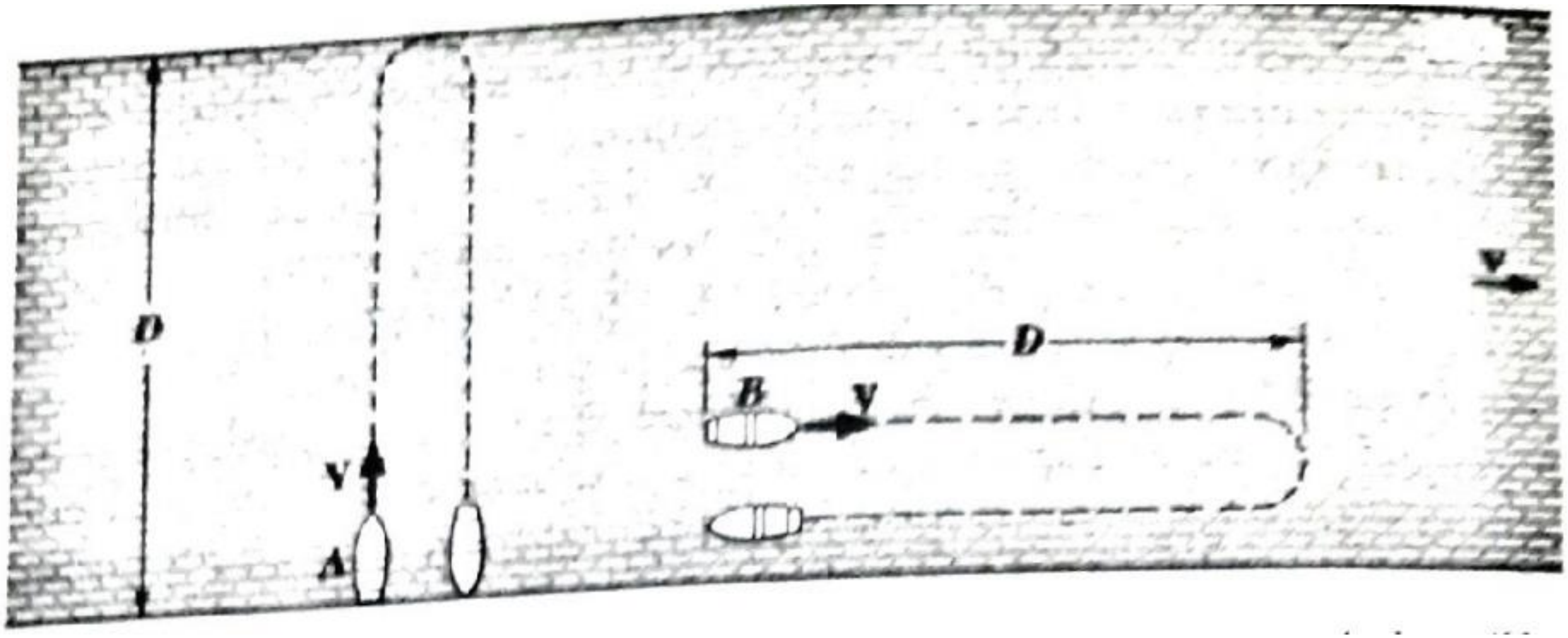
TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD

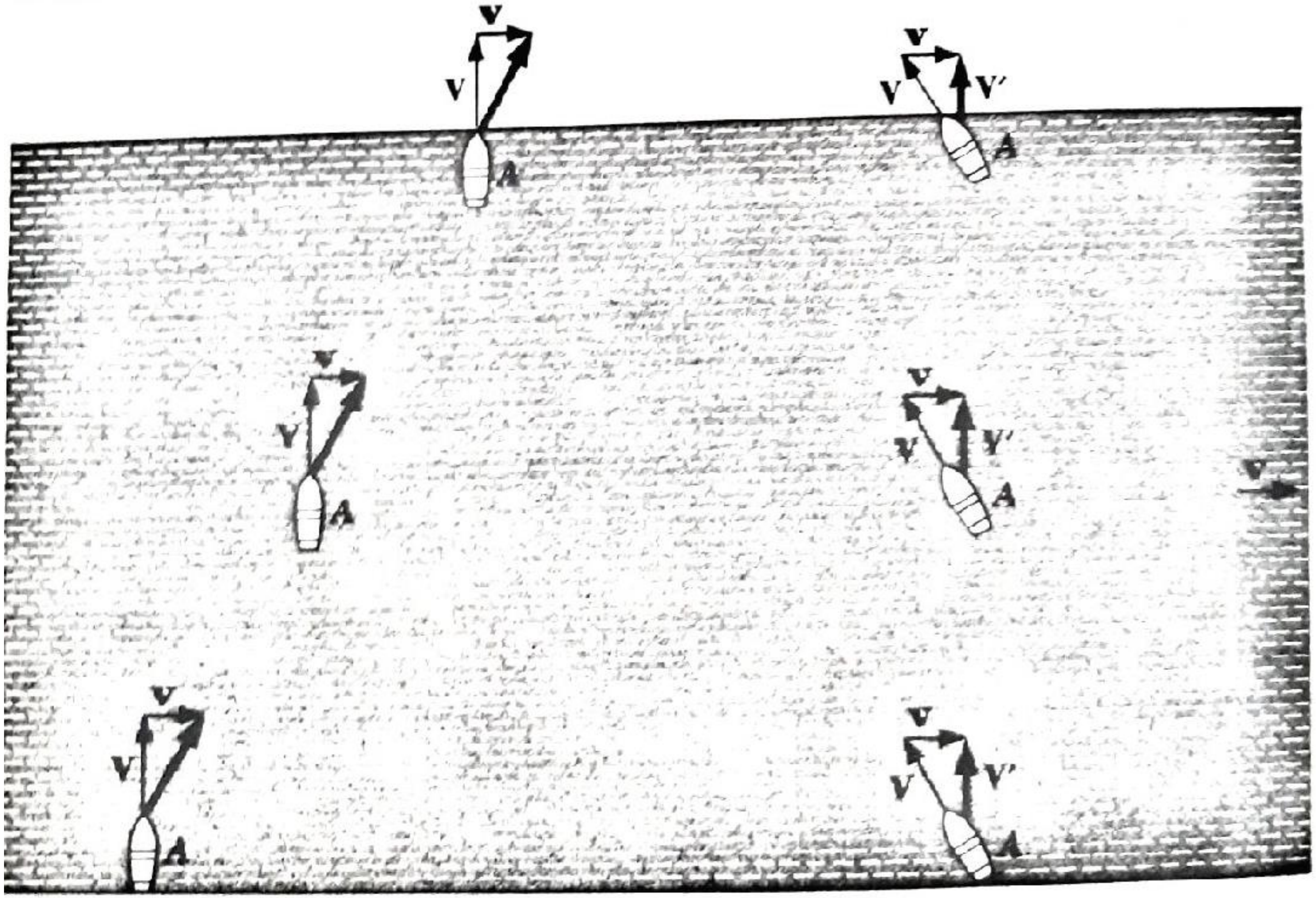
(RELATIVIDAD RESTRINGIDA)

ACONTECIMIENTOS HISTÓRICOS

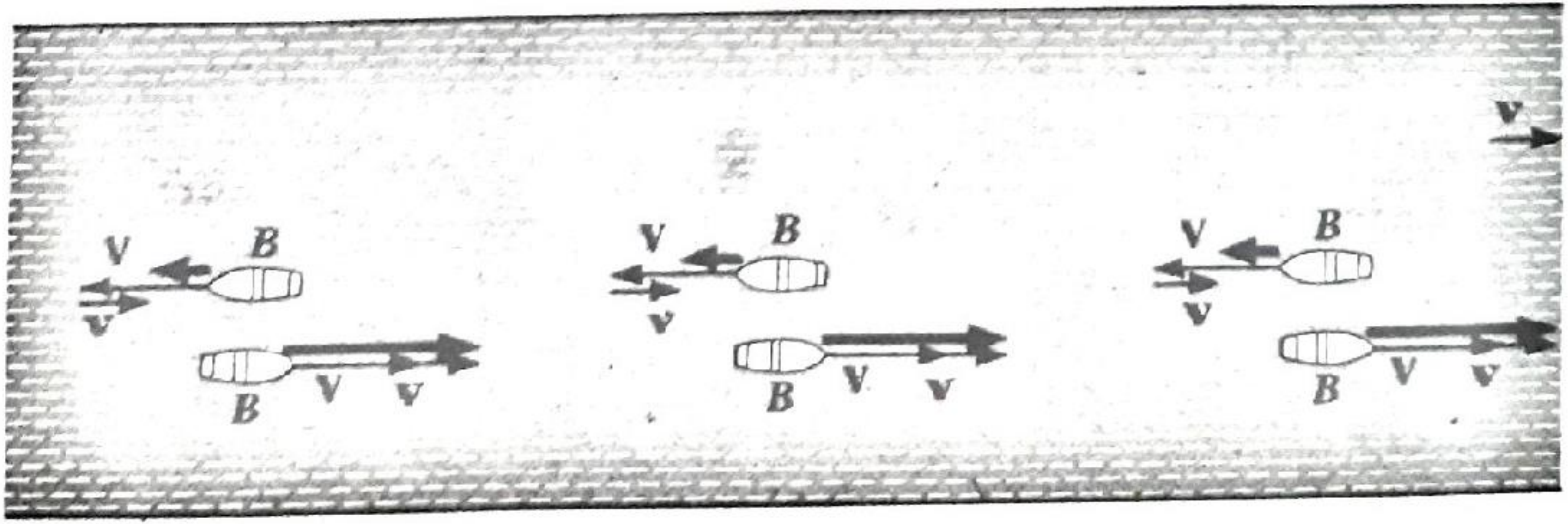
- 1861 Ecuaciones de Maxwell
- 1887 Experimento de Michelson y Morley
- 1895 Transformación de Lorentz
- 1905 Teoría especial de la relatividad (Albert Einstein)
  (artículo: Sobre la electrodinámica de los cuerpos móviles)
- 1915 Teoría general de la relatividad (Albert Einstein)
  (Teoría del campo gravitatorio y otros trabajos posteriores)

EXPERIMENTO DE MICHELSON Y MORLEY
INTRODUCCIÓN





v
V
A
v
V
V′
A
v
V
A
v
V
V′
A
v
v
V
A
v
V
V′
A


v
V
B
v
B
V
v
V
B
v
B
V
v
V
B
v
B
V
v

TIEMPOS QUE TARDAN LOS BARCOS EN IR Y VOLVER

BARCO A

$$v^2 = {v'}^2 + {v_0}^2$$

$$v' = \sqrt{v^2 - {v_0}^2} \underset{1 - {v_0}^2/v^2}{=} v\sqrt{1 - {v_0}^2/v^2}$$

$$t_A = \frac{2D}{v'} = \frac{2D/v}{\sqrt{1 - {v_0}^2/v^2}}$$

$$\frac{t_A}{t_B} = \sqrt{1 - {v_0}^2/v^2}$$

$$t_B > t_A$$

BARCO B

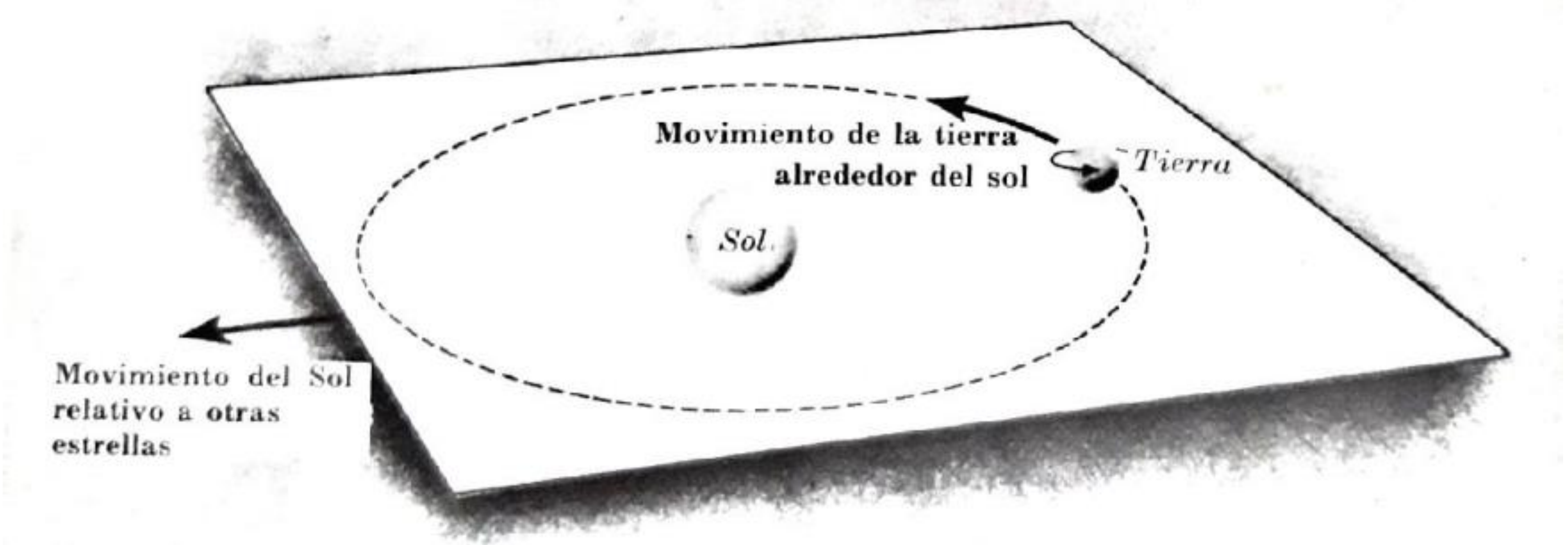
$$t_B = \frac{D}{v + v_0} + \frac{D}{v - v_0}$$

$$t_B = \frac{2D/v}{1 - {v_0}^2/v^2}$$

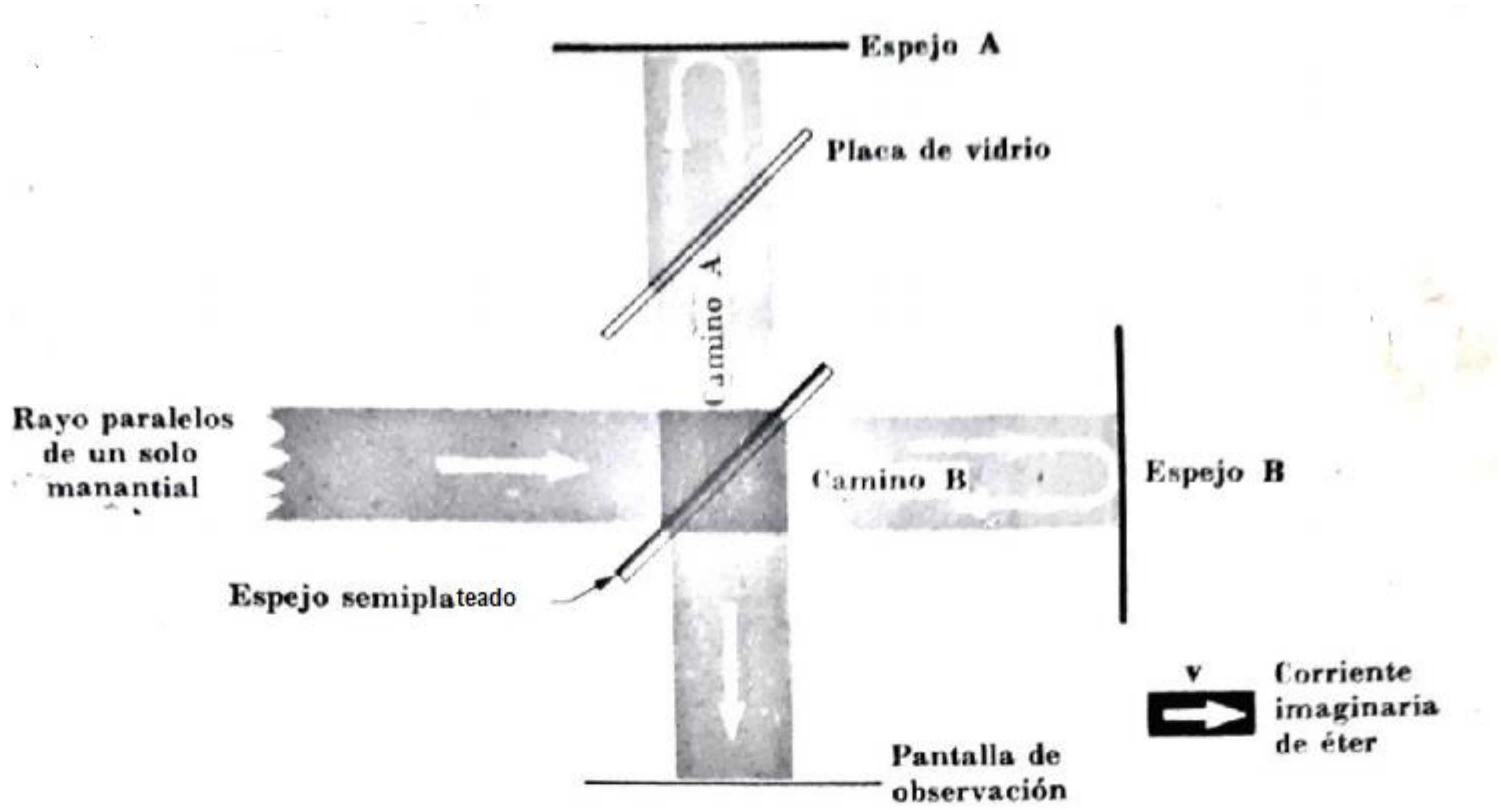
Si conocemos la velocidad común de ambos barcos y medimos la relación $\frac{t_A}{t_B}$ podemos determinar la velocidad v_0 del río.

El razonamiento empleado puede aplicarse al problema análogo del paso de ondas luminosas a través del éter. Si el espacio está lleno de éter, nos movemos a través del mismo a una velocidad por lo menos igual a la de rotación de la tierra alrededor del sol que es aproximadamente 30000 m/s y si el sol también está en movimiento nuestra velocidad a través del éter es todavía mayor.

Movimientos de la tierra a través de un éter hipotético.



EXPERIMENTO DE MICHELSON Y MORLEY



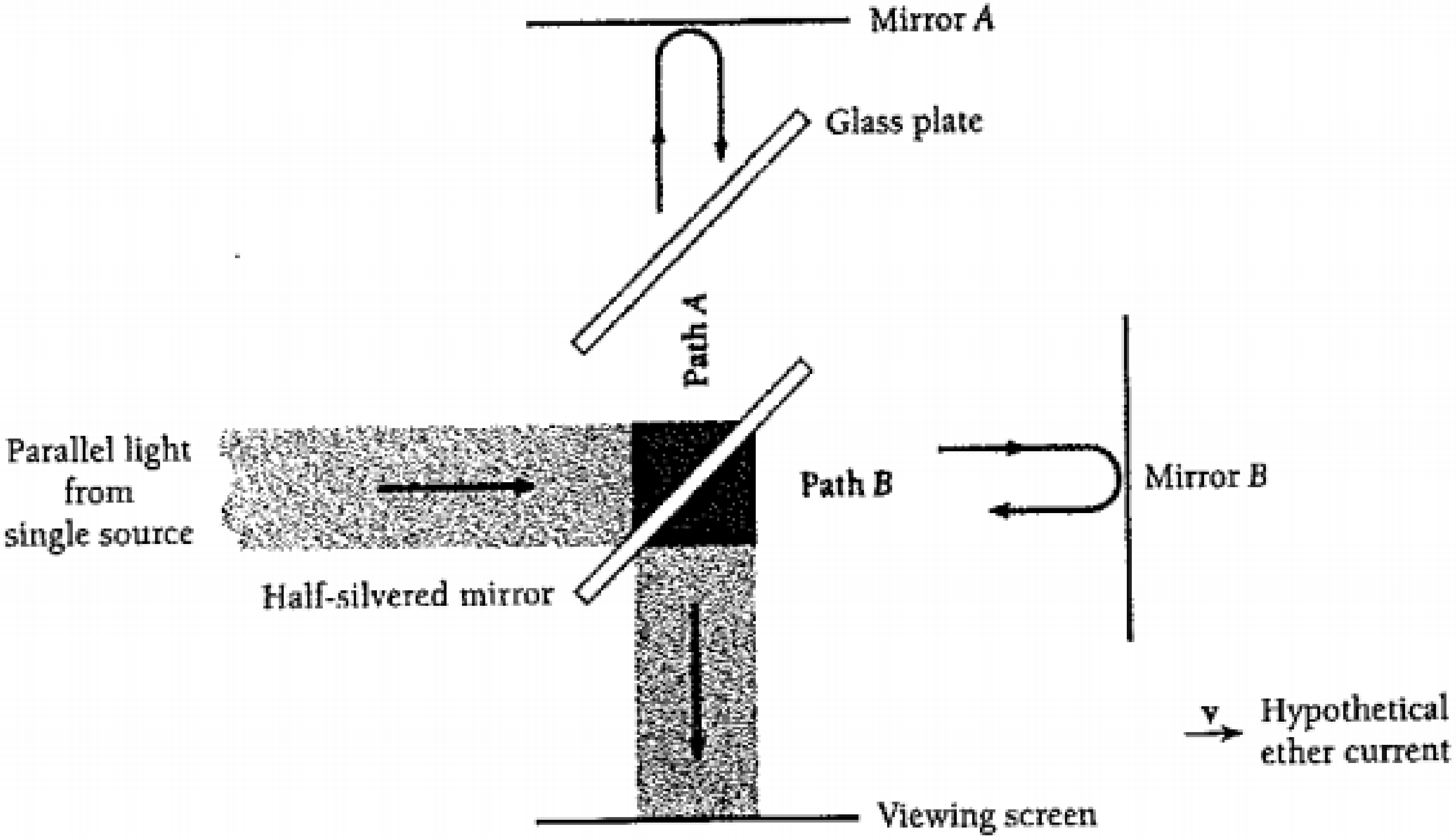
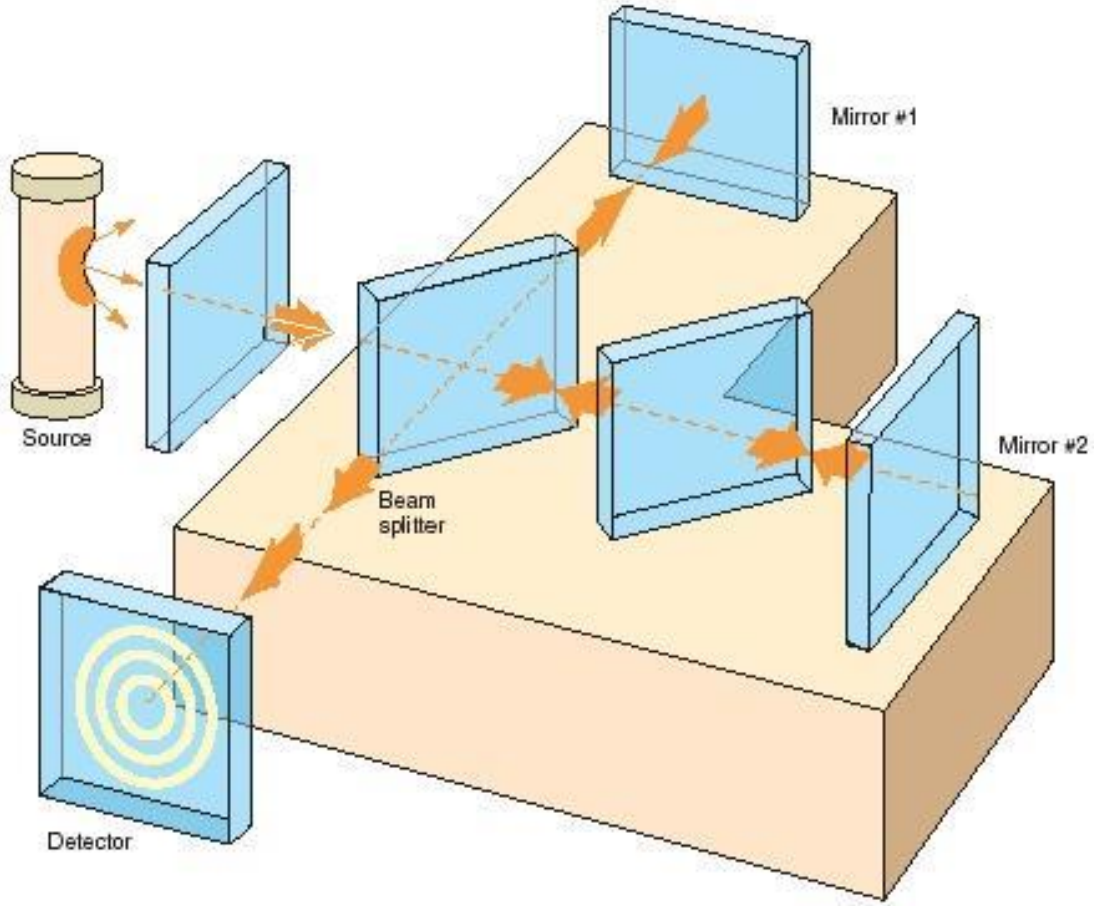
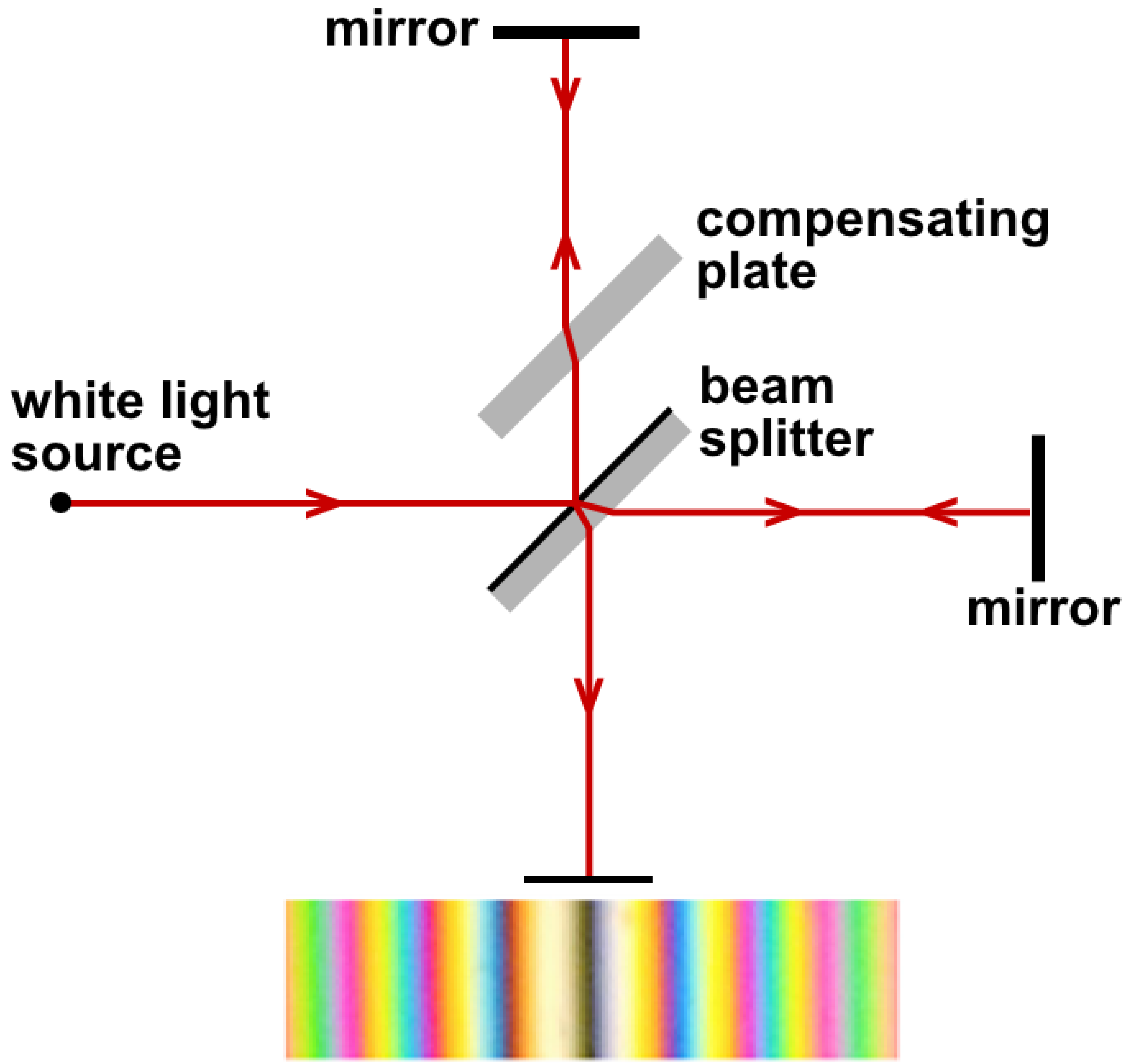


Figure 1.2 The Michelson-Morley experiment.

Otra perspectiva




mirror
compensating plate
white light source
beam splitter
mirror

INEXISTENCIA DEL ÉTER

Para determinar el movimiento de la tierra a través del éter, Michelson y Morley utilizaron un par de rayos de luz formados por un espejo semiplateado, como en la figura. Una luz se dirige a un espejo a lo largo de un camino perpendicular a la corriente de éter y la otra se dirige a un espejo a lo largo de un camino paralelo a la corriente de éter. Ambos haces terminan en la misma pantalla de visualización. La placa de vidrio transparente asegura que ambos rayos pasen por el mismo espesor de aire y vidrio. Si los tiempos de tránsito de los dos haces son iguales, llegarán a la pantalla en fase e interferirán constructivamente. Sin embargo, una corriente de éter debida al movimiento de la tierra paralelo a uno de los haces provocaría que los haces tuvieran un tránsito diferente y el resultado sería una interferencia destructiva en la pantalla.

LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD

El movimiento es siempre respecto de un sistema de referencia

PRIMER POSTULADO (Principio de relatividad)

Las leyes de la física son las mismas respecto de todos los sistemas de referencia inerciales.

SEGUNDO POSTULADO

La velocidad de la luz (*) en el vacío es la misma respecto de todos los sistemas de referencia inerciales.

(*) en realidad es la rapidez de la luz

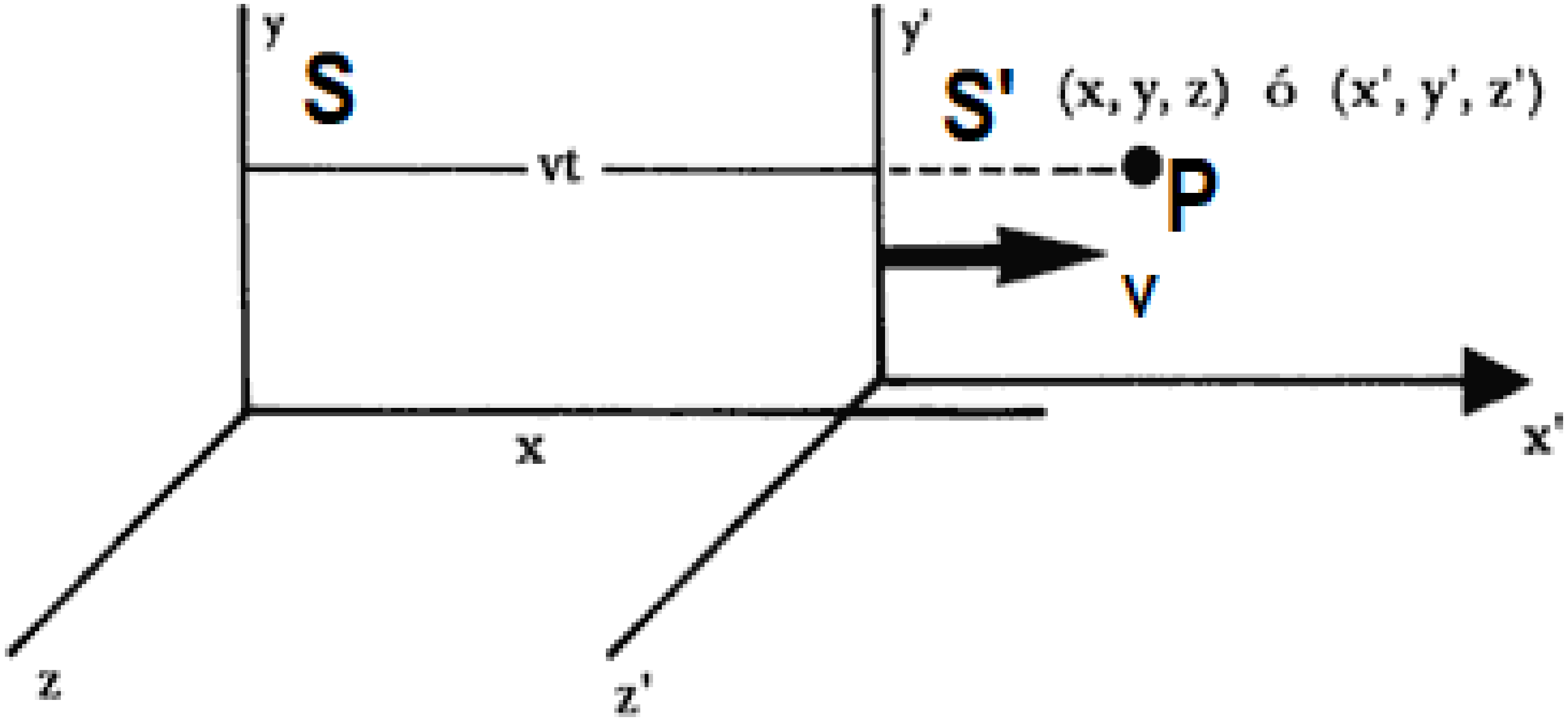
LA TRANSFORMACIÓN DE GALILEO

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{dx\prime}{dt\prime} = v_x - v \\ v'_y = \dfrac{dy\prime}{dt\prime} = v_y \\ v'_z = \dfrac{dz\prime}{dt\prime} = v_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases}$$

$$\boldsymbol{c' = c - v}$$



TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ

$\boldsymbol{x' = k(x - vt)}$ **(1)** $\boldsymbol{x = k(x' + vt')}$ **(2)**

$\boldsymbol{y' = y}$

$\boldsymbol{z' = z}$

Sustituyendo x' en (2) obtenemos:

$$\boldsymbol{x = k(k(x - vt) + vt')}$$

$$\boldsymbol{x = k^2(x - vt) + kvt'}$$

Despejando t' obtenemos: $\boldsymbol{t' = kt + \left(\frac{1-k^2}{kv}\right)x}$ **(3)**

Por la constancia de la velocidad de la luz $\begin{cases} \boldsymbol{x = ct} \\ \boldsymbol{x' = ct'} \end{cases}$

De la ecuación (1) y reemplazando t' por (3) obtenemos:

$$\boldsymbol{k(x - vt) = x' = ct' = c\left(kt + \left(\frac{1-k^2}{kv}\right)x\right)}$$

Despejando x, obtenemos: $\boldsymbol{x = ct\left[\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\left(\frac{1}{k^2}-1\right)\frac{c}{v}}\right]}$

Como la expresión entre corchetes debe ser igual a 1, despejando k obtenemos: $\boldsymbol{k = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$

Reemplazando k, en las ecuaciones (1) y (3) obtenemos la transformación de Lorentz:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{\mathbf{1} - \dfrac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{c^2}}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{\mathbf{1} - \dfrac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{c^2}}}} \end{cases}$$

Es una transformación lineal que se reduce a las transformación de Galileo cuando v es muy pequeña en relación a c ($v \ll c$), luego $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$.

Un frente de onda esférico se ve igual desde ambos sistemas de referencia:

Sistema S $\quad x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \quad$ (1) $\quad$ reemplazando la TL en (2) se obtiene (1)

Sistema S’ $\quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \quad (2)$

ECUACIONES DE MAXWELL: INVARIANCIA BAJO LA TL

Ecuaciones para el campo electromagnético en el vacío:

$$\begin{cases} div\ \bar{E} = \bar{0} \\ rot\ \bar{E} = -\dfrac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ div\ \bar{B} = 0 \\ rot\ \bar{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \bar{E}}{\partial t} \end{cases}$$

que también pueden escribirse:

$$\begin{cases} \nabla . \bar{E} = \bar{0} \\ \nabla . \bar{B} = \bar{0} \\ \nabla \times \bar{E} = -\dfrac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \bar{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \bar{E}}{\partial t} \end{cases}$$

De donde podemos obtener las ecuaciones de onda para el campo electromagnético:

$$\nabla^2 \bar{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = \bar{0}$$ que puede escribirse $$\left(\nabla^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \bar{E} = \bar{0}$$

$$\nabla^2 \bar{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2} = \bar{0}$$ que puede escribirse $$\left(\nabla^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \bar{B} = \bar{0}$$

$c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \times 10^8\ (m/s)$ (velocidad de la luz en el vacío)

LA TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ DEJA INVARIANTES LAS ECUACIONES DE MAXWELL

En tanto que las ecuaciones de Maxwell no se mantienen invariantes cuando se aplica la transformación de Galileo.

El operador D´Alembertiano $\square = \nabla^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \nabla'^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t'^2}$ es un invariante de Lorentz.

En consecuencia Einstein mediante la teoría de la relatividad obtiene que no sólo las leyes de la mecánica sean las mismas para todos los sistemas de referencia inerciales, sino que consigue que las leyes de la física, incluido el electromagnetismo, sean invariantes para todos los sistemas de referencia inerciales.

LA CONTRACCIÓN DE LORENTZ - FITZGERALD

Una varilla está situada a lo largo del eje x' en el sistema de referencia móvil S'. Las coordenadas de sus extremos son $x_1{}'$ y $x_2{}'$.

y un observador en este sistema mide la **"longitud propia"** de la varilla $L_0 = x_2{}' - x_1{}'$, consideremos la misma cantidad desde S, $L = x_2 - x_1$:

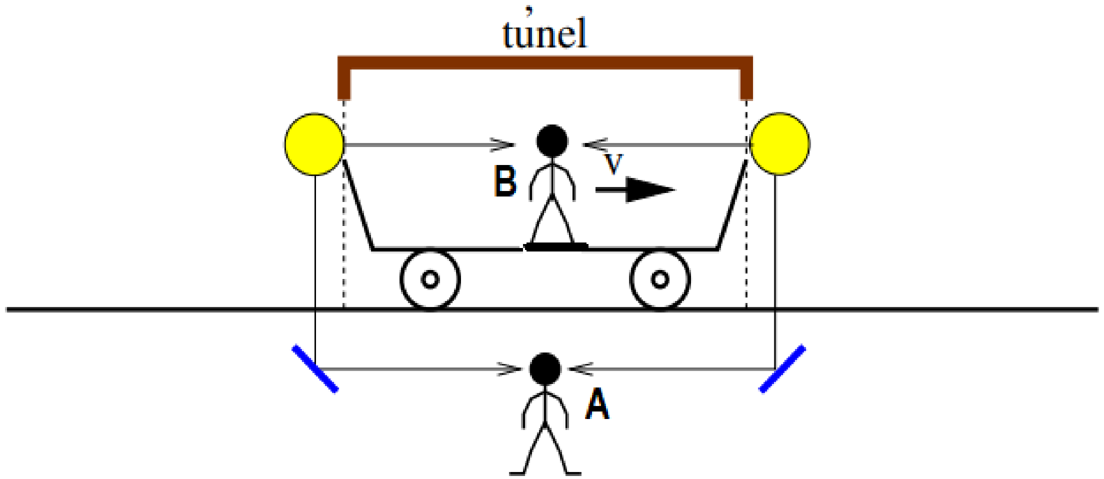
Midiendo las coordenadas $\boldsymbol{x_1}'$ y $\boldsymbol{x_2}'$ simultáneamente:

$\boldsymbol{x_1}' = \frac{\boldsymbol{x_1 - vt}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$, $\boldsymbol{x_2}' = \frac{\boldsymbol{x_2 - vt}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$; luego $L_0 = x_2{}' - x_1{}' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$; $L_0 = \frac{L}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$

o bien $\boldsymbol{L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ **Ejemplos:** $\boldsymbol{v = 1000\ \frac{Km}{s} \Rightarrow \frac{L}{L_0} = 0.99827}$

$\boldsymbol{v = 0.9\,c \Rightarrow \frac{L}{L_0} = 0.436}$

INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA CONTRACCIÓN DE LA LONGITUD



Qué se entiende por medir una longitud ?
Para medir una longitud en reposo basta con hacer coincidir las marcas de una regla con los extremos del bloque, pero si el bloque se mueve es necesario conocer la posición de ambos extremos del bloque simultáneamente. **Las medidas de longitud son medidas de sucesos simultáneos**

Veamos, el ejemplo de la figura. El vagón donde viaja el observador móvil B va a atravesar un túnel, cuya longitud medida cuidadosamente por un observador A en reposo respecto de la vía es L. El observador fijo A se sitúa en el punto medio del túnel con un sistema de espejos que le permite ver los dos extremos del túnel sin girar la cabeza. En un instante dado, ve que la cola del vagón desaparece en el interior del túnel en el mismo instante en que la cabeza asoma por el otro extremo. En ese instante se emiten dos señales luminosas desde los extremos del túnel, que le llegarán simultáneamente al observador fijo A, por lo tanto, éste llega a la conclusión de que el vagón ***mide igual que el túnel.***
¿ A qué conclusión llega el observador móvil B ? Él también ve las señales luminosas pero para él no son simultáneas: verá primero la que proviene de la cabeza del vagón (que le informa de que la cabeza del vagón sale del túnel) y ***después*** la de la cola. Es decir, que para él cuando la cabeza del tren sale del túnel, la cola aún no ha entrado en el túnel. En consecuencia, el observador móvil B pensará que el vagón es ***más largo que el túnel.*** Por lo tanto, la longitud del vagón está contraída para el observador que lo mide en movimiento respecto del observador que lo mide en reposo. Las longitudes medidas en reposo se llaman ***longitudes propias***.

DILATACIÓN DEL TIEMPO

Transformación inversa de Lorentz (se sustituye v por –v)

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = \dfrac{x' + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \\ \boldsymbol{y = y'} \\ \boldsymbol{z = z'} \\ \boldsymbol{t = \dfrac{t' + \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \end{cases}$$

Un observador cuando mide un intervalo de tiempo dado por relojes móviles, advierte que tienen un tic-tac más lento que aquellos relojes que se encuentran en reposo en su propio sistema de referencia. Este efecto, se denomina **dilatación del tiempo**.

Para verlo, imaginemos un reloj situado en el punto x' del sistema de referencia S' y que un observador en el mismo sistema mide un tiempo $t_1{}'$, entonces un observador en S medirá un tiempo t_1:

$$t_1 = \frac{t_1{}' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

Después de un intervalo de tiempo t_0 para el observador móvil, este encuentra que el tiempo, según su reloj, es ahora $t_2{}'$; es decir:

$$t_0 = t_2{}' - t_1{}'$$

Sin embargo, el observador en S, al final del mismo intervalo, mide:

$$t_2 = \frac{t_2{}' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

de manera que, para él la duración del intervalo t es:

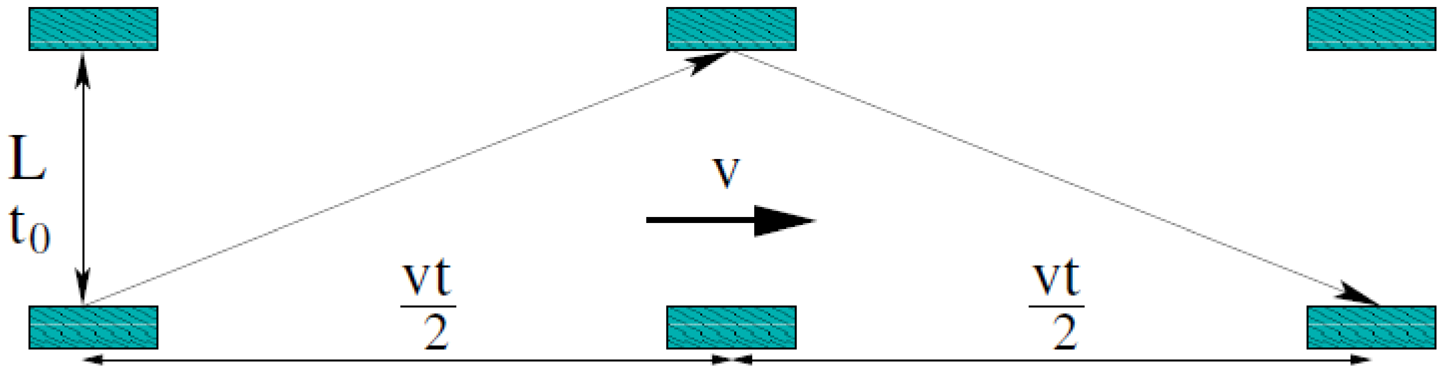
$$\boldsymbol{t} = t_2 - t_1 = \frac{t_2{}' - t_1{}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\boldsymbol{t_0}}{\sqrt{\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{v}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{c}^{\mathbf{2}}}}}$$

(dilatación del tiempo)

INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA DILATACIÓN DEL TIEMPO

Analicemos el siguiente experimento:

Tenemos un reloj de luz, dentro de un vagón que se mueve con velocidad v,



La luz reflejada en el techo del vagón constituye un reloj en movimiento.

tal como se indica en la figura. Este reloj de luz, consiste en un haz de luz emitido desde el suelo del vagón, que regresa al mismo después de ser reflejado por un espejo que se encuentra en el techo del vagón. Para un observador que se mueve con el vagón el rayo recorre una distancia 2L en un tiempo t_0. Para un observador fijo respecto de la vía el rayo recorre una distancia mayor en un tiempo t que debe ser mayor en razón de la constancia de la velocidad (rapidez) de la luz respecto de todos los sistemas de referencia inerciales.

Haciendo los cálculos pertinentes, tenemos:

$$c = \frac{2L}{t_0} = \frac{2\sqrt{L^2 + (vt/2)^2}}{t} \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

lo que nos da una dilatación del tiempo coincidente con la que habíamos obtenido a partir de la transformación de Lorentz.

EJEMPLO

Desintegración de los mesones μ a su llegada a la atmósfera terrestre

Un ejemplo notorio de la dilatación del tiempo y de la contracción de la longitud, surge en la desintegración de las partículas inestables denominadas mesones μ o muones, que se crean en lo alto de la atmósfera por la acción de los rayos cósmicos, y se desintegran en un tiempo de vida medio de 2×10^{-6} seg después de su creación, llegando en gran cantidad al nivel del mar. En ese tiempo, a la velocidad de 0.998 c, sólo pueden recorrer una distancia:

$$\boldsymbol{y = vt_0 = 2.994 \times 10^8\ m/s\ \times 2 \times 10^{-6}\ s = 600\ m}$$

Sin embargo, comienzan a existir a alturas 10 veces mayor que este valor. Podemos resolver esta paradoja utilizando la teoría especial de la relatividad.

En efecto, desde el sistema de referencia del mesón, aunque su tiempo de vida (tiempo propio) no es afectado, su distancia a la tierra se acorta:

$$\boldsymbol{y = y_0\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Luego, cuando desde el mesón se mide una distancia de y = 600 m, desde la tierra se mide:

$$\boldsymbol{y_0 = \frac{y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{600}{\sqrt{1 - (0.998\ c)^2/c^2}} = \frac{600}{0.063} = 9500\ m}$$

Luego, a pesar de su breve plazo de vida los mesones pueden alcanzar la superficie de la tierra

Para un observador en la tierra la altura a la cual se ha creado el mesón es y_0, pero su vida media en nuestro marco de referencia se ha dilatado debido al movimiento relativo al valor:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{2\times10^{-6}}{0.063} = 31.7 \times 10^{-6}\ \text{s}$$

Que es un valor 16 veces mayor que cuando está en reposo respecto a nosotros.

Un mesón cuya velocidad es 0.998 c puede recorrer

$$y_0 = vt = 2.994 \times 10^8\, m/s \times 31.7 \times 10^{-6} s = 9500\, m$$

que es la misma distancia obtenida anteriormente; es decir que ambos puntos de vista coinciden; visto desde el mesón se acorta la longitud, visto desde la tierra se dilata el tiempo, en ambos casos el resultado es el mismo: el mesón llega a la superficie de la tierra.

SUMA DE VELOCIDADES

Supongamos que un cuerpo se está moviendo en relación a ambos sistemas de referencia S y S’ donde v es la velocidad de S’ respecto de S. Un observador en S mide las siguientes conponentes de la velocidad del cuerpo:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

mientras que para un observador en S’ esas componentes son:

$$v_x{}' = \frac{dx'}{dt'} \qquad v_y{}' = \frac{dy'}{dt'} \qquad v_z{}' = \frac{dz'}{dt'}$$

Diferenciando la transformación de Lorentz inversa obtenemos:

$$dx = \frac{dx' + vdt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad dy = dy' \qquad dz = dz' \qquad dt = \frac{dt' + \frac{vdz'}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

De donde se deduce:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + \frac{v dx'}{c^2}} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} = \frac{{v_x}' + v}{1 + \frac{v {v_x}'}{c^2}}$$

y, en forma similar:

$$v_y = \frac{{v_y}'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v {v_x}'}{c^2}}$$

$$v_z = \frac{{v_z}'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v {v_x}'}{c^2}}$$

EJEMPLO

Si $v_x{}' = c$, es decir, si un haz de luz es emitido en el sistema de referencia móvil S' en la dirección del movimiento relativo a S, un observador en el sistema de referencia S mide la velocidad:

$$v_x = \frac{v_x{}' + v}{1 + \frac{v v_x{}'}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \frac{vc}{c^2}} = \frac{c(c + v)}{c + v} = c$$

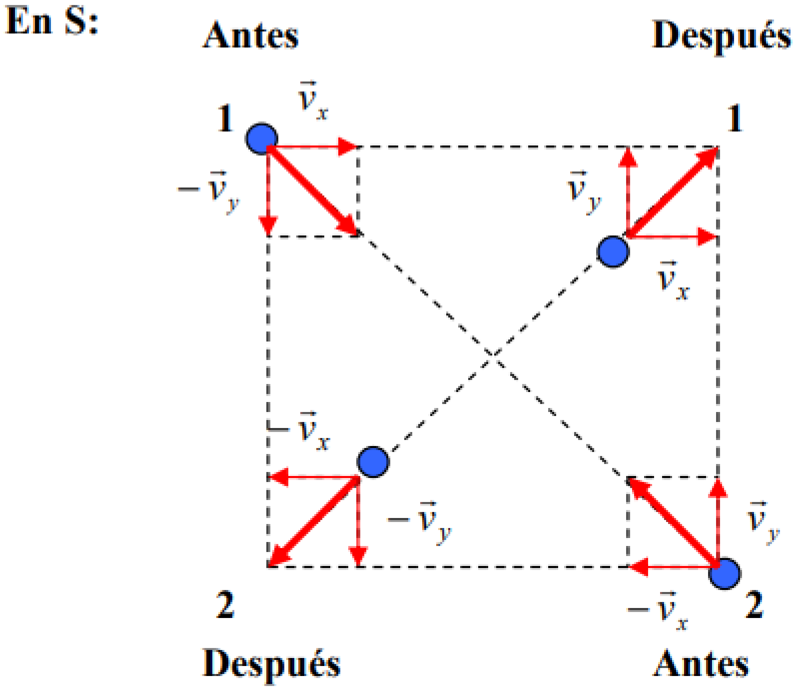
En consecuencia, los dos observadores, el fijo y el móvil miden el mismo valor para la velocidad de la luz, como debe ser.

DINÁMICA RELATIVISTA

Conservación de la cantidad de movimiento

Debemos definir la cantidad de movimiento de un sistema de partículas, de tal manera que se conserve, con independencia del sistema de referencia inercial desde el cual se lo observe:

Ejemplo: Sean dos partículas de igual masa m_0. Elijamos S de tal manera que las dos partículas se aproximen con velocidad opuestas de igual módulo, tal que la cantidad de movimiento total del sistema se anula: $\bar{p} = \bar{0}$.



$$\Delta p_y(1) = 2mv_y$$
$$\Delta p_y(2) = -2mv_y$$
$$\Delta p_x(1) = \Delta p_x(2) = 0$$

Supongamos un sistema de referencia S’ que se mueve con velocidad $\bar{v} = v\bar{\imath}$ respecto de S. Utilizando las fórmulas para transformación de velocidades obtenemos:

$$\boldsymbol{v_x}'(\mathbf{1}) = \frac{\boldsymbol{v_x - v}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{\beta}\dfrac{\boldsymbol{v_x}}{\boldsymbol{c}}} \qquad \boldsymbol{v_x}'(\mathbf{2}) = \frac{\boldsymbol{-v_x - v}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{\beta}\dfrac{\boldsymbol{v_x}}{\boldsymbol{c}}} \qquad \left(\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{c}}\right)$$

Como son iguales, antes y después del choque, en S’ también se cumple $\Delta p_x(1) = \Delta p_x(2) = 0$.

Veamos ahora que ocurre con Δp_y . Antes del choque:

$$\boldsymbol{v_y}'(\mathbf{1}) = \frac{\boldsymbol{-v_y}}{\boldsymbol{\gamma}\left(\mathbf{1} - \boldsymbol{\beta}\frac{\boldsymbol{v_x}}{\boldsymbol{c}}\right)} \qquad \boldsymbol{v_y}'(\mathbf{2}) = \frac{\boldsymbol{v_y}}{\boldsymbol{\gamma}\left(\mathbf{1} + \boldsymbol{\beta}\frac{\boldsymbol{v_x}}{\boldsymbol{c}}\right)}$$

(no tienen el mismo módulo)

Después del choque:

$$\boldsymbol{v_y}'(\mathbf{1}) = \frac{\boldsymbol{v_y}}{\boldsymbol{\gamma}\left(\mathbf{1} - \boldsymbol{\beta}\frac{\boldsymbol{v_x}}{\boldsymbol{c}}\right)} \qquad \boldsymbol{v_y}'(\mathbf{2}) = \frac{\boldsymbol{-v_y}}{\boldsymbol{\gamma}\left(\mathbf{1} + \boldsymbol{\beta}\frac{\boldsymbol{v_x}}{\boldsymbol{c}}\right)}$$

$\Rightarrow\ \Delta p_y'(1) \neq -\Delta p_y'(2)$ si $\bar{p} = m\bar{v}$ con $m = cte$

Luego $\bar{p} \neq \overline{cte}$, lo que significa que debemos definir a la cantidad de movimiento de otra manera para que se conserve.

NUEVA DEFINICIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

El problema es que $v_y{}'$ depende de v_x. Para que la cantidad de movimiento se conserve vista desde todos los sistemas de referencia inerciales, se debe redefinir la cantidad de movimiento. Para ello, considerando a τ el tiempo propio de la partícula (en el sistema en que está en reposo) hacemos:

$$m_0 \frac{dy}{d\tau} = m_0 \frac{dy}{dt}\frac{dt}{d\tau} \qquad \text{con} \quad \mathrm{d}\tau = \frac{dt}{\gamma} \qquad \text{y} \qquad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

con $\bar{v} \equiv$ velocidad de la partícula en S.

Haciendo lo mismo para todas las componentes obtenemos:

$$\bar{p} = \frac{m_0 \bar{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

MASA VARIABLE CON LA VELOCIDAD

Con la definición anterior se puede interpretar:

$\bar{p} = m(v)\bar{v}$ con $m(v) = \dfrac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$

Si $v \to c$ entonces $m(v) \to \infty$

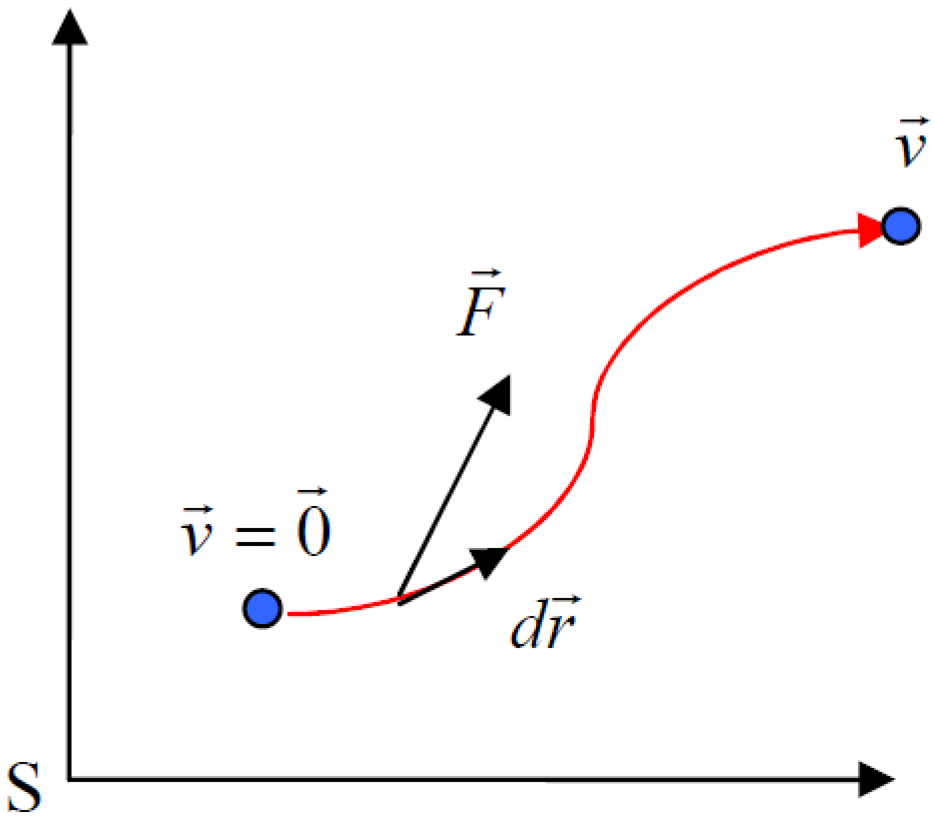
m_0 se denomina "masa en reposo" y corresponde a la masa que tiene una partícula en un sistema de referencia inercial en el cual se encuentra en reposo. Es un invariante de Lorentz.

En particular se ve que una partícula con masa en reposo n nula nunca puede alcanzar la velocidad de la luz, porque a esa velocidad su masa se torna infinita. Entonces, como es posible que los fotones alcancen la velocidad de la luz ?. Eso es porque su masa en reposo es nula.

ENERGÍA CINÉTICA RELATIVISTA

Como en la mecánica clásica, consideramos el trabajo que efectúa una fuerza, a lo largo de una trayectoria:

$$dW = \bar{F}.\overline{dr} = \frac{d\bar{p}}{dt}.\bar{v}dt$$



Trabajamos siempre en el mismo sistema de referencia S.

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{m_0\bar{v}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}\right] = m_0\left[\frac{\dot{\bar{v}}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{\bar{v}\dot{v}v/c^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\right]$$

$$\bar{v}.\frac{d\bar{p}}{dt} = m_0\left[\frac{\bar{v}.\dot{\bar{v}}}{(1-\beta^2)^{1/2}} + \frac{\bar{v}.\bar{v}\dot{v}v/c^2}{(1-\beta^2)^{3/2}}\right] = m_0\left[\frac{v\dot{v}}{(1-\beta^2)^{1/2}} + \frac{v^2\dot{v}v/c^2}{(1-\beta^2)^{3/2}}\right]$$

$$= m_0\left[\frac{v\dot{v}}{(1-\beta^2)^{1/2}} + \frac{v\dot{v}\beta^2}{(1-\beta^2)^{3/2}}\right]$$

Donde se ha utilizado $\bar{v}.\dot{\bar{v}} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\bar{v}.\bar{v}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v^2) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(vv) = v\dot{v}$

$$\bar{v}.\frac{d\bar{p}}{dt} = m_0\frac{v\dot{v}}{(1-\beta^2)^{3/2}}[(1-\beta^2)+\beta^2] = m_0\frac{v\dot{v}}{(1-\beta^2)^{3/2}} = \frac{d}{dt}\left[\frac{m_0c^2}{(1-\beta^2)^{1/2}}\right]$$

Entonces:

$$dW = \frac{d}{dt}\left[\frac{m_0c^2}{(1-\beta^2)^{1/2}}\right]dt = d\left[\frac{m_0c^2}{(1-\beta^2)^{1/2}}\right] \Rightarrow W = \left[\frac{m_0c^2}{(1-\beta^2)^{1/2}}\right]_{v=0}^{v} = \frac{m_0c^2}{(1-\beta^2)^{1/2}} - m_0c^2$$

Como, por el teorema de trabajo-energía cinética $W = \Delta T$ y como inicialmente tenía velocidad nula, su energía cinética inicial es nula; luego:

$$T = \frac{m_0c^2}{(1-\beta^2)^{1/2}} - m_0c^2$$

$$T = m_0c^2(\gamma - 1)$$

INVARIANTES DE LORENTZ Y CUADRIVECTORES

Ya vimos que τ (tiempo propio), L_0 (longitud propia), m_0 (masa en reposo) y c (velocidad de la luz) son invariantes de Lorentz.

Se puede ver que la cantidad:

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\, \Delta t^2$$

O bien, si $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ y $t_0 = 0$

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2\, t^2$$

también es un invariante de Lorentz, como se demuestra, aplicando la transformación de Lorentz:

DEMOSTRACIÓN

$$s^2 = \gamma^2(x' + vt')^2 + {y'}^2 + {z'}^2 - c^2\gamma^2\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right)^2 =$$

$$= \gamma^2\left({x'}^2 + v^2{t'}^2 + 2x'vt'\right) + {y'}^2 + {z'}^2 - c^2\gamma^2\left(t'^2 + \frac{\beta^2}{c^2}x'^2 + 2t'\frac{\beta}{c}x'\right) =$$

$$= \gamma^2\left(-c^2t'^2 - \beta^2{x'}^2 - 2t'vx' + {x'}^2 + v^2{t'}^2 + 2x'vt'\right) + {y'}^2 + {z'}^2 =$$

$$= -\gamma^2c^2t'^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \gamma^2{x'}^2(1 - \beta^2) + {y'}^2 + {z'}^2 =$$

$$= {x'}^2 + {y'}^2 + {z'}^2 - c^2t'^2 = s'^2$$

Teniendo presente que $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = (1 - \beta^2) = \gamma^{-2}$

La invariancia de esta cantidad, que se denomina "intervalo entre dos sucesos", cuya norma es s (o Δs), nos permite definir un vector de cuatro componentes, denominado "**cuadrivector"**, cuya norma es s (o Δs). Esta forma de definir la norma de la distancia entre dos puntos nos conduce a un ***"espacio vectorial pseudoeuclídeo"*** y a una ***"geometría psudoeuclidiana"*** porque no se cumple que la distancia entre dos puntos es siempre mayor o igual a cero y sólo es cero cuando los puntos coinciden. En efecto, en este caso, la distancia entre dos puntos del ***"espacio-tiempo"***, puede ser positiva, nula o negativa.

Las coordenadas del cuadrivector espacio-tiempo, son:

$x_1 \equiv x$

$x_2 \equiv y$

$x_3 \equiv z$

$x_4 \equiv ict$

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2$$

o, cuando $x_0 = y_0 = z_0 = t_0 = 0$

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

Recordemos que el vector cantidad de movimiento $\bar{p}$ es igual a:

$\bar{p} = \frac{m_0 \bar{v}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = m_0 \gamma \bar{v}$, de donde $p = m_0 \gamma v = m_0 \gamma \beta c$

de donde, podemos escribir $p^2 = {m_0}^2 c^2 \beta^2 \gamma^2$

La identidad:

$\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1$, $\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$, surge que $\gamma^2 - \beta^2\gamma^2$ es un invariante de Lorentz porque 1 es una constante.

Multiplicando ambos miembros por ${m_0}^2 c^4$, tenemos nuevamente un invariante de Lorentz porque la masa en reposo y la velocidad de la luz son inv. De Lorentz:

$$ {m_0}^2 c^4 (\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2) = {m_0}^2 c^4 $$

$$ {m_0}^2 c^4 \gamma^2 - p^2 c^2 = {m_0}^2 c^4 $$

ENERGÍA RELATIVISTA

Consideremos la magnitud:

$$m_0c^2\gamma = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Para $\beta \ll 1$

$$m_0c^2\gamma = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \cong m_0c^2\left(1+\frac{1}{2}\beta^2+\cdots\right) \cong m_0c^2+\frac{1}{2}m_0v^2+\cdots$$

Recordemos que la energía cinética relativista es $T = m_0c^2\gamma - m_0c^2$, la que, como vemos, para valores de $\beta \ll 1$ $(v \ll c)$ da el conocido valor $\frac{1}{2}m_0v^2$.

Definimos, ahora como energía relativista total a: $E = m_0c^2\gamma = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, que también puede expresarse como $E = m_0c^2 + T$

donde m_0c^2 es la energía asociada a la masa en reposo.

Luego, obtenemos que:

$$E^2 - p^2c^2 = {m_0}^2c^4$$

es un invariante de Lorentz, es decir, que si pasamos del sistema de referencia S al S', tenemos:

$$E'^2 - p'^2c^2 = E^2 - p^2c^2 = {m_0}^2c^4$$

De aquí surge, como veremos el cuadrivector cantidad de movimiento.

Para el caso particular de un fotón que se mueve con velocidad c, para que la masa en movimiento no sea infinita, la única posibilidad es que su masa en reposo $m_0 = 0$, luego:

$$E = pc \quad \Rightarrow \quad p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$$

Teniendo presente que la energía del fotón es $E = h\nu$, donde h es la constante de Planck y ν la frecuencia del fotón.

TRANSFORMACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO Y DE LA ENERGÍA
CUADRIVECTOR CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Escribiremos:

$$p_x = m_0 \frac{dx}{d\tau} \quad , \; p_y = m_0 \frac{dy}{d\tau} \quad , p_z = m_0 \frac{dz}{d\tau} \quad , \; \frac{E}{c^2} = m_0 \frac{dt}{d\tau}$$

utilizando $\frac{dt}{d\tau} = (1-\beta^2)^{-1/2}$

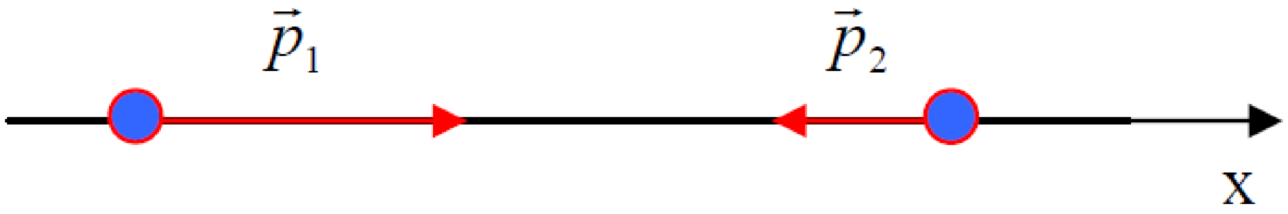
Como m_0 y τ son invariantes de Lorentz p_x, p_y, p_z y $\frac{E}{c^2}$ deben transformarse como x, y, z, t (con $\beta = \frac{v}{c} \Rightarrow v = \beta c$; $\frac{v}{c^2} = \frac{\beta}{c}$

$$\begin{cases} p_x{}' = \gamma \left(p_x - \beta c \dfrac{E}{c^2} \right) \\ p_y{}' = p_y \\ p_z{}' = p_z \\ \dfrac{E'}{c^2} = \gamma \left(\dfrac{E}{c^2} - \dfrac{\beta}{c} p_x \right) \end{cases}$$

EQUIVALENCIA ENTRE MASA Y ENERGÍA

Ejemplo: Choque inelástico de partículas elementales

- Aun en un choque inelástico, **la energía relativista se conserva**, ya que la pérdida de energía cinética aparece como un aumento de la masa.
- Por ejemplo, supongamos dos partículas idénticas que chocan y se adhieren:



Observamos el choque desde el sistema de referencia inercial en el que el centro de masa del sistema de partículas está en reposo.

$\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = \bar{0}$, luego la partícula resultante del choque debe estar en reposo.

En otro sistema S':

$$\bar{p}_1{}' + \bar{p}_2{}' = \bar{p}_3{}'$$

De acuerdo con la transformación:

$$p_{x1}{}' + p_{x2}{}' = \gamma(p_{x1} + p_{x2}) - \frac{\gamma\beta}{c}(E_1 + E_2) = p_{x3}{}' = \gamma p_{x3} - \frac{\gamma\beta}{c}E_3$$

Teniendo presente que $p_{x1} + p_{x2} = 0$ y que $p_{x3} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 + E_2 = E_3 \Rightarrow$ para que se conserve $\bar{p}$, debe conservarse E

$\Rightarrow \quad E_1 + E_2 = \dfrac{2m_0c^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = m_{3_0}c^2$ porque la partícula resultante 3 está en reposo $\quad \Rightarrow \quad m_{3_0} = \dfrac{2m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = 2\gamma m_0 > 2m_0$

La partícula resultante ganó masa en reposo a causa de la pérdida de energía cinética $2\gamma m_0 - 2m_0 = 2m_0(\gamma - 1) = -\dfrac{\Delta T}{c^2}$

ESPACIO DE MINKOWSKI

Vamos a considerar un espacio, en el cual, a las tres dimensiones espaciales le agregamos la dimensión temporal, por lo cual nuestro **espacio** va a tener ahora **cuatro dimensiones**. Este espacio se denomina espacio de Minkowski y tiene cuatro dimensiones, cada punto de este espacio se denomina **“suceso”** o **“evento”**.

Para simplificar, consideremos una sola coordenada espacial, x, y en el otro eje representamos ct. Consideraremos un **suceso** a un punto del

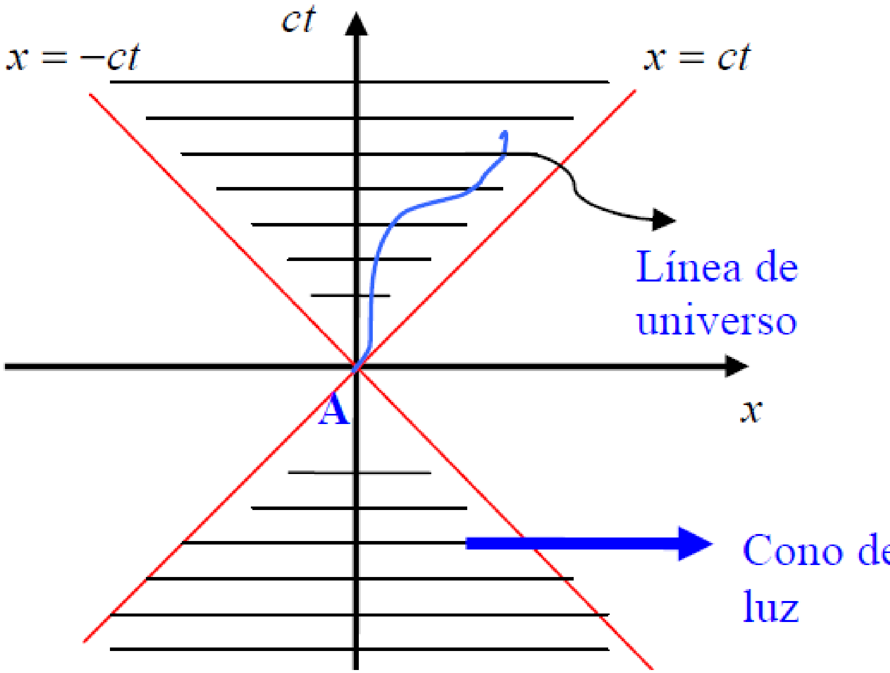
espacio-tiempo de cuatro dimensiones $(\boldsymbol{ct}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.

Supongamos el suceso $(0,0,0,0)$, las dos rectas

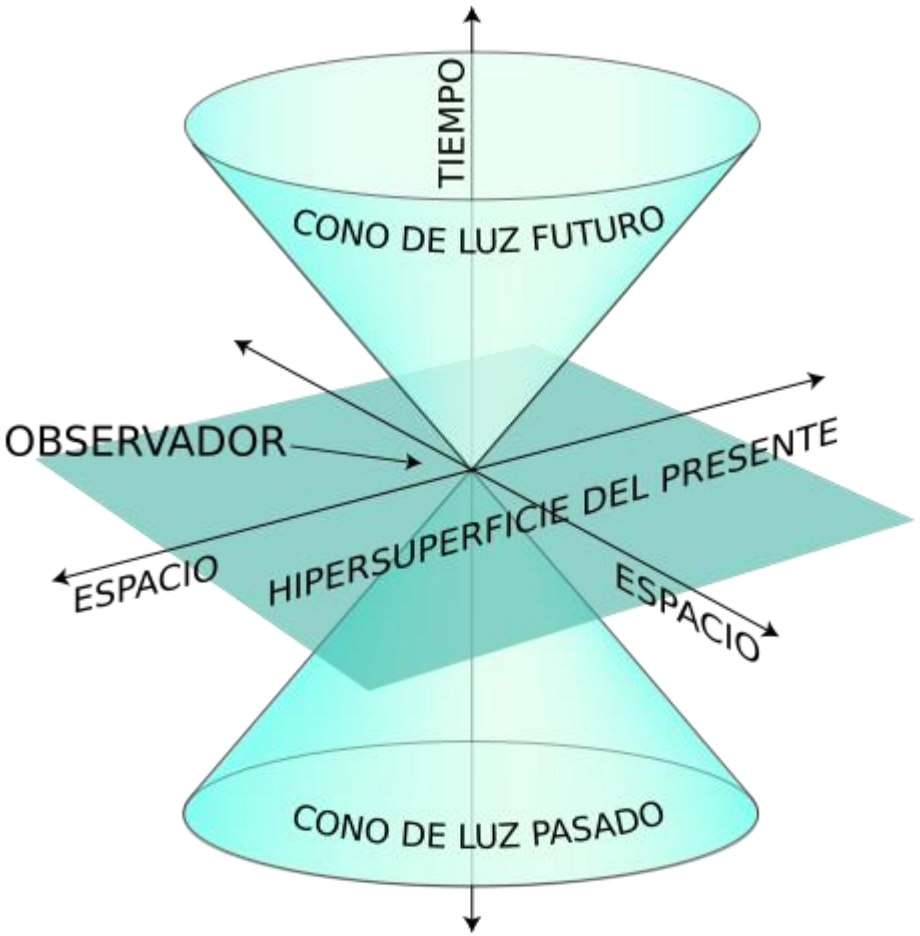
$x = \pm ct$, son trayectorias de la luz en el espacio.

Cualquier otra **“línea de universo”** debe debe tener

Una pendiente < 1, ya que: $\frac{dx}{d(ct)} = \frac{1}{c}\frac{dx}{dt} = \frac{v}{c} = \beta < 1$



Si pensamos en 4 dimensiones, no tendríamos rectas, sino dos (hiper)conos unidos por el vértice (conos de luz del suceso que se encuentra en el origen de coordenadas A. (la figura es el caso de tres dimensiones (x,y,ct)



INTERVALOS DE SUCESOS EN EL DIAGRAMA DE MINKOWSKI

A los fines de los diagramas de Minkowski, definiremos el intervalo entre dos sucesos Δs en las coordenadas (x, ct), de la siguiente manera:

$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$; Δs, es la distancia pseudo-euclidiana entre los dos sucesos y se denomina intervalo entre los dos sucesos. Como Δs es un invariante de Lorentz, tendrá el mismo valor en cualquier sistema de referencia inercial y puede ser de tres formas:

- Entre A y D, o A y E:

$(\Delta s)^2 < 0 \Rightarrow c\Delta t < |\Delta x| \;\leftrightarrow$ **intervalo de tipo espacial**

(Ninguna relación causal)

- Entre A y B, o A y C:

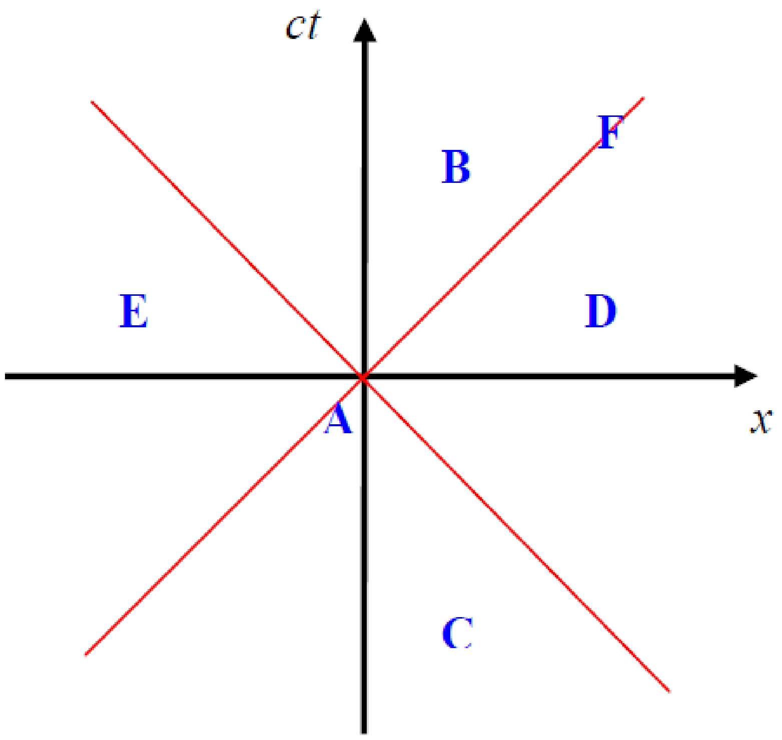
$(\Delta s)^2 > 0 \Rightarrow c\Delta t > |\Delta x| \;\leftrightarrow$ **intervalo de tipo temporal**

(Puede existir alguna relación causal)

- Entre A y F:

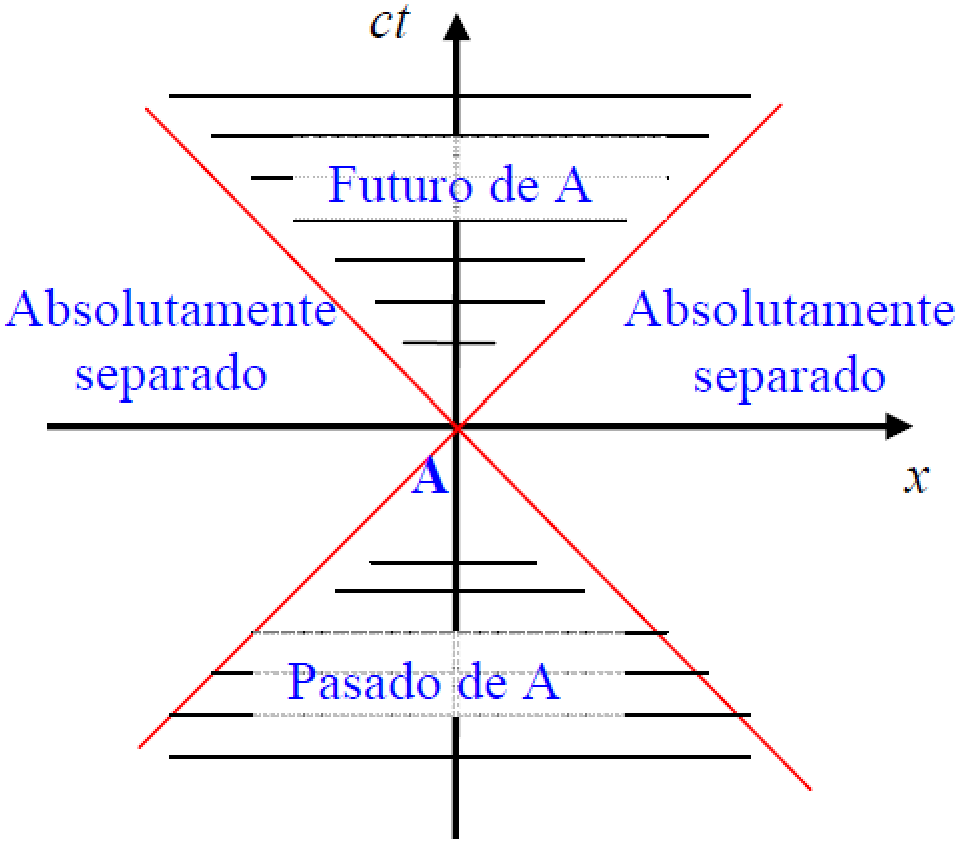
$\Delta s = 0 \quad \Rightarrow \quad ct = |\Delta x| \quad \leftrightarrow$ **intervalo de tipo luminoso**

(Pueden estar conectados mediante una señal luminosa)



Δs será espacial, temporal o luminoso desde cualquier SRI.

RELACIÓN CAUSAL ENTRE SUCESOS



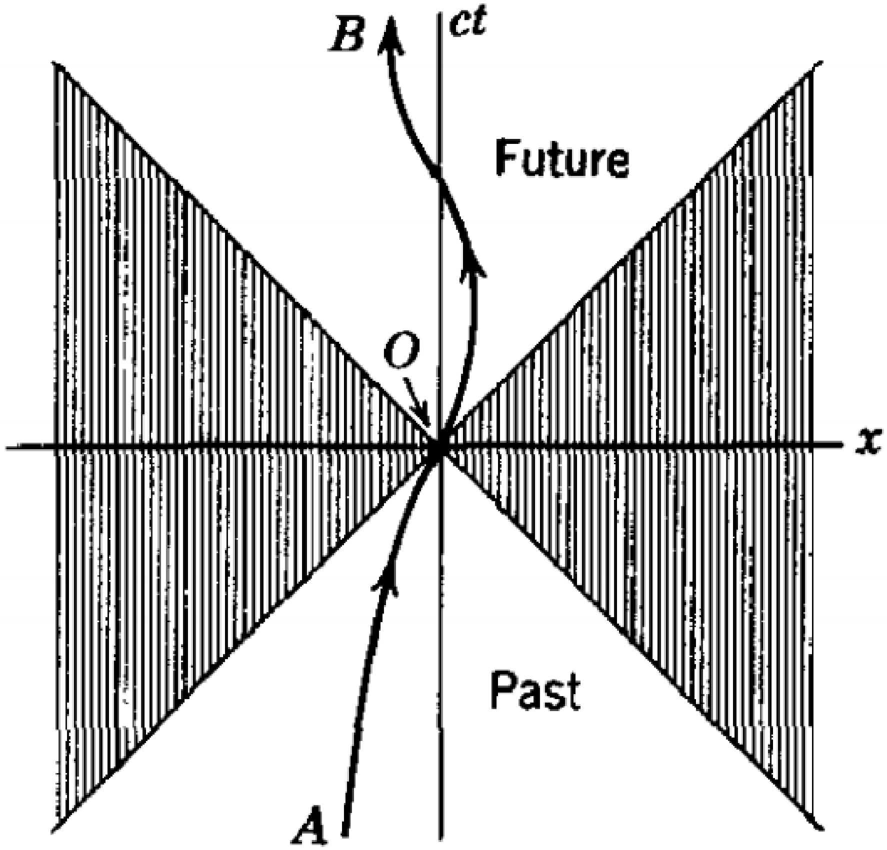
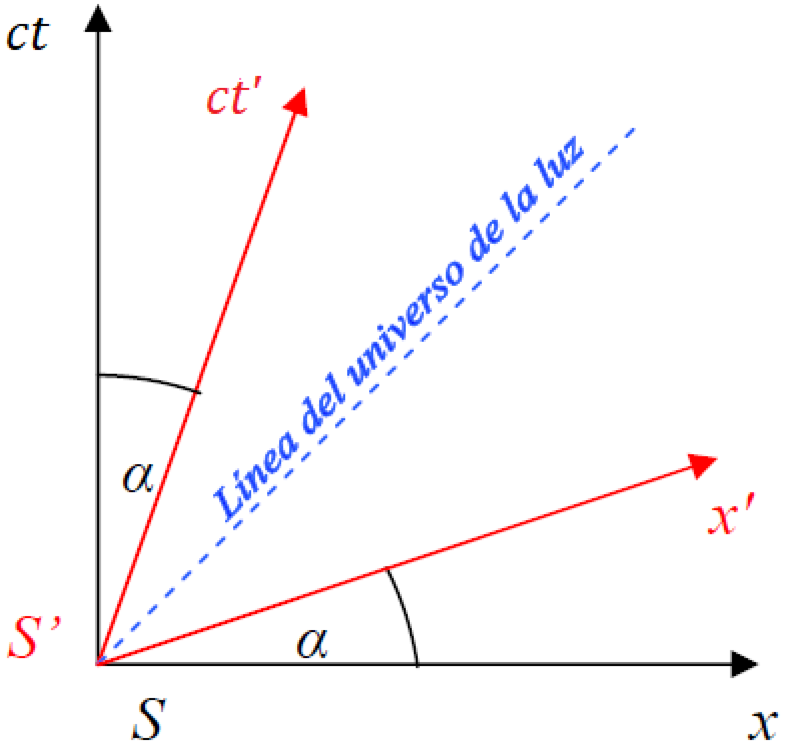


DIAGRAMA DE MINKOWSKI

Queremos dibujar un sistema de referencia S’ que se mueve con velocidad $\bar{v} = v\bar{\imath}$ con respecto al sistema S; los nuevos ejes no van a ser ortogonales porque deben satisfacer las Transformaciones de Lorentz:



$$x' = \frac{x-\beta ct}{(1-\beta^2)^{1/2}} \quad \text{ó} \quad x = \frac{x'+\beta ct'}{(1-\beta^2)^{1/2}}$$

$$ct' = \frac{ct-\beta x}{(1-\beta^2)^{1/2}} \quad \text{ó} \quad ct = \frac{ct'+\beta x'}{(1-\beta^2)^{1/2}}$$

Ubiquemos los ejes de S’. El eje ct' corresponde a ha

ecuación y el eje x' corresponde a hacer $ct' = 0$ en la segunda, resulta: Eje ct': $x = \beta ct$, Eje x': $ct = \beta x$

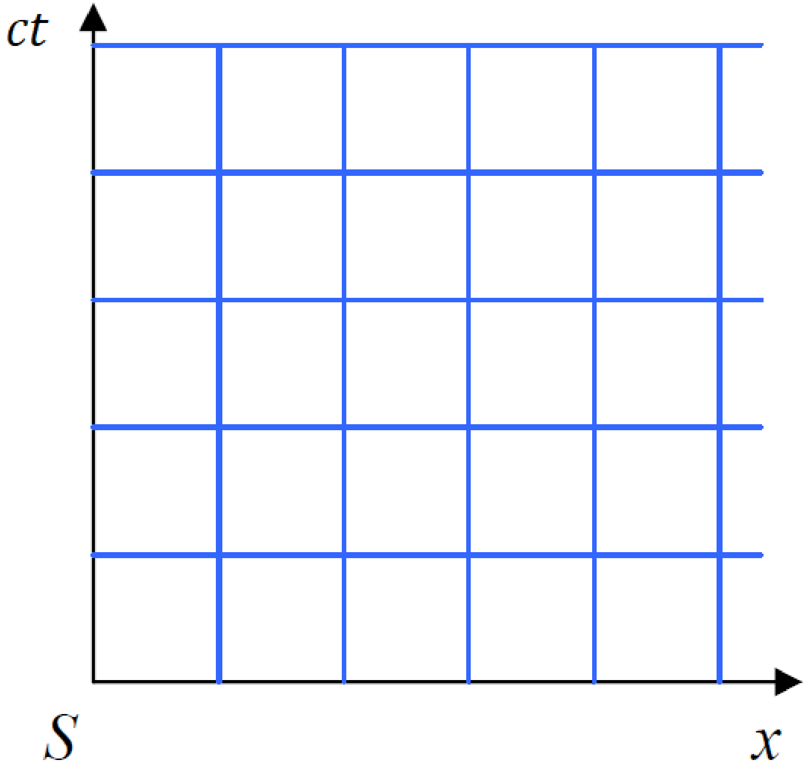
de donde se obtiene que: $tg\ \alpha = \beta = \frac{v}{c}$

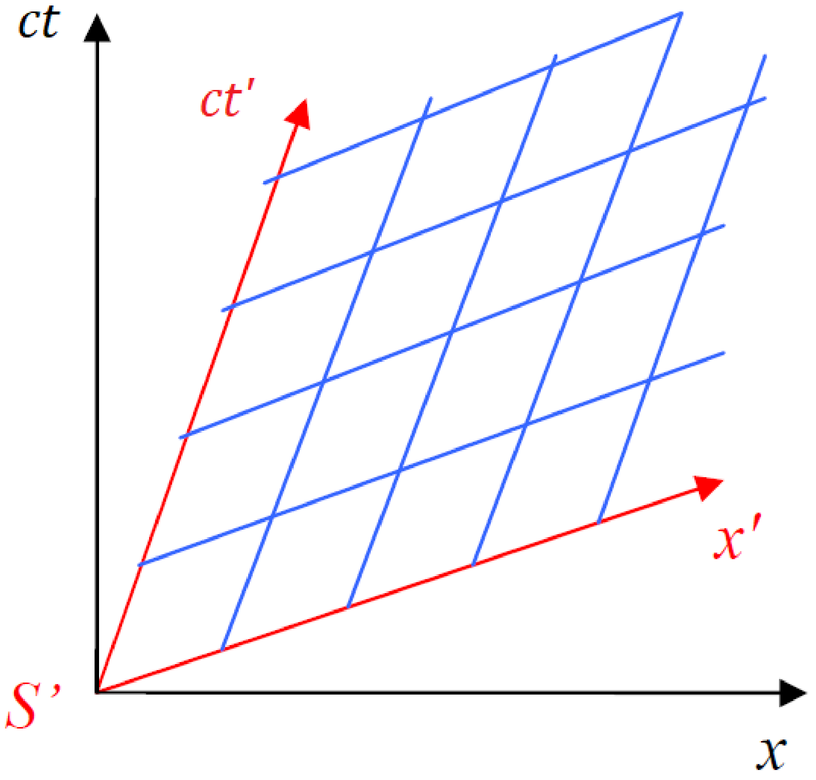
Las unidades en los ejes no son las mismas en los dos sistemas. Las unidades sobre x' $(x' = 1, ct' = 0)$ y sobre ct' $(x' = 0, ct' = 1)$ tienen coordenadas:

$$x' = 1 \;\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \\ ct = \dfrac{\beta}{(1-\beta^2)^{1/2}} \end{cases} \qquad ct' = 1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\beta}{(1-\beta^2)^{1/2}} \\ \dfrac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \end{cases} \qquad E = \frac{(1+\beta^2)^{1/2}}{(1-\beta^2)^{1/2}}$$

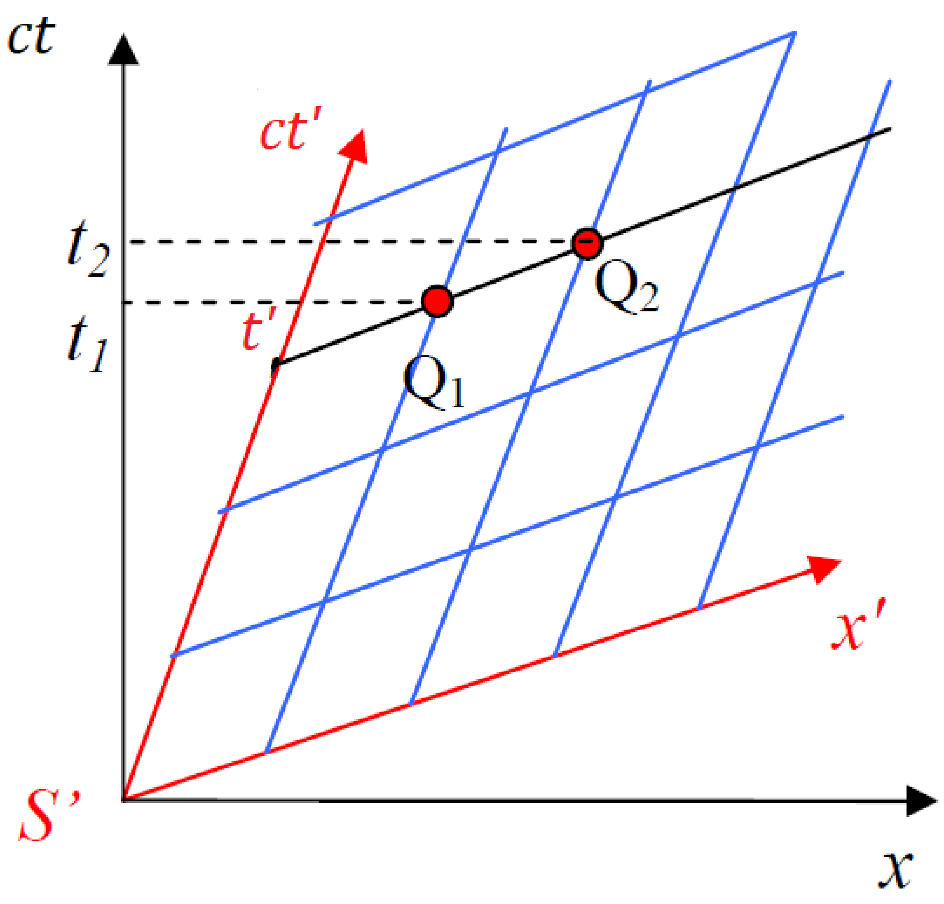
E = escala, variable, dependiente de v/c

L



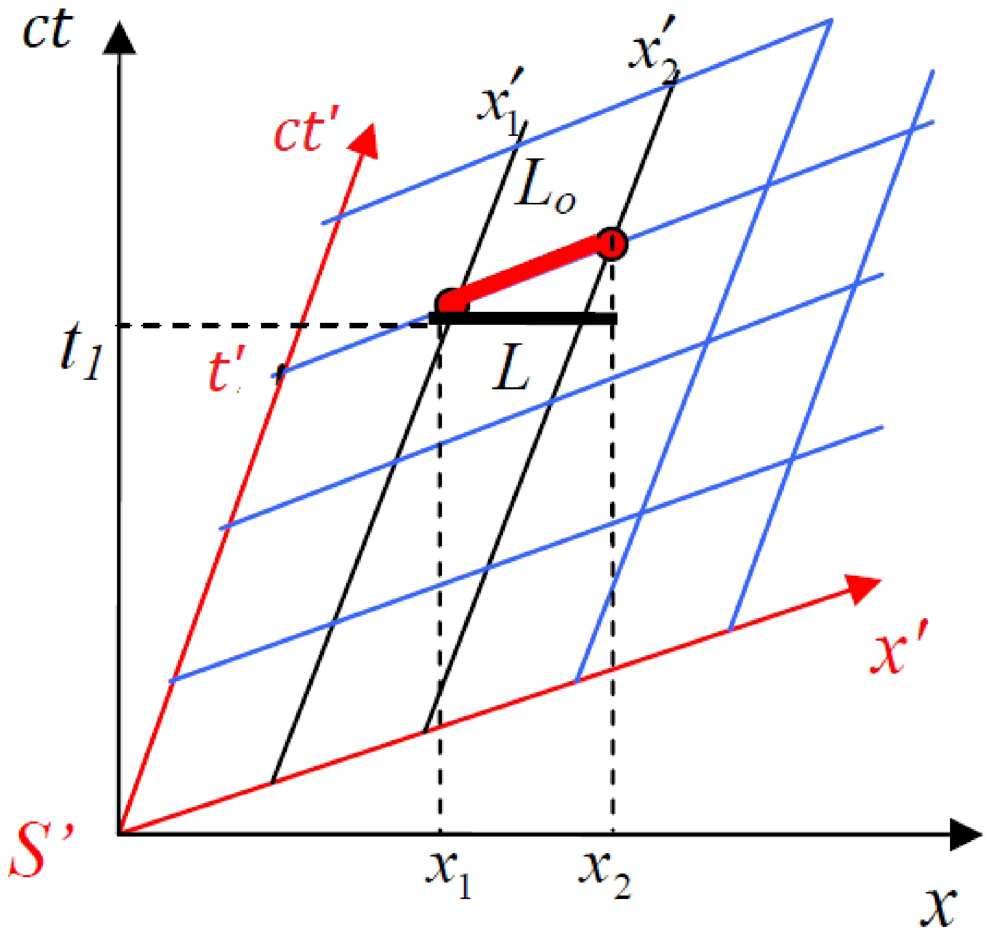


Relatividad de la simultaneidad:



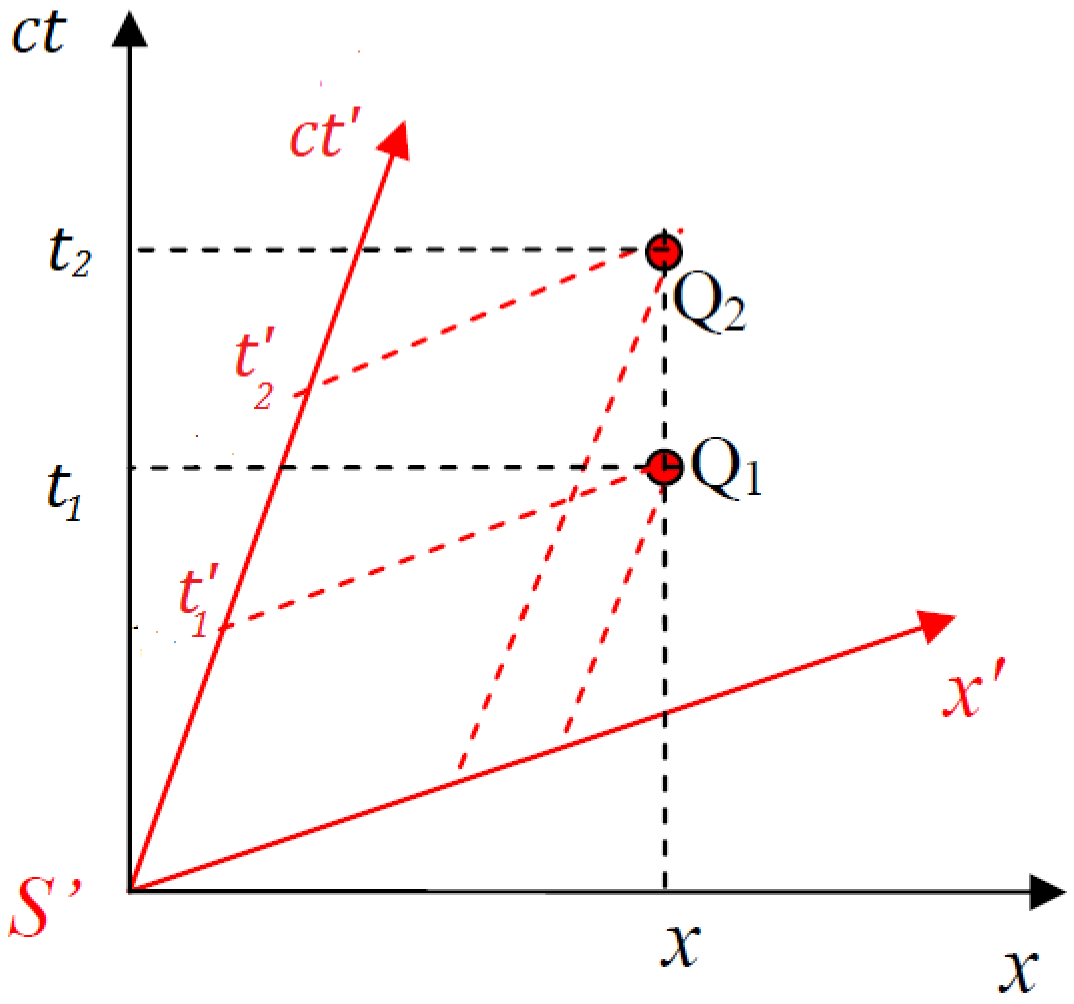
Si suponemos 2 sucesos Q_1' y Q_2' que son simultáneos pero están separados espacialmente en S', no resultan simultáneos en S. Notar que si $x_1' = x_2'$, sí pueden ser simultáneos también en S. Obviamente, lo mismo sucede si intercambiamos S y S'.

Contracción de la longitud:

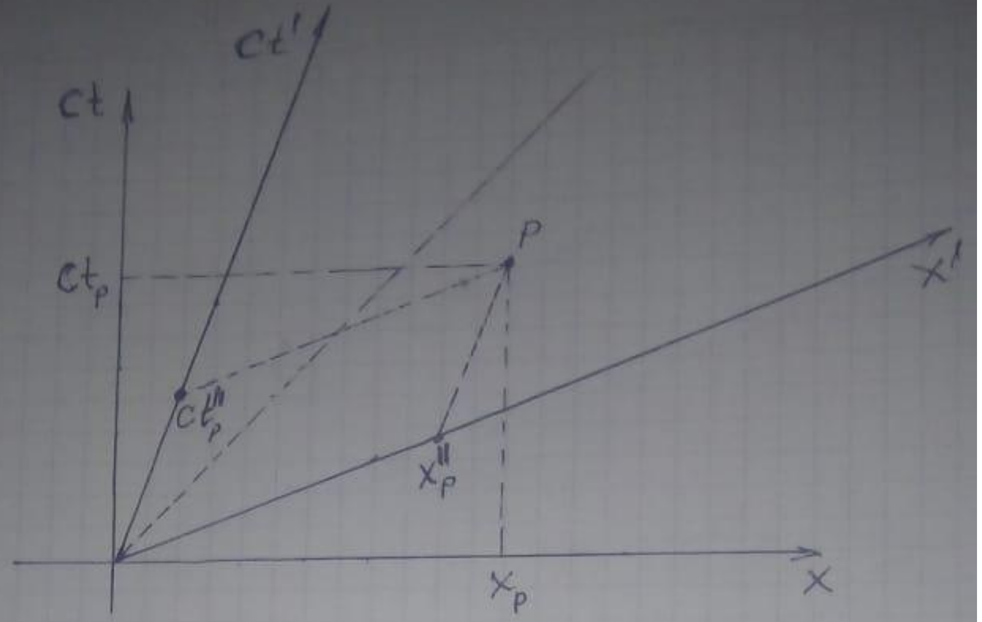


La varilla está en reposo en el sistema S'. Su longitud en reposo es $L_o = x_2' - x_1'$ (independiente de t'). Como las mediciones de los extremos de la varilla en S tienen que hacerse **simultáneamente en S**, la longitud que se mide, $L = x_2 - x_1$, resulta contraída respecto de L_o Obviamente, lo mismo sucede si intercambiamos S y S'.

Dilatación del tiempo:



Supongamos ahora que, con un reloj ubicado en la posición x de S, medimos un intervalo de tiempo $\tau = (t_2 - t_1)$. τ es tiempo propio, ya que el reloj está en reposo en S. Si medimos ese mismo intervalo en S' observamos un tiempo mayor. Notar que las dos mediciones de tiempo en S' ocurren en diferentes coordenadas de S'. Lo mismo sucede si intercambiamos S y S'.



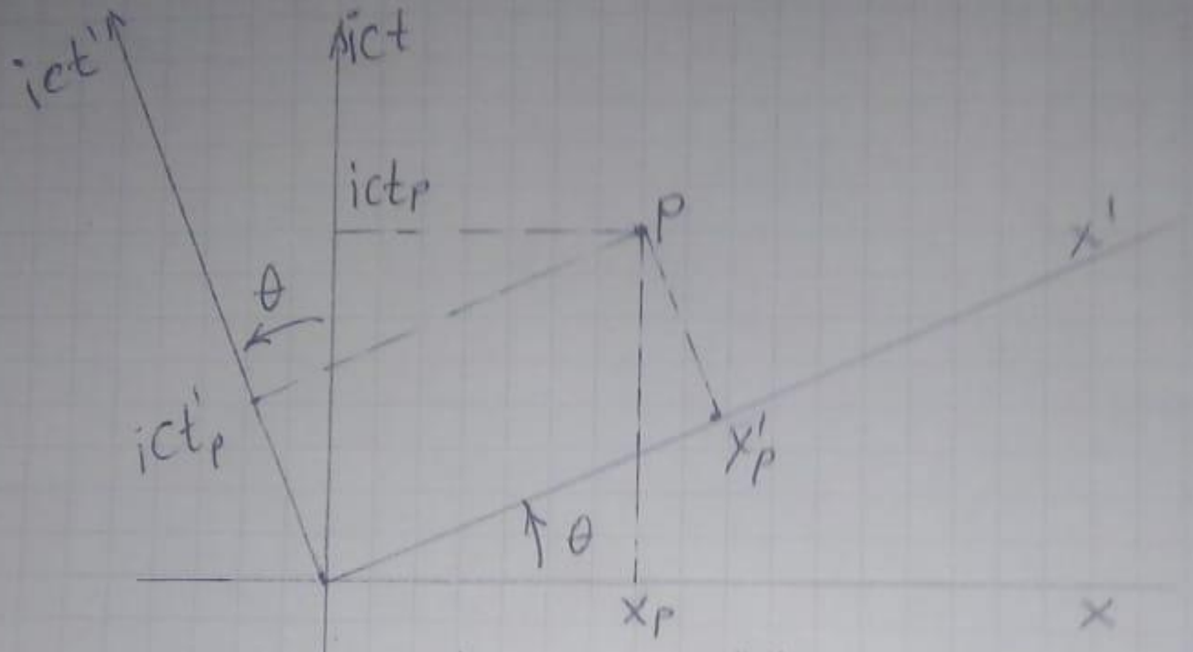
x''_p y ct''_p <u>no</u> están transf. por Lorentz de x_p, ct

para ello hay que dividir por la escala $E = \frac{\sqrt{1+(\frac{v}{c})^2}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$

así: $x'_p = \frac{x''_p}{E}$, $ct'_p = \frac{ct''_p}{E}$

para ello hay que dividir por la escala $E = \frac{\sqrt{1+}}{\sqrt{1-}}$

así: $x'_p = \frac{x''_p}{E}$, $ct'_p = \frac{ct''_p}{E}$



debe ser $\text{th}\,\theta = \frac{V}{c}$ para que cumpla con Lorentz