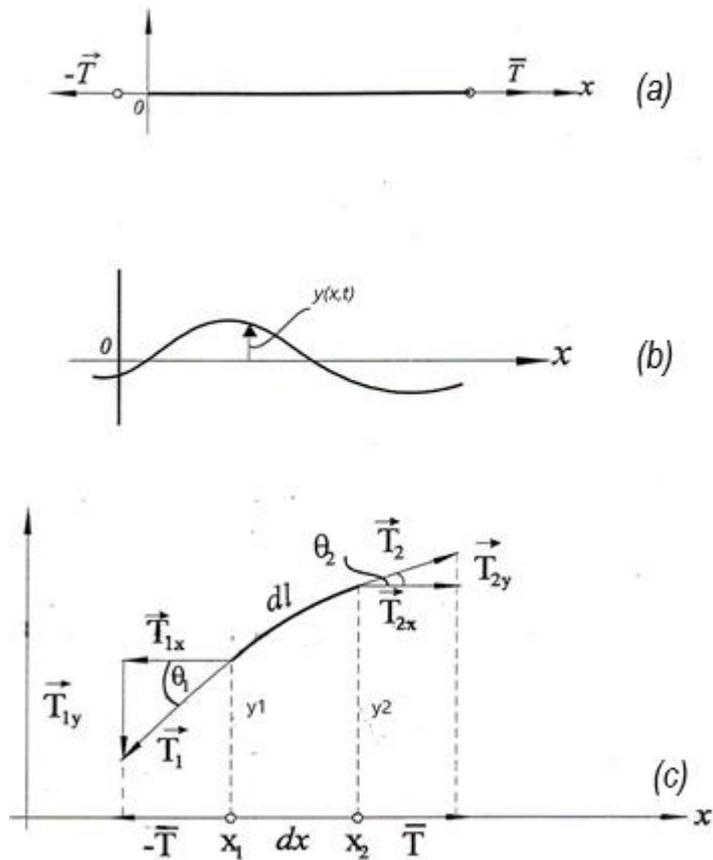


Figura 7: Aplicación de la segunda ley de Newton a un elemento de cuerda elástica y tensa: (a) aplicación de la tensión a la cuerda; (b) desplazamiento transversal $y(x, t)$; (c) fuerzas actuantes sobre un elemento diferencial de cuerda.

Las ecuaciones básicas se Obtienen a partir de la aplicación, a un elemento diferencial de masa, de la *segunda ley de Newton*:

$$dm = \rho dl \approx \rho dx \quad (27)$$

Siendo ρ : densidad lineal de masa.

Se plantea la aplicación de la II ley en las dos direcciones (Figura 7):

en la dirección de x :

$$T_{1x} = T \cos \theta_1 \approx T \quad (28)$$

$$T_{2x} = T \cos \theta_2 \approx T \quad (29)$$

porque:

$$\theta_1 \ll 1$$

$$\theta_2 \ll 1$$

ya que, aplicando el desarrollo en serie de Taylor:

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad (30)$$

por lo cual se cumple la primera ecuación.

Para la coordenada "y" se tiene:

$$\rho dx \frac{\partial^2}{\partial t^2} y = T_{2y} - T_{1y} \quad (31)$$

donde se supone, que $dl \approx dx$ en base a la condición de ángulos pequeños.

Por otra parte, sabemos por trigonometría:

$$T_{1y} = T \operatorname{tg}\theta_1 \quad (32)$$

$$T_{2y} = T \operatorname{tg}\theta_2 \quad (33)$$

Aplicando la II Ley de Newton:

$$T(\operatorname{tg}\theta_2 - \operatorname{tg}\theta_1) = \rho dx \frac{\partial^2}{\partial t^2} y \quad (34)$$

La interpretación geométrica dice:

$$\operatorname{tg}\theta_{1,2} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{1,2} \quad (35)$$

Si, ahora, se desarrolla la función:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

En serie de Taylor a partir del punto (1):

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_1 dx \quad (36)$$

Y reemplazando en la primera ecuación:

$$T(\operatorname{tg}\theta_2 - \operatorname{tg}\theta_1) \approx T\left(\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_1 dx - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1\right) \quad (37)$$

Finalmente:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (38)$$

la cual constituye una ecuación de D'Alembert con velocidad:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (39)$$

Interpretación física

Suponiendo que se tiene una determinada frecuencia, f , de excitación de la cuerda, es decir manteniendo constante la pulsación, $\omega=2\pi f$ analicemos distintas situaciones para la vibración de la misma teniendo en cuenta que $k=2\pi/\lambda$ y que $k=\omega/v$.

- a) Si se aumenta la tensión de la cuerda T , manteniendo la densidad de masa, la velocidad de propagación aumenta y, con esto, también λ .
- b) Igual resultado se alcanza si disminuye la densidad másica manteniendo constante la tensión de la cuerda. Es decir, usamos otra cuerda más liviana.
- c) Por otra parte, si aumentamos (disminuimos) la frecuencia de excitación, aumentamos (disminuimos) la pulsación, ω . Dando por resultado, para una misma cuerda sometida a la misma tensión una disminución (aumento) de λ .

V. Cuerda vibrante con extremos fijos-modos normales de oscilación

Consideremos una cuerda tensa fija en sus extremos a la cual se le aplica una condición inicial que afecta la posición de los elementos de masa, o bien la velocidad inicial de los mismos o ambas condiciones. En la *Figura 8* se muestra la cuerda fija en sus extremos.

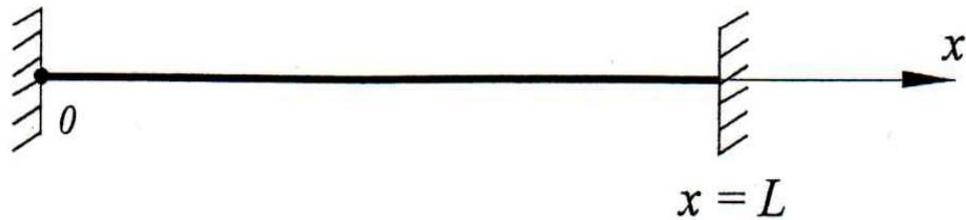


Figura 8: Cuerda tensa de longitud L , fija en sus extremos.

Condiciones de contorno y condiciones iniciales

Las condiciones de contorno (CC) o condiciones de frontera son:

$$y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad (40)$$

Las cuales deben ser complementadas con las condiciones iniciales válidas para $0 < x < L$:

$$y(x, 0) = p(x) \quad (41)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = v(x) \quad (42)$$

Conocidas como el *perfil de desplazamientos iniciales* y el *perfil de velocidades iniciales*. Con las CC y las CI se puede determinar la función $y(x, t)$ como así también $\partial y / \partial t(x, t)$.

El método...

Se resuelve la ecuación diferencial de la cuerda por el método de *separación de variables* y, en un segundo paso, se determinan las constantes de la solución general usando las CC y las CI.

El método de separación de variables consiste en que se puede expresar la solución como un producto de dos funciones, una que depende de la variable x ; la otra de la variable t .

Es un método muy utilizado en la resolución de ecuaciones *diferenciales a derivadas parciales* que son la base de una cantidad importante de problemas de la física. Por ejemplo, en los problemas electrostáticos, para

resolver $\nabla^2\phi=0$ (laplaciano del potencial eléctrico igualado a cero o ecuación de Laplace); la ecuación de difusión del calor etc...

Se propone, para resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (43)$$

la factorización:

$$y(x, t) = A(x)T(t) \quad (44)$$

Introduciendo este producto en la ecuación diferencial:

$$A''(x)T(t) = \frac{1}{v^2} A(x)T''(t) \quad (45)$$

Si se divide por $A(x)T(t)$, queda :

$$\frac{A''(x)}{A(x)} = \frac{1}{v^2} \frac{T''(t)}{T(t)} \quad (46)$$

Para la igualdad entre funciones que dependen de distintas variables la única posibilidad es que la ecuación sea igual a una constante. Esta constante debe tener signo definido, positivo o negativo según las ecuaciones diferenciales de una variable que son de esperar. Concretamente el signo de la constante debe ser negativo para que las soluciones resulten funciones armónicas, es decir, que sean combinaciones lineales de funciones seno y coseno.

Si se define:

$$\frac{A''(x)}{A(x)} = \frac{1}{v^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\alpha^2 \quad (47)$$

Las ecuaciones diferenciales que resultan son:

$$A''(x) + \alpha^2 A(x) = 0 \quad (48)$$

$$T''(t) + \alpha^2 v^2 T(t) = 0 \quad (49)$$

Cuyas soluciones son combinaciones lineales de senos y cosenos circulares y por lo tanto son periódicas. Por otra parte, si en vez de asumir el signo negativo para la constante se hubiera asumido el signo positivo las ecuaciones resultarían:

$$A''(x) - \alpha^2 A(x) = 0 \quad (50)$$

$$T''(t) - \alpha^2 v^2 T(t) = 0 \quad (51)$$

Cuyas soluciones son combinaciones lineales de senos y cosenos hiperbólicos:

$$F(t) = a. \cosh(\alpha vt) + b. \sinh(\alpha vt) \quad (52)$$

$$A(x) = c. \cosh(\alpha x) + b. \sinh(\alpha x) \quad (53)$$

las cuales *no son periódicas* en las variables independientes, sino que son funciones trascendentes. Por esta razón esta elección para el signo de α es descartada.

Las soluciones generales, correspondientes a $-\alpha^2$ son:

$$F(t) = a. \cos(\alpha vt) + b. \sin(\alpha vt) \quad (54)$$

$$A(x) = c. \cos(\alpha x) + b. \sin(\alpha x) \quad (55)$$

Como las constantes α y αv están determinadas por los parámetros de la periodicidad espacial (α) y temporal (αv) y se sabe que la relación entre ellos es la velocidad de propagación v , resulta:

$$\alpha = k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (56)$$

Y,

$$\alpha v = \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (57)$$

Aplicación de las CC y las CI...

La aplicación de las CC y las CI a la separación de variables conduce a las siguientes ecuaciones:

a) De la CC que establece los extremos fijos se tiene:

$$y(0, t) = A(0)T(t) = 0 \quad (58)$$

Por lo tanto:

$$c \cdot \cos(k \cdot 0) + d \cdot \operatorname{sen}(k \cdot 0) = 0 \quad (59)$$

De donde se deduce que $c=0$ quedando, entonces, la solución:

$$A(x) = d \cdot \operatorname{sen}(kx) \quad (60)$$

La segunda condición establece que:

$$A(L) = 0 \quad (61)$$

Y como d no puede ser nula ya que eso determinaría que $y(x, t) = 0$ para todo tiempo, lo cual no se correspondería con la suposición de que se tiene una vibración, o sea que hemos excitado al sistema. Por lo tanto:

$$\text{sen}(kL) = 0 \quad (62)$$

Lo que implica:

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (63)$$

Y la solución para $A(x)$ resulta:

$$A_n(x) \sim \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (64)$$

Los k_n constituyen los *autovalores* de la ecuación diferencial para $A(x)$ mientras que $A_n(x)$ son las *autofunciones* para esta ecuación.

La existencia de infinitos autovalores, k_n , determina, a su vez, infinitas soluciones linealmente independientes. Por consiguiente, la solución general es una combinación lineal de las mismas:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \text{sen}(\omega_n t)] \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (65)$$

Donde, se ha introducido ω_n en vez de ω ya que, por la relación:

$$\omega = k \cdot v$$

Para cada valor de k_n se corresponde un valor ω_n .

Además, los coeficientes a_n y b_n del desarrollo dependen, para el caso más general, del autovalor.

En el siguiente paso se procede a determinar los coeficientes a_n y b_n recurriéndose, para ello a las CI:

$$y(x, 0) = p(x) \quad (66)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = v(x) \quad (67)$$

Introduciendo el desarrollo en serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = p(x) \quad (68)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = v(x) \quad (69)$$

Donde los coeficientes a_n y $\omega_n \cdot b_n$ se determinan usando la ortogonalidad del conjunto de funciones $\{\operatorname{sen}(n\pi x/L)\}$ en el intervalo $(0, L)$ (análisis de Fourier).

Para deducir las fórmulas de estos coeficientes realicemos primero el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n'\pi x}{L}\right) dx \\ = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\cos\left(\frac{(n-n')\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{(n+n')\pi x}{L}\right) \right] dx \end{aligned}$$

Donde se ha utilizado la identidad trigonométrica:

$$\operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

Analizamos los casos: $n \neq n'$ y $n = n'$:

Si $n \neq n'$ se puede efectuar la primera integración porque $n - n' \neq 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^L \cos\left(\frac{(n-n')\pi x}{L}\right) dx \\ = \frac{L}{(n-n')\pi} \left(\operatorname{sen}\frac{(n-n')\pi L}{L} - \operatorname{sen}\frac{(n-n')\pi \cdot 0}{L} \right) = 0 \end{aligned}$$

La segunda integral:

$$\int_0^L \cos\left(\frac{(n+n')\pi x}{L}\right) dx \\ = \frac{L}{(n+n')\pi} \left(\operatorname{sen}\frac{(n+n')\pi L}{L} - \operatorname{sen}\frac{(n+n')\pi \cdot 0}{L} \right) = 0$$

Por lo tanto, si $n \neq n'$ la integral es nula.

Veamos qué ocurre si $n = n'$. La primera integral queda:

$$\frac{1}{2} \int_0^L \left[\cos\left(\frac{(n-n')\pi x}{L}\right) \right] dx = \frac{L}{2}$$

Mientras que la segunda:

$$\frac{1}{2} \int_0^L \cos\left(\frac{(n+n')\pi x}{2L}\right) dx = 0$$

Por lo tanto, la integral propuesta puede expresarse en *forma compacta*:

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n'\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nn'} \quad (70)$$

Donde, $\delta_{nn'}$ es la delta de Kronecker la cual vale 1 si $n=n'$ y vale 0 si $n \neq n'$.

La ec.70 constituye la condición de *ortogonalidad* para las funciones del conjunto.

Volvamos ahora, *valientemente*, al cálculo de los coeficientes. ¿cómo los despejamos si están *metidos* en una combinación lineal de funciones? La clave es que estas funciones son ortogonales. La *técnica* consiste en multiplicar ambos miembros de la ecuación por la función:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)$$

E integrar en el intervalo de ortogonalidad para que *aparezca* la condición de ortogonalidad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n'\pi x}{L}\right) dx = \int_0^L p(x) \text{sen}\left(\frac{n'\pi x}{L}\right) dx$$

La integral del primer miembro puede ser reemplazada por la condición de ortogonalidad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{L}{2} \delta_{nn'} = \int_0^L p(x) \text{sen}\left(\frac{n'\pi x}{L}\right) dx$$

De la sumatoria solo *sobrevive* el término $n = n'$. Por lo tanto y , re designando n' como n , se obtiene:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L p(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (71)$$

$$b_n = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L v(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (72)$$

donde $n = 1, 2, 3, \dots$

Modos puros de oscilación

Si se supone, para mayor simplicidad, que de las dos CI solo existe la primera, es decir un perfil inicial de desplazamientos, $p(x)$; mientras que, para la segunda, el perfil inicial de velocidades es nulo; es decir $v(x)=0$. En esta situación es inmediato verificar que $b_n=0$ para todos los valores de n y la solución general nos queda:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (73)$$

Y, además, el perfil inicial que se adopta es el correspondiente a $n=1$; es decir:

$$y(x, 0) = A \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

En la *Figura 9a* se muestra la función adoptada para $p(x)$ y por razones de mejor visualización se ha exagerado la amplitud A en el dibujo.

En la *Figura 9b* se presenta el resultado para $y(x, t)$.

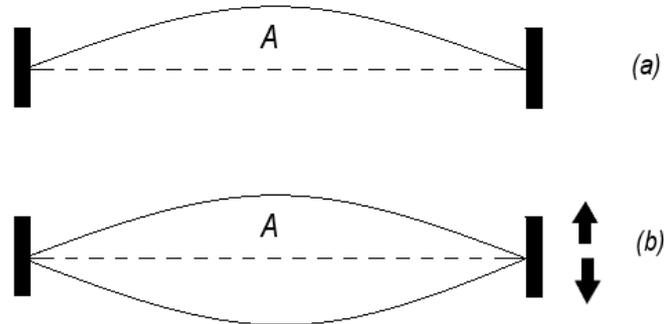


Figura 9: Modo puro de oscilación para $n=1$: a) Aplicación de la condición inicial; b) Oscilaciones para $t > 0$.

Utilizando la fórmula general para los coeficientes a_n :

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L A \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

Donde se verifica que, para todo n distinto de $n=1$ la precedente integral se anula, por lo tanto:

$$a_1 = \frac{2A}{L} \int_0^L \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) dx$$

$$a_1 = A$$

Finalmente, la solución queda:

$$y(x, t) = A \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \omega_1 t \quad (74)$$

Ejercicio: Reproduciendo los pasos anteriores resolver el modo propio para el caso

$$p(x) = A \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi x}{L} \right)$$

$$v(x) = 0$$

Representar e interpretar gráficamente.

VI. Ondas estacionarias

El fenómeno de las ondas estacionarias se genera cuando se suman dos ondas de igual amplitud y frecuencia pero que se desplazan en sentidos opuestos, o sea que una tiene $+v$ y la otra $-v$. En fórmulas:

$$y_1(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

$$y_2(x, t) = A \cos(-kx - \omega t)$$

La segunda ecuación puede expresarse:

$$y_2(x, t) = A \cos(kx + \omega t)$$

Por la propiedad de la función coseno:

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

La función resultante de la suma:

$$y_R(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

es:

$$y_R(x, t) = 2A \cos(kx) \cos(\omega t) \quad (75)$$

Donde se ha utilizado la identidad trigonométrica:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (76)$$

Se observa que la amplitud máxima, ahora, depende de la coordenada x debido al factor $\cos(kx)$ el cual toma valores definidos a lo largo del eje x . Así se tiene, considerando que $k=2\pi/\lambda$:

$x=0$

$$2A \cos(k \cdot 0) = 2A$$

$x=\lambda/8$

$$2A \cos\left(\frac{2\pi \lambda}{\lambda} \frac{\lambda}{8}\right) = \sqrt{2}A$$

$x=\lambda/4$

$$2A \cos\left(\frac{2\pi \lambda}{\lambda} \frac{\lambda}{4}\right) = 0$$

$$x=3\lambda/8$$

$$2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{3\lambda}{8}\right) = -\sqrt{2}A$$

$$x=\lambda/2$$

$$2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2}\right) = -2A$$

$$x=5\lambda/8$$

$$2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{5\lambda}{8}\right) = -\sqrt{2}A$$

$$x=3\lambda/4$$

$$2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{3\lambda}{4}\right) = 0$$

$$x=7\lambda/8$$

$$2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{7\lambda}{8}\right) = \sqrt{2}A$$

$$x=\lambda$$

$$2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\lambda\right) = 2A$$

Se observa que, calculando el valor de amplitud para $t=0$ y a intervalos de $\Delta x=\lambda/8$ se tienen distintas amplitudes máximas y para $t > 0$ la función oscila entre esos valores máximos.

Por otra parte, para $x=\lambda/4$ y $3\lambda/4$ la amplitud es nula para todo instante de tiempo. A este valor de x se le denomina *nodo*.

Finalmente, para $x=0, \lambda/2, \lambda$ la amplitud es máxima y de valor $2A$. Este valor de x recibe el nombre de *vientre*.

Interpretación fasorial de las ondas estacionarias

La representación fasorial de las funciones armónicas permite interpretar en forma simple la aparición de los nodos y vientres. En efecto, teniendo en cuenta que las ondas estacionarias resultan de la suma de dos funciones armónicas una con $+\omega$ y otra con $-\omega$. En

forma equivalente se puede decir que son la resultante de la suma de dos vectores rotantes que giran uno con $+\omega$ y otro con $-\omega$.

Si se considera, para distintas posiciones, la suma de los fasores y se construye el diagrama fasorial para: $x=0$; $\lambda/4$; $\lambda/2$; $3\lambda/4$ y λ . Entonces, en cada posición se tienen dos fasores, uno con $+\omega$ y otro con $-\omega$. La *Figura 10* presenta los diagramas fasoriales correspondientes.

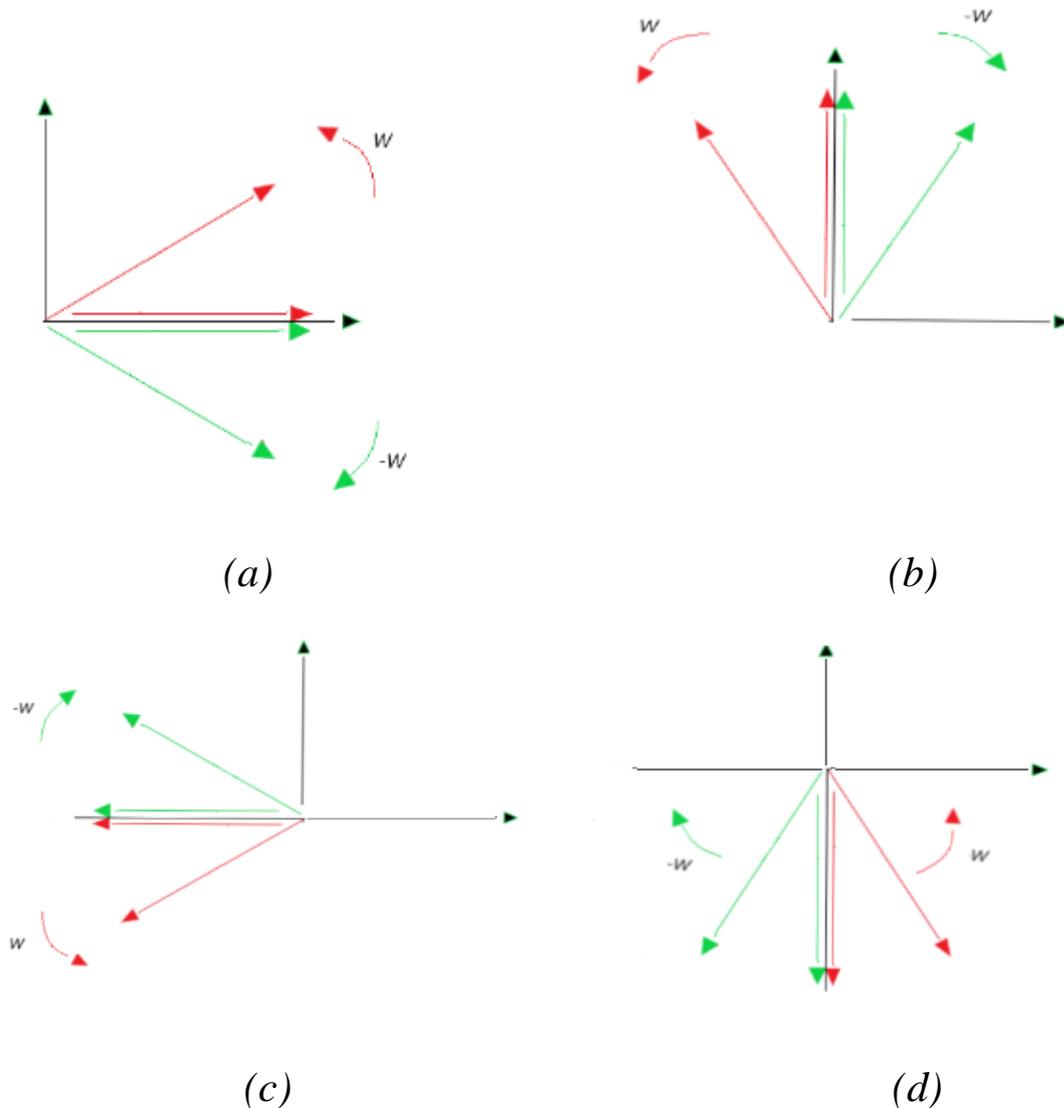


Figura 10: Representación fasorial de la composición de funciones armónicas para oscilaciones estacionarias: a) para $x=0$; b) para $x=\lambda/4$; c) para $x=\lambda/2$ y d) para $x=3\lambda/4$. La representación para $x=\lambda$ coincide con la de $x=0$.

Estudio experimental

Para el estudio experimental de las ondas estacionarias es necesario generar, a partir de una onda dada otra onda de igual amplitud y que viaje en sentido opuesto. Para ello la forma más sencilla es haciendo reflejar la onda primitiva sobre una superficie especular, es decir que permita que la onda emergente de ella como consecuencia del choque de la primera conserve sus parámetros de amplitud, frecuencia e invierta su velocidad. El dispositivo experimental utilizado se conoce como tubo de Kundt y, si bien en él intervienen ondas mecánicas longitudinales y no transversales los conceptos desarrollados para ondas estacionarias son los mismos.

En la *Figura 11* se presenta un esquema del dispositivo mencionado.

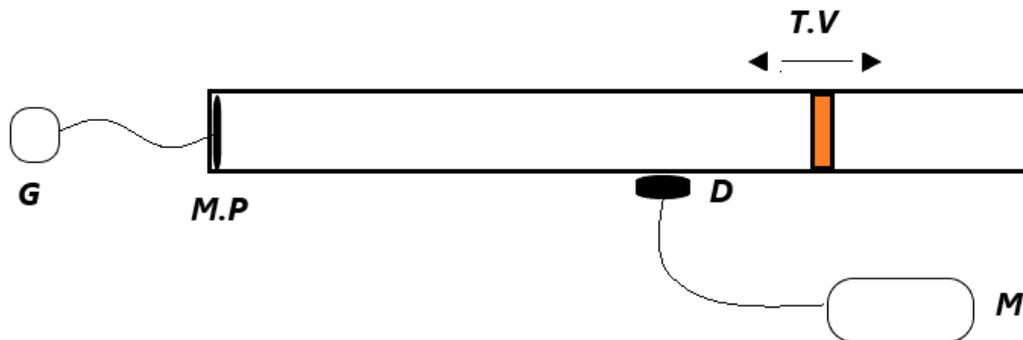


Figura 11: Tubo de Kundt para la medición de las ondas estacionarias: G: Generador sinusoidal que excita la membrana del parlante. M.P: Membrana de parlante que genera la onda de sonido. D: detector de señal. M: Medidor de amplitudes y T.V: Tope de posición variable el cual permite el establecimiento de la onda estacionaria.

Este dispositivo permite medir la longitud de onda y con esta determinar la velocidad de propagación si se conoce la frecuencia de excitación.

El procedimiento consiste en los siguientes pasos:

- 1) Conectar el parlante al generador
- 2) Ajustar la longitud de la columna de aire mediante el tope variable, TV hasta que se tenga un número entero de $\lambda/4$.
- 3) Mediante el detector D medir la ubicación de los nodos.
- 4) Calcular $\lambda/2$ que es la distancia entre dos nodos a partir del promedio de las distancias entre nodos disponibles a lo largo de la longitud del tubo de Kundt.

VII. Batido de ondas

El batido de ondas se genera cuando se suman dos ondas que difieren en su pulsación, ω , y en su número de ondas, k . Supongamos dos ondas de igual amplitud, A , pero distintas pulsaciones, ω_1 y ω_2 , y números de ondas, k_1 y k_2 .

En fórmulas:

$$y_R = A\cos(k_1x - \omega_1t) + A\cos(k_2x - \omega_2t)$$

Usando la identidad trigonométrica (ver **V**):

$$y_R = 2A\cos\left(\frac{k_1x - \omega_1t + k_2x - \omega_2t}{2}\right)\cos\left(\frac{k_1x - \omega_1t - k_2x + \omega_2t}{2}\right) \quad (77)$$

$$y_R = 2A\cos\left(\frac{(k_1 + k_2)}{2}x - \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}t\right)\cos\left(\frac{(k_1 - k_2)}{2}x - \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2}t\right) \quad (78)$$

Si, ahora, se define:

$$k_p = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (79)$$

$$\omega_p = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

Respectivamente, *número de onda promedio* y *pulsación promedio*. Por otra parte,

$$k_m = \frac{k_1 - k_2}{2} \quad (80)$$

$$\omega_m = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

Que son el *número de onda modulante* y la *pulsación modulante*.

Finalmente, queda:

$$y_R = 2A \cos(k_p x - \omega_p t) \cos(k_m x - \omega_m t) \quad (81)$$

La función resultante está compuesta del producto de dos funciones: una de pulsación o frecuencia alta (recordar que $\omega = 2\pi f$) definida por ω_p . Esta función, a su vez, tiene un número de onda también alto, caracterizado por k_p y en consecuencia tiene una longitud de onda pequeña (recordar que $k = 2\pi/\lambda$). La velocidad de propagación es:

$$V_p = \frac{\omega_p}{k_p} \quad (82)$$

Esta función se presenta en la *Figura 12a*.

La segunda función tiene una pulsación o frecuencia baja, definida por ω_m , y número de onda bajo, k_m , o longitud de onda alta. Su velocidad de propagación es denominada *velocidad de grupo*, V_g :

$$V_g = \frac{\omega_m}{k_m} \quad (83)$$

Esta segunda función se representa en la *Figura 12b* y modula la amplitud de la primera porque su longitud de onda es mayor y abarca varias ondas de la primera, como se muestra en la *Figura 12c*.

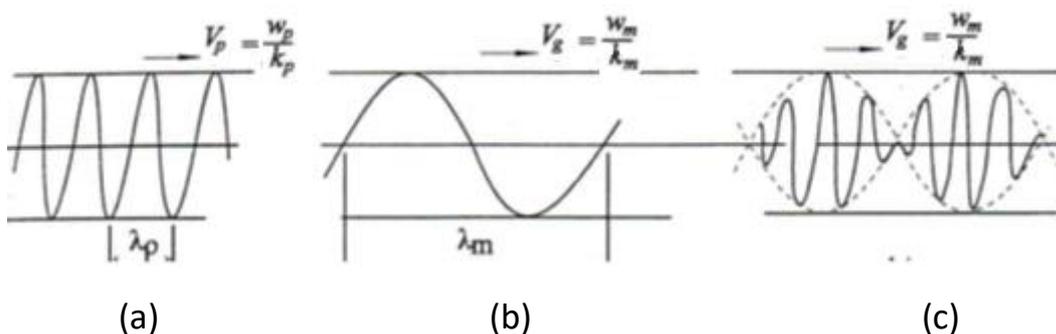


Figura 12: Batido de dos funciones que determina la modulación de amplitud de una debido a la otra: a) designada como portadora, con longitud de onda menor; b) modulante, por su longitud de onda mayor y, c) combinación de ambas: las amplitudes de la primera se ven moduladas por la segunda.

VIII. Ondas longitudinales

Para encontrar la ecuación que gobierna a las ondas longitudinales se utiliza el tubo de Kundt como sistema físico. Existe, por lo tanto, un tubo de aire limitado por dos topes, en cuyo extremo izquierdo se aplicará una excitación sinusoidal permanente producida por la membrana de un parlante.

Considerando un volumen infinitesimal en forma de cilindro de sección S y longitud dx (Figura 13). A este volumen se lo considera como el volumen inicial y, la aplicación de un cambio de presión en la sección S de valor dp , como resultado de la acción del parlante, determina el desplazamiento de la sección S hasta la posición $x+u$. Por otra parte, la sección S' se desplaza por la misma razón, una magnitud $u+du$. Con estas consideraciones el volumen entre las secciones resulta $dx+du$. El cociente entre la variación de volumen y el volumen inicial, antes del desplazamiento, se define como coeficiente de dilatación, γ :

$$\gamma = \frac{S \cdot du}{S \cdot dx} = \frac{du}{dx} \quad (84)$$

Teniendo en cuenta que, $u=u(x, t)$ es decir depende no solo de x sino de t , también el coeficiente γ es función de (x, t) :

$$\gamma(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (85)$$

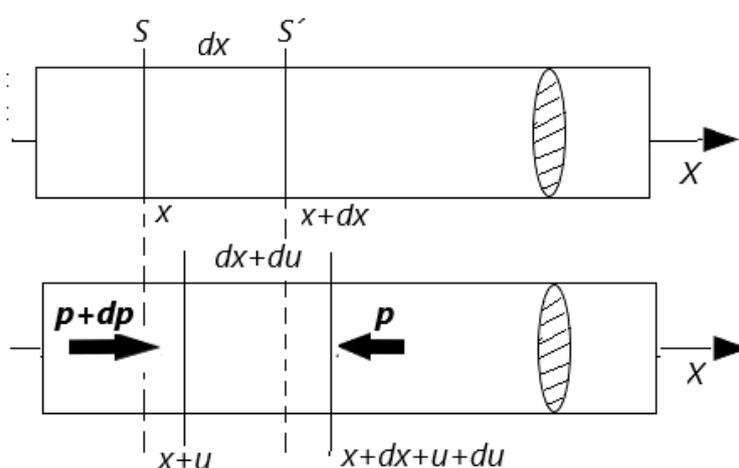


Figura 13: Cilindro de aire excitado por ondas longitudinales utilizado para encontrar la ecuación que satisfacen estas ondas.

El valor de este coeficiente varia con x por lo tanto su valor en $x+dx$ resulta, como consecuencia de efectuar el desarrollo en serie:

$$\gamma(x + dx, t) = \gamma(x, t) - \frac{\partial\gamma(x,t)}{\partial x} dx \quad (86)$$

Donde se considera que γ disminuye con x . Reemplazando:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (87)$$

Un último concepto a introducir se refiere a que estamos en presencia de un medio elástico con un módulo de elasticidad, E . Esta constante establece la relación entre γ y p :

$$p + dp = E \cdot \gamma \quad (88)$$

Y en $x+dx$:

$$p = E \cdot \gamma(x + dx, t) \quad (89)$$

La fuerza sobre el elemento de masa contenido entre S y S' es (Figura 13):

$$dF = (p + dp) \cdot S - p \cdot S \quad (90)$$

$$dF = S \cdot dp \quad (91)$$

$$dF = S \cdot E \cdot [\gamma(x, t) - \gamma(x + dx, t)] \quad (92)$$

Entonces, la fuerza aplicada resulta:

$$dF = S \cdot E \cdot \frac{\partial\gamma}{\partial x} dx \quad (93)$$

Utilizando la segunda ley de Newton:

$$dF = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx \quad (94)$$

Donde μ es la *densidad lineal* de masa.

Finalmente, si se considera que:

$$\gamma(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (95)$$

Entonces:

$$dF = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \quad (96)$$

Considerando $S=1\text{cm}^2$ se tiene, finalmente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\mu}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (97)$$

La cual es la ecuación diferencial que gobierna el movimiento oscilatorio longitudinal. Es aplicable para un medio elástico gaseoso y líquido.

La velocidad de propagación resulta:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\mu}} \quad (98)$$

Velocidad de propagación en gases, distinta expresión en función de la transformación termodinámica que supone la variación de presión con el volumen.

Nos resta aplicar la ec.98 a distintos sistemas termodinámicos y encontrar, así, la velocidad de propagación como función de las variables termodinámicas p (presión), volumen y temperatura. Para ello hay que tener en cuenta que, al transmitir el sonido se realiza una variación de la presión y el volumen o sea una *transformación termodinámica* y por consiguiente, existe una relación entre la presión y el volumen que depende de las condiciones en que se realiza esta transformación.

Lo que se necesita, a tal fin, expresar el módulo de elasticidad como función de las variables termodinámicas. Para ello se recurre a la definición de γ y del módulo de elasticidad, E :

$$d\gamma = -\frac{dv}{v} \quad (99)$$

Definido en forma diferencial y significa el cociente entre la variación elemental del volumen del sistema y el volumen del mismo. Por otra parte, como ya se explicó hay una proporcionalidad entre la presión y γ a través del módulo de elasticidad:

$$p = E \cdot \gamma \quad (100)$$

O bien, diferenciando:

$$dp = E \cdot d\gamma \quad (101)$$

dos tipos de transformaciones en la columna de aire...

En este tipo de proceso de compresiones y dilataciones a lo largo del tubo de aire se pueden desarrollar dos tipos de transformaciones termodinámicas dependiendo de las condiciones de aislamiento del tubo respecto del entorno o reservorio. Por un lado, si el tubo puede intercambiar calor con el reservorio, alcanzará un equilibrio térmico con éste y se está en presencia de una *transformación isotérmica*. En cambio, si sus paredes no permiten este intercambio la transformación es *adiabática*.

transformación isotérmica

Para este caso, como se analizará en el capítulo correspondiente a Termodinámica, se cumple que:

$$p \cdot v = \text{constante} \quad (102)$$

A partir de la cual, diferenciando:

$$v \cdot dp + p \cdot dv = 0 \quad (103)$$

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{p}{v} \quad (104)$$

De la ec.101:

$$E = \frac{dp}{d\gamma} \quad (105)$$

Y, con las ecuaciones (99) y (104):

$$E = -v \frac{dp}{dv} \quad (106)$$

Finalmente:

$$E = p \quad (107)$$

Por lo tanto, la velocidad de propagación resulta:

$$v = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \quad (108)$$

transformación adiabática

Para la transformación adiabática la relación entre la presión y el volumen es:

$$pv^\kappa = \text{constante} \quad (109)$$

Donde, κ se denomina exponente adiabático y es igual a:

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \quad (110)$$

Donde, c_p y c_v son, respectivamente, los calores específicos a presión constante y a volumen constante. Por lo tanto:

$$dp \cdot v^\kappa + p \cdot \kappa \cdot v^{\kappa-1} \cdot dv = 0 \quad (111)$$

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{p\kappa}{v} \quad (112)$$

$$v = \sqrt{\frac{p \cdot \kappa}{\mu}} \quad (113)$$

Que es la expresión que adopta la velocidad de propagación para las transformaciones adiabáticas.

IX. Efecto Doppler

Por efecto Doppler se refiere a la distinta frecuencia que percibe un observador en relación a la frecuencia que genera una fuente cuando ésta o el observador tienen una velocidad relativa respecto al medio elástico en el cual la onda se propaga.

Un ejemplo familiar resulta cuando un automóvil en movimiento hace sonar su bocina. Notamos que cuando se nos acerca la frecuencia del sonido emitido por la bocina tiene un tono más alto que cuando se aleja de nosotros.

Las aplicaciones físicas del efecto son muy amplias y no se restringen sólo a las ondas de sonido sino, también, a las ondas electromagnéticas que serán desarrolladas en el capítulo siguiente. En este sentido y, restringiéndonos a las ondas luminosas se sabe que la luz emitida o absorbida por un material es debida al acomodamiento de los electrones en los átomos del mismo. Así, al pasar un electrón desde un nivel de energía mayor a uno de energía menor, se produce la emisión de luz de una frecuencia que depende de la diferencia de energía, ΔE , entre niveles y la constante de Planck, h :

$$f = \frac{\Delta E}{h}$$

$h=6.62 \times 10^{-34}$ Joule.seg.

Si estamos en reposo respecto a la fuente detectaremos una frecuencia expresada por la fórmula anterior. Sin embargo, si la fuente se mueve acercándose o alejándose de nosotros, la frecuencia percibida será mayor o menor, respectivamente.

Este corrimiento de frecuencia es el que permitió en cosmología explicar la *expansión del universo* al analizar la luz proveniente de distintas estrellas y galáxias lo cual condujo a comprobar que hay un corrimiento de la longitud de onda de la luz emitida por una estrella hacia las longitudes de onda correspondiente al rojo respecto a la misma luz emitida por un material ubicado en la tierra.

Para el análisis y deducción de las fórmulas básicas respecto de este fenómeno, se hacen algunas suposiciones respecto de la velocidad de la fuente, v_s , y del observador, v_L , las cuales permitirán obtener fórmulas

generales que, mediante adecuados cambios de signo de la velocidad de la fuente y del observador aportan los distintos casos particulares.

Se considera, por simplicidad, que la dirección de la velocidad de la fuente y del observador es la misma.

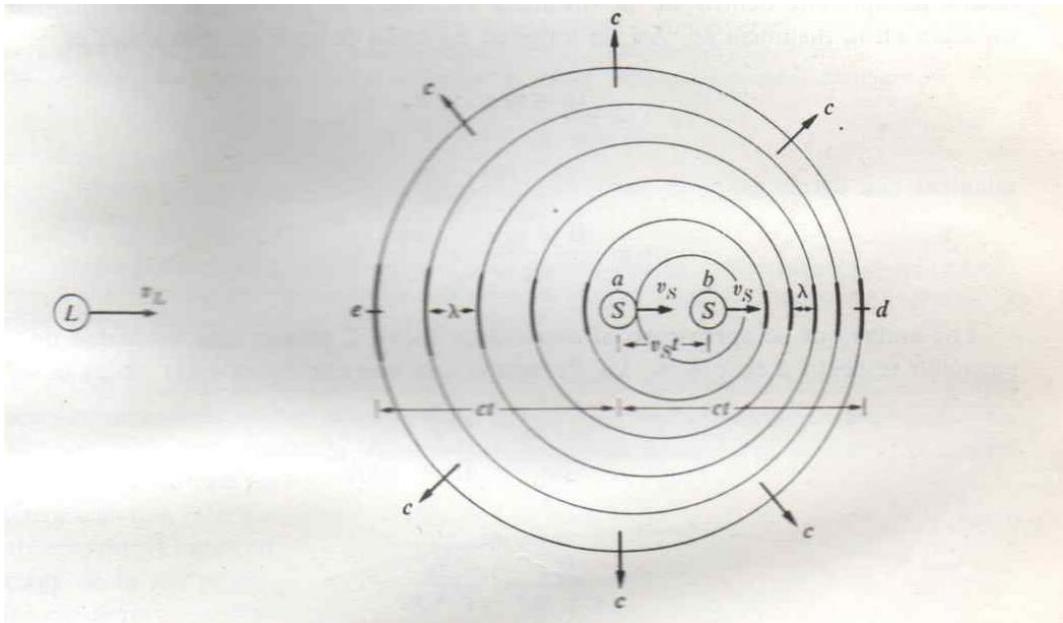


Figura 14: caso especial desarrollado para encontrar las fórmulas básicas del efecto Doppler.

Para encontrar las fórmulas básicas del efecto Doppler vamos a considerar el caso presentado en la *Figura 14*. Las condiciones bajo las cuales se realiza son las siguientes:

- En $t=0$ la fuente S se encuentra en el punto a y emite, en ese instante, una onda la cual viaja a una velocidad c saliente que genera frentes de onda esféricos. Los frentes de onda son el lugar geométrico que oscilan en fase es decir que la amplitud de la onda es la misma en valor y signo. La velocidad c es la que tiene la onda respecto del medio elástico y, una vez generada la vibración, ésta se propaga en el medio elástico con la misma velocidad respecto del medio, independientemente del estado de movimiento de la fuente.
- En el instante $t > 0$ el frente de onda se encuentra a una distancia ct y la fuente se encuentra en el punto b , habiendo recorrido una distancia $ab=v_S t$, siendo v_S la velocidad de la fuente, S .

- c) Si el observador se encuentra en reposo en el punto **d** en el instante t la longitud de onda que detecta en ese punto es el cociente entre la distancia **bd** y el número de ondas emitido en t : $f_s t$, siendo f_s la frecuencia de la fuente. En fórmulas:

$$\lambda = \frac{(c-v_s)t}{f_s t} \quad (84)$$

O bien:

$$\lambda = \frac{(c-v_s)}{f_s} \quad (85)$$

Por otra parte, si el observador se encuentra en reposo en el punto **e**, la longitud de onda detectada será la distancia **eb** dividida por $f_s t$:

$$\lambda = \frac{(c+v_s)}{f_s} \quad (86)$$

- d) Ahora se debe, para este caso especial o particular, incorporar la velocidad del observador, $v_L > 0$. La velocidad de la onda respecto del observador, en módulo, es $c+v_s$ como se observa en el diagrama vectorial de la *Figura 15*:

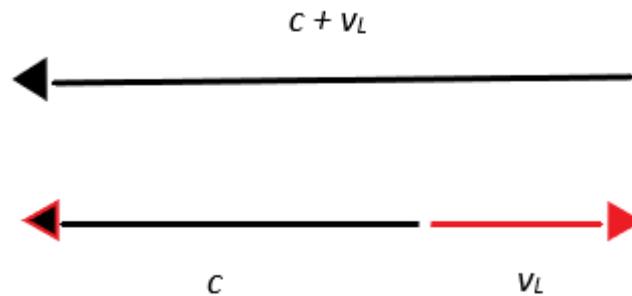


Figura 15: Composición vectorial para determinar la velocidad de la onda respecto del observador.

Para determinar la frecuencia medida por el observador debemos hacer uso de la fórmula general para las ondas: **frecuencia= velocidad de la onda/ longitud de la onda**, pero teniendo en cuenta que la velocidad es la velocidad relativa de la onda en el medio respecto de la velocidad del observador y, la longitud de onda, la que resulta del cálculo anterior es decir de tener en cuenta la velocidad de la fuente. Por lo tanto, designando como f_L a la la frecuencia medida por el observador, se puede escribir:

$$f_L = \frac{c+v_L}{\lambda} \quad (87)$$

Con λ determinada por la ec.86. Se obtiene:

$$f_L = \frac{c+v_L}{c+v_S} f_S \quad (88)$$

Finalmente, si el medio de propagación tiene una velocidad v_M la fórmula se modifica de la siguiente manera:

$$f_L = \frac{c+v_L-v_M}{c+v_S-v_M} f_S \quad (89)$$

Caso general

El caso general, para cualquier sentido de las velocidades de la fuente y el observador, se procede de la siguiente manera:

- i) Se plantea un esquema (dibujo) similar al de la Figura 10 con los sentidos de las velocidades de fuente y observador que corresponden y la velocidad de la onda.
- ii) Para la posición del observador ya sea delante de la fuente o detrás de la misma se construye el vector velocidad relativa onda-fuente. Con esto se determina la longitud de onda que mediría el observador.
- iii) Se construye el vector velocidad relativa onda-observador y con esta y la longitud de onda determinada en el paso anterior se obtiene la frecuencia medida por éste.

Ejercicio

Escribir la fórmula correspondiente a los casos indicados en la Figura 16 tomados de a par rojo (velocidad de la fuente) y verde (velocidad del observador) para la longitud de onda, λ , y la frecuencia, f_L , medidas por

el observador. Considere como sentido positivo el eje fuente-observador y, la velocidad de la onda es siempre positiva.

Figura 16: Cuadro de distintas posibilidades para aplicar el procedimiento general de determinación de la frecuencia medida por el observador.

De esta manera en los cuatro cuadros de la primera columna el sentido positivo va de izquierda a derecha y la velocidad de la onda en igual sentido. Por otra parte, en los cuatro cuadros de la derecha el sentido positivo va de derecha a izquierda al igual que la velocidad de la onda. Hagamos, como ejemplo el tercero de la derecha:

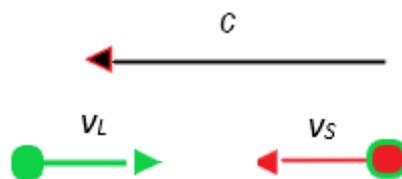


Figura 17: Desarrollo para uno de los casos presentados.

Primero determinamos la longitud de onda que mediría el observador en un instante t :

$$\lambda = \frac{c - v_S}{f_S}$$

En segunda instancia calculamos la frecuencia medida por el observador como:

$$f_L = \frac{c + v_L}{\lambda}$$

Reemplazando:

$$f_L = \frac{c + v_L}{c - v_S} f_S$$

Se debe observar que este cálculo se realiza sobre la base de las velocidades relativas, primero la velocidad de la onda respecto de fuente (para determinar λ) y, en segundo término, calculando la velocidad de la onda respecto del observador.

Bibliografía

- 1) Morelli, G. *Física III*. Ed. Universitas (Córdoba, Argentina).
- 2) Sears, F. W. y Zemansky, M.W. *Física*. Ed. Aguilar.
- 3) Fernandez, J. E. y Galloni, E. E. *Trabajos Prácticos de Física*. Ed. Nigar (Buenos Aires, Argentina).
- 4) Farías de la Torre, E. M. *Apuntes de Clase de Física III*.

