

FÍSICA CUÁNTICA II

Comportamiento ondulatorio de las partículas

FISICA III

2020

PROPIEDADES ONDULATORIAS DE UNA PARTÍCULA

(hipótesis de De Broglie)

Revisión histórica

1905: Explicación del efecto fotoeléctrico a partir de considerar propiedades corpusculares de las ondas: Einstein explica el efecto fotoeléctrico.

1924: De Broglie postula, a partir de consideraciones de simetría en las fórmulas para cuantos de energía, y los electrones la existencia de una onda asociada a la partícula o sea que le asigna un comportamiento ondulatorio a las mismas.

Existe entre ambas situaciones una diferencia: Mientras que para la primera ya se disponía de una base experimental que avalaba la existencia de tal comportamiento de las ondas; para la segunda no se cumplía esto y, De Broglie propone una hipótesis que sería comprobada varios años después mediante los experimentos de difracción de electrones: Davisson y Germer en EEUU y G. P. Thompson en Inglaterra cuando corría el año 1927.

Hipótesis de De Broglie: onda asociada a una partícula

De Broglie construyó su argumento de asociar a una partícula en movimiento una onda en base a considerar una de las ecuaciones básicas de la TRE:

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$$

Que expresa la energía total de una partícula con masa en reposo m_0 y momento lineal p . Esta fórmula es válida, también, para los fotones o cuantos de luz los cuales tienen masa en reposo nula. Así:

$$p_f = \frac{E}{c}$$

resultado que, asociándolo al efecto fotoeléctrico y, la energía de un fotón:

$$E = hf$$

conduce a:

$$p_f = \frac{hf}{c}$$

O bien:

$$p_f = \frac{h}{\lambda_f}$$

Siendo, $\lambda_f = c/f$, se concluye que:

$$\lambda_f = \frac{h}{p_f}$$

Todo esto, para un fotón. Veamos qué ocurriría con un electrón u otra partícula con momento lineal, p . De Broglie postula en base a que tanto el electrón como el fotón son abarcados en su funcionamiento por la TRE con la diferencia de que la partícula tiene una masa en reposo, m_o . Por lo tanto, se debería esperar un comportamiento ondulatorio caracterizado por una longitud de onda, λ , que, para el caso del electrón se denominará λ_e y valdría:

$$\lambda_e = \frac{h}{p}$$

Siendo $p=mv$ el momento lineal del electrón; y m la masa relativista:

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Podemos completar esta descripción de las propiedades ondulatorias del electrón u otra partícula con el siguiente *experimento conceptual*, queriendo significar con esto no un experimento real sino algo que simula un experimento real, pero con diferencias en su diseño y elementos intervinientes. Imagínese un experimento de difracción por una ranura pero que en vez de utilizar una luz monocromática se emplee un rayo de electrones, los cuales, luego de trasponer el obstáculo de la ranura impactan en una pantalla sensible (*Figura 1*).

Para el caso de un rayo de luz monocromática, el ancho de la ranura es del orden de décimas de milímetro, sin embargo, para el caso de los electrones,

y como se observará en el experimento de difracción de electrones de Davisson y Germer el ancho de la ranura necesario sólo puede lograrse por el espaciamiento de una red.

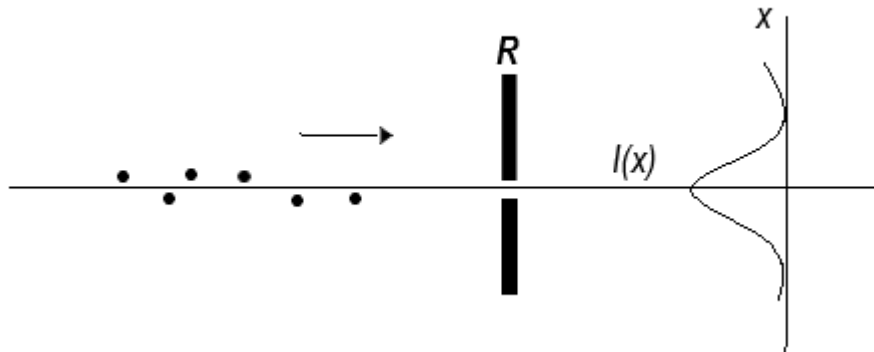


Figura 1: Experimento conceptual para visualizar el efecto del comportamiento ondulatorio de las partículas.

Una segunda conclusión que nos permite alcanzar este experimento está relacionada con la posición que alcanza un electrón en la pantalla. En efecto, si se ubican detectores de partículas a lo largo del eje x , entonces es posible construir la curva de intensidad $I(x)$ y, para lo cual también se enviarán sobre la ranura un número importante de partículas. Ahora, si nos preguntamos, ¿cuál será la posición del impacto de una sola partícula que enviamos contra la ranura? se tiene que sólo se puede hablar de la mayor o menor probabilidad de impacto observando la curva de intensidad, en la cual, un porcentaje muy importante impacta en $x=0$ y luego, hay también partículas que impactan a ambos lados del eje pero con bastante menor probabilidad. Por lo tanto, *sólo se puede hablar de probabilidad de ubicación de la partícula; y no certeza.*

Finalmente, se puede explorar otra consecuencia de este análisis ondulatorio de las partículas: Si disminuimos el ancho de la ranura tratando de precisar la ubicación de los electrones que pasan por la ranura se observará que el patrón de intensidad se modifica y con esto la componente x del momento lineal. O sea que, al tratar de precisar la ubicación del electrón al traspasar la rendija, se vuelve más indeterminada la componente x del momento lineal.

Velocidad de fase de la onda de De Broglie

En este punto se analiza el posible significado físico de la velocidad de fase de la onda de De Broglie para una partícula, por ejemplo, el electrón. Se recurre, a este fin, a las ecuaciones que aporta la física cuántica y la TRE:

De la hipótesis de De Broglie:

$$\lambda_e = \frac{h}{mv_e}$$

De la interpretación energética de los cuantos:

$$E = hf$$

$$f = \frac{E}{h}$$

De la TRE la energía total de la partícula=

$$E = mc^2$$

Donde m es la masa relativista:

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}}$$

Combinando las ecuaciones:

$$f = \frac{mc^2}{h}$$

Por otra parte, la velocidad de fase, v_f :

$$v_f = \lambda_e f$$

Reemplazando:

$$v_f = \left(\frac{mc^2}{h}\right)\left(\frac{h}{mv_e}\right)$$

Finalmente:

$$v_f = c \left(\frac{c}{v_e}\right) > c$$

Se observa que, la velocidad de fase resulta $> c$ puesto que $v_e < c$ por la TRE. Este resultado no es comprensible o de fácil interpretación por lo tanto no se prosigue en este camino. Es necesario que estos conceptos desarrollados hasta aquí nos permitan vincular la representación ondulatoria de las partículas con la velocidad y momento lineal de las mismas. Por ello nos orientaremos a vincular la partícula con un *paquete de ondas*, concepto que se refiere a una onda modulada por un pulso cuya extensión espacial es muy limitada (Figura 2)

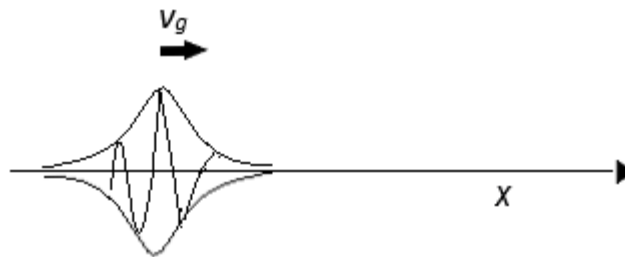


Figura 2: Representación de una partícula como un paquete de ondas.

Paquete de ondas: velocidad de fase y velocidad de grupo

La velocidad de fase es un concepto ya estudiado en las ondas mecánicas. Por ejemplo, para una onda transversal en una dimensión:

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

Donde la velocidad de fase es:

$$v_f = \frac{\omega}{k}$$

con:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

y,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

por lo tanto, la velocidad de fase resulta:

$$v_f = \frac{\lambda}{T}$$

En forma similar se tienen los mismos conceptos para una onda longitudinal:

$$u(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

Siendo $u(x, t)$ los desplazamientos longitudinales desde la posición de equilibrio; tal es el caso del tubo de Kundt si nos posicionamos en un punto x del mismo y, observamos el movimiento del elemento de masa. Este elemento ejecutará movimientos oscilatorios entorno de x con amplitud A .

Para referirnos al concepto de velocidad de grupo o *velocidad de un grupo de ondas* se recurre a un experimento simple que se puede ejecutar en un domicilio con dos generadores de audio.

Si se generan dos señales de audio de frecuencia muy próxima, por ejemplo 440 Hz y 442 Hz se escuchará una frecuencia similar a las dos indicadas, pero con una particularidad: la amplitud máxima de la misma varía desde un máximo a un mínimo a razón de dos veces por segundo. ¿ cómo se explica esto?

En forma similar a lo ya hecho en el batido de ondas mecánicas transversales se tienen dos ondas que se suman:

$$u_1(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

$$u_2(x, t) = A \cos[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta \omega)t]$$

Las cuales, al ser sumadas y, usando la identidad trigonométrica:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

resulta:

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$$

$$u(x, t) = 2A \cos \left(\frac{2k + \Delta k}{2} x - \frac{2\omega + \Delta \omega}{2} t \right) \cos \frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta \omega}{2} t$$

Ahora, aproximando:

$$2k + \Delta k \approx 2k$$

$$2\omega + \Delta\omega \approx 2\omega$$

Se obtiene, finalmente:

$$u(x, t) = 2A \cos(kx - \omega t) \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

Para nuestro experimento casero, ¿cuánto vale k y ω ? Son los valores correspondientes a 440 Hz; mientras que, $k+\Delta k$ y $\omega+\Delta\omega$ representan los de 442 Hz. Por lo tanto, se tiene una onda de sonido modulada en amplitud de valor $2A$

Los parámetros de las dos ondas son los siguientes. Suponemos velocidad de propagación, $v_f = 343,20$ m/s

Para $f_1=440$ Hz:

$$T_1 = \frac{1}{f_1}$$

$$T_1 = \frac{1}{440}$$

$$T_1 = 0.002272s$$

$$\omega_1 = 2\pi f_1$$

$$\omega_1 = 6.2832 \times 440 \frac{1}{s}$$

$$\omega_1 = 2764.6080 \frac{1}{s}$$

$$\lambda = v_f T$$

$$\lambda_1 = 343,20 \frac{m}{s} 0.002272s$$

$$\lambda_1 = 0.7798m$$

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}$$

$$k_1 = 8.0575 \frac{1}{m}$$

Para $f_1=442$ Hz:

$$T_2 = \frac{1}{f_2}$$

$$T_2 = \frac{1}{442}$$

$$T_2 = 0.002262s$$

$$\omega_2 = 2\pi f_2$$

$$\omega_2 = 6.2832 \times 442 \frac{1}{s}$$

$$\omega_2 = 2777.1744 \frac{1}{s}$$

$$\lambda = v_f T$$

$$\lambda_2 = 343,20 \frac{m}{s} 0.002262s$$

$$\lambda_2 = 0.7763m$$

$$k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$$

$$k_2 = 8.0938 \frac{1}{m}$$

Por otra parte, la modulante tiene los siguientes parámetros:

$$\Delta k = k_2 - k_1$$

$$\Delta k = (8.0938 - 8.0575) \frac{1}{m}$$

$$\Delta k = 0.0363 \frac{1}{m}$$

$$\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1$$

$$\Delta\omega = (2777.1744 - 2764.6080) \frac{1}{s}$$

$$\Delta\omega = 12.5664 \frac{1}{s}$$

Longitud de onda de la modulante, λ_m :

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{\Delta k}$$

$$\lambda_m = \frac{6.2832}{0.0363} m$$

$$\lambda_m = 173.09 m$$

Periodo temporal de la modulante, T_m :

$$T_m = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

$$T_m = \frac{6.2832}{12.5664} s$$

$$T_m = 0.5 s$$

Velocidad de propagación o velocidad de grupo, v_g :

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

$$v_g = \frac{12.5664 m}{0.0363 s}$$

$$v_g = 346.18 \frac{m}{s}$$

En la Figura 3 se muestran estos resultados.

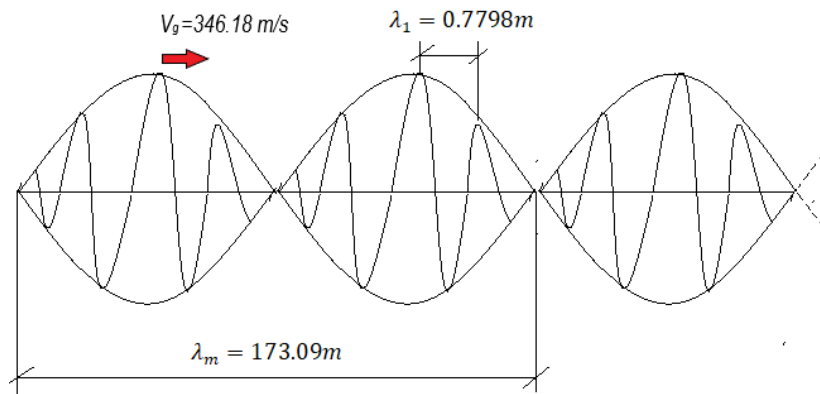


Figura 3: Batido de ondas de frecuencias próximas.

Ondas de De Broglie y velocidad de grupo

La hipótesis de De Broglie asigna una longitud de onda, λ_e , y por lo tanto un número de onda, k_e , al electrón:

$$\lambda_e = \frac{h}{p_e}$$

$$k_e = \frac{2\pi}{\lambda_e}$$

Sin embargo, este valor asignado al electrón no es único debido a la dispersión de valores del momento del electrón. En todo caso, el valor asignado correspondería al valor más probable. Por otra parte, considerar un sólo valor de λ nos ha llevado a no poder interpretar la velocidad de fase. Necesitamos, por consiguiente, avanzar en este sentido tratando de *entender* cómo se introduce o interpreta, en este esquema de De Broglie, a la velocidad de la partícula, v .

En el punto anterior se ha analizado, mediante el ejemplo propuesto, que al sumar dos ondas con frecuencias próximas y por ende, longitudes de onda próximas lo cual nos sugiere utilizar estos conceptos para aplicar a nuestras partículas que:

- Tienen una longitud de onda asociada por la hipótesis de De Broglie.
- Debido a la dispersión de valores del momento lineal, entorno de un valor central, se puede considerar un conjunto de ondas asociadas en vez de una sola. De allí es que podemos analizar la velocidad de grupo.

Para una partícula con masa en reposo, m_0 , y velocidad v su momento lineal es, $p=mv$, donde m es la masa relativista:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Por otro lado, la energía total de la partícula responde a la fórmula de Einstein:

$$E = mc^2$$

Pero, además satisface la ecuación de los cuantos. Esto es así porque al tener una longitud de onda asociada debe satisfacer la ecuación de los cuantos de energía:

$$E = hf$$

Juntando estos resultados se puede escribir:

$$f = \frac{mc^2}{h}$$

Y la pulsación:

$$\omega = \frac{2\pi m_0}{h} \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Por otra parte:

$$k = \frac{2\pi}{h} mv$$

O bien:

$$k = \frac{2\pi m_0}{h} \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Se ha llegado, mediante sucesivas transformaciones a explicitar que:

$$\omega = \omega(v)$$

$$k = k(v)$$

Por lo tanto, se puede calcular la velocidad de grupo para dos ondas de longitudes de onda próximas. En este caso, la expresión usada en el ejemplo anterior:

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

Se reemplaza por:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Para resolverlo, se calcula:

$$v_g = \frac{\frac{d\omega}{dv}}{\frac{dk}{dv}}$$

Resolviendo:

$$\frac{d\omega}{dv} = \frac{2\pi m_0}{h} \frac{v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\frac{dk}{dv} = \frac{2\pi m_0}{h} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Finalmente:

$$v_g = v$$

Este es un resultado ***muy importante*** porque identifica la velocidad de grupo con la velocidad de la partícula. Se ha logrado un significado físico a la representación ondulatoria de la partícula: La partícula puede ser representada por un paquete de ondas con longitudes de onda muy próximas, compatibles con la dispersión experimental del momento lineal de la partícula. En este esquema de pensamiento, la *velocidad de la partícula* se identifica con la *velocidad del grupo* de ondas.

Amplitud de las ondas componentes

Previo al desarrollo de este tema es necesario hacer algunas consideraciones:

- a) El paquete de ondas resulta de la suma de ondas viajeras que difieren muy poco en su longitud de onda y por lo tanto en su

número de onda, k . No se debe olvidar que esto es consecuencia de la *dispersión de valores del momento lineal*, p de la partícula.

una función, espacial, en este caso como suma de funciones circulares (seno y coseno). Las amplitudes de estas ondas componentes varían con el número de ondas, k , *existiendo una onda cuya amplitud es la principal y luego las restantes que tienen amplitudes menores*.

- b) Para un análisis más simple se considera el paquete de ondas en $t=0$. Para considerar tiempos posteriores se le agrega a la fase el término $(-\omega t)$

La función $\psi(x,0)$ se puede expresar, usando el análisis de Fourier, como:

$$\psi(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \cos(kx) dk$$

Donde la integración se extiende desde $(-\infty)$ a $(+\infty)$ para el caso general, sin embargo, los valores de k están acotados a una región estrecha entorno de un valor central. Además, cabe aclarar que las amplitudes en realidad dependen de p , ya que, por la hipótesis de De Broglie:

$$p = \frac{h}{2\pi} k$$

O también:

$$p = \hbar k$$

Donde, \hbar :se designa como *hache barra o hache cortada*.

En la Figura 4a se representa una distribución de amplitudes, $A(k)$, *típica gaussiana* que se obtiene como consecuencia de una colimación (selección) de velocidades. En la Figura 4b se presenta una distribución constante en el rango $k_0 - \Delta k/2$ y $k_0 + \Delta k/2$ con la cual se desarrollará un cálculo simplificado para la construcción del paquete inicial, $\psi(x, 0)$.

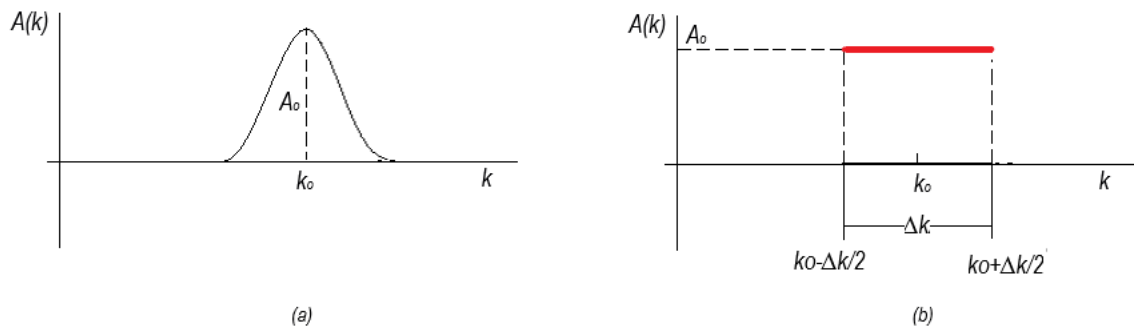


Figura 4: Ejemplo de distribución de amplitudes en función del número de ondas, k : a) distribución gaussiana (distribución física); b) distribución escalón (adecuada para un ejemplo de cálculo).

Ejemplo de cálculo

A continuación, se procede a construir un paquete, $\psi(x, 0)$ con la distribución $A(k)$ de la Figura 4b. Para ello sumamos (integramos) las ondas componentes:

$$\begin{aligned} \psi(x, 0) &= \int_{k_0 - \frac{\Delta k}{2}}^{k_0 + \frac{\Delta k}{2}} A(k) \cos(kx) dk \\ &= \frac{A_0}{x} \left[\text{sen} \left(k_0 + \frac{\Delta k}{2} \right) x - \text{sen} \left(k_0 - \frac{\Delta k}{2} \right) x \right] \end{aligned}$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} \psi(x, 0) &= \frac{A_0}{x} \left[\text{sen}(k_0 x) \cos\left(\frac{\Delta k}{2}\right) x + \cos(k_0 x) \text{sen}\left(\frac{\Delta k}{2}\right) x \right. \\ &\quad \left. - (\text{sen}(k_0 x) \cos\left(\frac{\Delta k}{2}\right) x - \cos(k_0 x) \text{sen}\left(\frac{\Delta k}{2}\right) x) \right] \\ \psi(x, 0) &= A_0(\Delta k) \left\{ \frac{\text{sen}\left(\frac{\Delta k}{2}\right) x}{\left(\frac{\Delta k}{2}\right) x} \right\} \cos(k_0 x) \end{aligned}$$

La función encerrada entre llaves tiene la gráfica que se muestra en la Figura 5 y actúa como envolvente de la función $\cos(k_0 x)$. Ambas, en conjunto forman el paquete de ondas que representa a la partícula. Este pulso se desplaza con la velocidad de grupo.

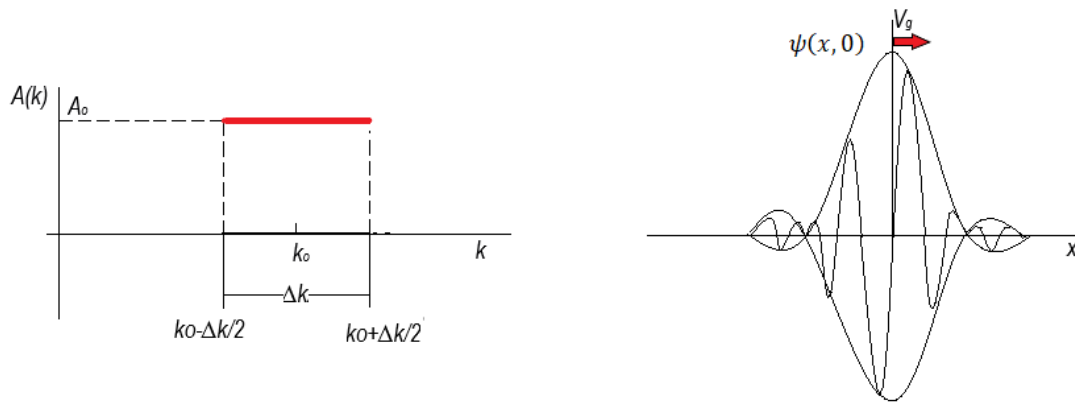


Figura 5: Gráfica conjunta de distribución de amplitudes en función del número de ondas, k y el paquete de ondas.

Difracción de Rayos X y Difracción de partículas

Difracción de Rayos X

Al incidir una onda electromagnética sobre un cristal, el cual es un arreglo ordenado de átomos, es decir que los átomos se encuentran ubicados en vértices de cuerpos regulares, el campo eléctrico oscilante de la onda produce oscilaciones de la nube electrónica de los átomos y, en consecuencia, genera un dipolo oscilante. Este dipolo oscilante produce, a su vez una onda electromagnética que se propaga hacia todas las direcciones del espacio y con la misma frecuencia de la onda electromagnética original. En definitiva, *sobre los átomos del cristal incide una onda electromagnética plana y como consecuencia de esto cada átomo del cristal se transforma en un centro de generación de ondas electromagnéticas esféricas.*

El estudio de las ondas dispersadas conduce a que las mismas, en determinadas direcciones del espacio interfieren constructivamente mientras que en otras direcciones interfieren destructivamente. Este estudio fue abordado por W. L. Bragg quien descubrió lo siguiente: El estudio de la interferencia constructiva y destructiva se puede realizar considerando planos dentro del cristal que contienen átomos dispuestos en forma regular. Estos planos se denominan *planos de Bragg*, en honor a su descubridor, y se hallan a una distancia fija, d , entre ellos.

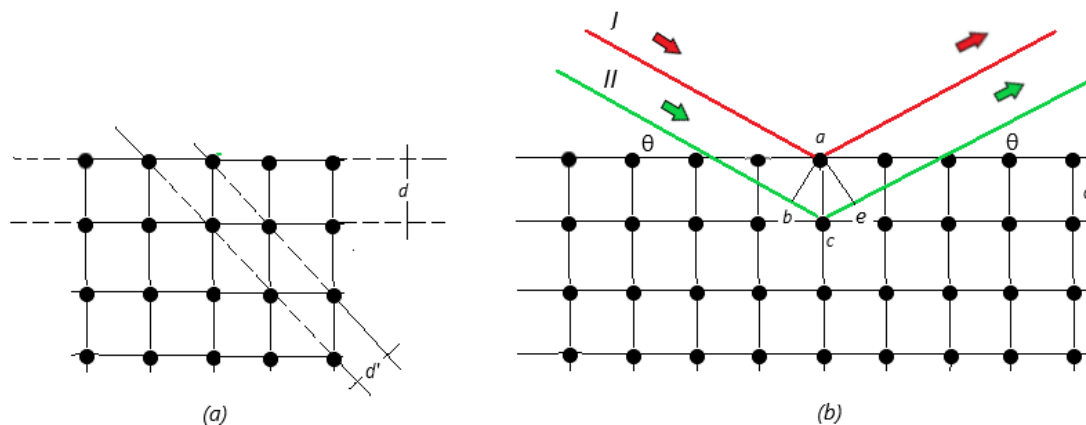


Figura 6: a) Un conjunto de planos de Bragg separados una distancia d ó d' ; b) interferencia constructiva para un plano de Bragg: $bc+cd=2d \cdot \text{sen} \theta$ y $2d \cdot \text{sen} \theta = m\lambda$. Este plano es paralelo a la superficie del monocristal y se aplica para determinar el espaciamiento entre planos cristalinos en el caso de una estructura cúbica simple como la del cloruro de sodio (ClNa) que se desarrolla en el texto.

La difracción por Rayos X constituye una técnica para que, a partir del patrón de difracción se pueda determinar la estructura cristalina de un mono cristal. En la Figura 7 se muestra un espectrómetro de R x destinado a determinar la estructura cristalina de una sustancia.

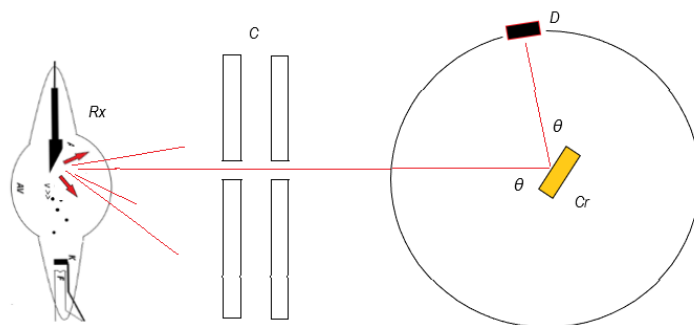


Figura 7: Espectrómetro de Rx destinado a determinar la estructura cristalina de una sustancia: Rx: generador de Rx; C: colimador (selector de velocidades); Cr: cristal y D: detector de Rx.

La determinación de la distancia, d , entre planos cristalinos para el caso de cristales cúbicos es sencilla y se realiza de la siguiente manera: Teniendo en cuenta el peso molecular expresado en kg se denomina K_{mol} , y, en el caso del ClNa es:

$$58.5 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$$

Si ahora, incorporamos al cálculo el número de Avogadro:

$$N_o = 6.02 \times 10^{23} \frac{\text{moléculas}}{k_{mol}}$$

Entonces, la masa de cada molécula de ClNa es:

$$m_{ClNa} = \frac{5.85 \frac{kg}{k_{mol}}}{6.02 \times 10^{23} \frac{\text{moléculas}}{k_{mol}}}$$

O sea:

$$m_{ClNa} = 9.72 \times 10^{-26} \frac{kg}{\text{molécula}}$$

A continuación, se determina cuantas moléculas de ClNa intervienen en un cristal. En la Figura 8 se muestra un esquema del cristal

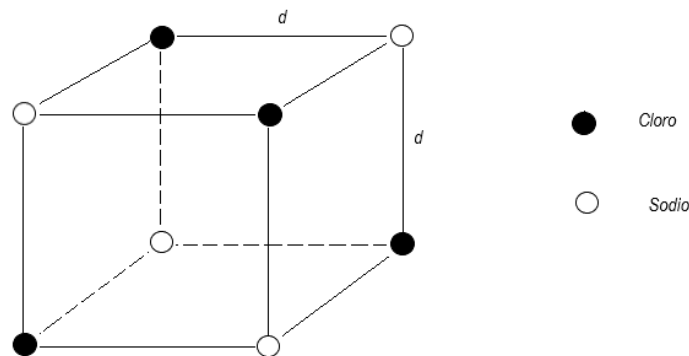


Figura 8: Cristal de ClNa

La densidad del ClNa es:

$$2.16 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}$$

Y, teniendo en cuenta que hay dos átomos por molécula, el número de moléculas por metro cúbico resulta:

$$n = 2 \frac{\text{átomos}}{\text{molécula}} \times 2.16 \times 10^3 \frac{kg}{m^3} \times \frac{1}{9.72 \times 10^{-26} \frac{kg}{\text{molécula}}}$$

O bien:

$$n = 4.45 \times 10^{28} \frac{\text{átomos}}{\text{m}^3} =$$

Finalmente, si d es la distancia entre átomos entonces hay d^{-1} átomos/m³ por lo tanto:

$$d^{-3} = n$$

$$d = (4.45 \times 10^{28})^{-3}$$

$$d = 2.82 \text{ Angstrom}$$

Difracción de partículas- Experimento de Davisson y Germer

En 1927 Davisson y Germer en EEUU y G.P. Thompson en Inglaterra comprobaron una manifestación de propiedades ondulatorias de las partículas (electrones) y por ende confirmaron la hipótesis de De Broglie demostrando que los electrones producen un patrón de difracción al ser dispersados por un cristal.

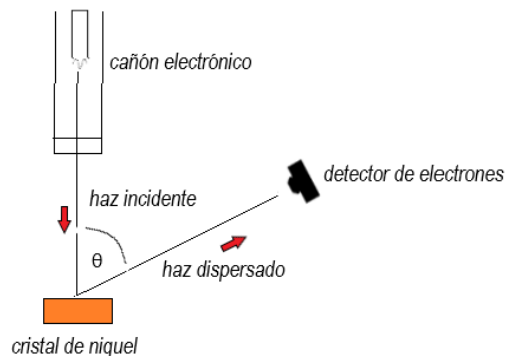


Figura 9: Experimento de Davisson-Germer destinado a comprobar la dependencia de la intensidad del haz dispersado con el ángulo.

Davisson y Germer estaban interesados en estudiar la dependencia de la intensidad del haz dispersado con el ángulo de dispersión, θ . La física clásica predice que, para un bloque amorfo, es decir que no presenta un arreglo ordenado de átomos (cristal) la intensidad del haz dispersado no cambia, apreciablemente, con el ángulo.

Por casualidad, entró aire en el receptáculo del sustrato de níquel produciéndose la oxidación del mismo. Para reducir el óxido de níquel formado a níquel puro se realizó el calentamiento del mismo en un horno y se dejó enfriar lentamente. Esto determinó que se formara un cristal de níquel y como consecuencia de ello se detectaron variaciones de la intensidad con el ángulo de dispersión y, además, los máximos observados dependen de la energía de los electrones incidentes.

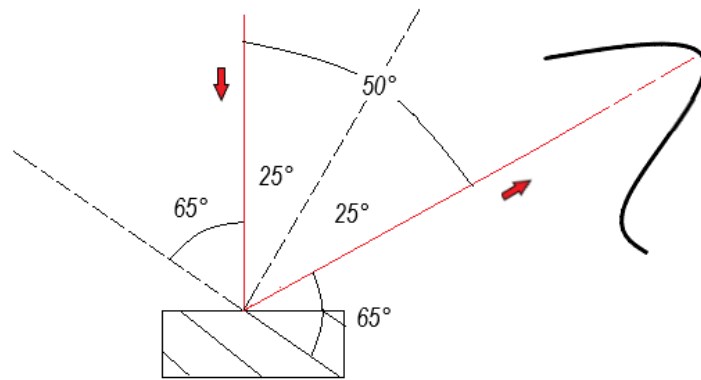


Figura 10: En el experimento de Davisson Germer se comprueba que, para la intensidad máxima, el ángulo entre el haz incidente y el dispersado es de 50°.

Davisson y Germer comprobaron que, el ángulo entre el haz incidente y el dispersado es de 50°. Por otro lado, del análisis cristalográfico los planos de Bragg son como los indicados cualitativamente, con líneas inclinadas y la distancia entre estos planos es $d' = 0.91$ Angstrom (Figura 6a) determinada por Rx.

De la condición de Bragg:

$$n\lambda = 2d' \sin\theta$$

Con $\theta = 65^\circ$ obtenido de la Figura 10. Aplicando para $n=1$:

$$\lambda = 2 \times 0.91 \times (\sin 65^\circ)$$

$$\lambda = 1.55 \text{ \AA}$$

Por otro lado y, si queremos usar la fórmula de De Broglie se debe calcular el momento lineal de los electrones incidentes teniendo en cuenta que la energía cinética del electrón es de 54 eV, dato del experimento.

Siendo la energía del electrón:

$$E = m_0 c^2 + T$$

En la aproximación no relativista, o sea bajas velocidades:

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

O bien:

$$T = \frac{p^2}{2m}$$

De donde:

$$p = \sqrt{2mT}$$

Reemplazando:

$$p = \sqrt{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg} \times 54 \text{ eV} \times 1.6 \times 10^{-19} \frac{\text{Joule}}{\text{eV}}}$$

$$p = 4 \times 10^{-24} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Aplicando De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Resultando:

$$\lambda = \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{4 \times 10^{-24} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}}$$

$$\lambda = 1.66 \text{ \AA}$$

Válido dentro de los errores experimentales. Por lo tanto, el experimento de Davisson Germer significa una comprobación directa de la hipótesis de De Broglie.

Principio de incerteza

La asignación de propiedades ondulatorias a las partículas conduce a una cierta indeterminación en la ubicación de las mismas. Esto es lógico por cuanto si nos preguntamos ¿dónde está la partícula?, conforme a la mecánica clásica la respuesta es inmediata y supone precisar un punto del espacio en el cual se encuentra, en ese instante. Podríamos ubicar una pantalla sensible que active un sensor temporal al impactar la partícula y nos indicaría el instante de tiempo en el cual las coordenadas de la partícula son las que se indican en la pantalla en el momento del impacto.

Sin embargo, si nos preguntamos, ¿dónde está la onda? La respuesta lógica es que se halla dispersa por todo el espacio. Por esta razón es que el comportamiento ondulatorio de las partículas les confiere una cierta indeterminación en su posición y la forma mas adecuada para representar una partícula es mediante un paquete de ondas.

El principio de incerteza se origina en este comportamiento dual cuando se pretende medir simultáneamente la posición de la partícula y su momento lineal. Un ejemplo simple ocurre cuando se tiene la superposición de dos ondas que difieren en su pulsación, ω , como en su número de ondas, k , en una cantidad muy pequeña (Figura 11).

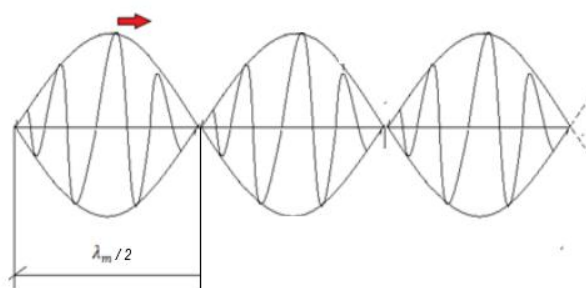


Figura 11: Suma de dos ondas de pulsaciones ω y $\omega + d\omega$; k y $k + dk$ para ilustrar el principio de incerteza.

La pequeñez de esta diferencia se justifica en que, al cumplirse esta condición, entonces la longitud de onda de la modulante, λ_m , es muy superior a la correspondiente a la portadora. Esto es compatible con tener un paquete de ondas representativo de la partícula con una

longitud de onda central y ondas muy próximas, como se realizó en el ejemplo oportunamente desarrollado.

La sucesión de paquetes que se presenta en la Figura 11 podría visualizarse como un conjunto de electrones emitidos por un cañón a intervalos regulares de tiempo. Así, para uno de los lóbulos, se tiene que su ancho está determinado por:

$$\Delta x \approx \frac{\lambda_m}{2}$$

Por otro lado,

$$\Delta k \approx \frac{2\pi}{\lambda_m}$$

Por lo tanto,

$$\Delta x \Delta k \approx \pi$$

Para completar el desarrollo es necesario vincular el momento lineal de la partícula. Se sabe que por la hipótesis de De Broglie:

$$p = \frac{h}{2\pi} k$$

O bien:

$$\Delta p = \frac{h}{2\pi} \Delta k$$

Finalmente:

$$\Delta x \Delta p \approx \frac{h}{2}$$

Que constituye el principio de incerteza. La interpretación del mismo es que toda vez que se mide una cantidad física, se interactúa con la partícula y por ello existe un *error esencial*. Este error no puede ser disminuido mejorando el sistema de medición. El principio de incerteza marca una relación entre los errores de medición de las cantidades físicas posición y momento lineal de tal manera que si se pretende disminuir a cero el error de una de ellas entonces la indeterminación en la otra cantidad aumenta apreciablemente.

Principio de incertidumbre y paquete de ondas

Para cerrar este tema es importante relacionar la distribución de amplitudes, $A(k)$ con el ancho del paquete de ondas representativo de la partícula (Figura 12).

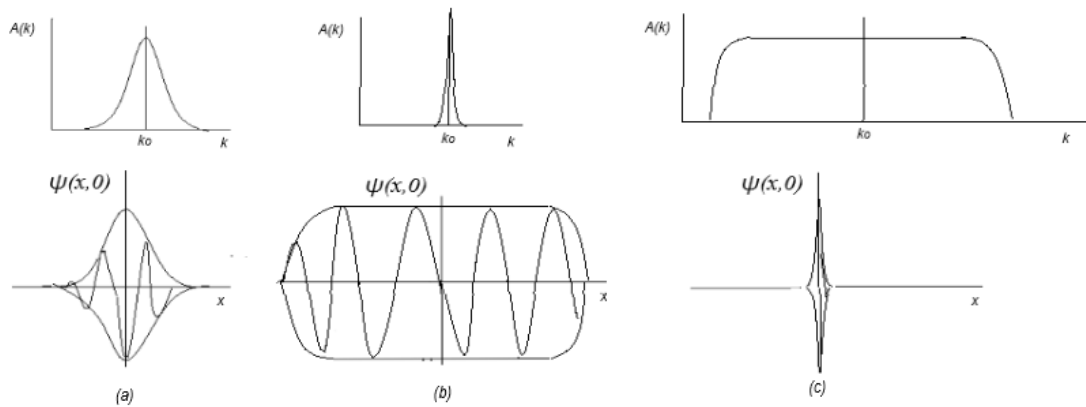


Figura 12: Principio de incerteza: Relaciona la dispersión de la distribución de amplitudes en función de los momentos con el ancho o dispersión del paquete de ondas.

La constancia del producto $\Delta x \cdot \Delta k$ determina que cuando una de las incertezas disminuye por alguna razón la otra aumenta. Así como se muestra en la Figura 12, a partir de determinadas incertezas relativamente adecuadas (Figura 12a), si se disminuye el ancho Δk , por ejemplo, haciendo que el selector de velocidades de las partículas sea más restringida entonces se observará un ensanchamiento en el paquete de ondas $\psi(x, 0)$ como se muestra en la Figura 12b. Por otra parte, si se realiza el proceso inverso, es decir formando el paquete con una distribución más amplia de $A(k)$ el ancho de este paquete disminuye apreciablemente determinando una más precisa localización en el espacio (Figura 12c).

Ecuación de Schrödinger

En este punto es lógico preguntarse si se puede construir una ecuación que satisfaga la función de onda asociada a la partícula. En efecto Erwin Schrödinger construyó una ecuación la cual recibe el nombre del descubridor y que también se designa como *ecuación de onda*.

En este texto se desarrollará una deducción sencilla de esta ecuación y que tiene en cuenta una función $\psi(x, 0)$ con una dispersión ancha como la de la Figura 12c. Bajo estas condiciones podemos asumir que la partícula se comporta como partícula casi libre es decir sometida a una energía potencial que varía *muy suavemente con la posición x*.

Por otra parte, y para una mayor simplicidad en el desarrollo se utilizará la representación fasorial de la onda:

$$\psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$$

Donde los parámetros k y ω asumirán los valores mecano-cuánticos que corresponden a nuestro esquema nuevo de análisis el cual está determinado por todos los experimentos de la física cuántica desarrollados hasta el momento.

Así:

$$E = hf$$

O bien:

$$E = \hbar\omega$$

Donde:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

(h cortada).

Por otra parte, del comportamiento ondulatorio o hipótesis de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Se deduce:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi p}{h}$$

O bien:

$$k = \frac{p}{\hbar}$$

La ecuación de la onda queda:

$$\psi(x, t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$$

Se desarrollará un procedimiento similar al desarrollado en la deducción de la ecuación de D'Alembert. Derivando dos veces respecto de x :

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \psi(x, t)$$

Y una vez respecto de t :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} \psi(x, t)$$

Incorporando la expresión de la energía:

$$E = \frac{p^2}{2m} + W(x)$$

Es decir, la suma de la energía cinética más la potencial. Hay que recalcar dos consideraciones: la partícula desarrolla velocidades bajas comparadas con la velocidad de la luz, por una parte y, la energía potencial tiene una variación suave con x de manera tal que se justifique la utilización de la función de onda de una partícula libre o casi libre (Figura 12c).

De las ecuaciones anteriores se deduce:

$$E\psi(x, t) = \frac{p^2}{2m} \psi(x, t) + W(x)\psi(x, t)$$

$$E\psi(x, t) = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}$$

$$p^2 \psi(x, t) = -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2}$$

Reemplazando estas expresiones:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + W(x)\psi(x, t)$$

Ecuación que se denomina ***Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo.***

A partir de esta ecuación se puede deducir la ecuación de Schrödinger estacionaria a partir de que:

$$\psi(x, t) = \psi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E.t}$$

Con:

$$\psi(x) = Ae^{\frac{i}{\hbar}px}$$

Si en la ecuación diferencial se realiza esta factorización nos queda:

$$i\hbar \psi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E.t} \left(-i\frac{E}{\hbar}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} e^{-\frac{i}{\hbar}E.t} + W(x)\psi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E.t}$$

Simplificando:

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - W(x)]\psi(x) = 0$$

La cual constituye la ***ecuación de Schrödinger de estado estacionario o independiente del tiempo.***

APLICACIONES

Aplicación 1: Resolución de la ecuación de Schrödinger para potenciales constantes por tramos.

Una aplicación importante de la ecuación de Schrödinger es la resolución del caso en que el potencial $W(x)$ es constante por tramos como se observa en la Figura 13a. En este caso se procede a resolver la ecuación en cada zona lo cual conduce a soluciones generales con coeficientes a determinar. Estos coeficientes deben satisfacer dos condiciones de contorno: a) que las funciones de ambos lados deben ser iguales en el punto de empalme y, b) sus

derivadas deben ser iguales. Ambas condiciones constituyen lo que se denomina *condición de empalme suave*.

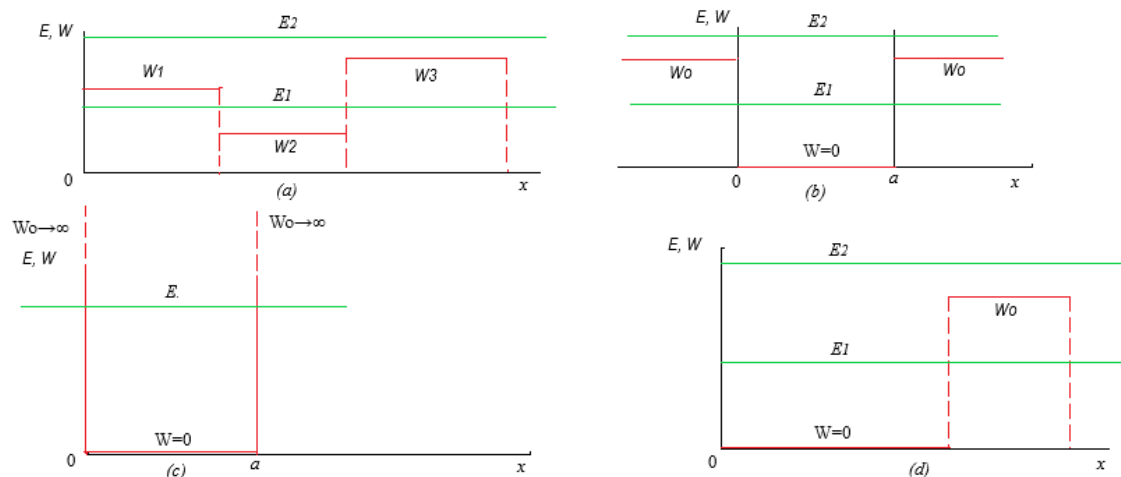


Figura 13: Ejemplos de sistemas con energía potencial constante por tramos. En el eje de ordenadas se representa la energía potencial, W , constante por tramos y la energía total, E para distintos casos.

Para el caso (a) y energía E_2 se tiene la ecuación:

$$\frac{d^2\psi_i(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E_2 - W_i]\psi_i(x) = 0$$

Con $i = 1, 2, 3$ (sucesivos escalones).

La solución general resulta:

$$\psi_i(x) = A_i \cos k_i x + B_i \operatorname{sen} k_i x$$

Donde ψ_i son las soluciones en las distintas zonas con los coeficientes A_i y B_i . Los respectivos k_i se refieren a los sucesivos escalones:

$$k_i = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [E_2 - W_i]}$$

Se observa que,

$$k_3 < k_1 < k_2$$

Y, sus respectivas longitudes de onda:

$$\lambda_3 > \lambda_1 > \lambda_2$$

Estos resultados se resumen en la Figura 14.

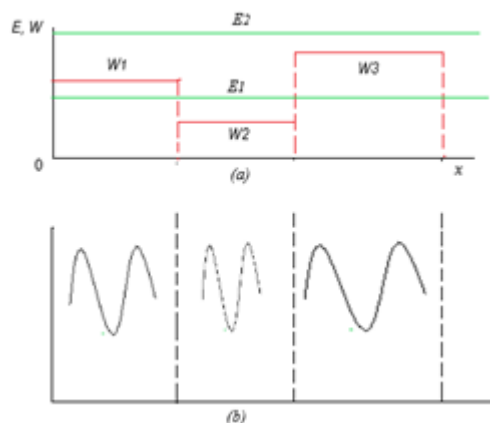


Figura 14: (a) Escalones de energía potencial constante; (b) Forma de la función de onda en las distintas regiones. Descripción cualitativa.

Para el caso de la energía E_1 , en la zona de W_2 , se tiene una solución similar a las anteriores:

$$\psi'_2(x) = A'_2 \cos k'_2 x + B'_2 \text{sen} k'_2 x$$

Donde, a fin de economizar nomenclatura se adoptan las mismas letras en las distintas zonas, pero se las cambia primándolas.

Por otra parte, para las zonas correspondientes a W_1 y W_3 , como $E_1 < W_1$ y $E_1 < W_3$ las ecuaciones quedan:

$$\frac{d^2 \psi_1(x)}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2} [W_1 - E_1] \psi_1(x) = 0$$

$$\frac{d^2 \psi_3(x)}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2} [W_3 - E_1] \psi_3(x) = 0$$

Cuyas soluciones resultan combinación lineal de exponenciales reales:

$$\psi'_1(x) = A'_1 e^{\kappa_1 x} + B'_1 e^{-\kappa_1 x}$$

$$\psi'_3(x) = A'_3 e^{\kappa_3 x} + B'_3 e^{-\kappa_3 x}$$

Con:

$$\kappa_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [W_1 - E_1]}$$

$$\kappa_3 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [W_3 - E_1]}$$

Los resultados para este caso se muestran en la Figura 15.

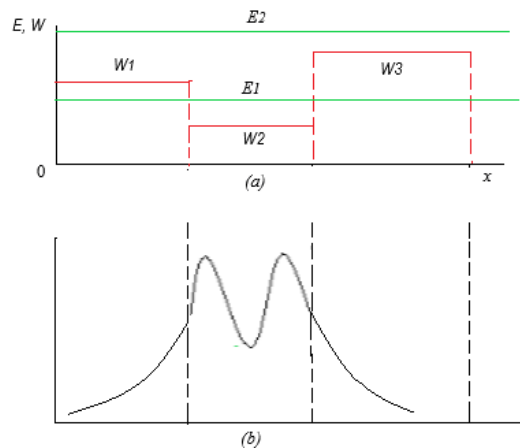


Figura 15: Soluciones para $\psi(x)$ en las distintas zonas y cuando la energía es E_1 . Se ha tratado de representar las condiciones de empalme suave.

Aplicación 2: Resolución de la ecuación de Schrödinger para un pozo de energía potencial finita, W_0 .

Un caso importante para la comprensión de pozo de potencial infinito es el pozo de potencial finito, como se muestra en la Figura 16. En este caso se tienen tres regiones: una región con energía potencial W_0 que se extiende para $x < 0$. Una segunda región con energía potencial nula y que es válida para, $0 \leq x \leq a$; y, finalmente, la tercera región para $a \leq x$ la cual presenta, al igual que la primera zona, una energía W_0 .

La solución de la ecuación de Schrödinger para las distintas zonas es la siguiente:

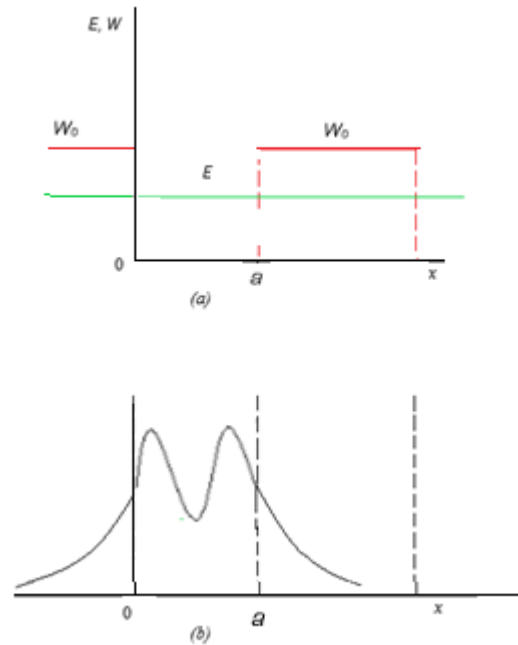


Figura 16: pozo de energía potencial finita: a) Energías potenciales constantes y b) función de onda para las tres regiones (cualitativo)

Las zonas para $x < 0$ y $x > a$ presentan una energía, E , de la partícula menor que la energía potencial W_0 , por lo tanto, la solución de la función de onda, resulta una combinación de exponenciales reales:

$$\psi_1(x) = A_1 e^{\kappa x} + B_1 e^{-\kappa x}$$

$$\psi_3(x) = A_3 e^{\kappa x} + B_3 e^{-\kappa x}$$

donde:

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [W_0 - E]}$$

Sobre estas soluciones se deben aplicar las condiciones de contorno para $x \rightarrow \infty$ y $x \rightarrow -\infty$. Para el primer límite, aplicable a la función ψ_3 , se observa que $A_3 = 0$ porque, de otra manera la función de onda tendería a infinito. En el segundo límite y, como el rango de x son los reales negativos la situación se invierte y, B_1 debe anularse. Por todo esto, las respectivas soluciones son:

$$\psi'_1(x) = A'_1 e^{\kappa x}$$

$$\psi'_3(x) = B'_3 e^{-\kappa x}$$

En segundo término, la solución para el interior del pozo de energía potencial finita:

$$\psi'_2(x) = A'_2 \cos k'x + B'_2 \operatorname{sen} k'x$$

con:

$$k' = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}$$

El proceso final de este cálculo consiste en la determinación de los coeficientes: A'_1 ; B'_3 ; A'_2 y B'_2 para lo cual es necesario aplicar las condiciones de *empalme suave* lo cual supone la igualdad de las funciones de onda y de sus derivadas en los puntos de discontinuidad de la energía potencial. Esto introduce un total de cuatro ecuaciones por lo que, al ser cuatro los coeficientes, el problema es cerrado.

Aplicación 3: Resolución de la ecuación de Schrödinger para un pozo de energía potencial infinita, $W_0 \rightarrow \infty$.

Este caso reviste importancia porque puede asociarse al caso de la energía potencial sobre un electrón y generada por un núcleo que contiene Z protones. En tal sentido y, solo a los fines de evidenciar que existen estados ligados del electrón, se puede considerar el pozo de energía potencial infinita como una aproximación de la energía generada por el núcleo con Z protones (Figura 17).

Para avanzar en este sentido se supone un problema unidimensional de potencial eléctrico generado por una carga positiva de valor Ze , siendo e : carga del electrón. Siendo $V(x)$ el potencial eléctrico se tiene, por la ley de Coulomb:

$$V(x) = \frac{Z \cdot e}{|x|}$$

Y, la energía potencial sobre un electrón (carga=-e)

$$W(x) = -\frac{Z \cdot e^2}{|x|}$$

Resultando, como se muestra en la Figura 17, que ambas funciones son hipérbolas equiláteras, interesándonos la correspondiente a $W(x)$.

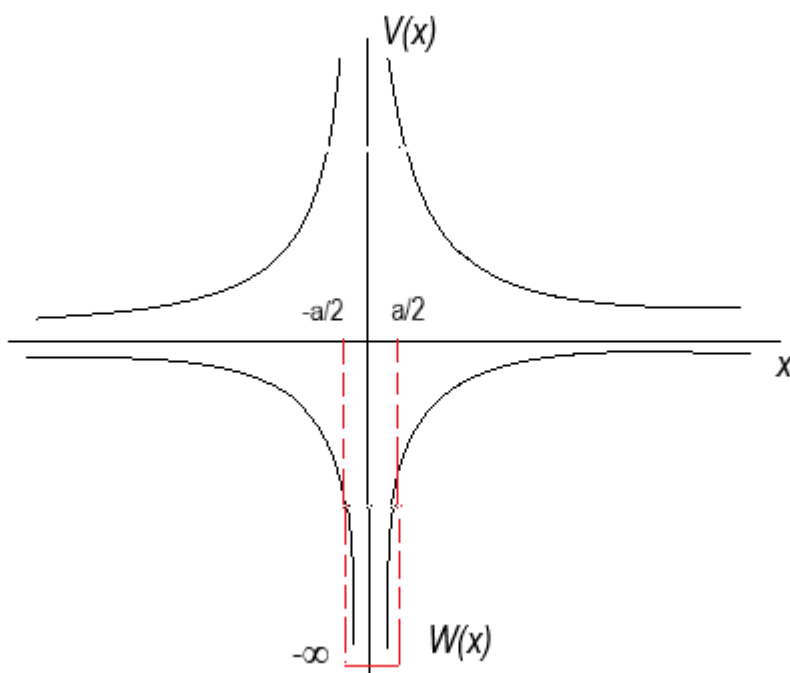


Figura 17: Potencial generado por un núcleo con una carga Ze , $V(x)$ y, energía potencial del electrón ligado, $W(x)$. Aproximación por un pozo de energía potencial infinita (línea roja).

El esquema de pozo de energía potencial infinita se muestra en la Figura 18 donde, por razones de simplicidad en el desarrollo se considera como de energía potencial nula a la correspondiente al fondo del pozo.

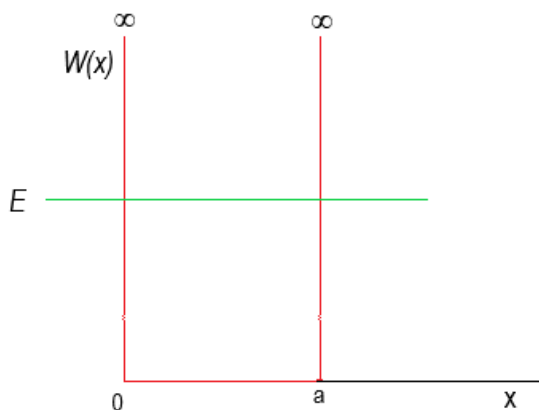


Figura 18: Pozo de ancho a y de energía potencial infinita

La ecuación diferencial de la función de onda y para la zona del pozo ($0 \leq x \leq a$) es:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi(x) = 0$$

con la solución:

$$\psi(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

siendo

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

En las zonas con energía potencial infinita resulta una solución nula para las funciones de onda ya que, aplicando las soluciones del pozo de potencial finito, resulta que, al tender W_0 a infinito entonces el parámetro k también tiende a infinito. En consecuencia, las soluciones son nulas. Este resultado simplifica el cálculo de los coeficientes de la solución en el pozo de energía potencial ya que la misma debe anularse para $x=0$, a .

determinación de los coeficientes y de k en el interior del pozo

Para $x=0 \Rightarrow \psi(0) = 0$

Entonces, $A=0$

La solución queda:

$$\psi(x) = B\sin(kx)$$

Por otro lado, $\psi(a)=0 \Rightarrow ka=n\pi$ de donde se obtiene:

$$k_n = \frac{n\pi}{a}$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

Y se denominan, *autovalores de la ecuación diferencial*. Las funciones obtenidas se denominan *autofunciones de la ecuación diferencial*:

$$\psi_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

Donde se considera que en general los coeficientes dependen del índice n y por ello se denominan B_n .

valores discretos para la energía de la partícula dentro del pozo

Teniendo presente el valor de k :

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

resulta, para cada valor de k_n

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{a^2} n^2$$

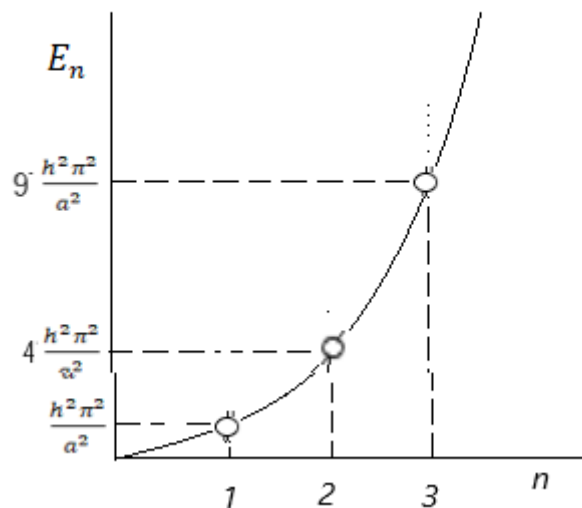


Figura 19: Valores discretos para la energía de una partícula en el pozo.

significado físico de la función de onda de una partícula

Si bien nuestras ondas que tratamos aquí son de naturaleza mecánica debemos recurrir a resultados provenientes de las ondas electromagnéticas a fin de hallar el significado físico de nuestras funciones de onda. Es fundamental que tengamos en cuenta que en física las magnitudes deben ser medibles para que tengan significado y en tal sentido se debe recordar que, por su alta frecuencia, en las ondas electromagnéticas no es medible la amplitud de los campos

sino el módulo cuadrado de los mismos ya que el mismo es proporcional a la energía y ésta si es medible.

Se pueden trasladar estos conceptos a nuestra función de onda asociada a la partícula y concluir que la función de onda en sí mismo carece de significado y no así su módulo cuadrado.

¿Qué representa el módulo cuadrado de la función de onda?

Debemos recurrir a los conceptos desarrollados cuando se conceptualizó el paquete de ondas como representativo de una partícula y considerar que, para medir la posición de una partícula es necesario interactuar energéticamente y por ende se necesita el módulo cuadrado.

Finalmente, y para completar el significado físico del módulo cuadrado de la función de onda es necesario pensar que si la partícula se encuentra en una cierta longitud y se hace un rastreo de dónde está exactamente sólo se tendrán conteos más intensos y menos intensos los cuales denuncian la posición de la partícula. Por lo tanto, sólo se podrá aportar una gráfica que indique la probabilidad de encontrar la partícula en una determinada posición.

Concluyendo se puede afirmar que el módulo cuadrado de la función de onda es la probabilidad por unidad de longitud de encontrar la partícula en una posición x . A partir de este concepto, si interesa calcular la probabilidad de encontrar una partícula entre dos puntos x_1 y x_2 es necesario resolver la integral:

$$P_{x_1x_2} = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx$$

Por lo tanto, los pasos a seguir para determinar la función distribución de probabilidades en x es la siguiente:

- i) Para una dada función de energía potencial se resuelve la ecuación de Schrödinger. En nuestros casos se ha resuelto parcialmente, sin cálculo de los coeficientes, salvo el caso del pozo de energía potencial infinita. Estos son los casos más sencillos. El problema se hace más complejo dependiendo de la forma matemática de la energía potencial Y del número de dimensiones físicas involucradas. En nuestros casos se resuelven problemas unidimensionales.

- ii) Una vez determinada la función de onda, $\psi(x)$, se calcula su módulo cuadrado, $|\psi(x)|^2$, y con esto se está en condiciones de encontrar la probabilidad de encontrar la partícula entre dos puntos x_1 y x_2 .

Procedamos, ahora, a completar el cálculo de la función de onda de un pozo de energía potencial infinita. Como se observa de lo desarrollado anteriormente está restando calcular los coeficientes B_n . Para este fin es necesario aplicar el concepto de probabilidad y tener en cuenta que:

$$\int_0^a |\psi(x)|^2 dx = 1$$

Razón por la cual y, reemplazando para una autofunción genérica (para cualquier n):

$$B_n^2 \int_0^a \text{sen}^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = 1$$

Resolviendo y, teniendo en cuenta la identidad trigonométrica:

$$\text{sen}^2\alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

Se obtiene que:

$$B_n = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

Concluyendo que el valor del coeficiente es independiente del valor de n . Por lo tanto, las funciones de onda tienen la forma matemática:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

Con los autovalores de la energía:

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{a^2} n^2$$

Lo cual constituye la solución completa del problema. Analicemos, ahora, dos casos particulares para $n=1$ y para $n=2$.

aplicación para $n=1$

La función de onda resulta:

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

Su energía:

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{a^2}$$

Y, la densidad de probabilidad:

$$|\psi_1(x)|^2 = \frac{2}{a} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

En la Figura 19 se muestran estas funciones.

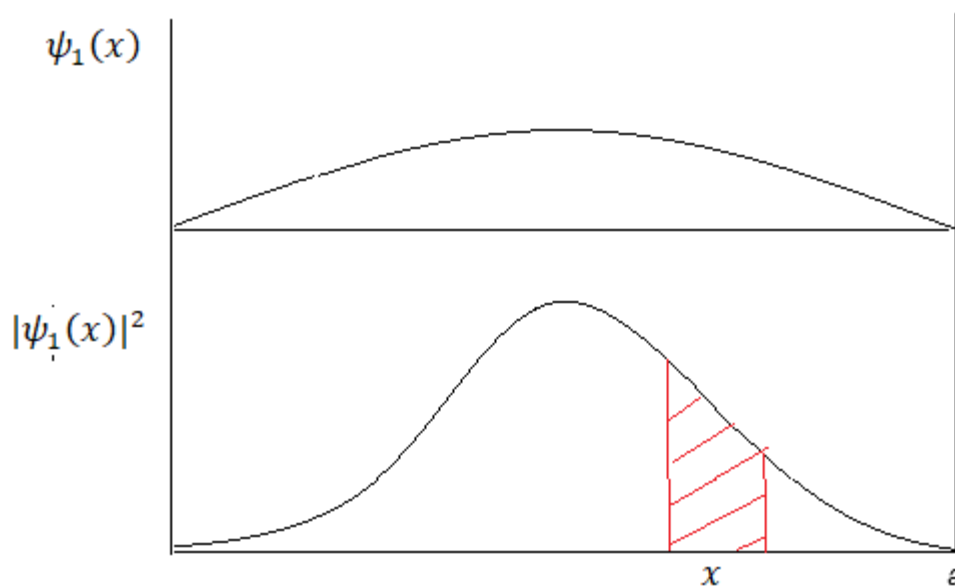


Figura 19: Función de onda y densidad de probabilidad para el caso $n=1$.

En forma inmediata y, teniendo en cuenta la simetría de la densidad de probabilidad respecto de $x=a/2$ se pueden obtener varias conclusiones las cuales pueden verificarse numéricamente por integración de la función.

$$P_{0,a/2} = P_{a/2,a}$$

$$P_{0,a/4} = P_{3a/4,a}$$

$$P_{a/4,a/2} = P_{a/2,3/4a}$$

aplicación para $n=2$

La función de onda resulta:

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{a}x\right)$$

Su energía:

$$E_1 = 4 \frac{\hbar^2 \pi^2}{a^2}$$

Y, la densidad de probabilidad:

$$|\psi_2(x)|^2 = \frac{2}{a} \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right)$$

En la Figura 20 se muestran estas funciones.

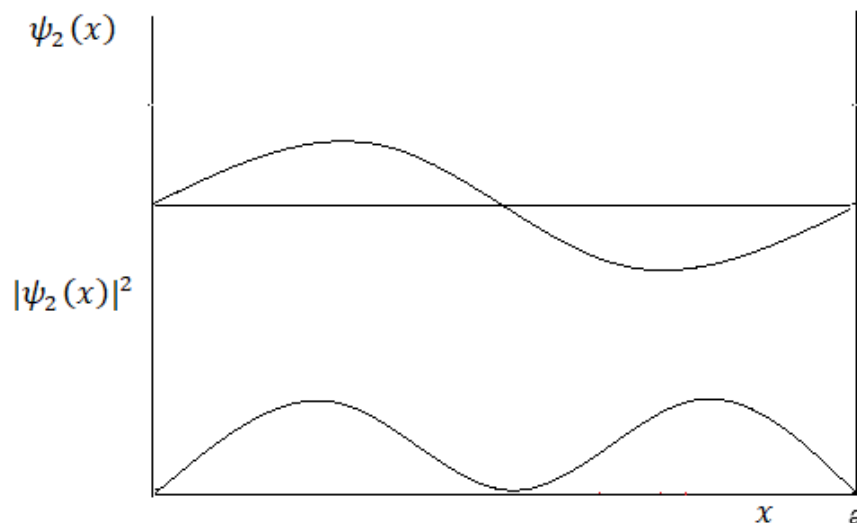


Figura 20: Función de onda y densidad de probabilidad para el caso $n=2$.

Análogamente al caso $n=1$, se pueden verificar las siguientes conclusiones respecto a la probabilidad de encontrar la partícula en distintas regiones y comprobar numéricamente por el cálculo de la respectiva integral.

$$P_{0,a/2} = P_{a/2,a}$$

$$P_{0,a/4} = P_{3a/4,a}$$

$$P_{a/4,a/2} = P_{a/2,3/4a}$$