

2ª edición

# Física General

VOLUMEN II

José María de Juana



PEARSON  
Prentice  
Hall



# Física General

## Volumen II

# Física General

## Volumen II

**JOSÉ MARÍA DE JUANA**

Catedrático de Física  
*Universidad Politécnica de Madrid*



Madrid • México • Santafé de Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Lima • Montevideo • San Juan  
San José • Santiago • São Paulo • White Plains

**Física General. Volumen II**

**José María De Juana**

PEARSON EDUCACIÓN, S.A., Madrid, 2007

ISBN: 978-84-205-3343-8

Materia: Física 53

Formato 215 × 270

Páginas: 632

Todos los derechos reservados.

Queda prohibida, salvo excepción prevista en la Ley, cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra sin contar con autorización de los titulares de propiedad intelectual. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (*arts. 270 y sgts. Código Penal*).

**DERECHOS RESERVADOS**

© 2007 por PEARSON EDUCACIÓN, S.A.

Ribera del Loira, 28

28042 MADRID

**FÍSICA GENERAL. Volumen II. 2.<sup>a</sup> edición**

**José María De Juana**

**ISBN: 978-84-205-3343-8**

Depósito legal: M.

PEARSON PRENTICE HALL es un sello editorial autorizado de PEARSON EDUCACIÓN, S.A.

Equipo editorial:

Editor: Miguel Martín Romo

Técnico editorial: Marta Caicoya

Equipo de producción:

Dirección: José Antonio Clares

Técnico: José Antonio Hernán

Diseño de cubierta: Equipo de diseño de PEARSON EDUCACIÓN, S.A.

Composición: COPIBOOK, S.L.

Impreso por:

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

Este libro ha sido impreso con papel y tintas ecológicos



<b>PRÓLOGO</b> .....	xv
<b>CAPÍTULO 28. Electrostática</b> .....	3
28.1. Fenómenos de electrización .....	3
28.2. Conductores y aisladores .....	4
28.3. Electroscopio .....	5
28.4. Ley de Coulomb .....	6
28.5. Cuantización de la carga .....	7
28.6. Estructura atómica y carga eléctrica .....	9
28.7. Conservación de la electricidad .....	10
28.8. Campo eléctrico .....	11
28.9. Principio de superposición .....	13
28.10. Campo creado por una distribución continua de carga .....	13
28.11. Líneas del campo eléctrico .....	20
28.12. Flujo. Teorema de Gauss .....	21
28.13. Circulación del campo eléctrico. Potencial .....	22
28.14. Distribución de cargas en los conductores .....	25
28.15. Aplicaciones del teorema de Gauss. Cálculo de campos y potenciales ..	25
28.16. Carga de conductores por inducción y contacto .....	30
28.17. Campo en un punto próximo a un conductor. Teorema de Coulomb ...	31
28.18. Presión electrostática .....	32
28.19. Efecto de puntas .....	33
28.20. Potencial y campo creado por un dipolo .....	33
28.21. Teorema de Gauss en forma diferencial .....	35
28.22. Ecuaciones de Poisson y Laplace .....	36
28.23. Teorema de la divergencia .....	39
<b>CAPÍTULO 29. Capacidad. Condensadores</b> .....	43
29.1. Capacidad de un conductor .....	43
29.2. Conductores en un campo eléctrico .....	44
29.3. Conductores planos y paralelos. Condensador .....	45

29.4.	Condensador esférico .....	48
29.5.	Condensador cilíndrico .....	49
29.6.	Asociación de condensadores .....	50
29.7.	Energía de una configuración discreta de cargas .....	54
29.8.	Energía de una configuración continua de cargas .....	55
29.9.	Energía de un condensador .....	58
29.10.	Densidad de energía del campo eléctrico .....	58
29.11.	Energía de un dipolo en un campo eléctrico .....	61
29.12.	Fuerza entre conductores cargados .....	61
29.13.	Electrón-voltio .....	63
29.14.	Movimiento de partículas cargadas en campos eléctricos constantes ...	64
<b>CAPÍTULO 30. Dieléctricos .....</b>		<b>67</b>
30.1.	Cargas inducidas en un dieléctrico .....	67
30.2.	Polarización de un dieléctrico. Vector polarización .....	68
30.3.	Potencial creado por un dieléctrico polarizado en un punto del espacio exterior a él .....	68
30.4.	Campo creado por un dieléctrico en un punto del espacio exterior a él ..	70
30.5.	Ley de Gauss. Desplazamiento o inducción eléctrica .....	70
30.6.	Flujo del vector <b>D</b> . Generalización del teorema de Gauss .....	71
30.7.	Dieléctrico perfecto. Susceptibilidad eléctrica .....	72
30.8.	Condiciones de contorno para el campo eléctrico .....	72
30.9.	Condensador lleno de dieléctrico .....	75
30.10.	Condensador plano con varias capas de dieléctrico .....	76
30.11.	Energía almacenada en un condensador con dieléctrico y en la polarización de éste .....	80
30.12.	Fuerza sobre un dieléctrico en un campo eléctrico no uniforme .....	81
30.13.	Rigidez dieléctrica .....	84
<b>CAPÍTULO 31. Electrocínética .....</b>		<b>85</b>
31.1.	Corriente eléctrica .....	85
31.2.	Circuito eléctrico. Corriente continua .....	86
31.3.	Intensidad y densidad de corriente eléctrica .....	86
31.4.	Ley de Ohm. Conductividad y resistividad .....	88
31.5.	Teoría clásica de la conducción .....	92
31.6.	Resistencia eléctrica .....	94
31.7.	Resistencias en serie y en paralelo .....	96
31.8.	Potencia entregada entre dos puntos de un circuito .....	99
31.9.	Ley de Joule .....	99
31.10.	Fuerza electromotriz .....	100
31.11.	Tensión entre los bornes de un generador .....	102
31.12.	Fuerza contraelectromotriz .....	102
31.13.	Tensión entre dos puntos de un circuito .....	104
31.14.	Ecuación del circuito .....	104
31.15.	Redes. Leyes de Kirchhoff .....	107
31.16.	Método matricial para el cálculo de redes .....	110
31.17.	Corrientes derivadas Aplicaciones .....	114
31.18.	Puente de Wheatstone .....	116
31.19.	Asociación de generadores .....	116
31.20.	Carga y descarga de un condensador. Circuito R-C .....	119
<b>CAPÍTULO 32. Electromagnetismo .....</b>		<b>123</b>
32.1.	Magnetismo. Campo magnético .....	123
32.2.	Fuerzas de un campo magnético sobre una carga móvil .....	125
32.3.	Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético .....	125
32.4.	El ciclotrón .....	127



32.5.	Espectrógrafo de masas .....	128
32.6.	Experiencia de Thomson. Medida de $e/m$ .....	130
32.7.	Efecto Hall .....	132
32.8.	Fuerza de un campo magnético sobre una corriente eléctrica .....	133
32.9.	Acción de un campo magnético sobre un circuito plano. Momento magnético .....	134
32.10.	Polos magnéticos .....	137
32.11.	Campo magnético producido por una corriente eléctrica .....	137
32.12.	Campo magnético creado por una corriente rectilínea .....	139
32.13.	Acciones entre corrientes rectilíneas paralelas. Definición de amperio ..	141
32.14.	Campo magnético creado por una corriente circular. Dipolo magnético ..	142
32.15.	Circulación del campo magnético B. Ley de Ampère .....	143
<b>CAPÍTULO 33. Inducción magnética .....</b>		<b>153</b>
33.1.	Fenómenos de inducción .....	153
33.2.	Flujo del campo magnético B. Ley de Gauss del magnetismo .....	154
33.3.	Fuerza electromotriz inducida. Ley de Faraday-Henry .....	154
33.4.	Ley de Lenz .....	156
33.5.	Corrientes de Foucault .....	158
33.6.	Inducción mutua .....	160
33.7.	Autoinducción .....	162
33.8.	Corriente de cierre y apertura de un circuito .....	164
33.9.	Energía del campo magnético asociado a una autoinducción .....	165
33.10.	Densidad de energía del campo magnético .....	166
33.11.	Descarga de un condensador en un circuito con autoinducción .....	168
33.12.	Analogías electromecánicas .....	171
<b>CAPÍTULO 34. Corriente alterna .....</b>		<b>173</b>
34.1.	Introducción .....	173
34.2.	Producción de una f.e.m. alterna .....	174
34.3.	Valor eficaz. Factores de amplitud y forma .....	174
34.4.	Circuito con resistencia pura .....	175
34.5.	Ciruito con autoinducción pura. Reactancia inductiva .....	175
34.6.	Circuito con capacidad pura. Reactancia capacitiva .....	176
34.7.	Corriente alterna en un circuito $R, L, C$ , serie. Régimen permanente ..	177
34.8.	Representación vectorial .....	180
34.9.	Resolución mediante complejos .....	181
34.10.	Admitancia, conductancia y susceptancia .....	184
34.11.	Asociación de impedancias .....	185
34.12.	Respuesta en frecuencia .....	188
34.13.	Potencia instantánea .....	191
34.14.	Potencia media y aparante. Factor de potencia .....	191
34.15.	Expresión compleja de la potencia. Potencia activa y reactiva .....	192
<b>CAPÍTULO 35. Magnetismo en la materia .....</b>		<b>199</b>
34.1.	Introducción .....	199
35.2.	Imanación, imantación o magnetización .....	200
35.3.	Relación entre $B, H$ y $M$ .....	201
35.4.	Susceptibilidad magnética .....	202
35.5.	Diagmanetismo .....	203
35.6.	Paramagnetismo .....	205
35.7.	Ferromagnetismo .....	206
35.8.	Circuito magnético .....	210
35.9.	Circuito magnético con entrehierro .....	214
35.10.	Antiferromagnetismo y ferrimagnetismo .....	215
35.11.	Magnetismo terrestre .....	216

<b>CAPÍTULO 36. Ecuaciones de Maxwell</b> .....	219
36.1. Introducción .....	219
36.2. Ley de Faraday-Henry en forma diferencial. Rotacional del campo eléctrico .....	219
36.3. Conservación de la carga. Ecuación de continuidad .....	221
36.4. Ley de Ampère-Maxwell. Circulación y rotacional del campo magnético. Corriente de desplazamiento .....	222
36.5. Ecuaciones de Maxwell .....	224
36.6. Ecuaciones de Maxwell para medios materiales .....	225
36.7. Condiciones del contorno .....	226
36.8. Densidad de energía electromagnética .....	228
36.9. Ecuaciones del campo electromagnético en el vacío. Ondas electromagnéticas .....	228
36.10. Vector de Poynting .....	232
36.11. Presión de radiación .....	234
<b>CAPÍTULO 37. Óptica. Principios generales</b> .....	239
37.1. Introducción .....	239
37.2. Espectro de radiaciones electromagnéticas .....	239
37.3. Velocidad de la luz. Índice de refracción absoluto y relativo .....	241
37.4. Ángulo límite. Reflexión total .....	244
37.5. Camino óptico .....	246
37.6. Principio de Fermat. Leyes de la reflexión y la refracción .....	246
<b>CAPÍTULO 38. Dióptricos y espejos</b> .....	251
38.1. Introducción .....	251
38.2. Estigmatismo y aplanatismo .....	251
38.3. Objetos e imágenes reales y virtuales .....	253
38.4. Óptica geométrica paraxial .....	253
38.5. Determinación analítica de un rayo óptico paraxial .....	253
38.6. Convenio de signos .....	254
38.7. Dióptico plano .....	254
38.8. Lámina de caras planas paralelas .....	256
38.9. Prisma óptico .....	262
38.10. Dióptico esférico .....	268
38.11. Espejo plano .....	278
38.12. Espejo esférico .....	280
<b>CAPÍTULO 39. Sistemas ópticos centrados</b> .....	283
39.1. Introducción .....	283
39.2. Matriz de transferencia de un sistema óptico .....	283
39.3. Puntos conjugados. Aumento lateral. Aumento angular o relación de convergencia .....	285
39.4. Ecuación de Lagrange-Helmholtz .....	286
39.5. Puntos y planos principales .....	286
39.6. Focos, planos y distancias focales .....	287
39.7. Cambio de origen de referencia de puntos principales a focos .....	288
39.8. Expresión de las matrices de transferencia (SP) y (SF) en función de las distancias focales .....	288
39.9. Construcción de las imágenes .....	289
39.10. Fórmula de Newton .....	289
39.11. Fórmulas de Gauss .....	290
39.12. Puntos y planos nodales .....	290
39.13. Matriz de transferencia con origen en los puntos nodales .....	291
39.14. Vergencia o potencia de un sistema .....	292

39.15.	Lentes .....	292
39.16.	Lentes delgadas .....	296
39.17.	Clasificación de las lentes .....	296
39.18.	Construcción de las imágenes .....	297
39.19.	Otras relaciones de interés .....	297
39.20.	Asociación de lentes delgadas .....	298
39.21.	Aberraciones de los sistemas ópticos .....	298
<b>CAPÍTULO 40.</b>	<b>Interferencias y difracción .....</b>	<b>303</b>
40.1.	Interferencias .....	303
40.2.	Dispositivos clásicos para obtener focos coherentes .....	305
40.3.	Interferencias con doble rendija. Experiencia de Young .....	305
40.4.	Interferencias producidas por varias rendijas .....	308
40.5.	Interferencias en la reflexión y transmisión en láminas delgadas .....	310
40.6.	Anillos de Newton .....	314
40.7.	Interferómetro de Michelson .....	315
40.8.	Difracción .....	316
40.9.	Difracción de Fraunhofer por una rendija .....	317
40.10.	Límite de resolución o poder separador de una rendija .....	319
40.11.	Difracción de Fraunhofer por una abertura circular .....	319
40.12.	Difracción de Fraunhofer por dos rendijas paralelas e iguales .....	320
40.13.	Redes de difracción .....	321
40.14.	Dispersión y poder de resolución de una red .....	323
<b>CAPÍTULO 41.</b>	<b>Polarización .....</b>	<b>325</b>
41.1.	Estado de polarización de una onda electromagnética .....	325
41.2.	Reflexión y refracción de la luz polarizada linealmente. Relaciones de Fresnel .....	327
41.3.	Cambio de fase en la reflexión .....	330
41.4.	Factores de reflectancia y transmitancia .....	331
41.5.	Polarización por reflexión. Ley de Brewster .....	332
41.6.	Propagación de ondas electromagnéticas en un medio anisótropo. Birrefringencia .....	333
41.7.	Transmisión de ondas electromagnéticas en láminas de caras planas y paralelas de cristales uniaxiales. Doble refracción .....	333
41.8.	Polarización por absorción. Dicroísmo .....	336
41.9.	Cristal analizador. Ley de Malus .....	337
41.10.	Cambio del estado de polarización, láminas de cuarto de onda y de media onda .....	338
41.11.	Dispersión .....	340
41.12.	Polarización cromática. Fotoelasticidad .....	341
41.13.	Actividad óptica .....	342
<b>CAPÍTULO 42.</b>	<b>Radiación, fotometría y color .....</b>	<b>345</b>
42.1.	Introducción .....	345
42.2.	Tubo de radiación .....	345
42.3.	Potencia de radiación. Intensidad radiante .....	346
42.4.	Indicatriz de una fuente. Fuente isótropa .....	346
42.5.	Flujo energético. Flujo energético monocromático .....	346
42.6.	Flujo luminoso. Eficacia luminosa relativa. Efecto Purkinje .....	347
42.7.	Intensidad luminosa .....	348
42.8.	Iluminación .....	348
42.9.	Luminancia o brillo .....	349
42.10.	Iluminación por una fuente extensa .....	350
42.11.	Emitancia o radiancia luminosa .....	351
42.12.	Brillo de una superficie iluminada .....	351

42.13. Color .....	352
42.14. Mezcla aditiva de colores .....	353
42.15. Blanco patrón. Colores complementarios .....	354
42.16. Sistema clorimétrico, X, Y, Z .....	355
42.17. Diagramas cromáticos .....	355
42.18. Longitud de onda dominante o tinte y pureza o saturación .....	356
<b>CAPÍTULO 43. Relatividad especial .....</b>	<b>359</b>
43.1. Introducción .....	359
43.2. Relatividad del tiempo .....	360
43.3. Principio de relatividad especial .....	360
43.4. Transformaciones de Lorentz .....	361
43.5. Contracción de longitudes. Velocidad límite .....	364
43.6. Dilatación de intervalos de tiempo .....	365
43.7. Relatividad de la simultaneidad .....	367
43.8. Relatividad especial y principio de causalidad .....	367
43.9. Efecto Doppler relativista .....	367
43.10. Problemas de los mellizos .....	370
43.11. Invariante fundamental. Espacio-tiempo cuadrimensional .....	372
43.12. Cuadrivector velocidad .....	374
43.13. Transformación de velocidades .....	374
43.14. Principio de correspondencia .....	378
<b>CAPÍTULO 44. Dinámica relativista .....</b>	<b>381</b>
44.1. Cuadrivector cantidad de movimiento. Masa relativista .....	381
44.2. Transformación de la masa .....	384
44.3. Cuadrivector fuerza .....	385
44.4. Energía relativista .....	387
44.5. Transformación de la cantidad de movimiento y de la energía .....	393
44.6. Sistemas de partículas .....	395
44.7. Transformación de las fuerzas .....	397
<b>CAPÍTULO 45. Electromagnetismo y relatividad .....</b>	<b>401</b>
45.1. Introducción .....	401
45.2. Transformación del campo electromagnético .....	401
45.3. Relatividad del campo electromagnético .....	405
45.4. Invarianza de la carga eléctrica .....	406
45.5. Campo electromagnético creado por una partícula cargada en movimiento rectilíneo uniforme .....	406
45.6. Fuerza sobre una partícula cargada que se mueve dentro de un campo magnético .....	407
45.7. Relatividad general .....	408
<b>CAPÍTULO 46. Cuantización de la radiación. Dualidad onda-corpúsculo .....</b>	<b>415</b>
46.1. Introducción .....	415
46.2. Naturaleza corpuscular de la radiación. Fotones .....	415
46.3. Efecto fotoeléctrico .....	416
46.4. Rayos X .....	418
46.5. Efecto Compton .....	420
46.6. Dualidad onda-corpúsculo .....	423
<b>CAPÍTULO 47. El átomo nuclear .....</b>	<b>427</b>
47.1. Descubrimiento del núcleo. Átomo de Rutherford .....	427
47.2. Átomo de Bohr .....	428

47.3. Espectro de rayas del hidrógeno .....	431
47.4. Principio de correspondencia .....	432
47.5. Corrección por movimiento nuclear .....	433
47.6. Órbitas elípticas. Estructura fina .....	434
47.7. Espectro característico de rayos X. Ley de Moseley .....	435
47.8. Experiencia de Franck-Hertz .....	435
<b>CAPÍTULO 48. Mecánica ondulatoria .....</b>	<b>439</b>
48.1. Hipótesis de De Broglie. Ondas de materia .....	439
48.2. Difracción de electrones. Experiencia de Davisson y Germer .....	440
48.3. Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo .....	442
48.4. Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo .....	443
48.5. Interpretación de la función de onda .....	444
48.6. Principio de incertidumbre .....	446
48.7. Valores esperados. Valor más probable .....	447
48.8. Valores esperados para la cantidad de movimiento y la energía .....	449
48.9. Densidad de corriente .....	451
48.10. Escalón de potencial .....	452
48.11. Barrera de potencial. Efecto túnel .....	455
48.12. Pozo de potencial cuadrado e infinito. Paridad .....	460
48.13. El oscilador armónico .....	463
48.14. Formalismo de la mecánica cuántica .....	467
48.15. Valores propios y funciones propias .....	471
48.16. Postulados de la mecánica cuántica .....	471
48.17. Medida simultánea de dos magnitudes físicas. Principio de incertidumbre de Heisenberg .....	473
<b>CAPÍTULO 49. El átomo de hidrógeno .....</b>	<b>475</b>
49.1. La ecuación de Schrödinger .....	475
49.2. Solución de las ecuaciones. Números cuánticos .....	477
49.3. Números cuánticos y degeneración .....	479
49.4. Funciones propias .....	480
49.5. Densidad de probabilidad para el electrón .....	484
49.6. Momento cinético orbital .....	487
49.7. Momento magnético orbital. Efecto Zeeman. Precesión de Larmor ....	489
49.8. Spin del electrón. Experiencia de Stern-Gerlach .....	491
49.9. Interacción espín-órbita .....	493
49.10. Momento cinético total .....	493
49.11. Los números cuánticos y el modelo atómico .....	495
<b>CAPÍTULO 50. Átomos con varios electrones .....</b>	<b>497</b>
50.1. Introducción .....	497
50.2. Principio de exclusión de Pauli .....	497
50.3. Configuración electrónica .....	499
50.4. Sistema periódico de los elementos .....	503
50.5. Absorción y emisión espontánea de la radiación .....	503
50.6. Transiciones radiantes. Reglas de selección .....	507
50.7. Emisión estimulada. Láser .....	508
<b>CAPÍTULO 51. Mecánica estadística. Estadística de Maxwell-Boltzmann .....</b>	<b>513</b>
51.1. Introducción .....	513
51.2. Estadística de Maxwell-Boltzmann .....	514
51.3. Función de partición .....	516
51.4. Entropía y probabilidad termodinámica .....	517
51.5. Calor y trabajo .....	518

51.6.	Expresiones en función de $T$ .....	518
51.7.	Aplicación al gas ideal .....	520
51.8.	Entropía de un sistema en equilibrio .....	524
51.9.	Entalpía. Energía libre y entalpía libre .....	525
<b>CAPÍTULO 52. Mecánica estadística cuántica. Estadísticas de Fermi-Dirac y Bose-Einstein .....</b>		<b>527</b>
52.1.	Introducción .....	527
52.2.	Distribución de Fermi-Dirac .....	527
52.3.	Distribución de Bose-Einstein .....	530
52.4.	Magnitudes termodinámicas en las estadísticas de Fermi-Dirac y Bose-Einstein .....	531
52.5.	Aplicaciones de la estadística de Fermi-Dirac .....	533
52.6.	Aplicaciones de la estadística de Bose-Einstein .....	539
<b>CAPÍTULO 53. Física nuclear .....</b>		<b>545</b>
53.1.	Introducción .....	545
53.2.	Unidad de masa atómica .....	546
53.3.	El neutrón .....	547
53.4.	Algunas propiedades del núcleo .....	548
53.5.	Masas y energía de enlace .....	552
53.6.	Fuerzas nucleares .....	555
53.7.	Estabilidad .....	556
53.8.	Modelos nucleares .....	557
53.9.	Radiactividad natural .....	558
53.10.	Ley general de la emisión radiactiva. Actividad, media vida y vida media .....	561
53.11.	Datación radioactiva .....	563
53.12.	Reacciones nucleares .....	564
53.13.	Radiactividad artificial .....	568
53.14.	Desintegración $\beta$ .....	571
53.15.	Desintegración $\gamma$ .....	573
53.16.	Fisión nuclear .....	573
53.17.	Fusión .....	576
53.18.	Partículas fundamentales .....	579
53.19.	Clasificación de partículas .....	587
53.20.	Los quarks .....	587
53.21.	Interacciones .....	590
53.22.	Modelo Standard .....	591
<b>APÉNDICE A. Sistema Internacional de Unidades (SI) .....</b>		<b>593</b>
A.1.	Magnitudes fundamentales y sus unidades .....	593
A.2.	Símbolos de los múltiplos y submúltiplos de la unidad .....	594
A.3.	Unidades derivadas directamente de las fundamentales, sin símbolo propio .....	594
A.4.	Otras unidades con nombre propio, sus símbolos y relaciones .....	595
A.5.	Otras unidades derivadas sin símbolo propio .....	595
A.6.	Otras unidades que no pertenecen al SI .....	596
<b>APÉNDICE B. Constantes físicas fundamentales .....</b>		<b>597</b>
<b>APÉNDICE C. Operadores diferenciales .....</b>		<b>599</b>
C.1.	Coordenadas cartesianas .....	599
C.2.	Coordenadas cilíndricas .....	600

---

<b>APÉNDICE D. Coordenadas esféricas</b> .....	601
D.1. Relación con las coordenadas cartesianas .....	601
D.2. Elemento de volumen .....	601
D.3. Gradiente .....	601
D.4. Divergencia .....	601
D.5. Rotacional .....	602
D.6. Laplaciano .....	602
D.7. Operadores cuánticos .....	602





En este segundo tomo de Física pretendemos conseguir, ahora dentro de otros campos de esta ciencia, los mismos objetivos ya establecidos para los temas tratados en el tomo primero

Aquí dedicaremos al Electromagnetismo los nueve primeros temas, destinando a continuación tres temas a Óptica Geométrica, dos a Óptica Física, uno a Fotometría y Color, tres a Relatividad Restringida, cinco a Mecánica Cuántica, dos a Mecánica Estadística y finalmente uno a Física Nuclear y de las partículas, completando así todo el contenido correspondiente a lo que se ha dado en denominar la Física General. No obstante, somos conscientes de la necesidad de tres semestres para desarrollar la docencia de estos contenidos: dos semestres en primer curso y un tercer semestre en segundo curso, en lo que se ha venido denominando Ampliación de Física.

Para el desarrollo del texto hemos seguido el proceso de evolución histórica, tal y como se ha ido produciendo de forma real el desarrollo de la Física. Hemos considerado que ello es más pedagógico, pues pone de manifiesto la necesidad de búsqueda de soluciones a problemas que la ciencia tenía planteados y, en consecuencia, da un mayor sentido a ésta. Así, llegamos a las ecuaciones de Maxwell como fusión o compendio de las leyes del Electromagnetismo, siguiendo el desarrollo del descubrimiento de éstas por Coulomb, Oersted, Ampere, Faraday y el propio Maxwell, alcanzando con sus ecuaciones la unificación de la electricidad, el magnetismo y la óptica, y poniendo de manifiesto el significado físico de cada una de sus ecuaciones.

Por la misma razón incluimos Relatividad después de haber desarrollado el Electromagnetismo, ya que solamente después de haber evidenciado la incompatibilidad entre el Electromagnetismo y la Mecánica Clásica se hace necesaria la Mecánica Relativista. Esta necesidad de resolver un problema planteado en la realidad del mundo físico es la que da sentido a las nuevas teorías que vienen a resolverlo.

De manera completamente análoga, se desarrolla la Mecánica Cuántica, una vez que se ha puesto de manifiesto la incapacidad de la Clásica para explicar los fenómenos a nivel atómico, y la Mecánica Estadística como forma de hacer posible el estudio de los sistemas de un número elevadísimo de partículas.

También hemos tenido en cuenta, en los desarrollos deductivos, el nivel físico-matemático de los alumnos a los que va dirigido el texto, lo que nos ha obligado a procurar un equilibrio entre los métodos experimental y deductivo que haga la obra asequible al nivel de los alumnos de primer curso de universidad, y ello nos ha condicionado, en algunas cuestiones, a una mera descripción de las mismas o a una exposición razonablemente aceptable dentro del rigor posible a este nivel.

De aquellas cuestiones que consideramos deben ser conocidas con más profundidad o que presentan una mayor dificultad de comprensión, hemos incluido ejemplos resueltos, con el objeto de facilitar el estudio de las mismas y ayudar a profundizar en el significado de ellas.

Finalmente, es un deber de justicia, y como padre lo hago con gran satisfacción, reconocer y dejar constancia de la gran colaboración que, en el desarrollo de estos libros, me han prestado mis hijos José María y Javier, sin cuya ayuda me hubiera sido muy difícil acabar la obra con la precisión que entiendo hemos conseguido y abarcar tan diversos campos de la Física.

También quiero expresar mi agradecimiento a todos los que de una forma u otra han colaborado en la realización de este trabajo.

Esperamos que nuestro esfuerzo al confeccionar esta obra, que hoy concluimos, sea útil a los estudiantes, que año tras año van llegando a nuestras universidades, y les facilite su formación básica, lo que posibilitará una mejor preparación profesional, en beneficio de ellos y de toda la sociedad.

Madrid, marzo de 2007

EL AUTOR



## ELECTROMAGNETISMO. ALGUNOS HITOS

El conocimiento de la electricidad data del año 580 a.C., en el cual Thales de Mileto observó que al ser frotado el ámbar con lana adquiere la propiedad de atraer pequeños objetos, como ligeras plumas de ave o pedacitos de papel. También se atribuye al citado sabio griego la observación del fenómeno de atracción del hierro por la piedra imán o magnetita, abundante en la región griega de Magnesia.

Wang Chung's en su *Discourses weighed in the balance*, en el año 83 a.C., narra el uso de un tipo rudimentario de brújula.

Hacia el año 1086 de nuestra era, los chinos ya usaban la brújula para orientarse, según cita Shen Kua (1030-1090) en su *Dream Pool Seas*, y hacia el año 1100, según cita Chu Yu, parece ser que fue usada para la navegación.

Alexander Neckam's, en 1187, escribe *De naturis rerum*, en la cual narra sus observaciones acerca de la orientación de una aguja imantada montada sobre un pivote y que contiene la primera referencia al uso en occidente de la brújula como instrumento de navegación.

Pierre de Maricourt o Petrus Peregrinus, en 1269, escribe *Epistola de magnete*, en la cual hace un análisis de la existencia de polos magnéticos en imanes naturales, trazando sobre éstos las direcciones en cada punto de una aguja magnética colocada sobre el punto.

En su travesía del Atlántico, Cristóbal Colón hizo notar que la aguja de la brújula no marca exactamente el Norte (estrella Polar), observación que no fue tomada en cuenta y atribuida a observaciones imprecisas, lo que le llevó a escribir una carta, en 1498, desde Haití, insistiendo en que la dirección de la aguja magnética varía con la localización, pasando de apuntar ligeramente a la derecha de la dirección norte en la costas europeas, a la izquierda de aquélla en el oeste del atlántico.

Robert Norman, marino británico, publicó en 1581 *The Newe Attractive* en el cual pone de manifiesto que la aguja magnética que puede girar alrededor de un eje horizontal se inclina respecto al plano horizontal.

Hasta el siglo XVI no comienza el estudio sistemático de los fenómenos eléctricos y magnéticos. Fue William Gilbert (1540-1603) quien realizó un estudio cualitativo de ellos y llegó a darse cuenta que, por su comportamiento magnético, la Tierra es un gran imán,

ya que actúa sobre las agujas magnetizadas, lo que publicó en 1600 en su famoso *De magnete*.

Otto von Guericke (1602-1686), en 1660, construye la primera máquina eléctrica, un generador de electricidad por frotamiento.

Stephen Gray (1670-1736), en 1729, descubre que la electricidad estática es transportada por diferentes sustancias, sobre todo por los metales.

Charles-Francois du Fay (1698-1739) descubre que las cargas eléctricas son de dos tipos, unas que llamó *resinosas*, producidas al frotar el ámbar y otras *vítreas*, producidas al frotar el vidrio. Las que son del mismo tipo se repelen y las de distinto tipo se atraen.

En 1747, Benjamín Franklin (1706-1790) establece la ley de la conservación de la carga y propone los signos *más* y *menos* para los dos tipos de electricidad, que él pensaba era un único fluido, cuyo exceso cargaba positivamente al cuerpo y cuyo defecto producía una carga negativa.

John Michell (1724-1793) demuestra que la acción entre polos magnéticos es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, lo que publica en su libro, *A Treatise on Artificial Magnets*, en 1750.

Franz Ulrich Theodosius Aepinus (1724-1802), en 1759, publica *An Attempt at a Theory of Electricity and Magnetism*, que es el primer tratado de electricidad y magnetismo en el que se aplican técnicas matemáticas para su estudio.

La pila eléctrica fue desarrollada, en 1775, por Alessandro Volta (1745-1827), siguiendo los descubrimientos de Luigi Galvani (1737-1798), según los cuales si en una solución salina acuosa se introducen dos metales distintos aparece entre estos una corriente eléctrica. La pila eléctrica permitió trabajar sistemáticamente en experiencias con corrientes continuas.

Charles Augustin de Coulomb (1736-1806), en 1784, estableció la primera ley cuantitativa sobre la fuerza de atracción o repulsión de cargas eléctricas puntuales, usando una balanza de torsión y cuerpos muy pequeños cargados. Parece ser que fue él quien se dio cuenta de que al dividir un imán se crean dos nuevos imanes, es decir, ambas partes tiene sus polos norte y sur, y que también entre estos las fuerzas que se ejercen son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia.

Hans Christian Oersted (1777-1851), en julio de 1820, comprobó cómo una aguja imantada se desviaba

por la acción de una corriente eléctrica rectilínea. Lo que ponía de manifiesto que sobre la aguja se había ejercido una fuerza, que sólo podía proceder de la corriente eléctrica. Quedaba de manifiesto que la corriente eléctrica producía efectos magnéticos y que esos efectos llegaban al punto donde estaba la aguja magnética. Era la primera conexión entre la electricidad y el magnetismo y subyacía en ella la idea de campo magnético. Este fenómeno fue investigado por Jean Baptiste Biot (1774-1862) y Felix Savart (1791-1841), que encontraron que la acción es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la aguja al hilo conductor.

André Marie Ampère (1775-1836), en 1820, estudió con gran detalle el campo magnético producido por las corrientes eléctricas y dedujo la expresión de la fuerza que ejerce un campo magnético sobre un elemento de corriente. Un campo magnético hará girar a una espira recorrida por una corriente eléctrica que esté situada dentro de él, lo que es el origen de los motores eléctricos. En una Memoria presentada a la Academia de Ciencias Francesa estableció que todo efecto magnético es debido a una corriente eléctrica y que en los imanes el efecto magnético es creado por corrientes eléctricas moleculares. También estableció que dos corrientes eléctricas interactúan y que la acción que se ejercen también es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

Georg Simon Ohm (1789-1854), en 1827, formula la relación entre fuerza electromotriz, corriente y resistencia eléctrica.

En 1831, Michael Faraday (1791-1867) y Joseph Henry (1797-1878), independiente y simultáneamente comprobaron que la variación de flujo del campo magnético a través de una espira induce en ésta una fuerza electromotriz y, en consecuencia, una corriente eléctrica. La ley de inducción ha tenido aplicaciones técnicas que han cambiado la vida del hombre, ya que es el origen de muchos motores eléctricos, generadores de

electricidad, como dínamos y alternadores y algunos sistemas de comunicaciones. Faraday estableció que las acciones no se ejercen a distancia, si no a través de lo que él llamó *líneas de fuerza*, lo que es una intuición del concepto de *campo* que sería posteriormente establecido con toda precisión por Maxwell. También Faraday estudió las relaciones entre electricidad, magnetismo y óptica, que publicó en su *Experimental Researches in Electricity*. Trabajos teóricos en este mismo sentido fueron desarrollados por Lenz (1804-1865), Neumann (1798- 1895) y Weber (1804-1891).

En 1829, Joseph Henry construyó el primer telégrafo, transmitiendo impulsos eléctricos a través de cables, aunque el gran desarrollo se lo dio Morse (1791-1872), que inventó el código que lleva su nombre.

Pixii construyó, en 1832 el primer generador eléctrico, y Davenport, en 1837, el primer motor eléctrico.

James Clerk Maxwell (1831-1879) demostró que la variación de un campo eléctrico en el tiempo produce un campo magnético y resumió todas las leyes de la electricidad y el magnetismo en cuatro ecuaciones denominadas de Maxwell, que publicó, en 1864, en su tratado *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*. En 1873, publicó su famoso *Treatise on Electricity and Magnetism*. Basado en sus ecuaciones, Maxwell predijo la existencia de ondas electromagnéticas y calculó teóricamente su velocidad de propagación, encontrando que ésta coincidía con la velocidad de la luz, poniendo de manifiesto que la luz era una onda electromagnética y quedando así unificados electricidad, magnetismo y óptica. La existencia de ondas electromagnéticas fue comprobada por Rudolf Hertz (1857-1894), quien, en 1886, produjo y detectó ondas de radio, midiendo su longitud de onda, su frecuencia y su velocidad de propagación. En 1988 creó su *dipolo de Hertz*, que le permitió reiterar sus experiencias con mayor precisión. Era el nacimiento de los actuales sistemas de telecomunicación.

### 28.1 Fenómenos de electrización

Parece ser que ya Thales de Mileto (640-546 a. de C.), matemático griego, comprobó que al frotar el ámbar con un paño de lana adquiría la propiedad de atraer objetos ligeros, como pequeñas plumas. La palabra griega que significa ámbar es *ἤλεκτρον* y de aquí deriva nuestra palabra electricidad. Como resultado del frotamiento, el ámbar y otras muchas sustancias adquieren una nueva propiedad que se ha llamado electricidad, una de cuyas manifestaciones es la indicada, diciéndose que la sustancia ha quedado electrizada o cargada eléctricamente por frotamiento. La interacción de los cuerpos electrizados es evidentemente más fuerte que la gravitacional.

En el año 1600, Gilbert (1544-1603) publicó su obra *De Magnete, Magneticisque Corporibus, et de Magno Magnete Tellure* (Del Imán, de los Cuerpos Magnéticos, y del Gran Imán de la Tierra), en el que dedica una parte al análisis de las propiedades que presentan, al ser frotados, el ámbar y otros materiales, a los que denominó *electrics*.

Stephen Gray (1696-1736) comprobó que si una varilla de vidrio, electrizada por frotamiento, se une mediante un alambre a un corcho, este queda también electrizado, mientras que si la unión se hace con un hilo de seda, el corcho no se electriza; de lo que dedujo que la electricidad se trasmite a través de ciertos materiales, pero no a través de otros; a los primeros se les denomina *conductores* y a los segundos *aisladores*.

Francois du Fay (1698-1739) frotó con tela de seda dos varillas iguales de vidrio y comprobó que al acercarlas se repelían, lo mismo sucedía si se frotaban con lana dos varillas de ámbar. Por el contrario, al aproximar una varilla de vidrio y otra de ámbar, ambas electrizadas por frotamiento, se atraían. Du Fay llegó a la conclusión de la existencia de dos tipos de electricidad: una *vítrea*, que aparece al frotar el vidrio con seda y otra *resinosa*, que aparece cuando se frota ámbar con lana.

- 28.1. Fenómenos de electrización
- 28.2. Conductores y aisladores
- 28.3. Electroscopio
- 28.4. Ley de Coulomb
- 28.5. Cuantización de la carga
- 28.6. Estructura atómica y carga eléctrica
- 28.7. Conservación de la electricidad
- 28.8. Campo eléctrico
- 28.9. Principio de superposición
- 28.10. Campo creado por una distribución continua de carga
- 28.11. Líneas del campo eléctrico
- 28.12. Flujo. Teorema de Gauss
- 28.13. Circulación del campo eléctrico. Potencial
- 28.14. Distribución de cargas en los conductores
- 28.15. Aplicaciones del Teorema de Gauss. Cálculo de campos y potenciales
- 28.16. Carga de conductores por inducción y contacto
- 28.17. Campo en un punto próximo a un conductor. Teorema de Coulomb
- 28.18. Presión electrostática
- 28.19. Efecto de puntas
- 28.20. Potencial y campo creado por un dipolo
- 28.21. Teorema de Gauss en forma diferencial
- 28.22. Ecuaciones de Poisson y Laplace
- 28.23. Teorema de la divergencia

## Conservación de la carga

Benjamín Franklin (1706-1790), de forma independiente, llegó a las mismas conclusiones que Du Fay. Según Franklin, los cuerpos con electricidad vítrea tienen un exceso de «fluido eléctrico» por lo que a su estado le llamó *positivo* o cargado positivamente, mientras que los cuerpos con electricidad resinosa tenían un defecto de fluido eléctrico, por lo que a su estado le llamó *negativo* o de carga negativa. Franklin estableció que si en uno de los cuerpos que se frotan aparece una cierta carga positiva, en el otro debe aparecer la misma cantidad de carga pero negativa, lo que es un primer enunciado de la ley de conservación de la carga eléctrica, *la suma algebraica de cargas eléctricas se conserva*.

Experiencias similares a las indicadas pueden realizarse utilizando un péndulo formado por una esferita de corcho o médula de saúco suspendida por un hilo de seda, se comprueba que la esferita es atraída al aproximarle una varilla de ámbar o de vidrio previamente electrizada por frotamiento. Si se aproximan simultáneamente las dos varillas de ámbar y vidrio, sin contactar entre sí, vemos cómo su acción sobre la esfera es menor que cuando se aproximaba una de ellas sola, pudiendo incluso ser nula. Lo que pone de manifiesto que, aún cuando es el mismo el efecto sobre la esferita producido por la varilla de vidrio o la de ámbar, la causa es distinta, ya que al actuar juntas se contrarresta su acción. En consecuencia, queda clara la existencia de las dos clases de electricidad ya indicadas.

Si cualquier varilla electrizada, que en principio atraerá a la esferita, llegase a contactar con ella, la repelería inmediatamente, quedando la esferita electrizada por contacto, al pasar a ella parte de la electricidad de la varilla. Aparece así una nueva forma de electrización, la *electrización por contacto*.

Dos esferitas, de sendos péndulos, electrizadas por contacto con una varilla de vidrio previamente electrizada por frotamiento, se repelen al tratar de aproximarlas. Lo mismo sucede si la electrización de las esferitas se ha producido por contacto con una varilla de ámbar previamente electrizada por frotamiento. Por el contrario, si una de las esferitas ha sido electrizada por contacto con una varilla de vidrio previamente electrizada por frotamiento y la otra lo ha sido por contacto de una varilla de ámbar igualmente electrizada, al aproximar estas esferas veremos cómo ellas se atraen. De todo lo cual se deduce que *electricidad del mismo signo se repele y de signo contrario se atrae*.

## 28.2 Conductores y aisladores

## Aisladores

Ya hemos indicado cómo Gray llegó al conocimiento de la existencia de materiales conductores y aisladores de la electricidad, lo que puede ponerse de manifiesto al frotar un extremo de una varilla de vidrio o ámbar, pues solamente éste extremo adquiere la propiedad de que hemos hablado y podemos comprobar cómo el otro extremo no goza de la misma. Quiere ello decir que la electricidad creada por frotamiento en un extremo no es transmitida por el vidrio o ámbar al otro. Las sustancias que se comportan así, es decir, que impiden el paso de la electricidad a su través, se denominan *aisladores* y pertenecen a este tipo, además de las citadas, el aire seco, la porcelana, la ebonita, la seda, la resina, los plásticos, las fibras artificiales, etc.

## Conductores

Si repetimos la experiencia anterior con una varilla metálica teniendo la precaución de cogerla mediante un elemento aislante, observaremos que tanto el extremo frotado como el otro están electrizados, lo que nos indica que la electricidad creada por frotamiento en uno de los extremos de la varilla ha sido conducida por ésta hasta el otro. A estas sustancias que permiten el paso de la electricidad a través de ellas se las denomina *conductores*, y así son los metales, sus aleaciones, las soluciones acuosas de ácidos, bases y sales, etc.

De lo expuesto no debe deducirse que las sustancias se clasifican en dos grandes grupos, unas que conducen la electricidad y otras que no. La realidad es que existe toda una gradación de sustancias sin solución de continuidad, desde los mejores aisladores hasta los mejores conductores.

Existe un tipo de sustancias que en unas condiciones se comportan como verdaderos conductores y en otras como auténticos aisladores. A este tipo de sustancias se les denomina *semiconductores*.

Semiconductor

### 28.3 Electroscopio

Se designa así a un dispositivo empleado para detectar cargas eléctricas. Está formado por una varilla  $V$  (Figura 28.1), colocada mediante un soporte aislador  $S$ , en una caja metálica  $C$ , que lleva en su extremo exterior una esferita metálica y en su otro extremo, dentro de la caja, dos laminillas conductoras muy finas, generalmente de oro o aluminio. Si ponemos en contacto con la esferita exterior un cuerpo electrizado, pasa electricidad de éste, por conducción, hasta las laminillas del electroscopio, que al cargarse de electricidad del mismo signo se repelerán, pasando a ocupar una posición de equilibrio que dependerá de la carga que haya llegado a ellas.

El electroscopio puede calibrarse de forma que mida la carga en función del ángulo de separación de sus laminillas.

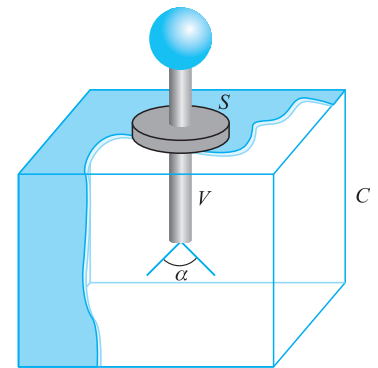


Figura 28.1. Electroscopio.

### 28.4 Ley de Coulomb

Los primeros estudios cuantitativos sobre la interacción eléctrica entre cuerpos electrizados en reposo se deben al ingeniero Charles A. de Coulomb (1736-1806), quien, en 1785, utilizando para sus experiencias una balanza de torsión, llegó a enunciar la ley que lleva su nombre: *Dos cargas eléctricas puntuales se ejercen entre sí una fuerza dirigida según la línea recta que determinan, repulsiva para cargas del mismo signo y atractiva para cargas de signo contrario, directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa*. La expresión analítica de la fuerza  $\mathbf{F}$ , que una carga  $q$ , ejerce sobre otra carga  $q'$ , es:

$$\mathbf{F} = K \frac{qq'}{r^2} \mathbf{u}_r \quad [28.1] \quad \text{Ley de Coulomb}$$

siendo  $r$  la distancia que separa las cargas (Figura 28.2);  $\mathbf{u}_r$ , el vector unitario de dirección la recta que une las cargas y sentido de  $q$  a  $q'$ , y  $K$  una constante de proporcionalidad. En esta ley física deben expresarse las cargas con su signo y es aplicable a cuerpos cargados cuyas dimensiones sean despreciables frente a la distancia  $r$  que les separa.

El sistema electrostático de unidades define la unidad de carga eléctrica asignando a  $K$  en el vacío el valor uno, midiendo las fuerzas en dinas y las distancias en centímetros; con ello, la unidad de carga eléctrica, ues, es aquella *cantidad de electricidad que situada en el vacío a 1 cm de otra igual la repele con la fuerza de una dina*.

Si tomamos para  $K$  en el vacío el valor  $K = 10^{-7} c^2 \simeq 8,9876 \times 10^9$ , medimos las fuerzas en newtons y las distancias en metros, resulta para la cantidad de electricidad una nueva unidad, correspondiente al Sistema Internacional, que se denomina «culombio» (C) y que se define como *la cantidad de electricidad que colocada en el vacío a 1 metro de distancia de otra igual la repele con la fuerza de  $10^{-7} \times c^2$  newtons*.

Culombio

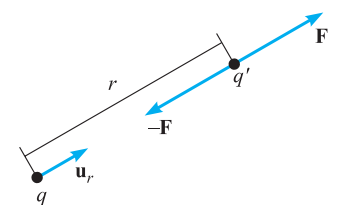


Figura 28.2. Acción entre cargas eléctricas puntuales.

La equivalencia entre las ues y el culombio se obtiene de la siguiente manera:

$$K = 1 \text{ dina} \times \text{cm}^2 \times \text{ues}^{-2} = 10^{-7} \text{ c}^2 \text{N} \times \text{m}^2 \times \text{C}^{-2}$$

y puesto que es  $1 \text{ N} = 10^5 \text{ dinas}$  y  $1 \text{ m} = 10^2 \text{ cm}$ , resulta

$$1 \text{ C} = 10 \text{ c ues} = 2,99792 \times 10^9 \text{ ues} \simeq 3 \times 10^9 \text{ ues}$$

La constante  $K$  tiene dimensiones, que pueden obtenerse de la Ecuación [28.1]

$$[K] = [\mathbf{F}]L^2T^{-2}Q^{-2} = ML^3T^{-2}Q^{-2}$$

si bien, hay que hacer notar que la carga no es magnitud fundamental en el sistema internacional (S.I.); éste toma como magnitud fundamental a la intensidad de corriente eléctrica (I) y como unidad para ella el amperio (A), según definiciones que posteriormente veremos.

Es conveniente, por razones prácticas de cálculo, hacer:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad [28.2]$$

**Permitividad** La nueva constante,  $\epsilon_0$ , así introducida, es característica de cada medio y se denomina *permitividad*, siendo su ecuación de dimensiones la inversa de las de  $K$ ,

$$[\text{dim } \epsilon_0] = \frac{Q^2}{[\text{dim } \mathbf{F}] \times L^2} = M^{-1}L^{-3}T^2Q^2$$

El valor de la permitividad del vacío,  $\epsilon_0$ , en el sistema electrostático, es:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi} \text{ ergio}^{-1} \text{cm}^{-1} \text{ues}^2$$

Para el valor de  $K = 10^{-7} \text{ c}^2$ , es decir, en el S.I.,  $\epsilon_0$  es:

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi \text{c}^2} \simeq 8,8542 \times 10^{-12} \simeq \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{J}^{-1} \times \text{m}^{-1} \times \text{C}^2$$

Teniendo en cuenta la expresión [28.2], podemos escribir la [28.1] para el vacío de la forma,

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \mathbf{u}_r \quad [28.3]$$

Para cualquier otro medio material homogéneo e isótropo se expresa:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{qq'}{r^2} \mathbf{u}_r \quad [28.4]$$

Por tanto, la fuerza que se ejercen dos cargas es inversamente proporcional a la permitividad del medio en que se encuentran. En los medios homogéneos, isótropos y lineales para la permitividad, ésta es una constante escalar. De lo contrario la permitividad será una magnitud de naturaleza tensorial.

Se define la *permitividad relativa* de un medio como el cociente entre su permitividad y la del vacío

$$\text{Permitividad relativa} \quad \epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad [28.5]$$



Por tanto, la permitividad relativa es un número sin dimensiones. A continuación en la Tabla 28.1 damos las permitividades relativas de algunos materiales, medidas todas ellas a temperatura ambiente de 20 a 25 °C.

**Tabla 28.1.** Permitividades relativas

Medio	$\epsilon_r$
Vacío .....	1,—
Aire .....	1,00059
Parafina .....	2,—
Teflón .....	2,1
Benceno .....	2,3
Poliestireno .....	2,6
Caucho .....	2,94
Mylar .....	3,1
Cuarzo .....	5,—
Baquelita .....	5,50
Mica .....	6,—
Vidrio .....	5-10
Neopreno .....	6-7
Porcelana .....	6-8
Germanio .....	16,—
Glicerina .....	42,50
Agua destilada .....	78,54
Rutilo ( $T_1O_2$ ) .....	90-170
Titanato de Estroncio ( $T_1O_3Sr$ ) .....	310,—
Titanato de Bario ( $T_1O_3Ba$ ) .....	1 200,—
Titanato de Estroncio y Bario ( $2T_1O_3Ba$ ; $1T_1O_3Sr$ ) .....	10 000
Titanato y circonato de Bario ( $4T_1O_3Ba$ ; $1ZrO_3Ba$ ) .....	13 000
Titanato y Estannato de Bario ( $9T_1O_3Ba$ ; $1Sn_3Ba$ ) .....	20 000

## 28.5 Cuantización de la carga

La primera idea de que la carga estaba ligada de alguna manera a la materia es debida a Faraday, quien, en 1832, realizando experiencias sobre electrólisis, encontró que para depositar en un electrodo un mol de cualquier elemento monovalente se necesitaba siempre la misma cantidad de electricidad, que se denomina Faraday y cuyo último valor es:

$$1 F = 96\,485,3415(39) C \times \text{mol}^{-1} \quad [28.6]$$

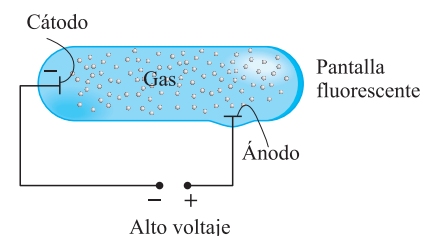
Esto le llevó a suponer que cada ión monovalente lleva ligada, por exceso o por defecto, la misma cantidad de electricidad, que denominamos  $e$ , verificándose

$$1 F = N_A e \quad [28.7]$$

en la que  $N_A$  es el número de Avogadro.

En 1874, G. J. Stoney, determinando el valor del número de Avogadro mediante teoría cinética de gases, establecía que el valor de  $e$  debía ser del orden de  $10^{-20} C$ .

Los rayos catódicos habían sido descubiertos por Plücker, en 1859, al aplicar un alto voltaje entre dos electrodos situados dentro de un tubo que contenía gas a baja presión (Figura 28.3) y fueron investigados por Crookes, encontrando que se desviaban por campos magnéticos, pero fue Jean Perrin, en 1895, quien descubrió que se trataba de partículas de carga negativa. La denominación de electrones para estas partículas parece ser que se debe a Stoney.



**Figura 28.3.** Tubo de descarga.

Joseph J. Thomson (1856-1940) haciendo atravesar un haz de rayos catódicos a través de una región donde había creado un campo eléctrico y otro magnético superpuestos, determinó, en 1897, la relación entre la carga del electrón y su masa,  $e/m$ , según una experiencia que posteriormente estudiaremos. Este valor, actualmente está establecido en:

$$e/m = 1,758820 \times 10^{11} \text{ C} \times \text{kg}^{-1} \quad [28.8]$$

Thomson comprobó que la relación  $e/m$  era constante, independiente del gas introducido en el tubo, lo que pone de manifiesto que el electrón es un elemento constitutivo de toda la materia.

Las famosas experiencias de las gotas de aceite, realizadas por Millikan (1868-1953) y colaboradores, entre los años 1909 y 1913, pusieron de manifiesto que la cantidad de electricidad se presenta siempre en valores múltiplos de uno mínimo,  $e$ , cuyo valor, deducido de las citadas experiencias, era  $1,591 \times 10^{-19} \text{ C}$ . Ello supuso la comprobación inequívoca de que la cantidad de electricidad está cuantizada y sólo puede presentarse en valores múltiplos del valor elemental  $e$ ,  $Q = ne$ .

La determinación del número de Avogadro por difracción de rayos X, cuyo valor aceptado actualmente es:

Número de Avogadro  $N_A = 6,022\ 414\ 99(47) \times 10^{23} \text{ moléculas/mol} \quad [28.9]$

ha permitido determinar  $e$  con mucha mayor precisión, habiéndose obtenido como valor más exacto para la *cantidad elemental de carga eléctrica*,

Carga elemental  $e = 1,602\ 176\ 462(63) \times 10^{-19} \text{ C} \quad [28.10]$

Con este valor y utilizando la [28.8] se obtiene para la masa del electrón el valor:

Masa del electrón  $m_e = 9,109\ 381\ 88(72) \times 10^{-31} \text{ kg} \quad [28.11]$

que en unidades de masa atómica es:

$$m_e = 5,485\ 799\ 2 \times 10^{-4} \text{ u} \quad [28.12]$$

Puesto que la materia, en estado natural, es eléctricamente neutra, es necesaria la existencia de otras partículas, además de los electrones, constitutivas de la misma pero de carga positiva. Goldstein (1850-1931), en 1886, realizando experiencias con rayos catódicos, para lo cual usaba como gas el hidrógeno, comprobó la existencia de otra radiación que salía en sentido contrario a los rayos catódicos, a la que denominó *rayos canales* o *rayos positivos*. Rutherford, en 1911, comprobó que esa radiación estaba formada por partículas de carga positiva, de valor igual a la carga elemental, a las que denominó *protones*. Experiencias recientes han comprobado la igualdad del valor absoluto de la carga del electrón y el protón con una precisión de 1 por  $10^{20}$ .

La relación  $e/m$  para el protón ha sido establecida últimamente en:

$$e/m = 9,578\ 834\ 2 \times 10^7 \text{ C/kg} \quad [28.13]$$

y, por tanto, la masa del protón es:

Masa del protón  $m_p = 1,672\ 621\ 58(13) \times 10^{-27} \text{ kg} \quad [28.14]$

lo que en unidades de masa atómica es:

$$m_p = 1,007\ 276\ 5 \text{ u} \quad [28.15]$$

es decir, 1 836,152 667 5(39) veces la masa del electrón.

En 1930, Bothe y Becker encontraron que varios elementos, como el berilio, el boro o el litio, al ser bombardeados con partículas  $\alpha$  emitían un nuevo tipo de radiación muy penetrante. Recordaremos que las partículas  $\alpha$  son núcleos de átomos de helio, con carga  $+2e$ , formadas por dos protones y dos neutrones, y que se producen en desintegraciones radiactivas. Sus resultados fueron confirmados por Irene Curie y Frederic Joliot, en 1932, pero fue Chadwick quien interpretó adecuadamente los resultados experimentales como debidos a una nueva partícula sin carga alguna, que se denominó *neutrón*, y cuya masa era aproximadamente la del protón. Puede decirse que, en ese momento, da comienzo la era nuclear. Al no estar el neutrón cargado, no puede determinarse para él la relación  $e/m$  por los métodos antes referidos. La masa del neutrón se determina por métodos indirectos basados en reacciones nucleares que luego se verán, habiéndose obtenido el valor:

$$m_n = 1,674\,927\,16(13) \times 10^{-27} \text{ kg} \quad [28.16] \quad \text{Masa del neutrón}$$

que en unidades de masa atómica es:

$$m_n = 1,008\,665 \text{ u} \quad [28.17]$$

Partícula	Masa (kg)	Masa (u)	Carga
Electrón	$9,109\,381\,88 \times 10^{-31} \text{ kg}$	$5,485\,799\,2 \times 10^{-4}$	$-e$
Protón	$1,672\,621\,58 \times 10^{-27} \text{ kg}$	1,007 276 5	$+e$
Neutrón	$1,674\,927\,6 \times 10^{-27} \text{ kg}$	1,008 665	0

Las masas indicadas para cada una de las partículas fundamentalmente corresponden a su estado de reposo. Para pequeñas velocidades comparadas con la velocidad de la luz en el vacío pueden utilizarse prácticamente sin error, pero para velocidades superiores a un décimo de la citada velocidad de la luz, hay que utilizar el valor de la masa dado, en función de la velocidad, por la teoría de la relatividad, según la ley que posteriormente estudiaremos.

La cuantización de la carga es una ley de la naturaleza que no encuentra explicación a partir de hechos más fundamentales. Lo mismo sucede con el hecho de que sean tan exactamente iguales los valores absolutos de las cargas del electrón y el protón.

La explicación de ciertas interacciones entre partículas elementales fue realizada en 1964 por Gell-Mann y Zweig, que introdujeron una nueva clase de partículas, los *quarks*, los cuales serían los constituyentes de protones y neutrones. Postularon la necesidad de dos quarks, que denominaron *up* (arriba), de carga  $+2/3 e$ , que simbolizaron con *u* y *down* (abajo), de carga  $-1/3$ , que simbolizaron con *d*. Así el protón sería *uud* ( $2/3 e + 2/3 e - e = +e$ ) y el neutrón sería *udd* ( $2/3 e - 1/3 e - 1/3 e = 0$ ). A partir de entonces comenzó su búsqueda experimental en los aceleradores de partículas de la universidad de Stanford y del CERN, y posteriormente en el Fermilab, lo que ha dado lugar al conocimiento de seis tipos de quarks, que estudiaremos posteriormente.

## 28.6 Estructura atómica y carga eléctrica

La naturaleza, en su estado normal, es eléctricamente neutra, ya que en dicho estado no hay acciones eléctricas entre los cuerpos. De aquí que los átomos, constituyentes fundamentales de la materia, deban ser neutros, lo que exige tengan igual número de protones que de electrones. A este número se le denomina *número atómico* y se simboliza con *Z*.

Número atómico

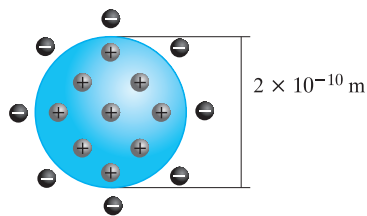


Figura 28.4. Modelo atómico de Thomson.

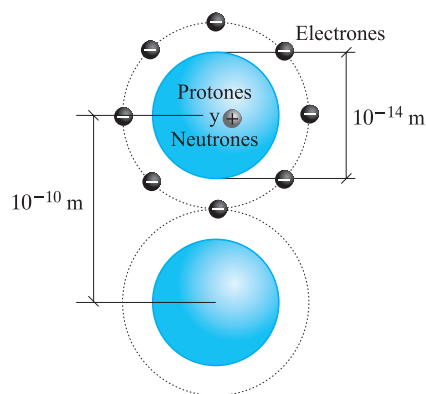


Figura 28.5. Átomo de Rutherford.

### Número másico

### Fuerzas nucleares

Inicialmente fueron propuestos dos modelos atómicos, el *modelo de plasma* y el de *Thomson*. En el primero, se supone a los protones distribuidos por todo el átomo y a los electrones moviéndose entre ellos; en el segundo, los protones están distribuidos uniformemente en el interior de una esfera de un radio aproximado a  $10^{-10}$  m y adosados sobre la superficie de ésta se encuentran los electrones (Figura 28.4).

Para dilucidar la distribución de protones y electrones en el interior del átomo, Rutherford (1871-1937) y sus colaboradores Geiger y Marsden, en 1911, llevaron a cabo una investigación consistente en lanzar haces de partículas  $\alpha$  sobre láminas metálicas muy finas y observar la dispersión que sufrían al atravesar la lámina. Las grandes desviaciones encontradas experimentalmente para las partículas  $\alpha$ , que en algunos casos eran de  $180^\circ$ , no podían ser explicadas por el modelo de plasma, por lo que éste quedó excluido. Análogamente, el modelo de Thomson no pueden justificar los grandes ángulos de dispersión observados experimentalmente. Rutherford dedujo que la carga positiva debía estar concentrada en un *núcleo* muy reducido, alrededor del cual los electrones giraban en órbitas, lo que constituye el *modelo nuclear* del átomo (Figura 28.5).

Las dimensiones del núcleo son del orden de  $10^{-14}$  m y puesto que las dimensiones del átomo son del orden de  $10^{-10}$  m, resulta que el átomo está prácticamente vacío, ya que el 99,9% de su masa está concentrada en un pequeñísimo núcleo.

El átomo más sencillo es el del hidrógeno, que está formado por un solo protón en el núcleo y un solo electrón girando alrededor de él, su número atómico es la unidad. La masa de cualquier otro átomo distinto del hidrógeno resulta ser bastante superior a la correspondiente a sus protones, lo que indica la presencia de neutrones en el núcleo. El número total de partículas (protones + neutrones) en el núcleo se denomina *número másico*, que se simboliza con  $A$ , siendo  $A = Z + N$ . Cualquier elemento,  $X$ , se simboliza de la forma  ${}^A_ZX$  o también  ${}_Z X^A$ .

Se denominan *isótopos* a los átomos que tienen igual número atómico,  $Z_1 = Z_2$ , pero distinto número másico,  $A_1 \neq A_2$ , por tanto tienen distinto número de neutrones; se denominan *isótonos* a los átomos de distinto número atómico,  $Z_1 \neq Z_2$  y distinto número másico, pero igual número de neutrones,  $N_1 = N_2 = Z_1 - A_1 = Z_2 - A_2$  y, finalmente, se denominan *isóbaros*, a los átomos de distinto número atómico,  $Z_1 \neq Z_2$ , pero de igual número másico  $A_1 = A_2$ .

Si dentro del núcleo han de permanecer confinados los protones, puesto que entre ellos, dada su gran proximidad, se ejercerán unas fuerzas electrostáticas repulsivas muy grandes, es forzoso suponer la existencia de otras fuerzas superiores a las de origen eléctrico, responsables de la estabilidad nuclear, a las que se denomina *fuerzas nucleares fuertes*. Piénsese en el uranio 238,  ${}_{92}\text{U}^{238}$ , en cuyo núcleo están confinados 92 protones y 146 neutrones. Estas fuerzas nucleares tienen un radio de acción aproximadamente igual al radio del núcleo,  $10^{-15}$  m.

La interacción nuclear fuerte también es la responsable de la unión de los quarks para formar protones y neutrones. La explicación de cómo actúa la interacción nuclear fuerte la realiza la Cromodinámica Cuántica, teoría que asigna a los quarks una nueva propiedad cuántica, *el color*, y establece que la citada interacción se realiza mediante una nueva partícula, *el gluón*. Éstos también interactúan entre sí y actualmente se considera que ésta puede ser la interacción fundamental.

## 28.7 Conservación de la electricidad

La conservación de la electricidad fue establecida, según ya hemos indicado, por Franklin, en 1747, si bien basada en un modelo de fluido para la electricidad. Ahora puede establecerse de acuerdo con la estructura atómica de la materia. De la estructura atómica expuesta se deduce que la cantidad de electricidad positiva de un

cuerpo es constante, e igual a la suma de las cargas de sus núcleos atómicos. Por tanto, solamente podemos hablar de exceso o defecto de electricidad negativa.

Según la estructura atómica de la materia, ésta puede ser ávida de electrones o puede cederlos con facilidad. Un cuerpo que haya tomado electrones, estará cargado negativamente y un cuerpo que los haya cedido habrá quedado cargado positivamente. En consecuencia, en un sistema cerrado, la electricidad se conserva porque los electrones que pierde un cuerpo, al quedarse cargado positivamente, deben pasar a otro cuerpo que adquiere la misma carga negativa. Así, al frotar la ebonita con un paño de lana, arranca electrones de éste y los toma ella, quedando cargada negativamente mientras el paño queda con la misma carga positiva. Por el contrario, al frotar el vidrio con un paño de seda cede fácilmente electrones, quedando cargado positivamente y pasando aquellos al paño con que se ha frotado.

## 28.8 Campo eléctrico

En una región del espacio se dice que existe un campo eléctrico cuando una carga eléctrica colocada en aquélla está sometida a fuerzas de origen eléctrico.

Se define el vector *intensidad del campo eléctrico* o simplemente el *campo eléctrico en un punto*, como la fuerza de origen eléctrico que se ejerce sobre la unidad de carga positiva colocada en ese punto. Lo simbolizaremos con  $\mathbf{E}$  y será:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \quad [28.18] \quad \text{Campo eléctrico}$$

Su ecuación de dimensiones es  $[\dim \mathbf{E}] = \text{MLT}^{-2}\text{Q}^{-1}$ , utilizándose como unidad en el S.I. al newton/culombio y también al voltio/metro, unidad ésta que justificaremos más adelante. El concepto de «campo» fue establecido por Faraday, en contraposición con el concepto de *acción a distancia*, y desarrollado por Maxwell. No es un formalismo matemático, sino que su existencia es real en cada punto del espacio y no tiene por qué estar asociada a las cargas eléctricas, como sucede en las ondas electromagnéticas. La causa o fuente del campo eléctrico en electrostática es únicamente la carga eléctrica, pero posteriormente veremos cómo la variación de un campo magnético en el tiempo también es fuente de un campo eléctrico. La fuerza que el campo ejerce sobre una carga  $q'$ , es, por definición de campo eléctrico:

$$\mathbf{F} = q' \mathbf{E}$$

Por otra parte, la [28.3] nos da la fuerza que sobre la carga  $q'$  ejerce la carga  $q$  situada a una distancia  $r$  de ella en el vacío,

$$\mathbf{F} = q' \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{u}_r \right)$$

De la comparación de las dos últimas expresiones se deduce que es:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{u}_r \quad [28.19]$$

expresión que nos da el valor del campo eléctrico creado por una carga puntual  $q$  colocada en el vacío.

Tomando el origen del sistema de referencia en el punto ocupado por la carga que crea el campo, la expresión de éste en un punto genérico del espacio  $P(x, y, z)$ , definido por el vector de posición  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  (Figura 28.6), es:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r} \quad [28.20]$$

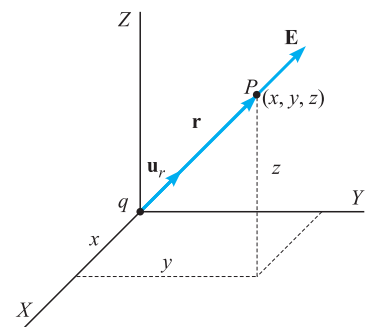


Figura 28.6. Campo creado por una carga puntual.

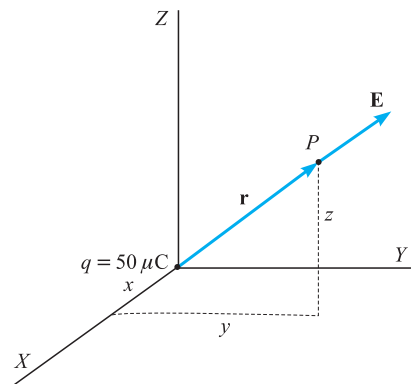


Figura 28.7. Campo creado por la carga q.

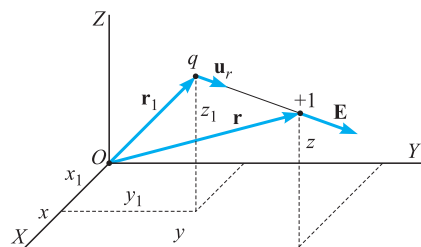


Figura 28.8. Campo creado por una carga puntual.

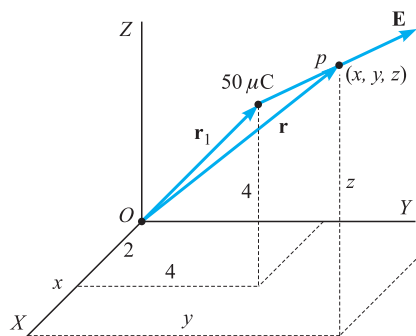


Figura 28.9.

### EJEMPLO 28.1

Campo creado por una carga puntual de  $50 \mu\text{C}$ .

#### Solución:

Tomemos el origen del sistema de referencia en el punto ocupado por la carga. El campo en un punto genérico  $P(x, y, z)$  (Figura 28.7) es:

$$\mathbf{E} = K \frac{q}{r^3} \mathbf{r} = 9 \times 10^9 \frac{50 \times 10^{-6}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

En un punto concreto del espacio, por ejemplo el  $P(1, 2, 2)$ , el campo es:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= 9 \times 10^9 \frac{50 \times 10^{-6}}{9^3} (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \frac{5}{81} \times 10^4 (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \cong \\ &\cong 617,284(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \text{ N/C} \end{aligned}$$

Si la carga  $q$  que crea el campo está localizada en el punto  $P_1(x_1, y_1, z_1)$ , cuyo vector de posición es  $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ , el valor del campo en el punto  $P(x, y, z)$ , posicionado por el vector  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  (Figura 28.8), es:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \quad [28.21]$$

### EJEMPLO 28.2

Campo creado por una carga puntual de  $50 \mu\text{C}$ , situada en el punto  $P_1(2, 4, 4)$ .

#### Solución:

El campo eléctrico creado es:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= K \frac{q}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = \\ &= 9 \times 10^9 \frac{50 \times 10^{-6}}{[(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2]^{3/2}} [(x-2)\mathbf{i} + (y-4)\mathbf{j} + (z-4)\mathbf{k}] = \\ &= 45 \times 10^4 \frac{(x-2)\mathbf{i} + (y-4)\mathbf{j} + (z-4)\mathbf{k}}{[(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

En un punto concreto del espacio, como por ejemplo el  $P_1(1, 6, 2)$ , (Figura 28.9) el valor del campo es:

$$\begin{aligned} E &= 45 \times 10^4 \frac{-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{9^3} = \frac{5 \times 10^4}{81} (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \\ &= 617,284(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \end{aligned}$$

## 28.9 Principio de superposición

En general, el campo no es creado por una sola carga puntual. Para determinar el campo en un punto, cuando éste está creado por varias cargas puntuales, hay que establecer el denominado «principio de superposición»: *El campo creado en un punto por varias cargas puntuales, es igual a la suma vectorial de los campos creados en ese punto por cada una de las cargas.* Este principio, que como tal no puede ser establecido a partir de conceptos más básicos, es confirmado por la experiencia.

Según este principio, el campo eléctrico creado en un punto  $P(x, y, z)$ , cuyo vector posición es  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , por un conjunto de cargas  $q_i$ , localizadas respectivamente en los puntos  $P_i(x_i, y_i, z_i)$ , posicionados por los vectores  $\mathbf{r}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k}$ , respectivamente, será la suma de los campos creados en el citado punto por cada una de las cargas  $q_i$ , es decir:

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad [28.22]$$

### EJEMPLO 28.3

Calculemos el campo eléctrico creado en el punto  $P(1, 1, 1)$ , por tres cargas puntuales iguales de valor  $q$ , situadas respectivamente en los puntos  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$  y  $C(0, 0, 1)$ .

#### Solución:

El vector de posición del punto  $P$  (Figura 28.10), es  $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$  y los vectores de posición de cada una de las cargas que crean el campo son  $\mathbf{r}_A = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{r}_B = \mathbf{j}$  y  $\mathbf{r}_C = \mathbf{k}$ .

El campo eléctrico en  $P$  está dado por la expresión:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

Puesto que son,

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_A = \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_A| = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_B = \mathbf{i} + \mathbf{k}, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_B| = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_C = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_C| = \sqrt{2}$$

y  $q_A = q_B = q_C = q$ , resulta:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2\sqrt{2}} 2(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = \frac{q}{4\pi\sqrt{2}\epsilon_0} (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

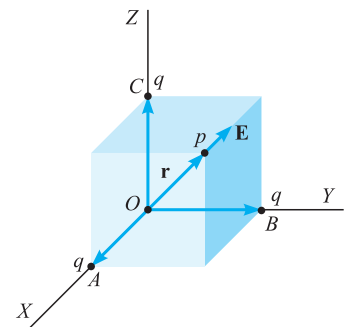


Figura 28.10. Campo creado por una disposición de cargas.

## 28.10 Campo creado por una distribución continua de carga

Cuando la carga eléctrica está distribuida de forma continua, bien sea en un volumen, en una superficie o en una línea, el campo creado por ella en un punto del espacio puede obtenerse a partir del creado por una carga puntual y del principio de superposición.

Ya hemos indicado que la carga eléctrica se presenta de forma estable en la naturaleza en cantidades múltiples de la carga elemental  $e$ . Al ser este valor tan sumamente pequeño, cualquier carga macroscópica, por pequeña que sea, es un múltiplo muy grande de  $e$  y la discontinuidad de la carga no tiene efecto en la realidad macroscópica. Por ello podemos hablar de distribución continua de carga a nivel macroscópico.

Consideremos un elemento de carga  $dq$ , que puede suponerse puntual, el campo creado por ella será un campo elemental,  $d\mathbf{E}$ , cuya expresión es:

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \mathbf{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dq \quad [28.23]$$

Siendo  $\mathbf{r}$  el vector que va desde la carga que crea el campo al punto del campo.

Analicemos cada uno de los tres casos posibles: distribución de carga lineal, distribución de carga superficial y distribución de carga espacial.

### Distribución de carga lineal

Si la distribución continua de cargas está sobre una línea (Figura 28.11), la cantidad elemental de electricidad puede escribirse  $dq = \lambda ds$ , siendo  $\lambda$  la *densidad lineal de carga eléctrica* o cantidad de electricidad por unidad de longitud (C/m) y  $ds$  la diferencial de arco. Con ella el campo elemental  $d\mathbf{E}$  se expresa:

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{r^2} \mathbf{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \lambda ds$$

El campo total es la superposición de los infinitos campos elementales creados por las infinitas cargas  $dq$  de la línea cargada, es decir,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\lambda \mathbf{u}_r}{r^2} ds = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \lambda \frac{\mathbf{r}}{r^3} ds \quad [28.24]$$

Si la línea está cargada homogéneamente, todos los elementos de arco tienen igual  $\lambda$ , expresándose:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\mathbf{u}_r}{r^2} ds = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\mathbf{r}}{r^3} ds \quad [28.25]$$

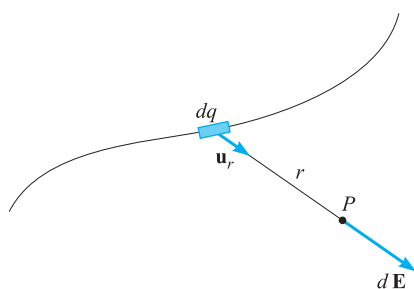


Figura 28.11. Campo creado por una distribución de carga lineal.

### EJEMPLO 28.4 Hilo infinitamente largo cargado homogéneamente

Hallemos el campo eléctrico creado por un hilo recto infinitamente largo cargado uniformemente con una densidad lineal de carga  $\lambda$ .

#### Solución:

El campo presentará simetría axial alrededor del hilo y su módulo será función únicamente de su distancia a este (Figura 28.12).

El elemento de carga  $dq$  crea en el punto  $P$  un campo elemental cuyo módulo es:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$$

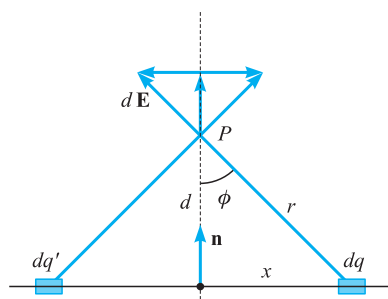


Figura 28.12. Campo creado por un hilo cargado.



El elemento de carga  $dq'$ , simétrico del anterior, crea en el mismo punto un campo simétrico. Por tanto, el campo en  $P$  no tiene componente según la dirección del hilo, únicamente tendrá componente según la normal a este.

La componente sobre la normal al hilo, del campo creado en  $P$  por el elemento de carga  $dq$ , puede escribirse de la forma:

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cos \phi \frac{dq}{r^2} \mathbf{n}$$

siendo  $\mathbf{n}$  el vector unitario de la dirección normal al hilo.

Puesto que es:

$$\cos \phi = \frac{d}{r} \quad \text{y} \quad r = \sqrt{d^2 + x^2}$$

se escribe,

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{(d^2 + x^2)^{3/2}} \lambda dx \mathbf{n}$$

Para la integración conviene hacer el cambio de variable  $x = d \tan \varphi$ , con lo cual es

$$dx = \frac{d}{\cos^2 \varphi} d\varphi \quad \text{y} \quad (d^2 + x^2)^{3/2} = \frac{d^3}{\cos^3 \varphi}$$

resultando:

$$d\mathbf{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} \cos \varphi d\varphi \mathbf{n}$$

cuya integración entre  $-\frac{\pi}{2}$  y  $\frac{\pi}{2}$  da:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \mathbf{n}$$

En consecuencia, es un campo radial, de simetría axial alrededor del hilo que crea el campo y cuyo módulo es inversamente proporcional a la distancia al hilo. Para  $d \rightarrow 0$  el campo tiende a infinito y para  $d \rightarrow \infty$  el campo tiende a cero. En la Figura 28.13 se representa la variación del campo con la distancia al hilo.

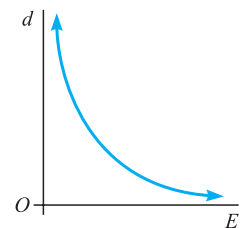


Figura 28.13. Variación de  $E$  con la distancia al hilo.

### EJEMPLO 28.5 Anillo con carga uniforme

Calculemos el campo eléctrico creado en un punto de su eje por una circunferencia de radio  $R$  cargada uniformemente con una densidad lineal  $\lambda$ .

#### Solución:

El elemento de carga  $dq$  (Figura 28.14) produce el campo elemental,

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \mathbf{u}_r$$

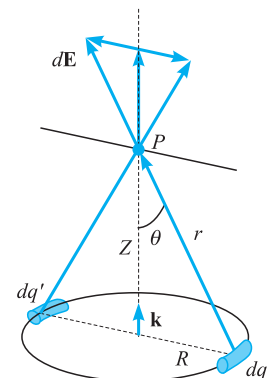


Figura 28.14. Campo creado por un anillo cargado.

y el elemento de carga simétrico del anterior respecto al centro de la circunferencia, producirá un campo simétrico. Las componentes de ambos sobre el plano de la circunferencia se anulan y las componentes sobre el eje se suman.

Por tanto, únicamente consideraremos la componente sobre el eje del campo creado por el elemento de carga  $dq$ , la cual, en el sistema de referencia elegido, se escribe:

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cos \theta \frac{dq}{r^2} \mathbf{k}$$

y teniendo en cuenta que es  $\cos \theta = \frac{z}{r}$  y  $r = (R^2 + z^2)^{1/2}$  se expresa:

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} dq \mathbf{k}$$

que al integrar da:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int dq \mathbf{k} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k}$$

siendo  $Q = 2\pi R\lambda$  la carga total de la circunferencia, pudiendo también escribirse,

$$\mathbf{E} = \frac{R\lambda}{2\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k}$$

Para  $z = 0$  es  $E = 0$  y para  $z \rightarrow \infty$  aparece una indeterminación, que al eliminarla resulta que  $E \rightarrow 0$ .

Los máximos del campo están dados por:

$$\frac{dE}{dz} = \frac{R\lambda}{2\epsilon_0} \frac{(R^2 + z^2)^{3/2} - z(3/2)(R^2 + z^2)^{1/2}2z}{(R^2 + z^2)^3} = 0$$

cuya solución es:

$$z = \pm \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

En consecuencia, el módulo del campo varía en función de  $z$  según se indica en la Figura 28.15.

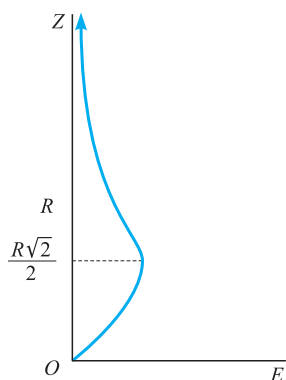


Figura 28.15. Variación de  $E$  con la distancia al centro.

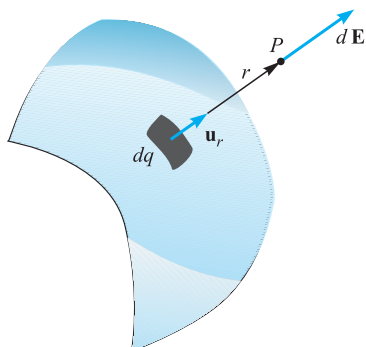


Figura 28.16. Campo creado por una distribución superficial de carga.

### Distribución superficial de carga

En una distribución continua de carga sobre una superficie, el elemento de carga se expresa  $dq = \sigma dA$ , siendo  $\sigma$  la densidad superficial de carga o cantidad de electricidad por unidad de superficie ( $C/m^2$ ) y  $dA$  el elemento de área (Figura 28.16). Con ello, la [28.23] se expresa:

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \mathbf{u}_r}{r^2} dA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \sigma dA$$

y el campo total, superposición de los infinitos campos elementales, es:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma \mathbf{u}_r}{r^2} dA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma \mathbf{r}}{r^3} dA \quad [28.26]$$

Si la superficie está cargada homogéneamente, resulta:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\mathbf{u}_r}{r^2} dA = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\mathbf{r}}{r^3} dA \quad [28.27]$$

**EJEMPLO 28.6** Disco cargado uniformemente

Calculemos el campo eléctrico creado en un punto de su eje por un círculo de radio  $R$  cargado uniformemente con una densidad superficial de carga  $\sigma$ .

**Solución:**

Por la simetría de la carga alrededor del eje, el campo en un punto de este tendrá la dirección del eje (Figura 28.17). Como elemento de carga tomaremos la contenida en una corona circular de radios  $r$  y  $r + dr$ , es decir,  $dq = 2\pi r\sigma dr$ .

El campo creado por esta carga elemental puede obtenerse utilizando el resultado del ejemplo anterior,

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z2\pi r\sigma dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{rz dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k}$$

El campo total se obtiene integrando desde  $r = 0$  hasta  $r = R$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^R (r^2 + z^2)^{-3/2} r dr \mathbf{k} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} [(r^2 + z^2)^{-1/2} (-1)]_{r=0}^R \mathbf{k} = \\ &= \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{z} - \frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right] \mathbf{k} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right] \mathbf{k} \end{aligned}$$

Para  $z = 0$  el valor del campo es:

$$\mathbf{E}_0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{k}$$

Para  $z \rightarrow \infty$  el campo tiende a cero. Por otra parte puesto que es:

$$\frac{dE}{dz} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

el campo disminuye uniformemente desde el valor  $E_0$  hasta anularse en el infinito. En la Figura 28.18 se representa la variación de  $E$  con la distancia al centro.

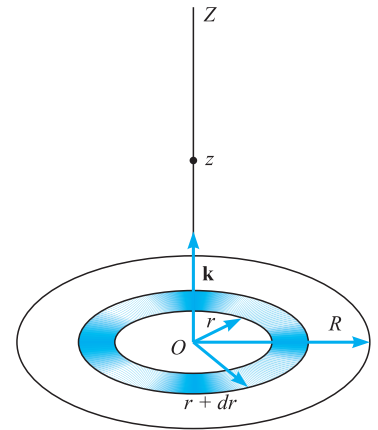


Figura 28.17. Campo creado por un disco cargado.

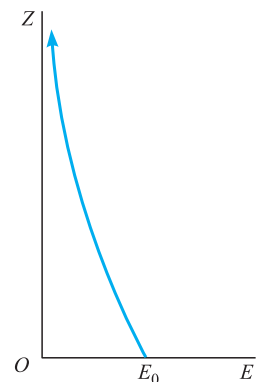


Figura 28.18. Variación de  $E$  con la distancia al centro.

**EJEMPLO 28.7** Plano cargado uniformemente

Calculemos el campo eléctrico creado por un plano cargado con una densidad superficial de carga  $\sigma$ .

**Solución:**

Podemos resolver este ejemplo utilizando el resultado obtenido en el ejemplo anterior, ya que si en aquél hacemos tender  $R$  a infinito obtenemos un plano con densidad superficial de carga  $\sigma$ . Por tanto será:

$$E = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \right] \mathbf{k} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{k}$$

que es un campo de módulo constante en todos los puntos del espacio, de dirección normal al plano y sentido dirigido hacia este, si la carga es negativa o en sentido contrario, si la carga es positiva.

**EJEMPLO 28.8 Superficie esférica con carga uniforme**

Calculemos el campo eléctrico creado por una superficie esférica de radio  $R$ , cargada uniformemente con una densidad superficial de carga  $\sigma$ .

**Solución:**

Consideremos la carga contenida en un anillo como el indicado en la Figura 28.19, y dentro de él tomemos la carga  $dq = \sigma dA = \sigma ds dl$ . Ésta creará en  $P$  un campo con dos componentes, una radial y otra transversal.

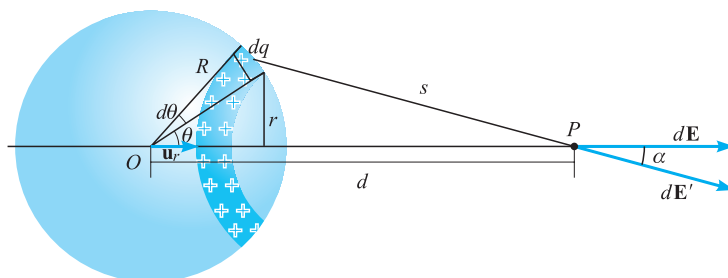


Figura 28.19. Campo creado por una superficie esférica cargada.

Por la simetría axial de la figura, siempre hay un elemento de carga simétrico del anterior que crea un campo en  $P$ , cuya componente transversal anula a la del anterior. Por tanto, para hallar el campo en  $P$  debido a todas las cargas del anillo, únicamente debemos sumar las componentes radiales,

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{s^2} \cos \alpha \mathbf{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma ds dl}{s^2} \cos \alpha \mathbf{u}_r$$

y el campo elemental debido a todas las cargas del anillo es:

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma ds}{s^2} \cos \alpha \int dl \mathbf{u}_r = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r \cos \alpha}{s^2} ds \mathbf{u}_r$$

Al ser  $R^2 = s^2 + d^2 - 2sd \cos \alpha$ , es  $\cos \alpha = (s^2 + d^2 - R^2)/2sd$ . Asimismo es  $s^2 = R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta$ , y puesto que es  $R \sin \theta = r$  y  $ds = R d\theta$ , resulta  $r = Rs/d$ , con lo cual el campo elemental, debido a todas las cargas del anillo es:

$$\begin{aligned} d\mathbf{E} &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{sR}{ds^2} \frac{s^2 + d^2 - R^2}{2sd} ds \mathbf{u}_r = \frac{\sigma R}{4\epsilon_0} \frac{s^2 + d^2 - R^2}{s^2 d^2} ds \mathbf{u}_r = \\ &= \frac{\sigma R}{4\epsilon_0 d^2} \left( 1 + \frac{d^2 - R^2}{s^2} \right) ds \mathbf{u}_r \end{aligned}$$

El campo total en  $P$  debido a todas las cargas de la superficie esférica se halla integrando la expresión anterior entre los límites  $s_1 = d - R$  y  $s_2 = d + R$ , lo cual da:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma R}{4\epsilon_0 d^2} \left( s - \frac{d^2 - R^2}{s} \right)_{d-R}^{d+R} \mathbf{u}_r = \frac{\sigma R}{4\epsilon_0 d^2} 4R \mathbf{u}_r = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 d^2} \mathbf{u}_r$$

La carga total de la superficie esférica es  $Q = 4\pi R^2 \sigma$  y el campo en función de ella se expresa:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d^2} \mathbf{u}_r$$

Por tanto, es el mismo que el debido a una carga puntual  $Q$  situada en el centro.

Si el punto  $P$  estuviera en el interior de la superficie esférica todo se haría de forma idéntica, pero los límites de integración variarían entre  $R - d$  y  $R + d$ , con lo cual la integral resultaría nula y el campo sería nulo para todo punto en el interior de la superficie esférica.

## Distribución espacial de carga

Para una distribución continua de carga en un volumen (Figura 28.20), el elemento de carga se expresa  $dq = \rho dV$ , siendo  $\rho$  la densidad espacial de carga o cantidad de electricidad por unidad de volumen ( $C/m^3$ ) y  $dV$  el elemento de volumen. Con ello la [28.23] se escribe:

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \mathbf{u}_r}{r^2} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \rho dV$$

y el campo total:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho \mathbf{u}_r}{r^2} dv = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\mathbf{r}}{r^3} \rho dv \quad [28.28]$$

Si el volumen está cargado homogéneamente resulta:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\mathbf{u}_r}{r^2} dv = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\mathbf{r}}{r^3} dv \quad [28.29]$$

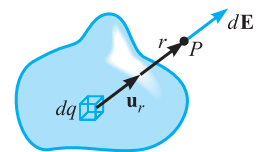


Figura 28.20. Campo creado por una distribución espacial de carga.

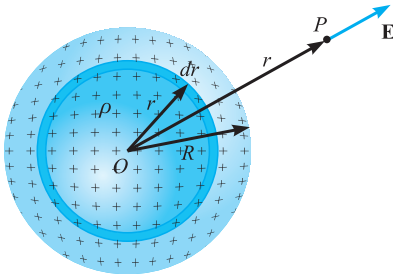


Figura 28.21. Campo creado por una esfera uniformemente cargada.

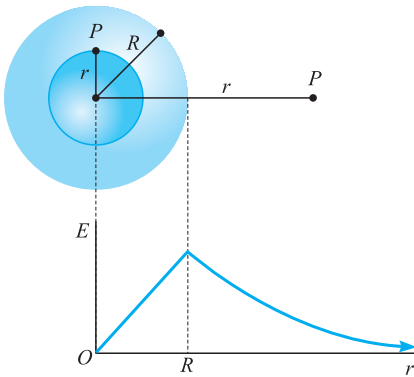


Figura 28.22. Campo creado por una esfera cargada.

### EJEMPLO 28.9 Esfera cargada con densidad espacial constante

Calculemos el campo eléctrico creado por una esfera de radio  $R$ , cargada uniformemente con una densidad especial de carga  $\rho$ .

#### Solución:

Podemos considerar la esfera cargada como una serie de infinitas coronas esféricas cargadas de espesor infinitesimal, asimilables a superficies esféricas (Figura 28.21), y aplicar a cada una de ellas el resultado del ejemplo anterior; según el cual, el valor del campo para puntos exteriores a la superficie es el mismo que el creado por la carga colocada en el centro como carga puntual, es decir,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \mathbf{u}_r \quad \text{para } r \geq R$$

siendo  $Q = \frac{4}{3} \pi R^2 \rho$ .

Si el punto  $P$  está en el interior de la esfera cargada,  $r < R$ , el campo en  $P$  será el debido únicamente a las cargas encerradas por la esfera que pasa por  $P$ , cuyo radio es  $r$ , ya que toda superficie esférica cargada da un campo nulo en su interior. La carga encerrada por la esfera de radio  $r$  es:

$$Q' = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho = Q \frac{r^3}{R^3}$$

y, por tanto, el campo en  $P$  será:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'}{r^2} \mathbf{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3} \mathbf{u}_r$$

En la Figura 28.22 se representa la variación del módulo del campo con la distancia al centro de la esfera.

## 28.11 Líneas del campo eléctrico

Las líneas del campo eléctrico se definen exactamente igual que las líneas de fuerza de los campos de fuerzas, no en vano el campo eléctrico es un campo de fuerzas, que son las fuerzas que aquél ejerce sobre la unidad positiva de carga. Por tanto, definiremos las *líneas del campo eléctrico* como *aquellas que en cada punto son tangentes al vector campo eléctrico en ese punto*, es decir, verifican la ecuación:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \quad [28.30]$$

Ésta no es más que la condición de paralelismo entre los vectores diferencial de arco, que es tangente a la línea, y el campo eléctrico en ese punto (Figura 28.23).

Puesto que el vector campo eléctrico es único en cada punto del espacio, las líneas de fuerza no pueden cortarse y, en consecuencia, por cada uno de aquellos sólo pasa una línea.

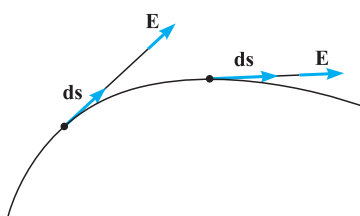


Figura 28.23. Líneas del campo.

En la Figura 28.24 se representan las líneas del campo creado por cargas puntuales.

## 28.12 Flujo. Teorema de Gauss

### Definición de flujo

Se define el flujo elemental de un campo, en este caso de un campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , a través de un elemento de superficie  $d\mathbf{A}$  (Figura 28.25), mediante la expresión:

$$d\phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \quad [28.31]$$

siendo  $d\mathbf{A}$  un vector de módulo  $dA$ , con la misma dirección y sentido de la normal positiva a la superficie en el elemento de área considerado. Llamando  $\mathbf{n}$  al vector unitario normal a la superficie en el elemento de área considerado, es  $d\mathbf{A} = dA \mathbf{n}$ , y la expresión del flujo elemental puede escribirse:

$$d\phi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dA \quad [28.32]$$

El flujo total del campo, a través de toda la superficie  $S$ , se expresa:

$$\phi = \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dA \quad [28.33]$$

La ecuación de dimensiones del flujo es  $[\phi] = [\mathbf{E}]L^2 = ML^3T^{-2}Q^{-1}$  y su unidad verificará  $U(\phi) = U(\mathbf{E})L^2$ , que en el S.I. es:

$$U(\phi) = \frac{N}{C} m^2 = \frac{V}{m} m^2 = Vm$$

la cual no tiene nombre especial.

### Teorema de Gauss

Calculemos el flujo del campo eléctrico creado por una carga puntual  $q$ , a través de una superficie cerrada que la contiene en su interior (Figura 28.26). Teniendo en cuenta que el valor del campo creado por la carga  $q$  es el dado por la [28.19], la [28.32] se escribe:

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{n}) dA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cos \varphi dA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} d\Omega$$

En la que  $d\Omega$  es la superficie interceptada sobre una esfera de radio  $r$  y centro  $q$ , por la pirámide de vértice en  $q$  y base  $dA$ .

Esa misma pirámide, sobre una esfera de radio unidad y centro en  $q$ , interceptará una superficie  $dw$ , a la cual se denomina *ángulo sólido* correspondiente al elemento  $dA$  para el punto  $q$ . Las superficies  $d\Omega$  y  $dw$  son semejantes y su razón será igual al cuadrado de la de semejanza  $dw/d\Omega = 1/r^2$ . Con ello el flujo elemental se escribe:

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q dw$$

que integrada para toda la superficie, da:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \int_0^{4\pi} dw = \frac{q}{\epsilon_0} \quad [28.34]$$

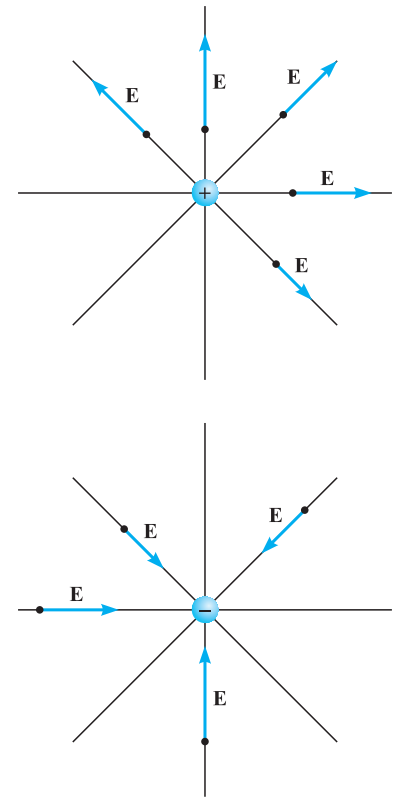


Figura 28.24. Líneas del campo creado por cargas puntuales.

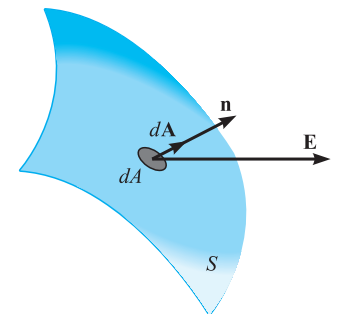


Figura 28.25. Flujo elemental.

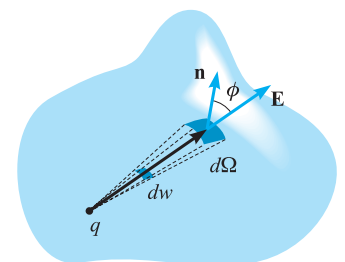


Figura 28.26. Flujo a través de una superficie cerrada.

Si la superficie encierra a un conjunto de  $n$  cargas  $q_i$ , el flujo total será la suma de los flujos creados por cada uno de los campos  $\mathbf{E}_i$ ,

$$\phi = \sum_i \phi_i = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad [28.35]$$

Por tanto, *el flujo a través de una superficie cerrada, del campo eléctrico creado por las cargas encerradas en su interior, es igual al valor de esa carga dividido por la constante dieléctrica*, lo que constituye el Teorema de Gauss, que se expresa:

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad [28.36]$$

Si la carga contenida en el interior de la superficie cerrada,  $S$ , está distribuida en un volumen finito,  $V$ , de densidad espacial de carga  $\rho$ , el Teorema de Gauss se expresa:

Teorema de Gauss

$$\oiint_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dA = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV \quad [28.37]$$

que es la forma integral del citado teorema y que constituye una de las ecuaciones fundamentales del campo eléctrico.

### 28.13 Circulación del campo eléctrico. Potencial

Se define la circulación de un campo, en este caso del eléctrico  $\mathbf{E}$ , a lo largo de una línea, mediante la expresión:

$$C = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad [28.38]$$

siendo  $d\mathbf{r}$  el elemento de arco de la línea y  $\mathbf{E}$  el campo en ese elemento.

Debemos hacer notar la analogía de la circulación con el trabajo, ya que  $\mathbf{E}$  es la fuerza que ejerce el campo sobre la unidad positiva de carga, por tanto, la circulación es el trabajo realizado por el campo para mover la unidad positiva de carga.

Si el campo eléctrico está producido por una carga puntual  $q$ , que supondremos situada en el origen de coordenadas, la circulación de aquél a lo largo de una curva, entre los puntos 1 y 2 de la misma (Figura 28.27), es,

$$\begin{aligned} C_1^2 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_1^2 \frac{1}{r^2} \mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_1^2 \frac{1}{r^2} \cos \varphi |d\mathbf{r}| = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_1^2 \frac{1}{r^2} d\mathbf{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right)_1^2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \end{aligned}$$

Esto pone de manifiesto que la circulación del campo eléctrico a lo largo de una curva, entre los puntos 1 y 2 de la misma, es igual a la diferencia entre los valores que toma la función  $V$  en los puntos 1 y 2,

Potencial

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad [28.39]$$

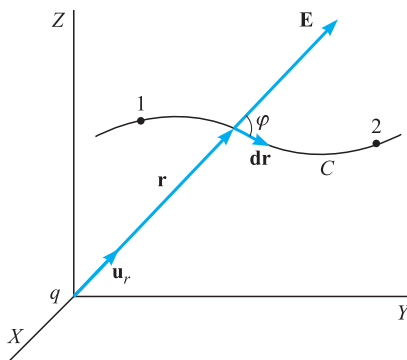


Figura 28.27. Circulación del campo eléctrico.



es decir:

$$C_1^2 = V_1 - V_2 = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad [28.40]$$

En consecuencia, la circulación del campo  $\mathbf{E}$  no depende de la trayectoria seguida para pasar del punto 1 al 2, y por ello el campo  $\mathbf{E}$ , creado por una carga puntual es potencial, siendo su potencial la [28.39].

La Ecuación [28.40] establece que *la diferencia de potencial entre dos puntos del campo eléctrico es igual al trabajo realizado por el campo para llevar la unidad positiva de carga del uno al otro.*

El concepto de «potencial» fue introducido en 1828 por George Green (1793-1841), en su trabajo *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*.

La ecuación de dimensiones del potencial se puede deducir utilizando la expresión [28.39], ya que las dimensiones de  $\epsilon_0$  son conocidas. También pueden deducirse de la [28.40], ya que las de  $E$  son conocidas, resultando:

$$[V] = ML^2T^{-2}Q^{-1} = [W]Q^{-1}$$

La unidad de potencial será igual a la unidad de trabajo dividida por la unidad de carga. En el sistema internacional, la unidad de potencial eléctrico es el *voltio* (V), que es *la diferencia de potencial existente entre dos puntos de un campo eléctrico tales que para llevar un culombio de uno a otro se necesita realizar el trabajo de un julio.*

$$1 \text{ V} = 1 \text{ J} \cdot \text{C}^{-1}$$

De aquí se deduce que es  $V = N \cdot m \cdot C^{-1}$  o  $V/m = N/C$ , por lo cual, el campo eléctrico también puede medirse en  $V/m$ , según habíamos adelantado.

El trabajo realizado por el campo para llevar una carga  $q$  de un punto  $A$  a otro  $B$ , de potenciales  $V_A$  y  $V_B$ , respectivamente, es:

$$W_{AB} = q(V_A - V_B) \quad [28.41] \quad \text{Trabajo realizado por el campo}$$

La Ecuación [28.40] permite elegir un origen de potenciales. En el caso de que los puntos del infinito no tengan carga pueden elegirse los puntos del infinito como de potencial nulo,  $V_\infty = 0$ , con lo cual, el potencial en un punto  $P$  del espacio es:

$$C_P^\infty = V_P - V_\infty = V_P \quad [28.42]$$

Por tanto, *el potencial en un punto del espacio es igual al trabajo realizado por el campo para llevar la unidad positiva de carga desde ese punto al infinito.* Su valor es:

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right)_P^\infty = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_P}$$

Como en todo campo potencial, aquí también será  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ , lo que puede comprobarse fácilmente utilizando la expresión [28.20], con  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  y  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ , de la siguiente forma:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{r^3} & \frac{y}{r^3} & \frac{z}{r^3} \end{vmatrix} = 0$$

ya que son:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{z}{r^3} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{y}{r^3} \right) = -\frac{3yz}{r^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{z}{r^3} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{x}{r^3} \right) = -\frac{3xz}{r^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{r^3} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{r^3} \right) = -\frac{3xy}{r^5}$$

También, como en todo campo potencial se verificará:

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad [28.43]$$

que se desdobra en las tres escalares

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad [28.44]$$

las cuales posibilitan el cálculo del campo si es conocido el potencial. Así, por ejemplo, para el potencial dado por la [28.39] son:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{r^3}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3}$$

y el campo se expresa:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} = -\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3} \mathbf{i} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{r^3} \mathbf{j} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3} \mathbf{k} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \end{aligned}$$

que coincide, como así debe ser, con la [28.20].

Asimismo, también las superficies equipotenciales  $V(r) = V(x, y, z) = a$ , y las líneas del campo, tendrán propiedades completamente análogas a las indicadas para los campos de fuerzas conservativos. *Las líneas del campo serán normales en cada punto a la superficie equipotencial que pasa por ese punto, y el sentido del vector campo será el de los potenciales decrecientes.*

Las ecuaciones diferenciales de las líneas del campo pueden escribirse de la forma:

$$\text{Líneas del campo} \quad \frac{dx}{\frac{\partial V}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial V}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial V}{\partial z}} \quad [28.45]$$

Puesto que, según hemos visto, el campo electrostático es potencial, su circulación a lo largo de una curva cerrada será nula.

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad [28.46]$$

## 28.14 Distribución de cargas en los conductores

Si en un conductor cargado no hay desplazamiento de cargas en su interior, y puesto que el conductor permite el movimiento de éstas, podemos asegurar que la fuerza que actúa sobre las cargas es nula, es decir, el campo en el interior es nulo,  $\mathbf{E} = 0$ . De la [28.44] se deduce que el potencial es constante, por tanto el interior de un conductor cargado y en equilibrio electrostático es un volumen equipotencial, siendo su superficie libre una superficie equipotencial.

El Teorema de Gauss aplicado a una superficie cerrada cualquiera contenida en el interior del conductor (Figura 28.28) da:

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

lo que exige, puesto que es  $E = 0$ , que sea también  $\rho = 0$  y, en consecuencia, *no hay carga alguna en el volumen del conductor, todas ellas se distribuyen sobre su superficie*.

Si el conductor es hueco, es válido todo lo indicado; el espacio ocupado por el conductor es un volumen equipotencial, sus dos superficies libres serán equipotenciales, y en su cavidad el campo será nulo, comportándose el conductor como una pantalla electrostática. Toda su carga estará en la superficie exterior.

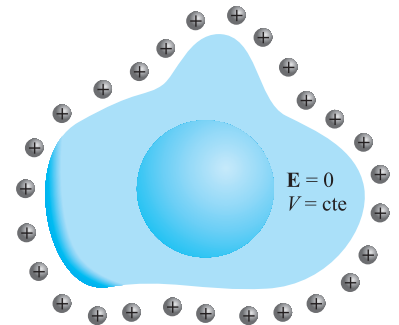


Figura 28.28. Distribución de cargas en un conductor.

## 28.15 Aplicaciones del Teorema de Gauss. Cálculo de campos y potenciales

Veamos algunos casos de aplicación del Teorema de Gauss al cálculo de campos eléctricos creados por algunas distribuciones de carga más frecuentes y calculemos los potenciales correspondientes por aplicación de la [28.40] o la [28.43].

### Campo y potencial creados por un hilo cargado

Consideremos un cilindro de radio  $r$  y altura  $h$ , coaxial con el hilo (Figura 28.29). El campo creado por la carga del hilo en un punto de la superficie cilíndrica considerada, por la simetría existente, será normal a esta y el valor de su módulo será el mismo en todos los puntos de ella. En consecuencia, el flujo del campo puede expresarse:

$$\phi = \oiint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oiint_A E dA = E \oiint_A dA = E \cdot 2\pi rh$$

y de acuerdo con el Teorema de Gauss, podemos escribir:

$$E \cdot 2\pi rh = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

siendo  $\lambda$  la densidad lineal de carga eléctrica del conductor. En consecuencia, el campo es:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \mathbf{u}_r \quad [28.47]$$

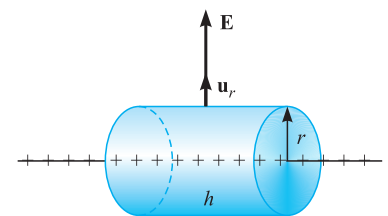


Figura 28.29. Campo y potencial creados por un hilo cargado.

El cálculo del potencial puede hacerse por aplicación de la [28.40] y, puesto que la circulación no depende del camino, la calcularemos a lo largo de una línea recta normal al hilo, para la cual es  $d\mathbf{r} = dr\mathbf{u}_r$ , escribiéndose:

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 E dr = \int_1^2 \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} |\ln r|_{r_1}^{r_2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad [28.48]$$

que nos da la diferencia de potencial entre dos puntos del espacio, situados a las distancia  $r_1$  y  $r_2$  del hilo.

Ahora no puede tomarse como potencial nulo a los puntos del infinito, puesto que están cargados. Si tomamos como potencial nulo el de los puntos que están a la distancia,  $r_2 = 1$ , del hilo, el potencial de los distintos puntos del espacio se expresa:

$$V = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r$$

### Campo y potencial creado por un plano uniformemente cargado. Estrato simple

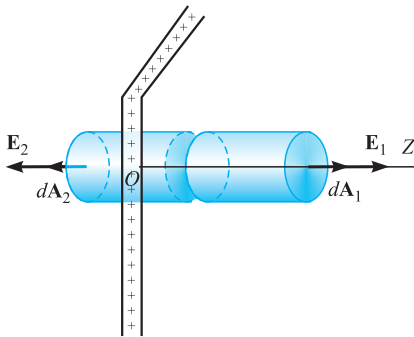


Figura 28.30. Campo y potencial creados por un estrato simple.

Sea la densidad superficial de carga  $\sigma$ . Consideremos un cilindro normal al plano, de bases  $dA$  (Figura 28.30). El campo eléctrico debe ser simétrico respecto al plano, por tanto, el flujo del campo se produce únicamente a través de las bases del cilindro y por el Teorema de Gauss debe verificarse,

$$\mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{A}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{A}_2 = \frac{\sigma dA}{\epsilon_0}$$

$$(E_1 + E_2) dA = \frac{\sigma dA}{\epsilon_0}$$

Por las razones de simetría indicadas, es  $E_1 = E_2$ , con lo cual resulta para el campo el valor:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{k} \quad [28.49]$$

siendo  $\mathbf{k}$  el vector unitario normal al plano.

El potencial puede ser calculado como en el caso anterior, o bien por aplicación de las [28.44]. Ahora lo haremos de esta segunda forma, pues si tomamos el origen del sistema de referencia sobre el plano y el eje  $OZ$  normal a él, las componentes del campo son:  $E_x = 0$ ,  $E_y = 0$  y  $E_z = \sigma/2\epsilon_0$ , y las [28.44] se escriben:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial V}{\partial z} = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

lo que nos indica que el potencial no depende ni de  $x$ , ni de  $y$ , únicamente depende de  $z$ ,

$$\frac{dV}{dz} = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

que integrada es:

$$V = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z + \text{cte} \quad \text{o bien,} \quad V_2 - V_1 = \sigma/2\epsilon_0(z_1 - z_2) \quad [28.50]$$

Ahora tampoco pueden tomarse los puntos del infinito como potencial nulo.

## Campo y potencial creados por un conductor laminar cargado. Estrato doble

En este caso la carga estará distribuida por toda la superficie y sea su densidad superficial de carga  $\sigma$ . El campo eléctrico será simétrico respecto a la lámina (Figura 28.31). Tomemos como superficie de Gauss un cilindro normal a las caras de la lámina y de bases  $dA$ , muy próximas a las citadas caras.

El flujo del campo se producirá únicamente a través de sus bases, y el Teorema de Gauss se escribe:

$$\mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{A} + \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{A}_2 = \frac{2\sigma dA}{\epsilon_0}$$

Por las razones de simetría indicadas resulta,

$$2E dA = \frac{2\sigma dA}{\epsilon_0}$$

y el campo eléctrico se expresa:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{k} \quad [28.51]$$

El potencial, análogamente al caso anterior, será de la forma:

$$V = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} z + \text{cte} \quad \text{o bien} \quad V_2 - V_1 = \sigma/\epsilon_0(z_1 - z_2) \quad [28.52]$$

## Campo y potencial creados por un conductor cilíndrico cargado

Sea un cilindro de radio  $R$  y densidad superficial de carga uniforme,  $\sigma$ . El campo eléctrico creado será, por razones de simetría, normal a la superficie del conductor, es decir, será un campo radial. Tomando como superficie de Gauss un cilindro coaxial con el anterior, de radio  $r > R$  y altura  $h$  (Figura 28.32), el flujo del campo se realizará únicamente a través de la superficie lateral de este, y su valor es  $\phi = E2\pi rh$ . El Teorema de Gauss se expresa:

$$E \cdot 2\pi rh = \frac{2\pi Rh\sigma}{\epsilon_0}$$

de donde, para  $r > R$ , el campo se expresa:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{R\sigma}{r} \mathbf{u}_r \quad [28.53]$$

En un punto infinitamente próximo en la superficie, es decir, para  $r = R$ , el campo vale  $E = \sigma/\epsilon_0$ .

Si la carga del cilindro se concentra en su eje, producirá la densidad lineal de carga  $\lambda = 2\pi R\sigma$ , lo que llevado a la [28.47] nos reproduce la [28.53], indicándonos que el campo creado por un conductor cilíndrico cargado, en un punto exterior a él, es igual al que crearía la misma carga total distribuida a lo largo de su eje.

En el interior del cilindro cargado, es decir, para  $r < R$ , el campo será nulo, ya que toda la carga está sobre la superficie,  $E = 0$ .

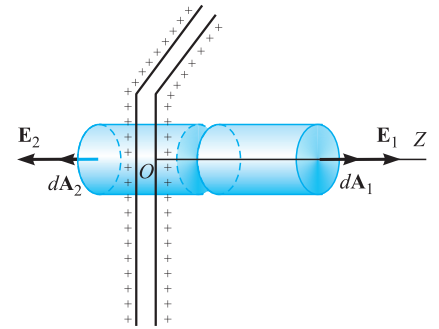


Figura 28.31. Campo y potencial creados por un conductor laminar.

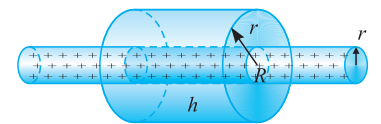


Figura 28.32. Campo y potencial de un conductor cilíndrico.

El potencial, calculado análogamente a como se hizo en el caso anterior, es:

$$V = -\frac{R\sigma}{\epsilon_0} \ln r + \text{cte} \quad [28.54]$$

El valor constante del potencial en la superficie del cilindro y en el interior de éste, es:

$$V = -\frac{R\sigma}{\epsilon_0} \ln R + \text{cte}$$

### Campo y potencial creado por un conductor esférico cargado

Se trata de calcular el campo  $\mathbf{E}$ , creado por una esfera cargada de radio  $R$  y carga total  $Q$ , en un punto  $P$  que dista  $r$  del centro de la esfera (Figura 28.33).

Sea  $r > R$ . Tracemos por  $P$  una superficie esférica de radio  $r$ , concéntrica con la cargada. El flujo del campo eléctrico a través de ésta es:

$$\phi = \oiint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oiint_A E dA$$

Por la simetría de la carga, en todo punto del espacio,  $\mathbf{E}$  y  $d\mathbf{A}$  tienen la misma dirección y, además, el valor del módulo del campo,  $E$ , será constante en todos los puntos de la superficie esférica, pudiendo escribirse:

$$\phi = E \oiint_A dA = E \cdot 4\pi r^2$$

Con lo que el Teorema de Gauss se expresa:

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = E \cdot 4\pi r^2$$

y el campo eléctrico creado se expresa:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \mathbf{u}_r \quad [28.55]$$

que coincide con el campo creado por la carga  $Q$ , considerada puntual y situada en el centro de la esfera.

Si es  $r < R$ , según lo visto, en el interior del conductor cargado y en equilibrio el campo será nulo,  $\mathbf{E} = 0$ , y por consiguiente, de acuerdo con [28.43] será  $V = \text{cte}$ .

El potencial, en un punto  $r > R$ , puesto que ahora sí podemos tomar como potencial nulo el correspondiente a los puntos del infinito, puede calcularse aplicando la [28.42]:

$$V(P) = C_p^\infty = \int_r^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad [28.56]$$

siendo su valor en la superficie del conductor y, por tanto, en todo el interior:

$$V_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \quad [28.57]$$

La variación del campo y el potencial se han representado en la Figura 28.34.

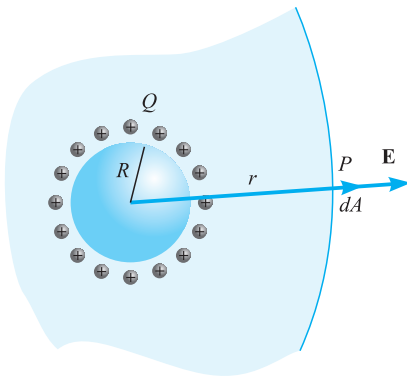


Figura 28.33. Campo y potencial creados por un conductor esférico.

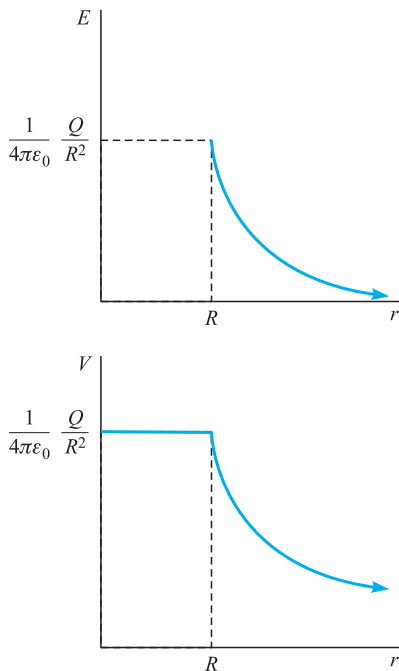


Figura 28.34. Campo y potencial creados por una superficie esférica.

### Campo y potencial creados por una esfera de radio $R$ cargada con una densidad espacial de carga $\rho$ distribuida homogéneamente en todo su volumen

Calculemos en primer lugar el campo en un punto  $P$  exterior a la esfera cargada,  $r > R$ . El flujo del campo, a través de una superficie esférica concéntrica con la cargada y que pasa por  $P$  (Figura 28.35), es:

$$\phi = \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oiint E dA$$

Debido a la simetría esférica de la carga, en todo punto de la superficie esférica,  $\mathbf{E}$  y  $d\mathbf{A}$  tienen la misma dirección y, además, el módulo del campo será constante, ya que únicamente depende de  $r$ , con lo cual es:

$$\phi = E \oiint dA = 4\pi r^2 E$$

Con ello, el Teorema de Gauss se escribe:

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

de donde resulta para el campo eléctrico la expresión:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{\mathbf{u}_r}{r^2} \quad [28.58]$$

Para puntos del interior de la esfera cargada,  $r < R$  (Figura 28.36), el flujo del campo eléctrico a través de la superficie esférica de radio  $r$  es completamente análogo al anterior,

$$\phi = 4\pi r^2 E$$

Ahora, el Teorema de Gauss se expresa:

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

con lo cual, el campo en puntos del interior de la esfera se expresa:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r} \quad [28.59]$$

Para  $r = R$  ambas expresiones deben coincidir, como así sucede, dando el valor del campo en la superficie de la esfera cargada:

$$\mathbf{E}_s = \frac{\rho R}{3\epsilon_0} \mathbf{u}_r \quad [28.60]$$

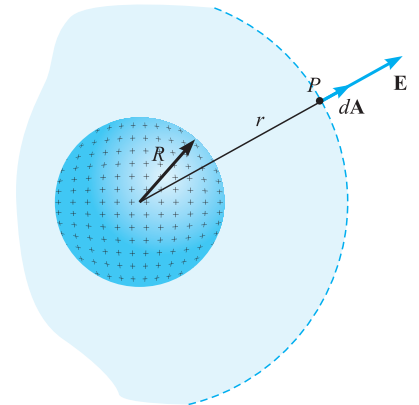


Figura 28.35. Campo y potencial creados por una esfera cargada.

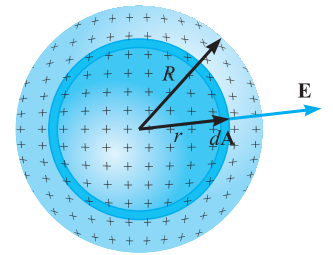


Figura 28.36. Campo en puntos del interior.

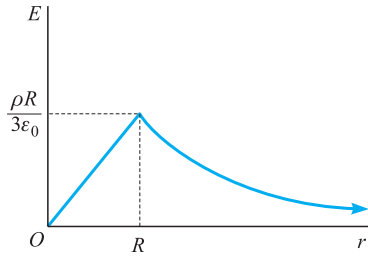


Figura 28.37. Variación del campo  $E$ .

En la Figura 28.37 se representa la variación del campo en función de la distancia al centro.

El potencial en los puntos exteriores a la esfera cargada,  $r > R$ , es:

$$V_e = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad [28.61]$$

habiendo tomado como potencial nulo a los puntos del infinito.

El potencial en la superficie de la esfera cargada es:

$$V_s = V_e(r = R) = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$$

Para calcular el potencial en puntos del interior aplicamos la [28.40]

$$V_i - V_s = \oint_r^R \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \mathbf{u}_r \times d\mathbf{r} = \int_r^R \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr = \left[ \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} \right]_r^R = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (R^2 - r^2)$$

con lo cual el potencial en el interior es:

$$V_i = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) \quad [28.62]$$

En la Figura 28.38 se ha representado la variación del potencial en función de la distancia al centro.

Puesto que es  $(dV_i/dr) = -(\rho r/3\epsilon_0)$ , en  $r = 0$  hay un máximo del potencial. Por otra parte, en  $r = R$  las dos curvas  $V_e(r)$  y  $V_i(r)$  tienen tangente común,

$$\left( \frac{dV_i}{dr} \right)_R = \left( \frac{dV_e}{dr} \right)_R = E(r = R)$$

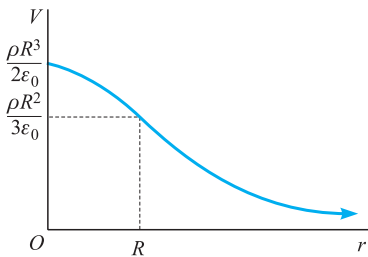


Figura 28.38. Variación del potencial.

## 28.16 Carga de conductores por inducción y contacto

Consideremos una corona esférica conductora descargada. Si en el centro de la misma se coloca una carga  $+Q$ , forzosamente deben aparecer cargas  $-Q$  y  $+Q$  en las superficies interior y exterior, respectivamente, de la corona esférica (Figura 28.39). En efecto, aplicando el Teorema de Gauss a una superficie esférica concéntrica con la corona, en el interior de ésta, debe verificarse:

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{Q_i + Q}{\epsilon_0}$$

siendo  $q$  la carga total encerrada por la citada superficie y  $Q_i$  la carga sobre la cara interior de la corona esférica. Puesto que dentro de la corona conductora es  $E = 0$ , para que se verifique el Teorema de Gauss, debe ser  $q = 0$  y, por tanto,  $Q_i + Q = 0$  y  $Q_i = -Q$ , resulta, pues, que en la cara interior de la corona conductora aparece la carga  $-Q$ . Puesto que la corona debe permanecer descargada, en la cara exterior aparecerá de carga  $+Q$ . Estas cargas que aparecen sobre las superficies esféricas de la corona se llaman de *inducción*, ya que son inducidas por la presencia de la carga  $+Q$  en el centro.

Si la carga  $+Q$  del centro la llevamos a contactar con la superficie interior de la corona, neutralizará a la carga  $-Q$  de esta superficie y la corona quedará cargada con la carga  $+Q$  situada en su superficie exterior.

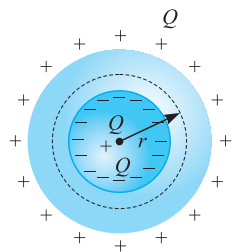


Figura 28.39. Carga por inducción.



Otro proceso de carga por inducción y contacto es el siguiente: dos esferas conductoras descargadas se ponen en contacto y se colocan dentro de un campo eléctrico como se indica en la Figura 28.40.

Los electrones libres de los conductores se moverán dentro de éstos en sentido contrario al del campo, cargando negativamente una de las esferas y dejando cargada positivamente la otra. En esta situación, se separan las esferas y luego se suprime el campo eléctrico exterior. Ambas esferas habrán quedado cargadas con igual carga y signo distinto.

La Tierra puede ser considerada como un gran conductor que actúa como fuente o sumidero de electrones sin que por ello su potencial cambie, de aquí que se tome como potencial de referencia, potencial nulo. Tomemos un conductor y al colocarlo dentro de un campo eléctrico, aparecerán en él cargas de inducción como se indica en la Figura 28.41. En esta situación, pongamos al conductor en contacto con la Tierra, lo que se simboliza como se indica en la Figura 28.41, diciéndose que el conductor ha sido «conectado a tierra». La carga positiva del conductor queda neutralizada por los electrones procedentes de la Tierra, diciéndose que la carga positiva ha pasado a tierra. Si ahora quitamos la conexión a tierra y suprimimos el campo eléctrico exterior, el conductor habrá quedado cargado negativamente.

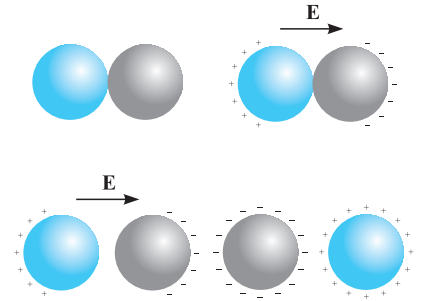


Figura 28.40. Carga por inducción y contacto.

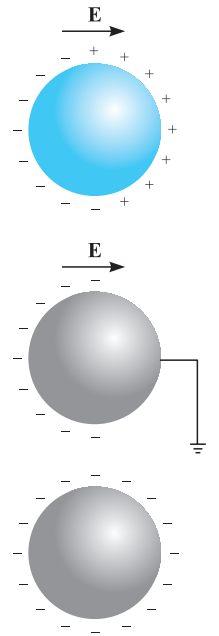


Figura 28.41. Carga por inducción y contacto a tierra.

### 28.17 Campo en un punto próximo a un conductor. Teorema de Coulomb

En primer lugar, demostraremos que la dirección del campo eléctrico en las proximidades de la superficie de un conductor es normal a su superficie. Para ello aplicaremos la expresión [28.46] a una línea cerrada  $ABCD$  (Figura 28.42), en la que los lados  $AB$  y  $CD$  son paralelos a la superficie y muy próximos a ella,  $AB$  fuera del conductor y  $CD$  en su interior.

La circulación del campo a lo largo de la línea cerrada será la suma de la circulación a lo largo de cada uno de sus lados. Puesto que los lados  $AD$  y  $BC$  son muy pequeños, la circulación a lo largo de ellos es despreciable; además, al ser nulo el campo eléctrico en el interior del conductor, su circulación a lo largo de  $CD$  será nula. En consecuencia, la circulación del campo eléctrico a lo largo de la línea cerrada  $ABCD$  será igual a su circulación a lo largo de la línea  $AB$ , es decir, se verifica:

$$\int_{ABCD} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{AB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

lo que exige que sean  $\mathbf{E}$  y  $d\mathbf{l}$  perpendiculares, es decir, *el campo eléctrico en puntos próximos a la superficie del conductor es normal a su superficie*. Esto mismo puede obtenerse teniendo en cuenta que la superficie de cualquier conductor es una superficie equipotencial, por tanto el trabajo para desplazar una carga eléctrica sobre dicha superficie es nulo, lo que exige que el campo eléctrico sea normal a la superficie del conductor.

Calculemos ahora, por aplicación del Teorema de Gauss, el valor del campo en puntos próximos a la superficie del conductor. Consideremos un elemento  $dA$  sobre la superficie del conductor. Tomemos un cilindro de sección  $dA$ , normal a la superficie del conductor, una de cuyas bases esté en el interior del conductor y la otra en el exterior muy próxima a la superficie (Figura 28.43).

Si es  $\sigma$  la densidad superficial de carga, el Teorema de Gauss se escribe:

$$\mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{A}_1 + \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{A}_2 = \frac{\sigma dA}{\epsilon_0}$$

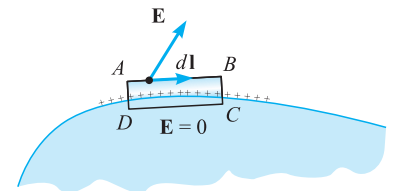


Figura 28.42. Campo en un punto próximo a la superficie de un conductor.

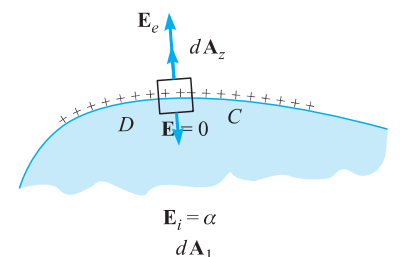


Figura 28.43. Campo en un punto próximo a la superficie de un conductor.

y puesto que el campo en el interior de un conductor es nulo,  $\mathbf{E}_i = 0$ , resulta ser el campo en los puntos del exterior próximos a la superficie

Teorema de Coulomb

$$E_e = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad [28.63]$$

resultado que expresa el Teorema de Coulomb: *el campo en un punto próximo a la superficie de un conductor cargado y en equilibrio es normal a la superficie del conductor, con sentido hacia fuera si la carga es positiva y hacia dentro si es negativa, y cuyo módulo es igual al valor de la densidad superficial de carga dividido por la permitividad del medio.*

Como consecuencia, el campo creado por un conductor cargado y en equilibrio presenta una discontinuidad en la superficie de aquél, cuyo valor es  $\sigma/\epsilon_0$ , ya que en el interior del conductor el campo es nulo.

Por el contrario, el potencial es continuo, siendo su ley de variación en dirección de la normal a la superficie:

$$\frac{dV}{dr} = -E = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

De donde la densidad superficial de carga puede expresarse:

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{dV}{dr} \quad [28.64]$$

## 28.18 Presión electrostática

Sobre la carga  $\sigma dA$ , el resto del conductor ejercerá una fuerza debido al campo eléctrico que crea, a este le llamaremos  $E_1$ . El campo en un punto  $P$  muy próximo a la superficie del conductor es la suma del creado por la carga  $\sigma dA$ , que llamaremos  $E_2$ , y el  $E_1$ , verificando la [28.63],

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad [28.65]$$

En un punto  $P'$ , simétrico del  $P$  respecto a la superficie del conductor, se verificará:

$$E'_1 + E'_2 = 0 \quad [28.66]$$

Por ser  $P$  y  $P'$  dos puntos infinitamente próximos, será  $E_1 = E'_1$  y por ser simétricos respecto de la superficie, será  $E_2 = -E'_2$ . Teniendo esto en cuenta, al sumar las [28.65] y [28.66] resulta:

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

La fuerza sobre el elemento de superficie  $dA$ , es:

$$df = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dA$$

y la presión a la que está sometido ese elemento de superficie es:

Presión electrostática

$$p = \frac{df}{dA} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad [28.67]$$

a la cual se denomina *presión electrostática*.

## 28.19 Efecto de puntas

La densidad superficial de carga sobre un conductor es mayor en los puntos de menor radio de curvatura. En efecto, sean dos esferas conductoras de radios  $R_1$  y  $R_2$ , que una vez cargadas eléctricamente se ponen en contacto mediante un hilo conductor, con lo cual ambas adquieren el mismo potencial, quedando distribuida la carga inicial de forma que se verifique:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2}$$

En función de las densidades superficiales de carga es  $Q_1 = 4\pi R_1^2 \times \sigma_1$  y  $Q_2 = 4\pi R_2^2 \times \sigma_2$  lo que al sustituir en la expresión anterior da:

$$\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$$

es decir, las densidades superficiales de carga son inversamente proporcionales a los radios de curvatura.

Puesto que la presión electrostática es proporcional al cuadrado de la densidad superficial de carga, y dado que en los puntos de pequeño radio de curvatura la densidad superficial será grande, la presión electrostática en estos puntos será muy grande. Las moléculas de aire en contacto con el conductor se cargan y la presión electrostática mueve estas moléculas dando lugar al denominado viento eléctrico. Este fenómeno es más notorio en las puntas que pueda presentar el conductor, por ser en ellas mayor la densidad de carga y, en consecuencia, la presión electrostática; de aquí que al fenómeno se le conozca con el nombre de *efecto de puntas*.

## 28.20 Potencial y campo creado por un dipolo

Un dipolo es un sistema formado por dos cargas iguales y de distinto signo,  $+q$  y  $-q$ , separadas una distancia  $d$ , y tal que al tender ésta a cero, simultáneamente tiende  $q$  a infinito, verificándose:

$$\lim_{d \rightarrow 0} qd = m \quad [28.68]$$

siendo  $m$  un número finito, llamado *momento del dipolo*, cuya ecuación de dimensiones es  $[m] = QL$  y su unidad en el SI. es el C.m.

El potencial creado en  $P$  por las dos cargas, antes de tender  $d$  a cero (Figura 28.44), es:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \quad [28.69]$$

Las distancias  $r_1$  y  $r_2$  pueden expresarse de la forma:

$$r_1^2 = r^2 + (d/2)^2 + dr \cos \theta \quad \text{y} \quad r_2^2 = r^2 + (d/2)^2 - dr \cos \theta$$

que pueden escribirse de la forma:

$$r_1/r = [1 + (d/2r)^2 + (d/r) \cos \theta]^{1/2} \quad \text{y} \quad r_2/r = [1 + (d/2r)^2 - (d/r) \cos \theta]^{1/2}$$

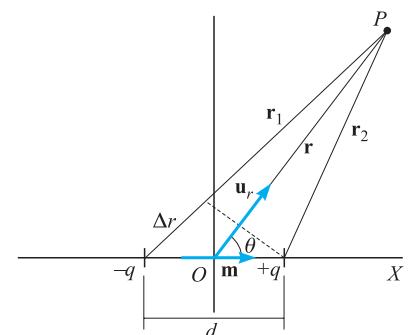


Figura 28.44. Campo y potencial creados por un dipolo.

Las cuales, al ser desarrolladas en serie, se expresan:

$$r_1/r = 1 + 1/2[(d/2r)^2 + (d/r) \cos \theta] - \dots$$

$$r_2/r = 1 + 1/2[(d/2r)^2 - (d/r) \cos \theta] - \dots$$

Al restar ambas se obtiene:  $(r_1 - r_2)/r = (d \cos \theta)/r$ , o  $r_1 - r_2 = d \cos \theta$ .

Multiplicando los dos desarrollos obtenemos:

$$(r_1 r_2)/r^2 = 1 + d^2/4r^2 + \dots, \text{ o } r_1 r_2 = r^2 + d^2/4 \cong r^2$$

Con todo lo cual, la [28.64] se expresa:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2}$$

y al tomar límites cuando  $d$  tiende a cero, obtenemos el potencial creado por el dipolo:

$$V = \lim \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{m \cos \theta}{r^2} \quad [28.70]$$

El carácter vectorial del momento del dipolo se consigue dándole la dirección de la recta que une las dos cargas y el sentido que va de la carga negativa a la positiva, con ello se puede escribir:

Potencial del dipolo

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{u}_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad [28.71]$$

siendo  $\mathbf{u}_r$  el vector unitario que va del centro del dipolo al punto  $P$  del campo.

El potencial para el caso del dipolo de la Figura 28.44, que está situado en el origen del sistema de referencia, con dirección del eje  $OX$  y sentido positivo, es decir, es  $\mathbf{m} = m\mathbf{i}$ , puede también expresarse de las formas:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{m}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3} = \frac{m}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad [28.72]$$

El campo se calcula aplicando la [28.44], obteniéndose para las componentes del campo los valores:

$$E_x = -\frac{m}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}; E_y = \frac{m}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xy}{r^5}; E_z = \frac{m}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xz}{r^5} \quad [28.73]$$

La expresión vectorial del campo es:

Campo del dipolo

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{m}{r^5} [(3x^2 - r^2)\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + 3xz\mathbf{k}] \quad [28.74]$$

En un punto del eje del dipolo  $(x, 0, 0)$ , el valor del campo es:

$$E_x = \frac{m}{2\pi\epsilon_0 x^3}; E_y = 0, \text{ y } E_z = 0$$

es decir,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{m}}{x^3} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{m}{x^3} \mathbf{i} \quad [28.75]$$

En un punto del plano normal al dipolo por su centro,  $x = 0$ , el campo es:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{m}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{m}{(y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{i} \quad [28.76]$$

En un punto de un eje normal al dipolo, por ejemplo, el  $(0, y, 0)$ , el valor del campo es:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{m}}{y^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{m}{y^3} \mathbf{i} \quad [28.77]$$

En la Figura 28.45 se representan las líneas del campo creado por un dipolo eléctrico.

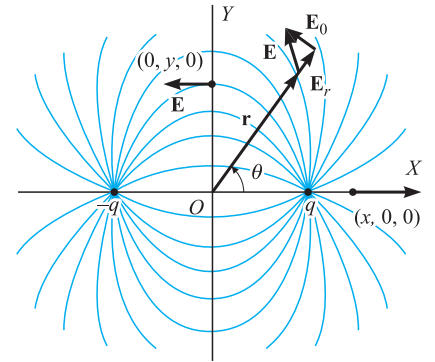


Figura 28.45. Líneas del campo creado por un dipolo.

### 28.21 Teorema de Gauss en forma diferencial

Consideremos un volumen elemental de aristas paralelas a los ejes de coordenadas y cuyas tres dimensiones sean  $dx, dy, dz$  (Figura 28.46). El flujo del campo, a través de la cara  $ABCD$  es:

$$d\phi_{x1} = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}_1 = -E_x dy dz$$

A través de la cara  $A'B'C'D'$  el flujo vale:

$$d\phi_{x2} = \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{A}_2 = E'_x dy dz$$

El flujo total en dirección del eje  $OX$  es:

$$d\phi_x = (E'_x - E_x) dy dz$$

Expresando el valor de  $E'_x$  mediante desarrollo en serie en función de  $E_x$ ,

$$E'_x = E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx \quad \text{o} \quad E'_x - E_x = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx$$

con lo cual, el flujo en dirección del eje  $OX$  es:

$$d\phi_x = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dv$$

De forma completamente análoga se obtiene el flujo en dirección del eje  $OY$  y en dirección del eje  $OZ$ ,

$$d\phi_y = \frac{\partial E_y}{\partial y} dv \quad \text{y} \quad d\phi_z = \frac{\partial E_z}{\partial z} dv$$

El flujo total a través de la superficie del volumen elemental considerado es:

$$d\phi = d\phi_x + d\phi_y + d\phi_z = \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dv \quad [28.78]$$

Si la carga en el interior del volumen considerado es  $dq$ , el Teorema de Gauss exige que sea:

$$\left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dv = \frac{dq}{\epsilon_0}$$

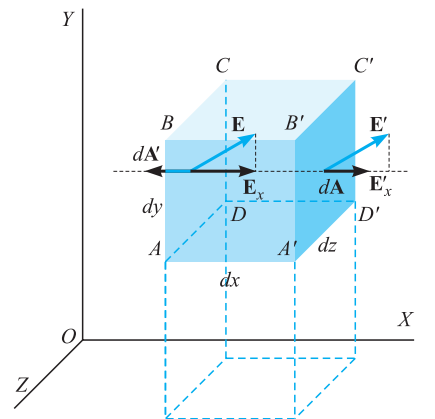


Figura 28.46. Flujo a través de la superficie de un volumen elemental.

y puesto que es  $\rho = dq/dv$ , la densidad espacial de carga eléctrica del elemento de volumen considerado, resulta:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad [28.79]$$

que es la forma diferencial del Teorema de Gauss.

La expresión del primer miembro se denomina *divergencia del vector E*, indicándose  $\text{div } \mathbf{E}$ , o bien, en función del vector simbólico nabla,  $\nabla \cdot \mathbf{E}$ , como el producto escalar simbólico de  $\nabla$  por el vector campo. Expresándose de forma condensada, el Teorema de Gauss en forma diferencial:

Teorema de Gauss  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad [28.80]$

En los puntos de densidad espacial de carga nula,  $\rho = 0$ , la ecuación anterior se convierte en:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad [28.81]$$

El significado físico de la divergencia se desprende de la Ecuación [28.78], la cual puede escribirse de la forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{d\phi}{dv}$$

Lo que nos dice que *la divergencia de un campo en un punto es el flujo de ese campo, por unidad de volumen, a través de una superficie cerrada que engloba el punto, cuando el volumen encerrado tiende a cero*. Por ello, si la divergencia en un punto es positiva, se dice que este es un *manantial*, ya que el flujo saldrá de él; por el contrario, si es negativa, se dice que es un *sumidero*, ya que el flujo entrará en él. Como se desprende de la Ecuación [28.80], en el campo eléctrico las cargas positivas son manantiales y las negativas sumideros.

## 28.22 Ecuaciones de Poisson y Laplace

Teniendo en cuenta las expresiones [28.44], cada uno de los sumandos de la divergencia se expresa:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial V}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

y con ello la [28.75] se escribe:

Ecuación de Poisson  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad [28.82]$

ecuación denominada de Poisson, que da otra posibilidad para determinar el potencial cuando es conocida la permitividad del medio y la densidad espacial de carga, siempre que ésta sea exclusivamente función de punto.

La expresión que constituye el primer miembro de la ecuación de Poisson se denomina «laplaciano del potencial», expresándose simbólicamente  $\nabla^2 V$  o  $\Delta V$ , con ello la ecuación de Poisson se escribe de forma condensada,

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad [28.83]$$

Fuera del espacio cargado que crea el campo, será  $\rho = 0$ , y la ecuación se transforma en:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \text{o} \quad \nabla^2 V = 0 \quad [28.84] \quad \text{Ecuación de Laplace}$$

llamada ecuación de Laplace, que permite el cálculo del potencial en el espacio exterior a la zona cargada.

### EJEMPLO 28.10

Una región del espacio comprendida entre dos planos paralelos, separados entre sí la distancia  $d$ , se halla cargada con una densidad espacial de carga  $\rho$ . Calculemos el potencial y el campo en cada una de las regiones del espacio separadas por los planos.

#### Solución:

El potencial, en los puntos del espacio sin carga,  $x > d$  y  $x < 0$  (Figura 28.47), debe verificar la ecuación de Laplace. Por la configuración del problema, el potencial será únicamente función de  $x$ . Por tanto, la ecuación de Laplace se escribe:

$$\Delta V_e = \frac{d^2 V_e}{dx^2} = 0$$

Integrada dos veces da:

$$\text{Para } x > d \quad V_e = C_2 x + C_3$$

$$\text{Para } x < 0 \quad V'_e = C_4 x + C_5$$

En los puntos del espacio cargado, el potencial debe verificar la ecuación de Poisson,

$$\Delta V_i = \frac{d^2 V_i}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

la cual, integrada dos veces, da:

$$V_i = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} x^2 + C_1 x + C$$

Puesto que debe ser  $V_i(0) = V_i(d)$ , es:

$$C = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} d^2 + C_1 d + C \Rightarrow C_1 = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$$

y

$$V_i = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} x + C$$

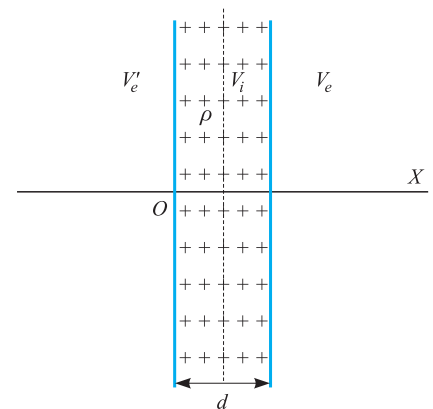


Figura 28.47. Potencial y campos creados por la región cargada entre un par de planos paralelos.

Las condiciones  $\left(\frac{dV_e}{dx}\right)_d = \left(\frac{dV_i}{dx}\right)_d$  y  $\left(\frac{dV_i}{dx}\right)_0 = \left(\frac{dV_e}{dx}\right)_0$  nos dan respectivamente:

$$C_2 = \left(-\frac{\rho x}{\epsilon_0} + \frac{\rho d}{2\epsilon_0}\right)_d = -\frac{\rho d}{2\epsilon_0} \Rightarrow V_e = -\frac{\rho d}{2\epsilon_0} x + C_3$$

y

$$\frac{\rho d}{2\epsilon_0} = C_4 \Rightarrow V'_e = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} x + C_5$$

Puesto que debe ser  $V_i(0) = V'_e(0)$ , resulta  $C = C_5$  y con ello,

$$V'_e = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} x + C$$

La condición  $V'_e(0) = V_e(d)$  nos da:

$$C = -\frac{\rho d^2}{2\epsilon_0} + C_3 \Rightarrow C_3 = C + \frac{\rho d^2}{2\epsilon_0}$$

y, por tanto,

$$V_e = -\frac{\rho d}{2\epsilon_0} x + \frac{\rho d^2}{2\epsilon_0} + C$$

La constante  $C$  puede determinarse eligiendo un origen de potenciales. Si tomamos  $V = 0$  en  $x = 0$ , resulta  $C = 0$ , y con ello:

$$V_i = \frac{\rho x}{2\epsilon_0} (d - x) \quad , \quad V_e = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} (d - x) \quad \text{y} \quad V'_e = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} x$$

El campo debe verificar  $\mathbf{E} = -\nabla V$  y, por tanto, son:

$$\mathbf{E}_i = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (2x - d) \mathbf{i}$$

$$\mathbf{E}_e = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} \mathbf{i}$$

$$\mathbf{E}'_e = -\frac{\rho d}{2\epsilon_0} \mathbf{i}$$

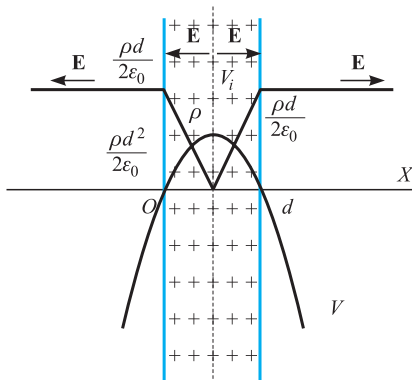


Figura 28.48. Potencial y módulo del campo.

En la Figura 28.48 se representan potenciales y módulos del campo.



## 28.23 Teorema de la divergencia

En la expresión del Teorema de Gauss en forma integral,

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \iiint \frac{\rho}{\varepsilon_0} dv$$

puede substituirse el valor de  $\rho/\varepsilon_0$  por el dado por el mismo teorema en su forma diferencial:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

con lo cual, la forma integral se expresa:

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \iiint \nabla \cdot \mathbf{E} dv \quad [28.85] \quad \text{Teorema de la divergencia}$$

lo que constituye la expresión analítica del teorema de la divergencia, que dice: *el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada es igual a la suma de la divergencia para todos los puntos del volumen encerrado por la citada superficie.*



## EL CONCEPTO DE CAMPO

En la mecánica de Newton se contempla un universo constituido por cuerpos materiales con simetría esférica, situados dentro de un espacio vacío, que se ejercen acciones a distancia de forma instantánea, atractivas y con valor directamente proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Esta teoría, que resultaba adecuada para la explicación de la gravitación, no era capaz de explicar otros tipos de fuerzas, como las de cohesión, las eléctricas o las magnéticas.

Leibniz, estableció la necesidad de que existieran fuerzas repulsivas, como única forma de poder explicar la oposición de la materia a ser penetrada, y ya concibió el espacio como un medio material continuo con una fuerza asociada a cada punto del espacio, lo que podemos considerar como el origen del concepto de campo de fuerzas.

La contraposición de ideas entre Newton y Leibniz, llevó a Kant a intentar la búsqueda de una síntesis de ambas; para lo cual estableció que los cuerpos materiales están inmersos en un espacio vacío de materia, y que existen fuerzas de dos tipos: unas, fuerzas atractivas (gravitacionales), que actúan a distancia, y otras, fuerzas repulsivas en cada punto material, que sólo ejercen su influencia en los puntos contiguos. Así podía explicar tanto la gravitación como la impenetrabilidad de la materia.

Oersted comprobó, en 1820, como una corriente eléctrica desviaba una aguja magnética situada en su proximidad, lo que ponía de manifiesto que la fuerza sobre la aguja sólo podía proceder de la corriente eléctrica, dejando claro que ésta producía efectos magnéticos y que esos efectos llegaban al punto donde estaba la aguja. Era la primera conexión entre electricidad y magnetismo, y en ella subyacía el concepto de campo magnético.

Faraday estudió con detalle los trabajos de Oersted y repitió todas sus experiencias, descubriendo algo muy novedoso, que una espira conductora recorrida por una corriente eléctrica gira al situarla en las proximidades de otra corriente eléctrica rectilínea. La explicación del fenómeno no podía hacerse con los planteamientos establecidos hasta el momento. Faraday introdujo nuevas hipótesis que serán la base del concepto de campo de fuerzas: a) en cada punto del espacio existe una fuerza que sólo actúa sobre los puntos próximos, b) la

acción de las fuerzas no es instantánea, exige un tiempo finito, c) todas las fuerzas en el fondo obedecen a una misma naturaleza, como si existiera una única fuerza fundamental. En 1831, Faraday detectó corrientes inducidas al establecer y al cortar la corriente en el circuito con el que investigaba, y posteriormente estudió las corrientes inducidas producidas por el movimiento. También él estableció la existencia física de líneas de fuerza, lo que puso de manifiesto con dos experiencias: una, dentro del campo eléctrico, y otra, dentro del campo magnético. La primera basada en la acción entre cargas eléctricas, para lo cual estableció una carga fija y tomó una pequeña carga del mismo signo (carga de prueba), al colocar esta en las proximidades de la primera la repele y la trayectoria seguida en su movimiento la denominó línea de fuerza. El análisis del campo existente en el entorno de la carga fija se hace colocando la pequeña carga en diferentes puntos y comprobando la dirección de su movimiento, que es siempre radial, alejándose de la carga fija si la carga de prueba es de su mismo signo y acercándose si el signo es contrario. El estudio del campo magnético lo realizó usando un imán, sobre el cual colocó un papel y encima de este limaduras de hierro; las limaduras se reordenaban formando líneas, que eran las líneas del campo magnético y que, además en este caso, eran líneas curvas. Asimismo, estableció que las acciones eléctricas y magnéticas cambian en función de las propiedades del medio en el que actúan. Todo lo cual suponía una gran diferenciación con las acciones gravitacionales, las cuales presentaban siempre líneas de fuerza rectas y no sufrían modificación por la naturaleza del medio.

Maxwell se encontró con el ingente trabajo realizado por Faraday y tuvo la gran virtud de ordenarlo, clarificarlo y fundamentarlo matemáticamente de forma consistente, lo que ya comenzó en su primer trabajo, publicado en 1855: *On Faraday's Lines of Force*. Posteriormente deduciría las ecuaciones de los campos eléctrico y magnético y de las ondas electromagnéticas, así como la velocidad de propagación de estas, la cual resultó ser función de las características eléctricas y magnéticas del medio, por tanto, siempre con un valor finito, de

forma que la transmisión no es instantánea, lo que quedaría ratificado con las experiencias de Hertz, en 1881. Maxwell no llegó a darse cuenta de que sus ondas electromagnéticas no necesitaban medio para su propagación y de alguna manera consideró la necesidad de un medio propagador, *el eter*.

Podemos definir el *campo* como *una propiedad del espacio que puede detectarse y medirse, y que se expresa matemáticamente mediante una función unívoca de punto*. A cada punto del espacio le corresponde un sólo valor del campo, sin embargo, diferentes puntos del espacio pueden tener igual valor del campo.

Como hemos visto, el concepto de campo surge ante la necesidad de explicar las interacciones entre partículas o cuerpos sin contacto físico. Obviamente, como todas las cosas, el campo tiene un origen: el eléctrico, en las cargas eléctricas, el magnético, en las corrientes eléctricas, y el gravitacional, en las masas, pero una vez conocido el campo podemos prescindir de las causas que lo han originado, ya que el campo

es una propiedad, en principio no geométrica, que adquieren los puntos del espacio, aunque, evidentemente, cambiará al cambiar las causas que lo originan.

Los campos, de acuerdo con la naturaleza de la propiedad que representan, podemos clasificarlos en dos tipos: *escalares*, si la propiedad que representan es una magnitud escalar, y *vectoriales*, en el caso de que sea una magnitud vectorial. Como ejemplo de las primeras podemos citar a la temperatura del aire, la cual, en cada punto del espacio y en cada momento, tiene un único valor. Si la temperatura permanece constante, el campo será independiente del tiempo y dependerá de éste, si la temperatura varía con el tiempo. Ejemplos típicos de campos vectoriales son el gravitacional y el electromagnético, ya que en cada punto del espacio, la acción depende de la intensidad del campo y de la dirección, y en el electromagnético, además, del sentido.

En este volumen estudiaremos detenidamente el campo electromagnético y tendremos ocasión de deducir sus ecuaciones y estudiar sus propiedades.



## 29.1 Capacidad de un conductor

La capacidad de un conductor aislado es una característica de éste, que depende únicamente de su forma geométrica, y que se define por el cociente entre su carga  $Q$  y su potencial  $V$ , relación que se mantiene constante para cada conductor.

$$C = \frac{Q}{V} \quad [29.1]$$

La ecuación de dimensiones de la capacidad es:

$$[C] = Q[V]^{-1} = \text{M}^{-1}\text{L}^{-2}\text{T}^2\text{Q}^2$$

La unidad de capacidad en el sistema internacional es el *faradio* (F), que es la *capacidad de un conductor que al ser cargado con 1 culombio adquiere el potencial de 1 voltio*. Esta unidad es muy grande y normalmente se emplean sus submúltiplos, siendo los más frecuentes: el microfaradio ( $\mu\text{F}$ ), el nanofaradio (nF) y el picofaradio (pF), que equivalen a  $10^{-6}$  F,  $10^{-9}$  F y  $10^{-12}$  F, respectivamente.

Para un conductor esférico de radio  $R$  y carga total  $Q$ , el potencial de su superficie y de todo el volumen interior está dado por la [28.57]. En consecuencia, la capacidad de un conductor esférico es:

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R \quad [29.2]$$

resultando directamente proporcional al radio del conductor.

La Ecuación [29.2] permite hacernos una idea de lo enormemente grande que es el faradio, ya que el radio que debe tener una esfera para poseer esta unidad de capacidad, teniendo en cuenta el valor de  $\epsilon_0$  en el S.I., es de nueve millones de kilómetros, aproximadamente unas mil cuatrocientas veces el radio de la Tierra.

- 29.1. Capacidad de un conductor
- 29.2. Conductores en un campo eléctrico
- 29.3. Conductores planos y paralelos. Condensador
- 29.4. Condensador esférico
- 29.5. Condensador cilíndrico
- 29.6. Asociación de condensadores
- 29.7. Energía de una configuración discreta de cargas
- 29.8. Energía de una configuración continua de cargas
- 29.9. Energía de un condensador
- 29.10. Densidad de energía del campo eléctrico
- 29.11. Energía de un dipolo en un campo eléctrico
- 29.12. Fuerza entre conductores cargados
- 29.13. Electrón-voltio
- 29.14. Movimiento de partículas cargadas en campos eléctricos constantes

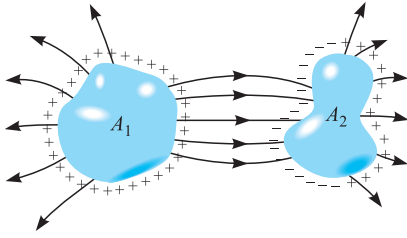


Figura 29.1. Conductores en campos eléctricos.

## 29.2 Conductores en un campo eléctrico

Sea  $A_1$  un conductor cargado que creará un cierto campo eléctrico en su entorno. Si acercamos a él un conductor descargado,  $A_2$  (Figura 29.1), el campo creado por el conductor  $A_1$  moverá los electrones libres del conductor  $A_2$ . En consecuencia, en la zona de  $A_2$  próxima a  $A_1$  aparecen cargas negativas, mientras que la región más alejada queda cargada positivamente. Estas cargas que aparecen sobre el conductor  $A_2$ , debidas al campo creado por el  $A_1$ , se llaman *cargas inducidas*. Evidentemente, en todo momento la carga total del conductor  $A_2$  es nula.

La carga sobre el conductor  $A_1$  también permanece constante, pero, debido al campo creado por  $A_2$ , sufre una redistribución, aumentando la densidad superficial de carga en la zona próxima a  $A_2$  y disminuyendo en la opuesta. La redistribución de cargas finaliza cuando el campo eléctrico, dentro de cada uno de los conductores, es nulo.

Si colocamos próximos una serie de conductores, los campos creados por cada uno de ellos influyen en los demás y se produce una redistribución de carga sobre las superficies hasta que el campo en el interior de cada uno de ellos resulta nulo, como exige el Teorema de Gauss. La distribución final de carga en cada uno de los conductores es tal que el campo que crea, más el debido al de los otros conductores, da un campo nulo en su interior.

El potencial en cada uno de los volúmenes que ocupan los conductores es constante,  $V_i$ , y la superficie de cada uno de ellos es una superficie equipotencial. El campo en puntos próximos a la superficie de los conductores es normal a aquéllas y su valor  $E_i = \sigma_i/\epsilon_0$ . La densidad superficial de carga debe reajustarse para verificar esta ecuación, ya que ahora el campo es el debido a las cargas del propio conductor más el debido a las cargas de los otros conductores.

El sistema de conductores queda caracterizado por los potenciales a los que están cada uno de los conductores,  $V_i$ . El potencial al que está sometido el sistema será una función  $V$ , que sobre cada uno de los conductores debe tomar el valor correspondiente a ese conductor y en el espacio exterior a los conductores, libre de cargas, debe verificar la ecuación de Laplace,  $\nabla^2 V = 0$ . Esta función potencial puede expresarse de la forma:

$$V = f_1 V_1 + f_2 V_2 + \dots + f_n V_n \quad [29.3]$$

en la que  $f_i$  son funciones cuyo valor sobre el conductor  $i$  es la unidad y son nulas sobre los restantes conductores, debiendo ser nulos sus laplacianos en el espacio libre,  $\nabla^2 f_i = 0$ . En consecuencia, la función  $V$  cumple las condiciones impuestas a la función potencial y es solución del problema.

La solución, que evidentemente existe por la realidad del problema físico, veamos que es única. Supongamos que, además de la solución  $V$ , hubiera otra  $V'$ ; por la linealidad de la ecuación de Laplace, también sería solución la función  $V'' = V - V'$ , pero  $V''$  no satisface las condiciones exigidas al potencial, puesto que se anula en la superficie de cada uno de los conductores, ya que en ellos  $V$  y  $V'$  toman el mismo valor como soluciones que son. Si el potencial  $V''$  es nulo sobre la superficie de cada uno de los conductores y puesto que también debe serlo en el infinito, es forzoso que sea nulo en todos los puntos del espacio  $V'' = 0$  y, en consecuencia,  $V = V'$ , es decir, la solución es única y será la [29.3].

Una vez obtenida la función  $V$ , el campo se calcula mediante  $\mathbf{E} = -\nabla V$ , y la densidad superficial de carga sobre el conductor  $i$ , mediante:

$$\sigma_i = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n_i} \quad [29.4]$$

en la que  $n_i$  es la normal al conductor  $i$  en el punto sobre el cual se quiera determinar  $\sigma$ .

### 29.3 Conductores planos y paralelos. Condensador

Sean dos conductores planos, paralelos, de grandes dimensiones frente a la distancia  $d$  que les separa y supongamos que están a potenciales  $V_1$  y  $V_2$ ;  $V_1 > V_2$  (Figura 29.2).

Tomemos el plano  $XY$  en el conductor 1 y el eje  $OZ$  dirigido hacia el 2. El potencial en un punto cualquiera del espacio entre los conductores será, de acuerdo con la [29.3], de la forma:

$$V = f_1 V_1 + f_2 V_2$$

Por la configuración geométrica del problema, la función  $V$  dependerá únicamente de  $z$ , y así deberá suceder a las funciones  $f_1$  y  $f_2$ . Por tanto, la nulidad de sus laplacianos se expresa:

$$\nabla^2 f_1 = d^2 f_1 / dz^2 = 0 \quad \text{y} \quad \nabla^2 f_2 = d^2 f_2 / dz^2 = 0$$

que integradas dan, respectivamente,

$$\frac{df_1}{dz} = K_1 \quad \text{y} \quad \frac{df_2}{dz} = K_2$$

y una nueva integración:

$$f_1 = K_1 z + K_3 \quad \text{y} \quad f_2 = K_2 z + K_4$$

Para calcular las constantes de integración debemos hacer cumplir a las funciones las condiciones a que están obligadas y que son:

para  $z = 0$ , debe ser  $f_1 = 1$  y  $f_2 = 0$

para  $z = d$ , debe ser  $f_1 = 0$  y  $f_2 = 1$

Con lo cual, se obtienen para las constantes de integración los valores:

$$K_3 = 1, K_4 = 0, K_1 = -\frac{1}{d} \quad \text{y} \quad K_2 = \frac{1}{d}$$

y, con ello, las funciones se expresan:

$$f_1 = 1 - \frac{z}{d} \quad \text{y} \quad f_2 = \frac{z}{d}$$

resultando para la función potencial la expresión:

$$V = V_1 - \frac{z}{d} (V_1 - V_2)$$

función únicamente de  $z$ .

Las componentes del campo se obtienen por aplicación de las [28.44]

$$E_x = 0; \quad E_y = 0; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{V_1 - V_2}{d} \quad [29.5]$$

resultando el campo constante, con dirección normal a ambos conductores, y sentido de los potenciales decrecientes.

$$\mathbf{E} = \frac{V_1 - V_2}{d} \mathbf{k} \quad [29.6]$$

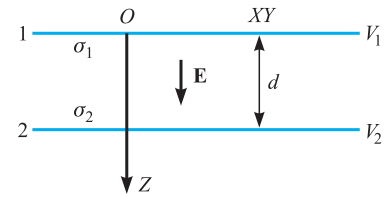


Figura 29.2. Conductores planos paralelos.

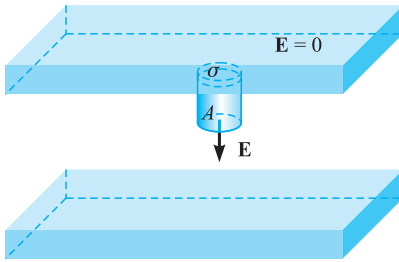


Figura 29.3. Densidad superficial de carga.

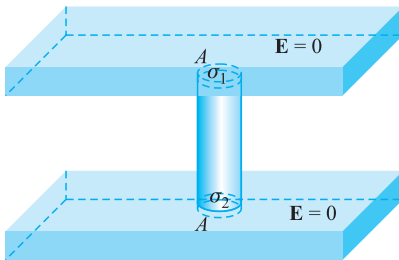


Figura 29.4. Cargas iguales y de signo contrario.

Las densidades de carga en los conductores se pueden determinar utilizando el Teorema de Gauss (Figura 29.3). Para ello tomamos como superficie de Gauss la de un cilindro, una de cuyas bases está situada dentro de uno de los conductores, paralela al plano de estos, y la otra en el espacio comprendido entre ambos. La aplicación del Teorema de Gauss da:

$$EA = \sigma_1 A / \epsilon_0, \text{ de donde } \sigma_1 = \epsilon_0 E = \epsilon_0 (V_1 - V_2) / d > 0 \quad [29.7]$$

Es fácil comprobar que sobre el otro conductor la densidad de carga es del mismo valor y de signo opuesto. Para ello tomemos la superficie de Gauss cilíndrica, con una de sus bases dentro de un conductor y la otra en el otro, paralelas a la superficie de los conductores (Figura 29.4),

$$0 = (\sigma_1 + \sigma_2) A / \epsilon_0, \text{ de donde } \sigma_2 = -\sigma_1$$

Es decir, las densidades superficiales de carga son constantes, del mismo valor y de distinto signo.

La carga total neta sobre cada uno de los conductores es:

$$Q = S\sigma = S\epsilon_0(V_1 - V_2) / d$$

La cual resulta ser directamente proporcional a la diferencia de potencial entre los conductores; de aquí que se llame *capacidad* a la relación entre la carga almacenada y la diferencia de potencial entre los conductores.

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{S\epsilon_0}{d} \quad [29.8]$$

Al conjunto formado por los dos conductores se le denomina *condensador*, y a cada uno de los conductores *armadura* del condensador. La [29.8] pone de manifiesto que la capacidad del condensador de caras planas paralelas es directamente proporcional a la superficie de su cara y a la permitividad del vacío, mientras que es inversamente proporcional a la distancia que separa sus láminas.

### EJEMPLO 29.1

Un condensador de armaduras planas y paralelas, cuya superficie es de 2 m<sup>2</sup> y separación de 10 cm, se ha cargado a un potencial de V<sub>0</sub> = 220 V. Calculemos:

- 1.º La capacidad del condensador.
- 2.º Su carga total y la densidad superficial de carga.
- 3.º El campo eléctrico en su interior.

Si se introduce en el condensador, una vez separado de la fuente de tensión, una lámina metálica de igual superficie que las armaduras, paralela a ellas, de espesor 2 cm y centrada entre las armaduras, calculemos:

- 4.º El campo eléctrico en las distintas zonas, representando su módulo.
- 5.º La densidad superficial de carga en cada cara de la lámina.
- 6.º El potencial y su representación gráfica, tomando como potencial nulo el de la armadura de carga negativa.

### Solución:

- 1.º La capacidad se obtiene por aplicación de la [29.8],

$$C = \epsilon_0 A / d = \epsilon_0 2 / 0,1 = 20 \epsilon_0 \text{ F}$$

Tomando el valor de  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1} \text{ C}^2$ , es  $C = 177 \times 10^{-12} \text{ F}$



2.º De acuerdo con la definición de capacidad  $C = Q/V$ , es:

$$Q = 20\varepsilon_0 \times 220 = 4\,400 \varepsilon_0 \text{ C} = 3,894 \times 10^{-8} \text{ C}$$

Y la densidad superficial de carga es:

$$\sigma = Q/A = 2\,200 \varepsilon_0 \text{ C/m}^2 = 1,947 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$$

3.º Si tomamos una superficie cilíndrica, de eje normal a las armaduras, con una base dentro de una de ellas y la otra en el interior del condensador (Figura 29.5), el Teorema de Gauss, puesto que el campo en el interior de la armadura es nulo, permite escribir:

$$E_0 A = \sigma A / \varepsilon_0, \text{ de donde } \mathbf{E}_0 = 2\,200 \mathbf{i} \text{ V/m}$$

4.º El campo, tanto en el interior de las armaduras como en el interior de la lámina metálica, es nulo y los campos  $\mathbf{E}_1$  y  $\mathbf{E}_3$ , por razones de simetría, son iguales e iguales a  $\mathbf{E}_0$ ,

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0 = 2\,200 \mathbf{i} \text{ V/m}$$

En la Figura 29.6 se ha representado el campo eléctrico.

5.º Tomemos una superficie cilíndrica, análoga a la del apartado 3.º, pero ahora con una base dentro de una armadura y la otra dentro de la lámina metálica (Figura 29.6). El flujo del campo eléctrico a través de ella será nulo, y el Teorema de Gauss se expresa  $0 = (\sigma + \sigma')A/\varepsilon_0$ , de donde:

$$\sigma' = -\sigma = -2\,200\varepsilon_0 \text{ C/m}^2 = 1,947 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$$

6.º La aplicación de la [28.40] en este caso da:

$$V_1 - V_2 = \int_0^{0,04} E_1 dx = E_1 |x|_0^{0,04} = 2\,200 \times 0,04 = 88 \text{ V}$$

$$V_2 - V_3 = \int_{0,06}^{0,1} E_3 dx = E_3 |x|_{0,06}^{0,1} = 2\,200 \times 0,04 = 88 \text{ V}$$

Al tomar  $V_3 = 0$ , son  $V_2 = 88 \text{ V}$  y  $V_1 = 176 \text{ V}$ . Tanto en la región 1, como en la 3, el potencial debe verificar la ecuación de Laplace,  $\nabla^2 V = 0$  y como el potencial únicamente depende de  $x$ , el laplaciano, en esas regiones, se expresa  $\frac{d^2 V}{dx^2}$ , cuya primera integral es  $\frac{dV}{dx} = a$  y una segunda integración da  $V = ax + b$ .

Para el cálculo de las constantes de integración debemos hacer cumplir al potencial las condiciones de contorno: para  $x = 0$ ,  $V_1 = 176$ ; para  $x = 0,04$ ,  $V_1 = V_2 = 88$ ; para  $x = 0,06$ ,  $V_3 = V_2 = 88$ , y para  $x = 0,1$ ,  $V_3 = 0$ . La primera condición permite calcular  $b = 176$ , y la segunda  $88 = a \cdot 0,04 + 176$ , permite obtener  $a = -2\,200$ , con lo cual el potencial en la región 1 es:  $V_1 = -2\,200x + 176$ .

En la región 3, las condiciones tercera y cuarta se escriben:

$$88 = a \cdot 0,06 + b \quad \text{y} \quad 0 = a \cdot 0,1 + b$$

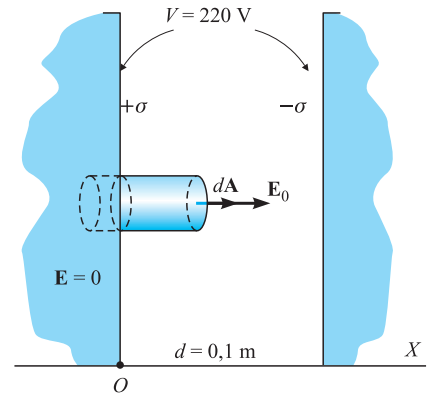


Figura 29.5. Campo eléctrico en el interior.

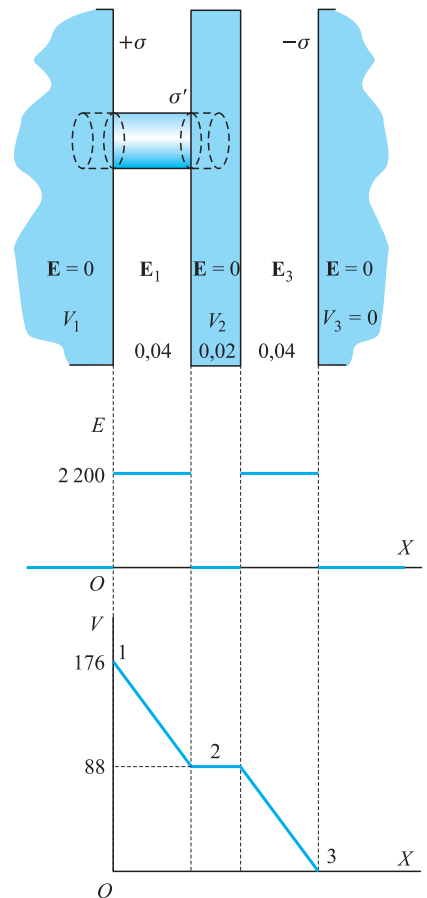


Figura 29.6. Campos y potenciales.

que, al restar, resulta  $88 = -a \cdot 0,04$ , de donde  $a = -2\,200$  y, por tanto,  $b = 220$ , con lo cual, el potencial en la región 3 se expresa:

$$V_3 = -2\,200x + 220$$

En la Figura 29.6 se ha representado el potencial en las distintas regiones del espacio.

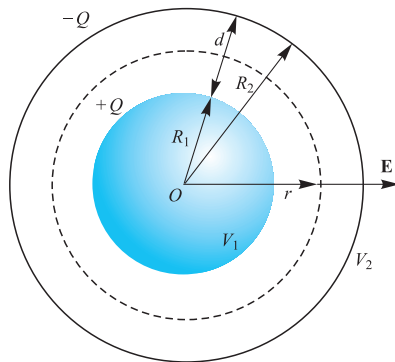


Figura 29.7. Condensador esférico.

### 29.4 Condensador esférico

Este tipo de condensador está constituido por dos conductores esféricos concéntricos, cuyas superficies enfrentadas tienen de radios  $R_1$  y  $R_2$  (Figura 29.7). Por la simetría esférica que presenta, las superficies equipotenciales serán esferas concéntricas con los conductores, ya que las esferas de radios  $R_1$  y  $R_2$  son equipotenciales. El campo será radial desde el centro común, normal a todas las superficies equipotenciales.

Aplicando a una superficie esférica de radio  $r$ ,  $R_1 < r < R_2$  el Teorema de Gauss, se expresa:

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

siendo  $Q$  la carga total de la armadura interna. En consecuencia, el campo en el interior es:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

La diferencia de potencial entre las armaduras se obtiene por aplicación de la expresión [28.40],

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \end{aligned}$$

La capacidad del condensador esférico resulta ser:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 \times R_2}{R_2 - R_1} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{d} \tag{29.9}$$

Si los dos conductores están muy próximos, es decir, si  $R_2 - R_1 = d$  es muy pequeño frente a  $R_1$ , podemos considerar  $R_1 \simeq R_2$ , con lo que es:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R^2}{d} = \epsilon_0 \frac{S}{d} \tag{29.10}$$

expresión completamente análoga a la [29.8] encontrada para el condensador de armaduras planas y paralelas.

## 29.5 Condensador cilíndrico

Se denomina así a aquél condensador cuyas armaduras presentan sendas superficies cilíndricas coaxiales enfrentadas (Figura 29.8). Sean  $R_1$  y  $R_2$  los radios de éstas,  $V_1$  y  $V_2$  sus potenciales y  $Q$  la carga total. Por la simetría cilíndrica del problema, las superficies equipotenciales serán superficies cilíndricas coaxiales con las armaduras, salvo un efecto en los bordes que se desprecia. El campo será radial, normal a las superficies equipotenciales.

Consideremos una superficie de Gauss cilíndrica, coaxial con las armaduras y de radio  $r$ . La aplicación del Teorema de Gauss da:

$$2\pi rLE = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

en la cual  $L$  es la longitud del condensador. En consecuencia el campo es:

$$E = \frac{1}{2\pi L\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

La diferencia de potencial entre las armaduras la obtenemos por aplicación de la [28.40],

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{2\pi L\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi L\epsilon_0} [\ln r]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{2\pi L\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Con lo cual, la capacidad del condensador cilíndrico resulta ser:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi L\epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad [29.11]$$

Un cable coaxial obedece a una configuración de este tipo y su capacidad por unidad de longitud es:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

Si las dos armaduras están muy próximas, es decir,  $R_2 - R_1 = d$  es muy pequeño frente a  $R_1$ , podemos hacer:

$$\ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right) = \ln \frac{R_1 + d}{R_1} = \ln \left( 1 + \frac{d}{R_1} \right) \simeq \frac{d}{R_1}$$

con lo que la capacidad se expresa:

$$C = 2\pi L\epsilon_0 \frac{R_1}{d} = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad [29.12]$$

Esta expresión es completamente análoga a las [29.8] y [29.10]; por tanto, puede considerarse completamente válida para cualquier tipo de condensador, siempre que la distancia que separe sus armaduras sea muy pequeña comparada con el radio de curvatura de la superficie de las mismas.

La representación de los condensadores en los esquemas eléctricos se hace mediante el símbolo —|—.

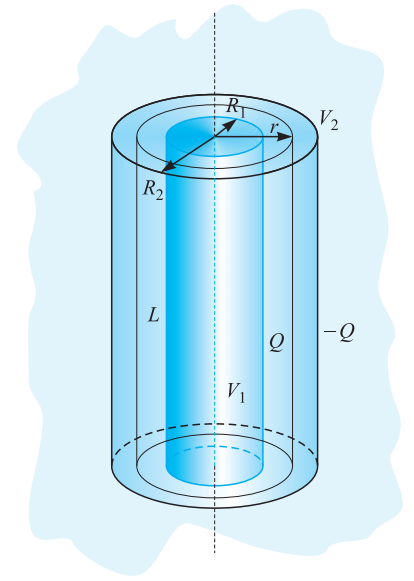


Figura 29.8. Condensador cilíndrico.

## 29.6 Asociación de condensadores

En función del fin que se persiga al asociar un conjunto de condensadores, la asociación puede realizarse en *serie*, con lo que se consiguen capacidades menores que la más pequeña de las asociadas, o en *paralelo*, cuando se pretende obtener altos valores de la capacidad en su conjunto, concretamente, la suma de las capacidades asociadas.

### Asociación en serie

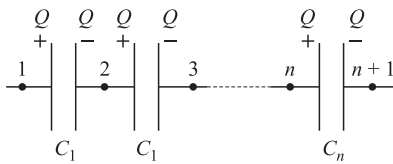


Figura 29.9. Asociación de condensadores en serie.

La asociación de condensadores en serie se realiza uniendo una armadura de uno de ellos con otra del segundo condensador, la libre de éste con una del tercero, y así sucesivamente (Figura 29.9). Supondremos, inicialmente, a todos los condensadores descargados, y estableceremos entre las armaduras libres del primero y último una diferencia de potencial,  $\Delta V = V_1 - V_{n+1}$ . Esta diferencia de potencial tiene que ser igual a la suma de las caídas de potencial en cada uno de los condensadores,

$$V_1 - V_{n+1} = \sum_{i=1}^n (V_i - V_{i+1}) \quad [29.13]$$

Para cada uno de los condensadores, se verifica la correspondiente ecuación:

$$V_i - V_{i+1} = \frac{Q}{C_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad [29.14]$$

La carga en todos los condensadores es la misma por el propio proceso de carga: si sobre una armadura es  $+Q$ , ésta induce en la otra del mismo condensador la misma carga de signo contrario  $-Q$ , y como ésta con la armadura del siguiente condensador forman un mismo conductor, en esta última aparecerá de nuevo la carga  $+Q$ , ya que inicialmente estaban descargados. Al sumar las  $n$  Ecuaciones [29.14] resulta:

$$\sum_{i=1}^n (V_i - V_{i+1}) = Q \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

que llevado a la [29.13] da:

$$V_1 - V_{n+1} = Q \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad [29.15]$$

Se llama *condensador equivalente* a un conjunto de condensadores, aquél que al ser sometido a la misma diferencia de potencial, almacena la misma carga. La capacidad de éste deberá verificar:

$$V_1 - V_{n+1} = Q \frac{1}{C}$$

y al compararlo con la [29.15] se deduce:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad [29.16]$$

En consecuencia: *la capacidad del condensador equivalente a un conjunto de condensadores acoplados en serie es tal, que su inversa es igual a la suma de las inversas de las capacidades de los condensadores asociados.* Por tanto, la asociación de condensadores en serie permite conseguir una capacidad inferior a la menor de los condensadores asociados.

### Asociación en paralelo

La asociación de condensadores en paralelo se establece como se indica en la Figura 29.10; por tanto, todos los condensadores están sometidos a la misma diferencia de potencial. La carga total del conjunto,  $Q$ , será la suma de la carga de cada uno de los condensadores.

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i = (V_1 - V_2) \sum_{i=1}^n C_i \quad [29.17]$$

Si sustituyéramos esta asociación de condensadores por uno equivalente, es decir, que bajo la misma diferencia de potencial almacenase la misma carga  $Q$ ; este debería tener una capacidad  $C$  que verificase:

$$Q = (V_1 - V_2)C$$

lo que al compararlo con la [29.17] da:

$$C = \sum_{i=1}^n C_i \quad [29.18]$$

En consecuencia: *la capacidad del condensador equivalente a un conjunto de condensadores acoplados en paralelo, es igual a la suma de las capacidades de los condensadores que forman la asociación.* Por tanto, la capacidad de la asociación en paralelo es siempre superior a la mayor de las capacidades que intervienen.

### Asociación mixta

También existe la posibilidad de que, en una asociación, parte de los condensadores estén en serie y parte en paralelo, lo que constituye una asociación mixta. Para su resolución debe resolverse, en primer lugar, cada una de las asociaciones simples.

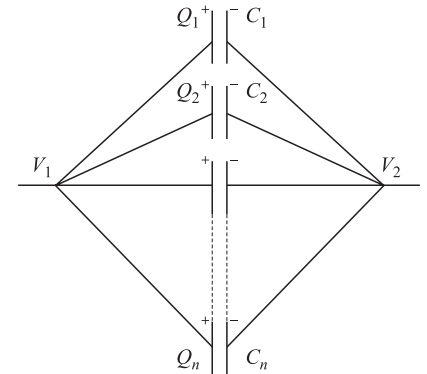


Figura 29.10. Asociación de condensadores en paralelo.

#### EJEMPLO 29.2

En el caso de la asociación de la Figura 29.11 y para los valores de las capacidades que en ella figuran, determinemos:

- 1.º La capacidad del condensador equivalente.
- 2.º La carga de cada uno de los condensadores.
- 3.º La diferencia de potencial entre los puntos A y B.

#### Solución:

1.º Tanto la rama MN como la PQ están formadas por dos condensadores en serie, que pueden sustituirse por un condensador de capacidad  $C_1$ , tal que sea:

$$1/C_1 = 1/6 + 1/3 = 1/2, \text{ de donde } C_1 = 2 \mu\text{F}$$

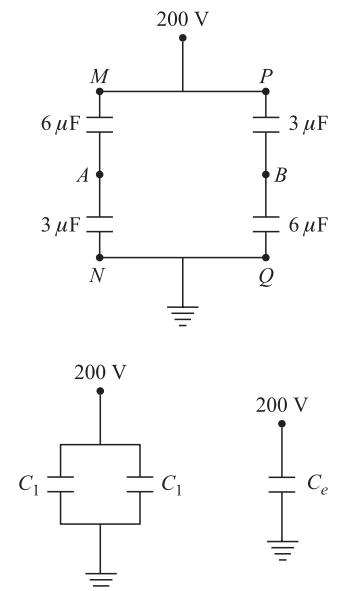


Figura 29.11.

Ahora el problema ha quedado reducido a dos condensadores  $C_1$  en paralelo, los cuales pueden sustituirse por uno solo, que será el equivalente al sistema primitivo y cuyo valor es:

$$C_e = C_1 + C_1 = 4 \mu\text{F}$$

2.º La carga del condensador equivalente debe verificar,  $C_e = Q_e/V$ , es decir:

$$Q_e = 4 \mu\text{F} \times 200 \text{ V} = 800 \mu\text{C}$$

La carga de los condensadores  $C_1$  será:

$$Q_1 = C_1 \times V = 2 \mu\text{F} \times 200 \text{ V} = 400 \mu\text{C}$$

La carga de los condensadores iniciales, al estar en serie, será también de  $400 \mu\text{C}$ .

3.º La caída de potencial de  $M$  a  $A$  es:

$$200 - V_A = 400/6$$

y la caída de  $P$  a  $B$  es  $200 - V_B = 400/3$ .

Al restar ambas, resulta:

$$V_A - V_B = 200/3 \text{ V}$$

## Red de condensadores

A veces, las asociaciones de condensadores son más complejas y no es posible considerarlas como compuestas de asociaciones sencillas en serie o paralelo, constituyendo una *red de condensadores*. Para la resolución de tales asociaciones se hace necesario aplicar las reglas de Kirchhoff:

- La suma algebraica de las cargas de las armaduras conectadas a un nudo es nula.
- En todo circuito cerrado, la caída de potencial debe ser nula.

Para la aplicación de estas reglas, se asignará arbitrariamente el signo a las armaduras de los condensadores: si en la resolución los valores de las cargas salen positivos, es porque el signo ha sido atribuido adecuadamente; si salen negativas, hay que cambiar el signo en esas armaduras. Así, en el caso de la Figura 29.12, la aplicación de las citadas reglas da:

$$\text{En el nudo 3:} \quad -Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

$$\text{En el nudo 4:} \quad -Q_3 - Q_5 + Q_4 = 0$$

$$\text{En el circuito 1341:} \quad \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_3}{C_3} - \frac{Q_5}{C_5} = 0$$

$$\text{En el circuito 2432:} \quad -\frac{Q_4}{C_4} - \frac{Q_3}{C_3} + \frac{Q_2}{C_2} = 0$$

A estas cuatro ecuaciones, añadiremos la correspondiente a la caída de potencial por la rama 1 3 2,

$$V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}$$

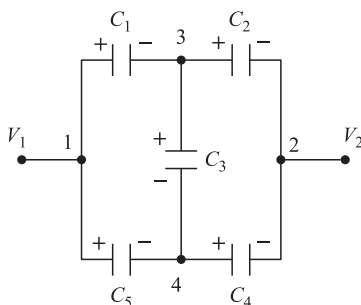


Figura 29.12. Red de condensadores.

Con ello tenemos cinco ecuaciones que nos permitirán determinar las cinco cargas  $Q_1$  a  $Q_5$  en función de las cinco capacidades  $C_1$  a  $C_5$  y de la diferencia de potencial.

Conocidas las cargas, podemos hallar la capacidad del condensador equivalente, es decir, aquél que bajo la misma diferencia de potencial almacene la misma carga. La suma de las cargas de las armaduras unidas al nudo 3 es nula, como también lo es la suma de las cargas de las armaduras unidas al nudo 4. Por tanto, la carga almacenada es la suma de las cargas  $Q_1 + Q_5$ , que debe ser igual y de signo contrario a la suma de las cargas  $Q_3 + Q_4$ , ya que por el proceso de carga, los electrones que salen de las armaduras 1 y 5 deben llegar a las 2 y 4, lo cual puede comprobarse sumando las dos primeras ecuaciones. Por tanto, la capacidad del condensador equivalente, en este caso, es:

$$C_e = \frac{Q_1 + Q_5}{V_1 - V_2}$$

En general, será:

$$C_e = \frac{\sum Q_i}{V_1 - V_2} \quad [29.19]$$

En la que  $Q_i$  es la suma de las cargas de todas las armaduras unidas a uno de los terminales, que debe ser igual y de signo contrario a la suma de las cargas de todas las armaduras unidas al otro terminal.

### EJEMPLO 29.3

Sea una red de condensadores como la indicada en la Figura 29.13, con los valores que en ella se indican. Calculemos:

- 1.º La carga almacenada en cada uno de los condensadores.
- 2.º La diferencia de potencial a la que está cada condensador.

#### Solución:

- 1.º Establecemos un signo y unas cargas para las armaduras. En este caso, todas las armaduras unidas a  $A$  y  $B$  son un mismo conductor, que debe permanecer descargado,

$$-Q_1 + Q_2 - Q_3 + Q_4 = 0$$

En el circuito superior de la figura es  $Q_1/6 - Q_3/3 = 0$ ,  $Q_1 = 2Q_3$ .

En el circuito inferior, es  $Q_2/3 - Q_4/6 = 0$ ,  $Q_4 = 2Q_2$ .

La caída de potencial por la rama que contiene a  $B$  es  $200 = Q_3/3 + Q_4/6$ .

El sistema formado por estas cuatro ecuaciones contiene cuatro incógnitas, y resuelto se obtiene:

$$Q_1 = 600 \mu\text{C}, \quad Q_2 = 300 \mu\text{C}, \quad Q_3 = 300 \mu\text{C} \quad \text{y} \quad Q_4 = 600 \mu\text{C}$$

- 2.º La diferencia de potencial a la que están cada uno de los condensadores es:

$$V_1 = 600/6 = 100 \text{ V}, \quad V_2 = 300/3 = 100 \text{ V}, \quad V_3 = 300/3 = 100 \text{ V}$$

$$\text{y} \quad V_4 = 600/6 = 100 \text{ V}$$

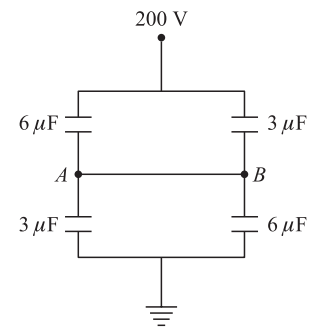


Figura 29.13.

### 29.7 Energía de una configuración discreta de cargas

En el capítulo anterior establecimos la expresión [28.42], que nos da el trabajo que debemos emplear para traer una carga desde el infinito hasta un punto que está a potencial  $V$ ,

$$W = qV$$

Este trabajo queda almacenado como energía electrostática. Si el espacio está inicialmente libre de campos eléctricos, traer a un punto cualquiera de él, como el  $P_1$ , definido por el vector posición  $\mathbf{r}_1$ , una carga  $q_1$ , no requiere el empleo de energía alguna (Figura 29.14).

Esta carga creará un potencial, que viene dado por la [28.39], y cuyo valor en un punto  $P_2$ , definido por  $\mathbf{r}_2$ , el valor es:

$$V_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}}$$

En la que es  $r_{12} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ . Si ahora queremos traer una carga  $q_2$  al punto  $P_2$ , será necesario emplear la energía:

$$W_2 = q_2 V_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

Ambas cargas crearán ahora sendos potenciales que se superpondrán en los distintos puntos del espacio. Por ello, si queremos traer una carga  $q_3$  hasta un punto  $P_3$ , definido por el vector  $\mathbf{r}_3$ , será necesario emplear la energía:

$$W_3 = q_3 V_{13} + q_3 V_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

En la que son:  $r_{13} = |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|$  y  $r_{23} = |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|$ .

La energía total almacenada en la nueva configuración es  $W = W_2 + W_3$ ,

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

En la que debe ser  $i \neq j$ , habiéndose incluido el factor 1/2 porque se duplican los valores, al tomar tanto  $i$  como  $j$  todos los posibles desde 1 a 3.

Esta última expresión se generaliza para  $n$  cargas  $q_i$ , situadas en los puntos  $P_i$  definidos por los vectores  $\mathbf{r}_i$ , obteniéndose la expresión:

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \tag{29.20}$$

En la que debe sumar para  $i$  y  $j$ , pero siendo  $i \neq j$  y  $r_{ij} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$ .

La expresión [29.20] puede ponerse de la forma:

$$W = \frac{1}{2} \sum_j q_j \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n q_j V_j \tag{29.21}$$

En la que debe ser  $i \neq j$ , siendo  $V_j$  el potencial en la posición de la carga  $q_j$  debido a las restantes cargas.

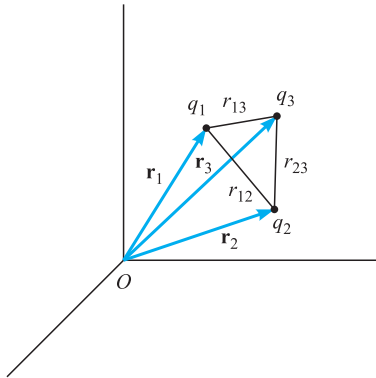


Figura 29.14. Energía de una distribución de cargas.



## 29.8 Energía de una configuración continua de cargas

Si la distribución de cargas es continua, la densidad espacial de carga será función de punto  $\rho(\mathbf{r})$ . La carga contenida en un elemento de volumen,  $dv$ , será una carga elemental,  $dq = \rho(\mathbf{r}) dv$ , y ese elemento de volumen estará a un cierto potencial,  $V(\mathbf{r})$ , con lo cual, la [29.21] se transforma en:

$$W = \frac{1}{2} \int_v \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) dv \quad [29.22]$$

### Caso de un conductor cargado

Si el cuerpo cargado es un conductor, todo él estará al mismo potencial, y en la expresión [29.22] podemos sacar su valor fuera de la integral. Además, toda la carga estará sobre su superficie, expresándose:

$$W = \frac{1}{2} V \int \sigma dS = \frac{1}{2} VQ \quad [29.23]$$

Esta misma expresión puede deducirse directamente de la siguiente forma: la energía almacenada en un cierto conductor cargado, que está a potencial  $V$ , será el trabajo que ha sido necesario realizar para cargarle, es decir, para ir trayendo cargas desde el infinito hasta él, proceso que finaliza cuando el conductor llega al potencial  $V$ , en cuyo momento la carga tendrá un cierto valor  $Q$ . Ahora bien, en el proceso de carga del conductor, a medida que vamos aumentando aquella se irá elevando el potencial de este. En todo estado intermedio, la relación de la carga respecto al potencial debe ser constante, ya que esa relación es la capacidad del conductor. Por ello, podemos expresar la carga, en un momento del proceso de carga, como  $\lambda Q$ , y el potencial, como  $\lambda V$ , siendo  $0 < \lambda < 1$ . En un momento cualquiera del proceso de carga, la energía necesaria para llevar la cantidad elemental de carga,  $dq = Q d\lambda$ , al conductor desde el infinito es:

$$dW = \lambda V dq = \lambda V Q d\lambda$$

que integrada, desde  $\lambda = 0$  a  $\lambda = 1$ , da:

$$W = \frac{1}{2} QV$$

que es la misma [29.23]. Esta expresión, que da la energía almacenada en el conductor cargado, puede transformarse teniendo en cuenta la definición de capacidad:

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad [29.24]$$

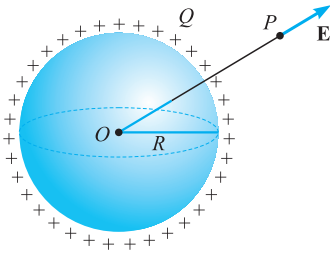


Figura 29.15.

**EJEMPLO 29.4**

Calculemos la energía de una superficie esférica de radio  $R$ , cargada con una carga  $Q$  (Figura 29.15).

**Solución:**

Por el Teorema de Gauss, el campo en el interior de la esfera es nulo y el campo en el exterior, a una distancia  $r > R$ , es:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

En consecuencia, el potencial en puntos del exterior es:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

El potencial en la superficie esférica y en todo su interior se obtiene particularizando la anterior para  $r = R$ ,

$$V_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

La energía almacenada se obtiene aplicando la [29.22]:

$$W = \frac{1}{2} Q V_s = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}$$

**Conjunto de conductores cargados**

Sea un sistema de conductores con cargas  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  a potenciales, respectivamente,  $V_1, V_2, \dots, V_n$ . La integración en la expresión [29.22] puede realizarse ordenadamente sobre cada uno de los conductores, en los cuales el potencial es constante, es decir de la forma:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} V_1 \int \sigma_1 dS_1 + \frac{1}{2} V_2 \int \sigma_2 dS_2 + \dots + \frac{1}{2} V_n \int \sigma_n dS_n = \\ &= \frac{1}{2} V_1 Q_1 + \frac{1}{2} V_2 Q_2 + \dots + \frac{1}{2} V_n Q_n = \frac{1}{2} \sum V_i Q_i \end{aligned} \quad [29.25]$$

que también puede expresarse de la forma:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n C_i V_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i^2}{C_i} \quad [29.26]$$

**EJEMPLO 29.5**

Calculemos la energía de la configuración formada por dos conductores: uno esférico, de radio  $R$  y carga  $Q$ , y el otro, una corona esférica concéntrica, de radios  $2R$  y  $3R$ , también con carga  $Q$  (Figura 29.16).

**Solución:**

Consideremos el espacio dividido en cuatro regiones numeradas, como se indica en la Figura 29.16.

El campo en el interior de los conductores es nulo:  $E_1 = 0$  y  $E_3 = 0$ . El campo en la región 2,  $R < r < 2R$ , por el Teorema de Gauss, es:

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

análogamente, el campo en la región 4,  $r > 3R$ , es

$$E_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{r^2}$$

El potencial en la región 4, tomando como potencial nulo el de los puntos del infinito, es:

$$V_4 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

El potencial de la corona esférica será el obtenido al particularizar  $V_4$  para  $r = 3R$ ,

$$V_3 = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

El potencial en la región 2 debe ser de la forma  $V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \text{cte}$ , el cual, al ser particularizado para  $r = 2R$  debe dar el potencial  $V_3$ , es decir, debe verificar:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2R} + \text{cte} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

de donde se obtiene el valor de la constante:

$$\text{cte} = \frac{1}{24\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

con lo cual, el potencial en la región 2 es:

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{6R} \right)$$

y el potencial de la esfera de radio  $R$ , región 1, se obtiene particularizando  $V_2$  para  $r = R$ ,

$$V_1 = \frac{7}{24\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

La energía total de esta configuración de conductores cargados se obtiene por aplicación de la [29.25],

$$W = \frac{1}{2} QV_1 + \frac{1}{2} QV_3 = \frac{1}{2} Q \frac{7}{24\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} + \frac{1}{2} Q \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} = \frac{11}{48\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}$$

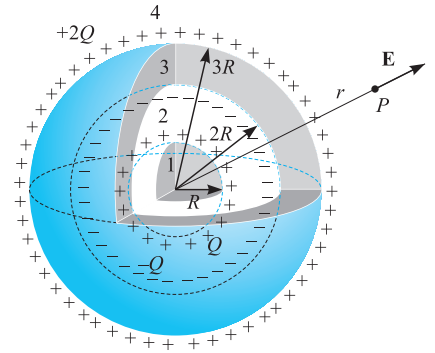


Figura 29.16.

## 29.9 Energía de un condensador

La energía almacenada en un condensador puede calcularse considerando que está formado por dos conductores que llevan cargas iguales pero de distinto signo, y aplicando a este caso la [29.25], con lo cual se obtiene:

$$W = \frac{1}{2} QV_1 + \frac{1}{2} (-Q)V_2 = \frac{1}{2} Q(V_1 - V_2) \quad [29.27]$$

Este resultado puede también obtenerse calculando la energía necesaria para cargar al condensador, energía que quedará almacenada en éste: el proceso de carga de un condensador consiste en hacer pasar cargas de la armadura de menor potencial a la de mayor, para ello se necesita un aporte de energía que es almacenada por el condensador. En un cierto momento del proceso de carga, el valor de ésta sobre las armaduras será  $\lambda Q$ , y el valor de la diferencia de potencial entre las armaduras  $\lambda(V_1 - V_2)$ , siendo  $Q$  la carga final y  $V_1 - V_2$  la diferencia de potencial una vez cargado. En un instante intermedio del proceso de carga, el trabajo necesario para llevar la carga elemental  $Q d\lambda$  de la armadura de menor a la de mayor potencial, es, por la propia definición de diferencia de potencial:

$$dW = \lambda(V_1 - V_2)Q d\lambda$$

y el trabajo total necesario para cargar el condensador desde cero a  $Q$ , es:

$$W = \frac{1}{2} Q(V_1 - V_2)$$

que es la misma [29.27] y que también puede expresarse:

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C(V_1 - V_2)^2 \quad [29.28]$$

Utilizando para la capacidad la expresión [29.8], podemos expresar:

$$V_1 - V_2 = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$$

Lo que llevado a la [29.27] permite expresar la energía almacenada de la forma:

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\epsilon_0 S} \quad [29.29]$$

Expresión que nos indica que la energía almacenada en un condensador, con una carga  $Q$ , aumenta con la separación,  $d$ , entre sus armaduras.

## 29.10 Densidad de energía del campo eléctrico

La energía eléctrica se localiza en puntos donde existe campo eléctrico, ya que es éste el que ejerce las fuerzas sobre las cargas, y debemos realizar un trabajo para mover las cargas en contra de las fuerzas del campo. La energía eléctrica no puede localizarse en el interior de los conductores, ya que en ellos el campo es nulo, su localización está en el espacio entre ellos. La expresión [29.22], que nos da la

energía almacenada en una configuración continua de cargas, puede expresarse sustituyendo en ella el valor de  $\rho$ , dado por la [28.75],  $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$ , resultando:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} V dv$$

La identidad  $\nabla \cdot V\mathbf{E} = V\nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla V$ , teniendo en cuenta que es  $\mathbf{E} = -\nabla V$ , se expresa  $\nabla \cdot V\mathbf{E} = V\nabla \cdot \mathbf{E} - E^2$ , con lo cual, la energía puede ponerse de la forma:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V (\nabla \cdot V\mathbf{E} + E^2) dv = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V \nabla \cdot V\mathbf{E} dv + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E^2 dv$$

Aplicando a la primera integral el teorema de la divergencia, se escribe:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_S V\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E^2 dv$$

El potencial es proporcional a  $1/r$ , el campo eléctrico lo es a  $1/r^2$  y la superficie a  $r^2$ , con lo cual, la cantidad subintegral de la integral de superficie es proporcional a  $1/r$  y, al tender  $r$  a infinito, se anula, resultando:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E^2 dv \quad [29.30]$$

Expresión que nos da la energía almacenada en el campo eléctrico.

La densidad de energía del campo eléctrico o energía almacenada en el campo eléctrico por unidad de volumen es:

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \quad [29.31] \quad \text{Densidad de energía del campo eléctrico}$$

De esta expresión parece deducirse que la energía está almacenada en el campo eléctrico, es decir, en las regiones del espacio donde hay campo eléctrico. Por el contrario, de la [29.23],  $W = 1/2 QV$ , parece desprenderse que la energía está almacenada en la configuración de las cargas. Ambas tesis no son contradictorias, pues están ligadas por la condición de contorno,  $\sigma = \epsilon E$ , siendo  $Q = \sigma S = \epsilon ES$ . Por tanto, pueden considerarse como dos puntos de vista del mismo hecho, siendo, sin embargo, más general, suponer a la energía almacenada en el campo eléctrico, pues, en ocasiones, la existencia de éste no es posible relacionarla con la carga, como sucede en el caso de las ondas electromagnéticas.

### EJEMPLO 29.6

Calculemos la energía de una superficie esférica de radio  $R$  cargada con una carga  $Q$ .

#### Solución:

Este ejemplo, que ha sido ya resuelto en el Epígrafe 29.8, lo resolveremos ahora por aplicación de la expresión [29.30]. El campo eléctrico creado por la superficie esférica cargada es  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$ . Como elemento de volumen tomaremos al

volumen comprendido entre dos superficies esféricas concéntricas muy próximas,  $dv = 4\pi r^2 dr$ , con lo cual, la energía se expresa:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^\infty \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0^2} \frac{Q^2}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left| -\frac{1}{r} \right|_R^\infty = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}$$

que es el mismo resultado obtenido en la resolución realizada en el Epígrafe 29.8.

### EJEMPLO 29.7

Calculemos la energía de la configuración formada por dos conductores: uno esférico, de radio  $R$  y carga  $Q$ , y el otro, una corona esférica concéntrica, de radios  $2R$  y  $3R$ , también con carga  $Q$ .

#### Solución:

Este ejemplo, que ha sido ya resuelto en el Epígrafe 29.8, lo resolveremos ahora por aplicación de la expresión [29.30]. El campo en los conductores, regiones 1 y 3 (Figura 29.16), es nulo y, por tanto, en ellos no se almacena energía. La energía estará almacenada en los campos existentes en las regiones 2 y 4 (Figura 29.16), y la expresión [29.30] se escribe ahora de la forma:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E_2^2 dv + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E_4^2 dv$$

El valor de los campos en las regiones 2 y 4 ya fue obtenido; con ellos, y tomando como elemento de volumen,  $dv = 4\pi r^2 dr$ , el cálculo de las integrales es:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_0}{2} \int_{v_2} E_2^2 dv &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^{2R} \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0^2} \frac{Q^2}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^{2R} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left| -\frac{1}{r} \right|_R^{2R} = \\ &= \frac{1}{16\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_0}{2} \int_{3R}^\infty E_4^2 dv &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{3R}^\infty \frac{1}{4\pi^2 \epsilon_0^2} \frac{Q^2}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0} \int_{3R}^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0} \left| -\frac{1}{r} \right|_{3R}^\infty = \\ &= \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R} \end{aligned}$$

La suma de ambas nos da, para la energía almacenada, el valor:

$$W = \frac{11}{48\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}$$

que es el mismo obtenido en la resolución realizada en el Epígrafe 29.8.

## 29.11 Energía de un dipolo en un campo eléctrico

Sea un dipolo de momento dipolar  $m = qd$ , como el indicado en la Figura 29.17, que está inmerso en un campo eléctrico  $\mathbf{E}$ . Si el campo eléctrico es uniforme, las fuerzas que ejerce sobre las cargas del dipolo constituyen un par de fuerzas,  $q\mathbf{E}$  y  $-q\mathbf{E}$ . Por tanto, la fuerza resultante es nula, pero existe un momento que será el mismo en todos los puntos del espacio, y su valor es:

$$\mathbf{M} = \mathbf{d} \cdot q\mathbf{E} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{E} \quad [29.32]$$

Tomemos un sistema de referencia en el cual el eje  $OX$  tenga la dirección y el sentido del campo, y el plano  $XOY$  conteniendo al dipolo (Figura 29.17). En este sistema de referencia es:

$$\mathbf{M} = -mE \sin \theta \mathbf{k}$$

El campo hará girar al dipolo, y para un giro elemental debe emplear la energía:

$$dW = \mathbf{M} \cdot d\theta = -mE \sin \theta d\theta$$

La energía del dipolo habrá sufrido una variación  $dW_d = -dW = mE \sin \theta d\theta$ .

Y la energía del dipolo se obtiene por integración:

$$W_d = -mE \cos \theta = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{E} \quad [29.33]$$

La energía mínima del dipolo está en su posición  $\theta = 0$ , es decir, alineado con el campo,  $U_{\min} = -mE$ , y la energía máxima en la posición  $\theta = \pi/2$ ,  $U_{\max} = 0$ .

Si el campo eléctrico no es uniforme, ejercerá una fuerza neta sobre el dipolo, cuyo cálculo puede hacerse a partir de  $\mathbf{F} = -\nabla V$ , es decir,

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{E}) \quad [29.34]$$

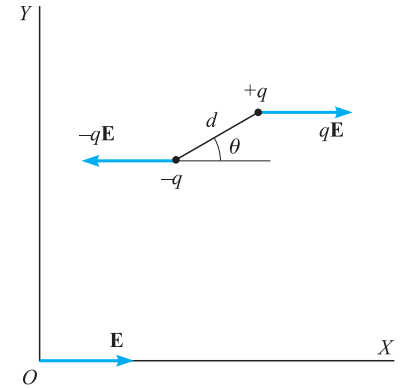


Figura 29.17. Dipolo en un campo eléctrico.

## 29.12 Fuerza entre conductores cargados

Por el hecho de estar los conductores cargados aparecen entre ellos unas fuerzas de origen eléctrico. Si una parte del sistema ha realizado un desplazamiento elemental,  $dx$ , las fuerzas ejercidas por el resto del sistema habrán realizado un trabajo mecánico, cuya expresión es:

$$dW_m = F dx \quad [29.35]$$

Si alguna parte del sistema lo que realiza es un giro, sobre ella el resto del sistema habrá ejercido un momento, que en un giro elemental,  $d\theta$ , habrá producido un trabajo elemental dado por:

$$dW_m = M d\theta \quad [29.36]$$

Pueden presentarse dos situaciones:

- Que el sistema esté aislado, es decir, a carga constante.
- Que esté conectado a una fuente de tensión, es decir, a potencial constante.

a) *A carga constante.*

En este caso, el trabajo producido solamente puede hacerse a expensas de la energía eléctrica almacenada y conllevará una disminución de ella, debiendo verificarse  $dW_m + dW = 0$  o  $dW = -dW_m = -F dx$ , de donde,

$$F = - \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)_Q \quad [29.37]$$

Análogamente, en el caso de un giro, es  $dW = -dW_m = -M d\theta$ , de donde,

$$M = - \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)_Q \quad [29.38]$$

b) *A potencial constante.*

Si el sistema de conductores se mantiene conectado a fuentes de tensión constante, al moverse alguna de sus partes, el trabajo mecánico no se hace solamente a expensas de la energía electrostática almacenada, sino también a expensas de la energía recibida de las fuentes de tensión. En consecuencia, se verifica:

$$dW_m + dW = dW_f \quad [29.39]$$

La variación de la energía electrostática, puesto que el potencial se mantiene constante, es:

$$dW = \frac{1}{2} V dQ$$

Por otra parte, esta variación de carga ha pasado por la fuente de tensión constante, lo cual indica que ésta ha suministrado la energía,

$$dW_f = V dQ = 2 dW$$

Con ello, la Ecuación [29.39] se reduce a  $dW_m = dW$  y, teniendo en cuenta la [29.35], resulta,

$$dW = F dx$$

de donde,

$$F = \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)_V \quad [29.40]$$

Análogamente, en el caso de un giro de alguna parte del sistema, el momento ejercido sobre ella es:

$$M = \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)_V \quad [29.41]$$

**Caso del condensador de caras planas paralelas**

Para el condensador de caras planas paralelas y, en general, para todo condensador con armaduras muy próximas, la energía está dada por la expresión [29.29],

$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S} x$ , con lo cual, la fuerza que ejercen entre sí sus placas, cuando el



condensador está separado de la fuente de tensión, es decir, a potencial constante, es:

$$F = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} \quad [29.42]$$

que es un valor constante.

En el caso de que el condensador esté unido a la fuente de tensión constante, la energía almacenada se expresa de la forma:

$$W = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{x} V^2$$

y, por aplicación de la [29.37], la fuerza que ejercen las armaduras es:

$$F = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{x^2} V^2 = -\frac{1}{2} \frac{C^2}{\epsilon_0 A} V^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 A E^2 \quad [29.43]$$

que es un valor variable, ya que  $C = \frac{\epsilon_0 A}{x}$ , depende de la separación,  $x$ , entre las armaduras, así como el campo  $E = V/x$ .

### 29.13 Electrón-voltio

El trabajo necesario para llevar la carga  $Q$  desde un punto de potencial  $V_1$  a otro potencial  $V_2$ ,  $V_2 > V_1$ , es  $Q(V_2 - V_1)$ . Cuando esa carga sea movida por el campo eléctrico, desde el potencial  $V_2$  al  $V_1$ , aquel la comunicará la misma energía.

$$Q(V_2 - V_1)$$

En la mayoría de los casos, la carga móvil es el propio electrón (Figura 29.18) o partículas cuya carga es  $e$  o múltiplo de  $e$ , por ello resulta muy cómodo utilizar como unidad de energía al *electrón-voltio*, que es igual a la *energía comunicada a un electrón por un campo que lo mueve en el vacío bajo la diferencia de potencial de un voltio*. Puesto que el valor de la carga elemental es aproximadamente  $1,602 \cdot 10^{-19}$  C, la equivalencia del electrón-voltio con el julio es:

$$1eV = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

La energía comunicada al electrón se transformará en energía cinética de éste y, si ha partido del reposo, la velocidad que adquiere verifica:

$$1eV = \frac{1}{2} m_e v^2 = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

De donde, tomando para la masa del electrón,  $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$  kg, resulta:

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{9,109 \cdot 10^{-31}}} = 5,931 \cdot 10^{11} \text{ m/s}$$

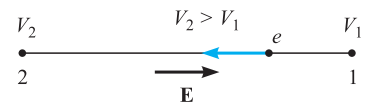


Figura 29.18. Movimiento del electrón por un campo  $E$ .

### 29.14 Movimiento de partículas cargadas en campos eléctricos constantes

Consideremos un campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , definido en una región del espacio, y una partícula de masa  $m$  y carga  $q$ , que penetra en el citado campo con velocidad  $\mathbf{v}_0$ . La fuerza que el campo eléctrico ejerce sobre la partícula es:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

y la ecuación del movimiento de aquella se escribe:

$$m\mathbf{a} = q\mathbf{E} + m\mathbf{g}$$

La acción gravitacional es despreciable frente a las fuerzas de origen eléctrico. Así, por ejemplo, para el electrón, la fuerza gravitacional a velocidades no muy altas, es:

$$mg = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 8,918 \cdot 10^{-30} \text{ N}$$

mientras que la fuerza de origen eléctrico, en un campo de  $10^3 \text{ NC}^{-1}$  es:

$$eE = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^3 \text{ NC}^{-1} = 1,6 \cdot 10^{-16} \text{ N}$$

En consecuencia, la fuerza de origen eléctrico es del orden de  $1,8 \cdot 10^{14}$  veces mayor que la gravitacional. Por ello, la ecuación del movimiento puede escribirse de la forma:

$$m\mathbf{a} = q\mathbf{E}$$

La partícula estará sometida a la aceleración:

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m}\mathbf{E}$$

Al ser el campo independiente del tiempo, una primera integración da, para la velocidad, la expresión:

$$\mathbf{v} = \frac{q}{m}\mathbf{E}t + \mathbf{v}_0$$

En la cual hemos tomado el origen de tiempos en el instante en que penetra la partícula en el campo.

Una nueva integración da el vector de posición:

$$\mathbf{r} = \frac{q}{2m}\mathbf{E}t^2 + \mathbf{v}_0t$$

En la cual hemos tomado el origen del sistema de referencia en el punto por el que la partícula penetra en el campo.

#### EJEMPLO 29.8

El caso de mayor importancia práctica es aquel en el que  $\mathbf{E}$  es uniforme, constante y limitado a una región del espacio, en la cual penetra la partícula con velocidad  $\mathbf{v}_0$  normal al campo, situación que se representa en la Figura 29.19.

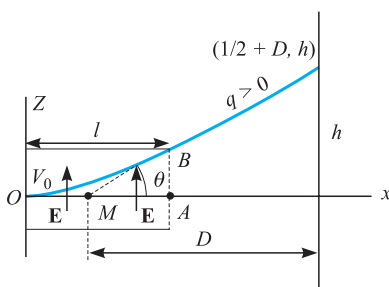


Figura 29.19. Movimiento del electrón en un campo transversal.

**Solución:**

En el sistema de referencia elegido, son:  $\mathbf{E} = E\mathbf{k}$  y  $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{i}$ , con lo cual, el vector de posición se escribe:

$$\mathbf{r} = \frac{qE}{2m} t^2 \mathbf{k} + v_0 t \mathbf{i}$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la trayectoria son:

$$x = v_0 t \quad y \quad z = \frac{qE}{2m} t^2$$

y eliminando el tiempo, obtenemos la ecuación cartesiana de la trayectoria:

$$z = \frac{qE}{2mv_0^2} x^2$$

La cual es una parábola contenida en el plano  $XOZ$ , con el mínimo en el origen, si es  $q > 0$  o con el máximo en el origen, si es  $q < 0$ . Toda partícula, que penetre normal al campo, quedará clasificada según su carga: las de carga positiva, van hacia la región positiva del eje  $OZ$ , y las de carga negativa, hacia la región negativa del citado eje.

Al salir la partícula del campo deja de actuar sobre ella la fuerza, emergiendo según la tangente a la parábola y manteniéndose luego con movimiento rectilíneo y uniforme. La tangente a la parábola en el punto  $B$  de emergencia cortará a la tangente a la parábola por su vértice en el punto  $M$ , medio de  $OA$ , lo cual no es más que una conocida propiedad de la parábola.

El ángulo que forman las trayectorias emergente e incidente define la desviación  $\theta$  que el campo produce en la dirección de la partícula. Si ésta se recoge sobre una pantalla situada a una distancia  $D$  del centro  $M$  del campo, el impacto de la partícula sobre ella se producirá en el punto  $P(l/2 + D, h)$ , siendo,

$$h = D \operatorname{tg} \alpha = D \frac{AB}{l/2}$$

La longitud  $AB$  es la  $z$  de la parábola para  $x = l$ , es decir,

$$AB = \frac{qE}{2mv_0^2} l^2$$

y, por tanto,

$$h = D \frac{qE}{mv_0^2} l$$

Si el campo está creado por dos láminas planas paralelas separadas, la distancia  $d$ , cuya diferencia de potencial es  $V$ , será  $E = V/d$ , y con ello:

$$h = \frac{Dql}{mv_0^2 d} V$$

La distancia  $h$  es linealmente proporcional a  $V$  y, a tensión constante,  $h$  será inversamente proporcional al cuadrado de  $v_0$ , resultando el dispositivo como un separador de partículas de igual masa según sus velocidades.



### 30.1 Cargas inducidas en un dieléctrico

Si un dieléctrico es colocado bajo la acción de un campo eléctrico uniforme  $\mathbf{E}_0$ , sobre la superficie de aquél aparecen en una cara cargas positivas y en la opuesta cargas negativas, tal y como se indica en la Figura 30.1(a). Si se divide el dieléctrico, las dos partes resultantes vuelven a presentar cargas negativas en una cara y positivas en la otra, como se indica en la Figura 30.1(b). Si se suprime el campo eléctrico,  $\mathbf{E}_0 = 0$ , los dos fragmentos de dieléctrico quedan descargados (Figura 30.1(c)). Todo ello demuestra que las cargas que aparecen sobre la superficie de los dieléctricos son inducidas por la acción del campo, por tanto, en los dieléctricos perfectos no existen cargas libres, ya que de haberlas, al igual que en los conductores, los fragmentos hubieran quedado cargados después de suprimir el campo. Las cargas en un dieléctrico perfecto están ligadas a las moléculas que lo constituyen.

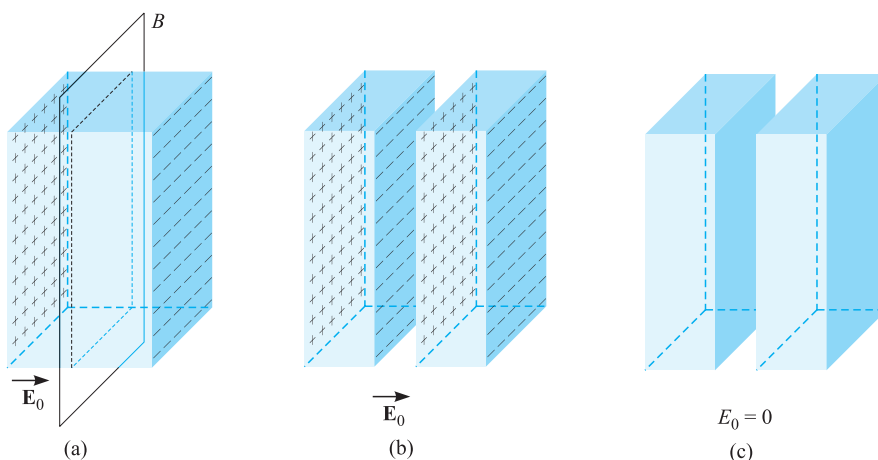


Figura 30.1.

- 30.1. Cargas inducidas en un dieléctrico
- 30.2. Polarización de un dieléctrico. Vector polarización
- 30.3. Potencial creado por un dieléctrico en un punto del espacio exterior a él
- 30.4. Campo creado por un dieléctrico polarizado en un punto del espacio exterior a él
- 30.5. Ley de Gauss. Desplazamiento o inducción eléctrica
- 30.6. Flujo del vector  $\mathbf{D}$ . Generalización del Teorema de Gauss
- 30.7. Dieléctrico perfecto. Susceptibilidad eléctrica
- 30.8. Condiciones de contorno para el campo eléctrico
- 30.9. Condensador lleno de dieléctrico
- 30.10. Condensador plano con varias capas de dieléctricos
- 30.11. Energía almacenada en un condensador con dieléctrico y en la polarización de éste
- 30.12. Fuerza sobre un dieléctrico en un campo eléctrico no uniforme
- 30.13. Rigidez dieléctrica

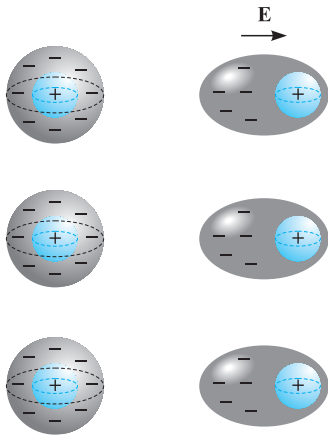


Figura 30.2. Moléculas no polares.

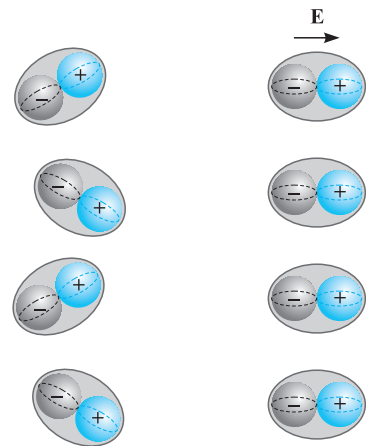


Figura 30.3. Moléculas polares.

### 30.2 Polarización de un dieléctrico. Vector polarización

El dieléctrico puede estar constituido por moléculas polares o no polares. En las primeras, los centros de simetría de las cargas positivas y de las negativas no coinciden, mientras que en las segundas sí.

En las moléculas no polares, el campo  $E_0$  actúa desplazando las cargas positivas en un sentido y las negativas en el contrario, convirtiendo la molécula en un dipolo, que nace orientado en la dirección del campo (Figura 30.2). Todo el dieléctrico queda polarizado, y la polarización se llama *inducida*.

Si el dieléctrico está formado por moléculas polares, estas constituyen pequeños dipolos, y el campo  $E_0$  lo único que hace es orientar los dipolos que ya existen (Figura 30.3), esa polarización se dice que es *por orientación*.

Ahora se comprende por qué, al suprimir el campo eléctrico  $E_0$ , desaparecen las cargas sobre la superficie del dieléctrico: son cargas de polarización creadas por el campo y sólo tienen existencia con él, tanto en un caso como en otro. Debemos hacer notar que, en todo momento, el dieléctrico permanece eléctricamente neutro.

Asimismo, puesto que el fenómeno de polarización se produce en todo el volumen del dieléctrico, se explica por qué al fraccionar éste aparecen sobre las nuevas superficies cargas negativas en una y positivas en la otra.

Podemos también ahora explicar el fenómeno de atracción de la médula de saúco por las varillas que han sido previamente electrizadas, ya que éstas inducen, en la región de aquella más próxima, cargas de sentido contrario al que ellas llevan.

En consecuencia, un elemento de volumen de un dieléctrico polarizado podemos considerarlo como un dipolo elemental de momento  $dm$ , y se define el *vector polarización*,  $P$ , de un dieléctrico como el momento dipolar por unidad de volumen,

$$P = \frac{dm}{dv} \tag{30.1}$$

cuya ecuación de dimensiones es:

$$[P] = [m] L^{-3} = QL^{-2}$$

Su unidad en el S.I. es el C/m<sup>2</sup>.

### 30.3 Potencial creado por un dieléctrico polarizado en un punto del espacio exterior a él

Según hemos visto, todo elemento de volumen del dieléctrico es asiento de un dipolo eléctrico elemental, cuyo momento dipolar es:

$$dm = P dv$$

Este dipolo eléctrico elemental creará un potencial, que en un punto  $M(x, y, z)$  del espacio exterior al dieléctrico, de acuerdo con la Ecuación [28.66], será:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R} \cdot d\mathbf{m}}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}}{R^3} dv$$

siendo  $\mathbf{R}$  el vector que va del centro del dipolo al punto  $M$  (Figura 30.4). El potencial total en  $M$  debido a todo el dieléctrico es:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}}{R^3} dv$$

estando la integral extendida a todo el volumen del dieléctrico.

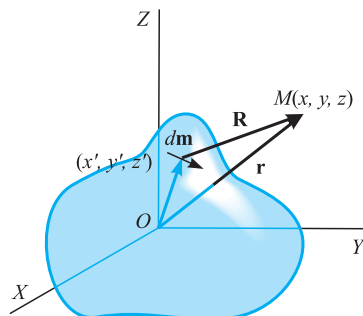


Figura 30.4. Potencial creado por un dieléctrico.

Analíticamente, el vector  $\mathbf{R}$  se expresa:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x')\mathbf{i} + (y - y')\mathbf{j} + (z - z')\mathbf{k}$$

Hallemos el gradiente de la inversa de su módulo, el cual varía para cada punto  $M$ , al variar la posición del dipolo dentro del dieléctrico.

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\partial\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial x'}\mathbf{i} + \frac{\partial\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial y'}\mathbf{j} + \frac{\partial\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial z'}\mathbf{k} = \frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

Con ello, la expresión del potencial se escribe:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \mathbf{P} \cdot \nabla\left(\frac{1}{R}\right) dv$$

y, teniendo en cuenta la identidad,

$$\nabla\left(\frac{1}{R} \mathbf{P}\right) = \frac{1}{R} \nabla \cdot \mathbf{P} + \nabla\left(\frac{1}{R}\right) \cdot \mathbf{P}$$

puede ponerse de la forma:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{R}\right) dv - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{R} dv$$

La primera integral puede transformarse teniendo en cuenta el teorema de la divergencia, expresado por la Ecuación [28.60], resultando:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint_S \frac{\mathbf{P} \cdot d\mathbf{A}}{R} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{R} dv = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint_S \frac{P_n}{R} dA - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{R} dv \end{aligned} \quad [30.2]$$

estando extendida la integral de superficie a toda la que limita al dieléctrico.

La primera integral es el potencial que crearía en  $M$  la superficie del dieléctrico cargada con densidad superficial de carga,  $\sigma'$ , que debe verificar;

$$\sigma' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_n \quad [30.3]$$

y la segunda integral es el potencial que crearía en  $M$  el volumen ocupado por el dieléctrico si estuviese cargado con una densidad espacial de carga  $\rho'$ , la cual debe ser:

$$\rho' = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad [30.4]$$

A estas densidades de carga eléctrica se las denomina *cargas de polarización* y hay que distinguirlas de las cargas reales que pueda llevar el dieléctrico. La suma de todas las cargas de polarización será nula, puesto que ellas siempre pueden ser agrupadas en dipolos (Figura 30.5). En función de las cargas de polarización, el potencial se expresa:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint \frac{\sigma'}{R} dA + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho'}{R} dv \quad [30.5]$$

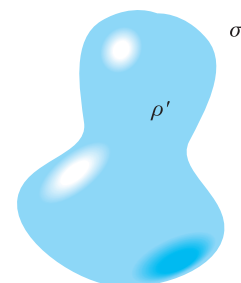


Figura 30.5. Cargas de polarización.

Si la polarización es uniforme, es decir, si el vector  $\mathbf{P}$  es el mismo en todos los puntos del dieléctrico, será  $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$  y  $\rho' = 0$ , no habiendo cargas espaciales de polarización y sí, únicamente, cargas de polarización en la superficie. En este caso el potencial está dado por:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint \frac{\sigma'}{R} dA \quad [30.6]$$

Si además de las cargas de polarización existieran en el dieléctrico cargas reales,  $\sigma_r$  y  $\rho_r$ , el potencial creado en un punto del exterior sería el debido a la suma de ambas cargas:  $\sigma = \sigma_r + \sigma'$  y  $\rho = \rho_r + \rho'$ , es decir,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint \frac{\sigma}{R} dA + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho}{R} dv \quad [30.7]$$

### 30.4 Campo creado por un dieléctrico polarizado en un punto del espacio exterior a él

Siempre podemos calcular el campo como el gradiente cambiado de signo del potencial, pero como hemos visto que éste es el que corresponde al creado por las cargas de polarización, también deberá suceder esto con el campo, el cual vendrá dado por la expresión:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint \frac{\sigma' \mathbf{u}_R}{R^2} dA + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho' \mathbf{u}_R}{R^2} dv = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint \frac{P_n \mathbf{u}_R}{R^2} dA + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\nabla \cdot \mathbf{P} \mathbf{u}_R}{R^2} dv \end{aligned} \quad [30.8]$$

Si, además de las densidades de cargas de polarización, existiesen en el dieléctrico otras cargas reales  $\sigma_r$  y  $\rho_r$ , el campo en un punto exterior sería el debido a ambas densidades de carga  $\sigma = \sigma' + \sigma_r$  y  $\rho = \rho' + \rho_r$ , es decir:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint \frac{\sigma \mathbf{u}_R}{R^2} dA + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho \mathbf{u}_R}{R^2} dv \quad [30.9]$$

### 30.5 Ley de Gauss. Desplazamiento o inducción eléctrica

Al aplicar la ley de Gauss a un dieléctrico polarizado, debemos considerar además de las cargas reales, las cargas debidas a la polarización; por ello se expresa:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho_r + \rho'}{\epsilon_0}$$

Por tanto, será:

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_r + \rho' = \rho_r - \nabla \cdot \mathbf{P}$$

lo que puede escribirse  $\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_r$ .



Al vector:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad [30.10]$$

se le denomina *desplazamiento eléctrico* o *inducción eléctrica*, pudiendo escribirse en función de él

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_r \quad [30.11] \quad \text{Ley de Gauss}$$

que es la expresión general de la ley de Gauss, válida para cualquier medio y que se enuncia: *la divergencia del vector desplazamiento eléctrico en un punto es igual a la densidad espacial de cargas reales en este punto.*

De la Ecuación [30.10] se deduce que los vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{P}$  tienen la misma ecuación de dimensiones que será la misma de  $\varepsilon_0 \mathbf{E}$ , y que es una carga dividida por una superficie, es decir, una densidad superficial de carga  $[D] = [P] = QL^{-2}$ . Su unidad en el sistema internacional será el C/m<sup>2</sup>.

Pueden presentarse algunos casos de interés:

a) *Que el cuerpo no tenga densidad espacial de carga real,  $\rho_r = 0$ .*

En este caso es  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ , es decir,  $\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ , o bien  $\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho'$ , de donde  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho'/\varepsilon_0$ .

b) *Que el cuerpo no esté polarizado o esté polarizado de forma homogénea.*

En cualquiera de ambos casos es  $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ . La Expresión [30.10] se reduce a:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad [30.12]$$

y la Expresión [30.11] se reduce a  $\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_r$  o bien  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_r/\varepsilon_0$ .

c) *Que además de las condiciones indicadas en el apartado b) no existan cargas espaciales reales,  $\rho_r = 0$ .*

En este caso será  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  y el campo  $\mathbf{E}$  será homogéneo.

## 30.6 Flujo del vector $\mathbf{D}$ . Generalización del Teorema de Gauss

El flujo del vector  $\mathbf{D}$  a través de una superficie cerrada,  $\phi = \iint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}$ , puede escribirse de acuerdo con el teorema de la divergencia, de la forma:

$$\phi = \oiint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \iiint \nabla \cdot \mathbf{D} \, dv$$

y, teniendo en cuenta la Ecuación [30.11], resulta:

$$\phi = \oiint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \iiint \rho_r \, dv = Q \quad [30.13] \quad \text{Teorema de Gauss}$$

lo que constituye la generalización del Teorema de Gauss para dieléctricos, definiéndose ahora así: *el flujo del vector desplazamiento eléctrico a través de una superficie cerrada, es igual a la carga total real encerrada por la superficie.*

### 30.7 Dieléctrico perfecto. Susceptibilidad eléctrica

Se llaman dieléctricos perfectos aquellos que son homogéneos, isótropos, que no contienen electrón libre alguno y que no presenta en su polarización fenómenos de histéresis, siendo, en cada uno de sus puntos, el vector desplazamiento eléctrico  $\mathbf{D}$  y el vector campo eléctrico  $\mathbf{E}$  de la misma dirección y sentido, es decir, verifican:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad [30.14]$$

en la que  $\varepsilon$  es una constante llamada *permitividad eléctrica del medio*. Con ello, la Ecuación [30.10] puede ahora escribirse de la forma:

$$\varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

de donde es:

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad [30.15]$$

siendo  $\chi$  una constante adimensional, ya que  $\mathbf{P}$  y  $\varepsilon_0 \mathbf{E}$  tienen las mismas dimensiones, a la cual se denomina *susceptibilidad eléctrica*, debiendo verificarse:

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \chi \quad [30.16]$$

o bien,

$$\chi = \varepsilon_r - 1 \quad [30.17]$$

Susceptibilidad

En el vacío es  $\varepsilon_r = 1$  y la susceptibilidad eléctrica del vacío resulta ser nula, como debe ser, ya que es un medio no polarizable y para cualquier valor de  $\mathbf{E}$ , la [30.15] debe dar para el vacío  $\mathbf{P} = 0$ . Para el resto de los medios, puesto que la permitividad relativa es siempre mayor que la unidad, la susceptibilidad es siempre un número positivo y los vectores  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{E}$ , en los dieléctricos perfectos, tienen la misma dirección y sentido.

De la Ecuación [30.16] se deduce la relación que liga la permitividad y la susceptibilidad de un medio,

$$\varepsilon = (1 + \chi) \varepsilon_0 \quad [30.18]$$

### 30.8 Condiciones de contorno para el campo eléctrico

Hemos visto cómo el potencial y el campo eléctrico pueden ser determinados mediante integración de ecuaciones en derivadas parciales, cuyas constantes de integración deben ser calculadas por aplicación de las condiciones de contorno. Por otra parte, también es importante conocer cómo se comporta el campo eléctrico al atravesar una interfase, ya que son situaciones que se dan de forma real.

Estudiaremos por separado el comportamiento de la componente normal y el de la tangencial de un campo eléctrico, en un punto de una interfase, entre dos medios cuyas permitividades absolutas sean  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ .

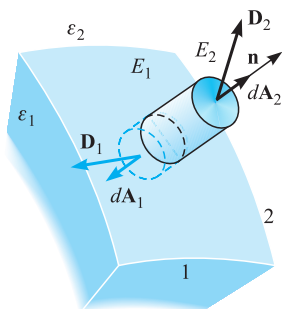


Figura 30.6. Condiciones de contorno para  $D_n$ .

#### Condiciones de contorno para la componente normal

Para su determinación usaremos la ley de Gauss generalizada [30.13] y la aplicaremos a una superficie cilíndrica, cuyas bases son paralelas a la superficie del contorno, una de las cuales está en el medio 1 y la otra en el 2, como se indica en la Figura 30.6, y cuya altura es lo suficientemente pequeña para que el flujo neto de  $\mathbf{D}$  a través de la superficie lateral pueda ser despreciable.

El flujo del vector desplazamiento será:

$$d\phi = \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{A}_1 + \mathbf{D}_2 \cdot d\mathbf{A}_2$$

Puesto que es  $d\mathbf{A}_2 = -d\mathbf{A}_1 = dA \mathbf{n}$ , la anterior se escribe:

$$d\phi = (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} dA = (D_{2n} - D_{1n}) dA$$

La carga en el interior de la citada superficie será la que exista sobre la superficie de separación de ambos medios. Si ésta tiene una densidad superficial de carga real, la cantidad de electricidad encerrada por la citada superficie es  $\sigma_r dA$ , y el Teorema de Gauss se escribe:

$$(D_{2n} - D_{1n}) dA = \sigma_r dA$$

es decir,

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_r \quad \text{o} \quad \varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \sigma_r \quad [30.19]$$

*La componente normal del vector desplazamiento eléctrico sufre una discontinuidad al atravesar una superficie cargada, igual a la densidad superficial de carga en el punto por el cual se pasa de un medio al otro.*

Si no hay carga superficial real en la separación de los dos medios, es decir, para una superficie de separación libre de cargas reales, es:

$$D_{2n} = D_{1n} \quad \text{o} \quad \varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n} \quad [30.20]$$

Este es el caso normal en el contorno dieléctrico-dieléctrico, ya que las cargas superficiales de polarización son debidas a los dipolos, que tienen la misma carga positiva y negativa, separadas una distancia infinitamente pequeña. Al no ser posible separar las cargas positivas de las negativas mediante una superficie de integración, dentro del volumen limitado por aquella siempre hay un número entero de dipolos y la carga superficial es nula.

Si el medio 1 es un conductor, será  $E_1 = 0$  y la [30.18] se escribe:

$$D_{2n} = \sigma_r \quad \text{o} \quad \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma_r \quad [30.21]$$

siendo  $\sigma_r$  la densidad superficial de cargas sobre la superficie del conductor.

### Condiciones de contorno para la componente tangencial

Para su determinación calcularemos la circulación del campo eléctrico a lo largo de una línea cerrada, la cual debe ser cero. La línea será un rectángulo con dos lados paralelos a la superficie de separación, uno en cada medio, como se indica en la Figura 30.7, y los otros dos normales a la superficie de separación y lo suficientemente pequeños para que la circulación neta en ambos pueda ser despreciable.

El valor de la circulación será  $\mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l}_2 = 0$ .

Puesto que son  $d\mathbf{l}_1 = -d\mathbf{l}_2 = dl \mathbf{T}$ , siendo  $\mathbf{T}$  el vector unitario tangente a la línea intersección de la superficie de separación y el plano del rectángulo alrededor del cual se halla la circulación, podemos expresar la anterior de la forma:

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{T} dl = 0$$

lo que exige que sea:

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{T} = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{T} \quad \text{o} \quad E_{1t} = E_{2t} \quad [30.22]$$

*La componente del campo eléctrico sobre la tangente se conserva al atravesar la superficie de separación de los dos medios.*

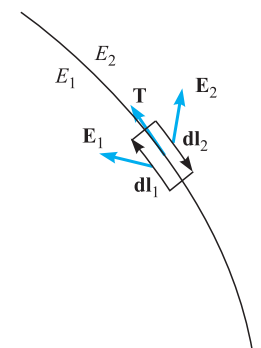


Figura 30.7. Condiciones de contorno para  $E_t$ .

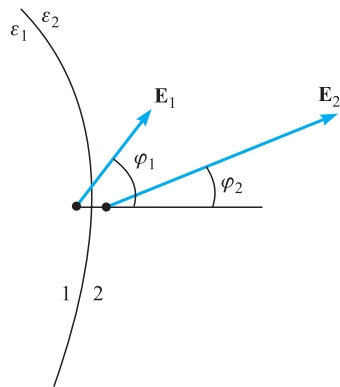


Figura 30.8. Relación entre los ángulos.

Si uno de los medios fuese conductor, por ejemplo, el 1, no habría en él campo eléctrico,  $\mathbf{E}_1 = 0$ , y el campo en el otro no tendría componente sobre la tangente,  $E_{2t} = 0$ .

Veamos qué relación existe entre los ángulos  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  que forman  $\mathbf{E}_1$  y  $\mathbf{E}_2$  con la normal a la superficie de separación de los dos medios (Figura 30.8). Para ello apliquemos las dos condiciones de contorno [30.20] y [30.22]:

$$\varepsilon_2 E_2 \cos \varphi_2 = \varepsilon_1 E_1 \cos \varphi_1 \quad \text{y} \quad E_2 \sin \varphi_2 = E_1 \sin \varphi_1$$

dividiendo ambas obtenemos la relación entre las tangentes de los citados ángulos:

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{1}{\varepsilon_2} \operatorname{tg} \varphi_2, \quad \text{o} \quad \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad [30.23]$$

### EJEMPLO 30.1

En un condensador de caras planas paralelas se ha introducido una lámina de dieléctrico de permitividad  $\varepsilon$ , dejando espacios iguales a ambos lados entre las armaduras (Figura 30.9). Se sabe que la densidad de carga sobre las armaduras es constante y vale  $\sigma$ . Calculemos en las diferentes regiones dentro del condensador:

- 1.º El desplazamiento eléctrico.
- 2.º El campo eléctrico.
- 3.º La polarización.
- 4.º Representamos gráficamente las soluciones.

#### Solución:

- 1.º La condición de contorno [30.22] entre la armadura (1) y el aire (región 2), puesto que el campo dentro de la armadura es nulo, es  $E_{2t} = E_{1t} = 0$ , es decir, el campo  $\mathbf{E}$  en la región 2 no tiene componente tangencial y es normal a la armadura. La aplicación de esta condición de contorno a las restantes interfases establece que el campo  $\mathbf{E}$  en todas las regiones es normal a las armaduras.

La condición de contorno [30.20] para la misma interfase armadura-aire (1-2), al ser el campo nulo en la armadura, también lo es  $D_1 = 0$  y resulta:

$$D_{2n} = D_2 = \sigma$$

Puesto que la interfase aire-dieléctrico no está cargada, la aplicación de [30.20] al pasar de 2 a 3, establece  $D_{2n} - D_{3n} = 0$  y puesto que las componentes tangenciales del campo son nulas  $D_2 = D_3 = \sigma$ .

- 2.º Los valores de  $D$  en las diferentes regiones, calculados en el apartado anterior, permiten escribir:

$$\varepsilon_0 E_0 = \varepsilon E = \sigma$$

Con lo cual, el campo en las diferentes regiones es: en el aire  $E_0 = \sigma/\varepsilon_0$  y en el dieléctrico  $E = \sigma/\varepsilon$ .

- 3.º Obviamente, la única región polarizada será el dieléctrico y el valor de la polarización dado por la [30.15] es:

$$P = (\varepsilon - \varepsilon_0)E = (\varepsilon - \varepsilon_0)\sigma/\varepsilon = \sigma(1 - \varepsilon_0/\varepsilon)$$

- 4.º En la Figura 30.9 se ha realizado la representación de la inducción ( $D$ ), el campo ( $E$ ) y la polarización ( $P$ ) en cada una de las regiones.

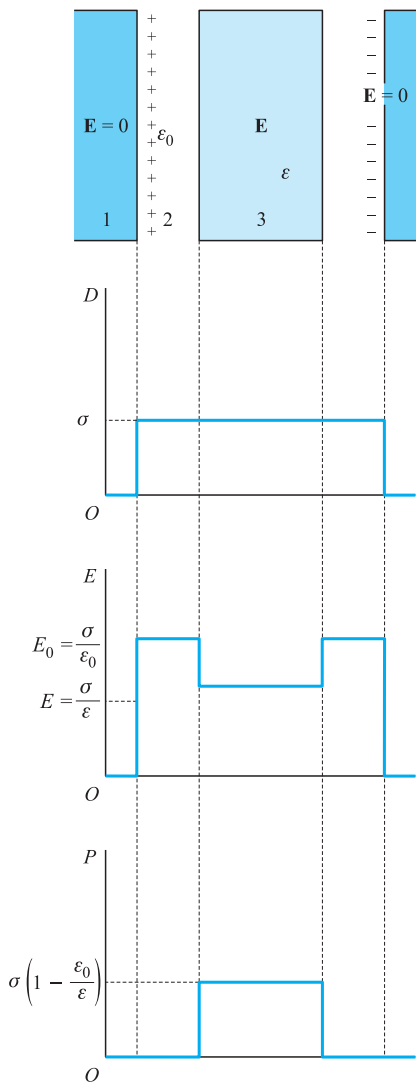


Figura 30.9. Inducción ( $D$ ), campo ( $E$ ) y polarización ( $P$ ) en cada una de las regiones.

### 30.9 Condensador lleno de dieléctrico

Estudieemos cómo varía la capacidad de un condensador cuando el espacio comprendido entre sus armaduras se llena de un dieléctrico perfecto (Figura 30.10).

La condición de contorno para la componente tangencial del campo  $\mathbf{E}$ , en la interfase metal-dieléctrico, al ser nulo el campo  $\mathbf{E}$  dentro del metal, es  $E_{2t} = E_{1t} = 0$ , por tanto el campo eléctrico dentro del dieléctrico, es normal a las armaduras,  $E_2 = E_{2n}$ .

La condición de contorno para la componente normal del vector  $\mathbf{D}$ , en la citada interfase,  $D_{2n} - D_{1n} = \sigma$ , al ser dentro del metal,  $D_{1n} = \epsilon_1 E_1 = 0$ , resulta:

$$D_2 = D_{2n} = \sigma = \epsilon E_2$$

Con lo cual, la capacidad del condensador se puede expresar de la siguiente forma:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma S}{E_2 d} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\epsilon} d} = \frac{\epsilon S}{d} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{\epsilon_0 S}{d} = \epsilon_r C_0 \quad [30.24]$$

La capacidad del condensador relleno de dieléctrico resulta ser la correspondiente al mismo sin dieléctrico, multiplicada por la permitividad relativa del dieléctrico interpuesto entre las armaduras. Puesto que siempre es  $\epsilon_r > 1$ , la capacidad se ve aumentada,  $C > C_0$ , al introducir una lámina de dieléctrico.

Analiceemos qué sucede según si mantenemos el condensador a carga constante, es decir, aislado, o bien a potencial constante, es decir, conectado a una fuente de tensión constante.

#### A carga constante

Cuando entre las armaduras no hay dieléctrico la capacidad del condensador se expresa  $C_0 = Q_0/V_0$ . Si ahora introducimos una lámina de dieléctrico de permitividad relativa  $\epsilon_r$ , manteniendo la carga constante (Figura 30.11), la capacidad será:

$$C = Q_0/V = \epsilon_r C_0$$

Con lo cual, el nuevo potencial entre las armaduras es:

$$V = \frac{Q_0}{\epsilon_r C_0} = \frac{V_0}{\epsilon_r}$$

lo que nos indica que ha quedado disminuido, ya que es el correspondiente al condensador sin dieléctrico dividido por una cantidad siempre mayor que uno.

El campo eléctrico también queda disminuido de la misma manera, ya que es:

$$E = \frac{V}{d} = \frac{V_0}{d \epsilon_r} = \frac{E_0}{\epsilon_r}$$

#### A potencial constante

Si las armaduras del condensador se mantienen al potencial  $V_0$ , constante; una vez que se haya relleno de dieléctrico (Figura 30.12), la nueva capacidad será:

$$C = Q/V_0 = \epsilon_r C_0$$

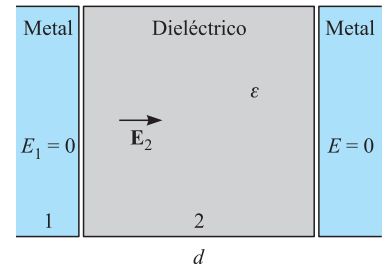


Figura 30.10. Condensador relleno de dieléctrico.

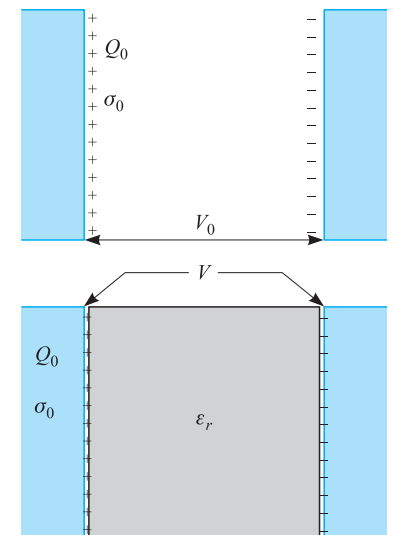


Figura 30.11. Condensador con dieléctrico. A carga constante.

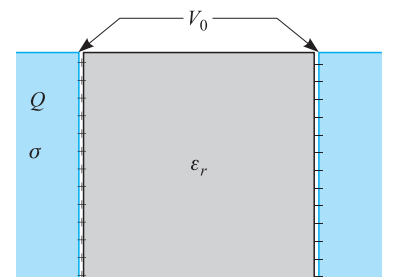


Figura 30.12. Condensador con dieléctrico. A potencial constante.

De donde se deduce que la nueva carga sobre sus armaduras es:

$$Q = \epsilon_r C_0 V_0 = \epsilon_r Q_0$$

es decir, la carga aumenta, quedando multiplicado por el factor  $\epsilon_r$ . La nueva densidad superficial de carga en las armaduras se obtiene con solo dividir la anterior expresión por la superficie de estas, resultando:

$$\sigma = \epsilon_r \sigma_0$$

Ahora el campo eléctrico permanece constante, por permanecer así el potencial

$$E = V_0/d = E_0$$

### 30.10 Condensador plano con varias capas de dieléctricos

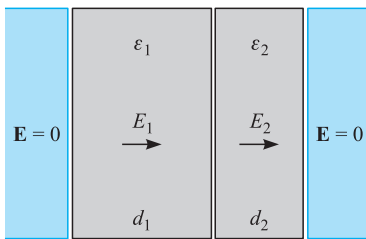


Figura 30.13. Condensador con dos capas de dieléctricos.

Consideremos un condensador plano cuyas armaduras de superficie  $S$  están separadas la distancia  $d$  y su capacidad sin dieléctrico es  $C = \epsilon_0 S/d$ . Introduzcamos dos láminas de dieléctricos de espesores  $d_1$  y  $d_2$ , con permitividades respectivas  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  (Figura 30.13).

La condición de contorno para la componente tangencial del campo  $\mathbf{E}$ , aplicada a la interfase 1 (metal-dieléctrico), nos da  $E_{1t} = 0$ , es decir, el campo  $\mathbf{E}_1$  es normal a las armaduras. La aplicación de la citada condición de contorno a la interfase 2 (dieléctrico-dieléctrico), nos da  $E_{2t} = 0$ , luego el campo  $\mathbf{E}_2$  también es normal a las armaduras.

Aplicando ahora la condición de contorno para la componente normal de  $\mathbf{D}$ , a cada una de las citadas interfases, obtenemos, respectivamente:

$$D_1 = \epsilon_1 E_1 = \sigma \quad \text{y} \quad \epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2 \quad [30.25]$$

La capacidad puede ahora expresarse de la siguiente forma:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma S}{E_1 d_1 + E_2 d_2} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\epsilon_1} d_1 + \frac{\sigma}{\epsilon_2} d_2} = \frac{S}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}} = \frac{\frac{d}{\epsilon_0}}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}} C_0 \quad [30.26]$$

En general, si se introducen  $n$  láminas de dieléctrico, la capacidad será:

$$C = \frac{S}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\epsilon_i}} = \frac{\frac{d}{\epsilon_0}}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\epsilon_i}} C_0 \quad [30.27]$$

Veamos cuál es el comportamiento según si mantenemos el condensador a carga constante o a potencial constante.

#### A carga constante

De la definición de capacidad y de la expresión en esta [30.26] podemos escribir:

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{\frac{d}{\epsilon_0}}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}} C_0 = \frac{\frac{\epsilon_0}{d_1 + d_2} Q_0}{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1} + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_2}} \quad [30.28]$$

de donde, el potencial entre las armaduras es:

$$V = \frac{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}}{\frac{d}{\varepsilon_0}} V_0 \quad [30.29]$$

Al mantenerse la carga constante, también será constante la densidad superficial de carga en las armaduras  $\sigma_0 = Q_0/S$ .

El campo eléctrico en cada una de las láminas de dieléctrico es:

$$E_1 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon_1} = \frac{E_0}{\varepsilon_{r1}} \quad \text{y} \quad E_2 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon_2} = \frac{E_0}{\varepsilon_{r2}} \quad [30.30]$$

La caída de potencial en cada una de las láminas es:

$$V_1 = E_1 d_1 = \frac{\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon_1} d_1 = \frac{\varepsilon_0 V_0}{\varepsilon_1} \frac{d_1}{d} = \frac{\frac{d_1}{d}}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}} V_0 \quad [30.31]$$

Análogamente,

$$V_2 = \frac{\frac{d_2}{d}}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}} V_0 \quad [30.32]$$

Que, como fácilmente se puede comprobar, verifican  $V_1 + V_2 = V$ .

Si hubieran sido  $n$  las láminas de dieléctricos introducidas, serían:

La diferencia de potencial entre las armaduras:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\varepsilon_i}}{\frac{d}{\varepsilon_0}} V_0 \quad [30.33]$$

El campo eléctrico en cada una de las láminas:

$$E_j = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_j} = \frac{E_0}{\varepsilon_{rj}} \quad [30.34]$$

La caída de potencial en cada una de las láminas:

$$V_j = \frac{\frac{d_j}{d}}{\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0}} V_0 \quad [30.35]$$

### A potencial constante

La expresión de la capacidad es ahora,

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\frac{d}{\varepsilon_0}}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}} C_0 = \frac{\frac{d}{\varepsilon_0}}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}} \frac{Q_0}{V_0} \quad [30.36]$$

de donde la nueva carga sobre las armaduras es:

$$Q = \frac{\frac{d}{\varepsilon_0}}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}} Q_0 \quad [30.37]$$

y dividiendo por  $S$  obtenemos la nueva densidad superficial de carga sobre las armaduras,

$$\sigma = \frac{\frac{d}{\varepsilon_0}}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}} \sigma_0 \quad [30.38]$$

El campo eléctrico en cada una de las láminas es:

$$E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1} = \frac{\frac{d}{\varepsilon_0}}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_1} = \frac{\frac{d}{\varepsilon_0}}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}} \frac{\varepsilon_1}{d} E_0 \quad [30.39]$$

$$E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_2} = \frac{\frac{d}{\varepsilon_0}}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_2} = \frac{\frac{d}{\varepsilon_0}}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}} \frac{\varepsilon_2}{d} E_0 \quad [30.40]$$

La caída de potencial en cada lámina es:

$$V_1 = E_1 d_1 = \frac{\frac{d}{\varepsilon_0}}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}} \frac{\varepsilon_1}{d} E_0 d_1 = \frac{\frac{d}{\varepsilon_0}}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}} \frac{\varepsilon_1}{d_1} V_0 \quad [30.41]$$

$$V_2 = E_2 d_2 = \frac{\frac{d}{\varepsilon_0}}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}} \frac{\varepsilon_2}{d} E_0 d_2 = \frac{\frac{d}{\varepsilon_0}}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}} \frac{\varepsilon_2}{d_2} V_0 \quad [30.42]$$

es fácil comprobar que se verifica  $V_1 + V_2 = V_0$ .



Para  $n$  láminas de dieléctricos serán:

Carga sobre las armaduras;

$$Q = \frac{\frac{d}{\epsilon_0}}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\epsilon_i}} Q_0 \quad [30.43]$$

La densidad de carga sobre las armaduras:

$$\sigma = \frac{\frac{d}{\epsilon_0}}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\epsilon_i}} \sigma_0 \quad [30.44]$$

El campo eléctrico en cada una de las láminas:

$$E_j = \frac{\frac{d}{\epsilon_j}}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\epsilon_i}} E_0 \quad [30.45]$$

La caída de potencial en cada lámina:

$$V_j = \frac{\frac{d_j}{\epsilon_j}}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\epsilon_i}} V_0 \quad [30.46]$$

### EJEMPLO 30.2

Un condensador de armaduras planas paralelas, cuya superficie es  $A = 100 \text{ cm}^2$  y separación entre ellas  $d = 6 \text{ mm}$ , se carga hasta un potencial  $V_0 = 220 \text{ V}$ . Manteniéndose conectado a la fuente de tensión, se introducen en él tres láminas de dieléctricos, planas y de igual espesor, las cuales ocupan todo el espacio entre armaduras (Figura 30.14). La permitividad de la lámina central es  $\epsilon = 50 \cdot 10^{-12}$  y las otras dos láminas tienen igual permitividad, cuyo valor es la mitad del de la lámina central.

1.º Determinemos la capacidad  $C_0$  del condensador sin dieléctrico, su carga  $Q_0$  y su densidad superficial de carga  $\sigma_0$ .

Una vez que se han introducido las láminas de dieléctrico, calculemos:

- 2.º La capacidad  $C$ , la carga  $Q$  y la densidad superficial de carga  $\sigma$ .
- 3.º El campo eléctrico en cada lámina de dieléctrico.
- 4.º La caída de potencial en cada lámina.

#### Solución:

1.º La capacidad del condensador sin dieléctrico está dada por [29.8],

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{100 \cdot 10^{-4}}{6 \cdot 10^{-3}} = \frac{5}{3} \epsilon_0 = 14,74 \text{ pF}$$

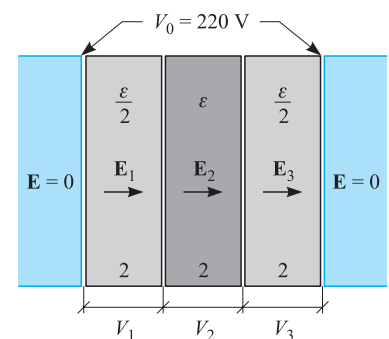


Figura 30.14.

Su carga es  $Q_0 = C_0 V_0 = 14,74 \cdot 220 = 3,24 \text{ nC}$ .

Y la densidad superficial de carga en sus armaduras:

$$\sigma_0 = Q_0/A = 3,24 / 10^{-2} = 324 \text{ nC/m}^2$$

2.º La capacidad está ahora dada por la [30.27],

$$C = \frac{\frac{d}{\epsilon_0}}{\frac{2d_1}{\epsilon} + \frac{d_1}{\epsilon} + \frac{2d_1}{\epsilon}} C_0 = \frac{\epsilon A}{5d_1} = \frac{50 \cdot 10^{-12} \cdot 100 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 50 \text{ } \mu\text{F}$$

La carga total será ahora  $Q = CV_0 = 50 \cdot 220 = 11 \text{ nC}$ .

Y la densidad superficial de carga  $\sigma = Q/A = 11 \text{ nC}/10^{-2} \text{ m}^2 = 1,1 \text{ } \mu\text{C/m}^2$ .

3.º El campo eléctrico en cada lámina está dado por la [30.45],

$$E_1 = \frac{\frac{6}{\epsilon/2}}{\frac{4}{\epsilon} + \frac{2}{\epsilon} + \frac{4}{\epsilon}} E_0 = \frac{\frac{12}{\epsilon}}{\frac{10}{\epsilon}} E_0 = 1,2E_0 = 1,2 \frac{V_0}{d} = 1,2 \frac{220}{6 \cdot 10^{-3}} = 44 \cdot 10^3 \text{ V/m}$$

$$E_2 = 6E_0/10 = 22 \cdot 10^3 \text{ V/m}$$

$$E_3 = E_1 = 44 \cdot 10^3 \text{ V/m}$$

4.º La caída de potencial en cada lámina está dada por la [30.46], pero también se pueden calcular de la siguiente forma:

$$V_1 = E_1 \cdot d_1 = 44 \cdot 10^3 \text{ V/m} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 88 \text{ V}$$

$$V_2 = E_2 \cdot d_2 = 22 \cdot 10^3 \text{ V/m} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 44 \text{ V}$$

$$V_3 = E_3 \cdot d_3 = 88 \text{ V}$$

Como comprobación se puede ver que se verifica  $V = V_1 + V_2 + V_3 = 220 \text{ V}$ .

### 30.11 Energía almacenada en un condensador con dieléctrico y en la polarización de éste

La energía almacenada en un condensador está dada por la [29.28],

$$W = \frac{1}{2} CV^2$$

Si el condensador lleva un dieléctrico es  $C = \epsilon_r C_0$  y la energía almacenada se expresa de forma diferente según si se mantiene el condensador a potencial constante o a carga constante. Analicemos cada uno de los dos casos:

#### A potencial constante

En este caso, al ser  $V = V_0 = \text{cte}$ , la energía almacenada se expresa:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_r C_0 V_0^2 = \epsilon_r W_0 \quad [30.47]$$

es decir, la energía almacenada aumenta al introducir el dieléctrico.

De esta energía, una parte es almacenada en la polarización del dieléctrico, la cual es:

$$W_p = W - W_0 = (\epsilon_r - 1)W_0 = \chi W_0 \quad [30.48]$$

Evidentemente, al quitar el dieléctrico  $\epsilon_r \rightarrow 1$  y  $W_p \rightarrow 0$ .

### A carga constante

En este caso el condensador está aislado y su carga permanece constante,  $Q = Q_0$ . La energía almacenada se expresa:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_r C_0 \frac{V_0^2}{\epsilon_r^2} = \frac{W_0}{\epsilon_r} \quad [30.49]$$

Ahora, la energía almacenada disminuye al introducir el dieléctrico y la energía almacenada en la polarización es:

$$W_p = W - W_0 = \left( \frac{1}{\epsilon_r} - 1 \right) W_0 \quad [30.50]$$

Al quitar el dieléctrico,  $\epsilon_r \rightarrow 1$  y  $W_p \rightarrow 0$ .

## 30.12 Fuerza sobre un dieléctrico en un campo eléctrico no uniforme

Consideremos un campo eléctrico no uniforme como, por ejemplo, el que existe en el borde de un condensador de armaduras planas paralelas y que se indica en la Figura 30.15 mediante líneas del campo. Un dieléctrico situado en esa zona se polarizará y aparecerán cargas de polarización sobre su superficie. Puesto que la carga positiva de polarización está más cerca de la armadura cargada negativamente y la carga negativa de polarización, más cerca de la armadura positiva, aparece una fuerza atractiva,  $\mathbf{F}$ , que trata de introducir el dieléctrico entre las armaduras del condensador, ya que las componentes sobre la normal a las armaduras se anulan por la simetría del problema.

El proceso es diferente según si se realiza a potencial constante o a carga constante y la fuerza  $\mathbf{F}$  se obtiene, respectivamente, por aplicación de la [29.40] o la [29.37]. A potencial constante, la energía se expresa  $W = 1/2 V_0^2 C$  y la [29.40] se escribe de la forma:

$$F = \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)_V = \frac{1}{2} V_0^2 \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_V \quad [30.51]$$

A carga constante, la energía se expresa  $W = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$  y la [29.37] se escribe de la forma:

$$F = - \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)_Q = - \left( \frac{\partial W}{\partial C} \right) \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C^2} \frac{\partial C}{\partial x} \quad [30.52]$$

Siendo  $C$  la capacidad del condensador cuando el dieléctrico ha penetrado en él la longitud  $x$ .

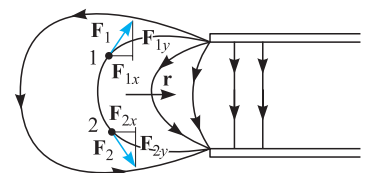


Figura 30.15.

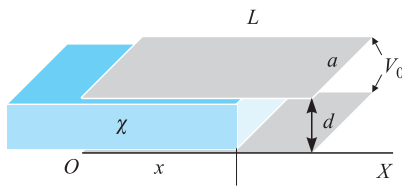


Figura 30.16.

**EJEMPLO 30.3**

Un condensador de armaduras planas paralelas, separadas la distancia  $d$  y de superficie  $A = La$ , está conectado a una fuente de tensión constante,  $V_0$ . Una lámina de dieléctrico de permitividad relativa  $\epsilon_r$  y de iguales dimensiones que el espacio entre armaduras se introduce en el condensador, como se indica en la Figura 30.16. Calculemos la fuerza que el campo eléctrico del condensador ejerce sobre el dieléctrico.

**Solución:**

Cuando la lámina ha penetrado la longitud  $x$  (Figura 30.16), la capacidad del condensador puede calcularse como la equivalente a dos condensadores colocados en paralelo: uno, de longitud  $L - x$ , sin dieléctrico, y otro, de longitud  $x$ , con el dieléctrico. En consecuencia, la capacidad es:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 A_1}{d} + \epsilon_r \frac{\epsilon_0 A_2}{d} = \frac{\epsilon_0}{d} [(L - x)a + \epsilon_r ax] = \frac{\epsilon_0 a}{d} (L + \chi x)$$

Con ello, aplicando la [30.51] se obtiene para el valor de la fuerza la expresión:

$$F = \frac{1}{2} V_0^2 \frac{\epsilon_0 a}{d} \chi = \frac{V_0^2 C_0}{2L} \chi = \frac{W_0}{L} \chi$$

Esto mismo puede obtenerse razonando de la siguiente forma: la energía total del sistema sufre una variación  $dW$  al introducir la lámina una distancia  $dx$ . Esta variación, de una parte, se debe a la energía que gasta el campo para desplazar la lámina,  $dW_1 = -F dx$ , y de otra parte, puesto que al introducirse la lámina de dieléctrico cambia la capacidad, al permanecer el potencial constante, deberá haber una variación,  $dQ$ , en la carga y, en consecuencia, un aporte de energía eléctrica,  $dW_2 = V dQ$ , por parte del sistema eléctrico que mantiene el potencial constante. Por todo ello será:

$$dW = dW_1 + dW_2 = -F dx + V dQ \quad [30.53]$$

Veamos cuál es la energía total almacenada por el sistema en una situación como la indicada en la figura, utilizando para ello la [29.29]

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\epsilon_0 s} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 s^2 d}{\epsilon_0 s} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0^2 E^2 s d}{\epsilon_0} = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 (L - x) a d = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 L a d - \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 a d x \\ W_2 &= \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\epsilon s} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 s^2 d}{\epsilon s} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon^2 E^2 s d}{\epsilon} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 x a d \\ W &= W_1 + W_2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 L a d + \frac{1}{2} E^2 x a d (\epsilon - \epsilon_0) \end{aligned}$$

La variación de ésta con  $x$  es:

$$\frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} E^2 a d (\epsilon - \epsilon_0) \quad [30.54]$$

Por otra parte, la carga total en las armaduras del condensador es

$$Q = \sigma_1 x a + \sigma_2 (L - x) a = \epsilon E x a + \epsilon_0 E (L - x) a = \epsilon_0 E L a + E a (\epsilon - \epsilon_0) x$$

Y su variación con  $x$ :

$$\frac{dQ}{dx} = Ea(\epsilon - \epsilon_0) \quad [30.55]$$

Despejando  $F$  de [30.53] y teniendo en cuenta [30.54] y [30.55] se expresa:

$$\begin{aligned} F &= -\frac{dW}{dx} + V\frac{dQ}{dx} = -\frac{1}{2}E^2 da(\epsilon - \epsilon_0) + dE^2 a(\epsilon - \epsilon_0) = \\ &= \frac{1}{2}E^2 da(\epsilon - \epsilon_0) = \frac{1}{2}\frac{V^2}{d} a(\epsilon - \epsilon_0) \end{aligned} \quad [30.56]$$

que es la fuerza que introducirá al dieléctrico entre las armaduras del condensador y que es tanto mayor cuanto mayores son  $V$  y  $\epsilon$ .

### EJEMPLO 30.4

Un condensador de armaduras planas paralelas, separadas la distancia  $d$  y de superficie  $A = La$ , está conectado a una fuente de tensión constante,  $V_0$ . Se introduce en un líquido de permitividad relativa  $\epsilon_r$  y densidad  $\rho$ , manteniendo las armaduras perpendiculares a la superficie del líquido (Figura 30.17). Calculemos:

- 1.º La fuerza que ejerce el condensador sobre la columna de líquido situada en su interior.
- 2.º La altura que asciende el líquido dentro del condensador por encima de la superficie libre de este.

#### Solución:

- 1.º La capacidad del condensador puede calcularse como la equivalente a dos condensadores en paralelo: uno, de longitud  $L - x$ , sin dieléctrico, y otro, de longitud  $x$ , con dieléctrico,

$$C = \frac{\epsilon_0 a(L - x)}{d} + \epsilon_r \frac{\epsilon_0 a}{d} x = \frac{\epsilon_0 a}{d} [L + (\epsilon_r - 1)x] = \frac{\epsilon_0 a}{d} (L + \chi x)$$

Aplicando la [30.51] se obtiene, para el valor de la fuerza, la expresión:

$$F = \frac{1}{2} V_0^2 \frac{\epsilon_0 a}{d} \chi$$

- 2.º La fuerza calculada en el apartado anterior tratara de que el líquido ascienda entre las láminas del condensador, a lo que se opone la fuerza de la gravedad  $F' = mg = \rho adhg$ . El líquido ascenderá hasta que ambas fuerzas sean iguales:

$$F = \frac{1}{2} V_0^2 \frac{\epsilon_0 a}{d} \chi = \rho adhg$$

Lo que permite obtener la altura  $h$ , que el líquido se eleva dentro de las placas del condensador sobre su superficie libre:

$$h = \frac{\epsilon_0 \chi}{2\rho g} \left(\frac{V_0}{d}\right)^2$$

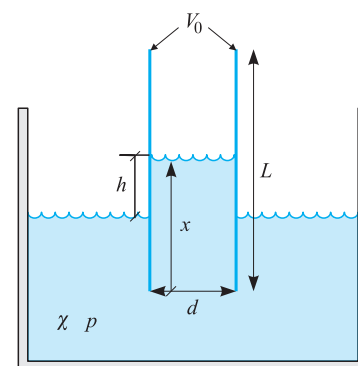


Figura 30.17. Ascensión de un líquido entre las armaduras de un condensador.

### 30.13 Rigidez dieléctrica

Si a un dieléctrico le sometemos a campos eléctricos crecientes, a partir de un cierto valor de éste, el dieléctrico deja de comportarse como tal, empezando a conducir, diciéndose que el dieléctrico se ha perforado o ha sufrido ruptura. El valor numérico del campo para el cual esto sucede es característico de cada dieléctrico y se denomina *rigidez dieléctrica*. En la Tabla 30.1 se dan los valores de ésta para algunos dieléctricos.

Tabla 30.1.

Dieléctrico	Rigidez · 10 <sup>6</sup> V/m
Aire .....	3
Porcelana .....	6
Aceite .....	12-15
Neopreno .....	12
Parafina .....	10-20
Petróleo .....	12
Papel .....	14-16
Poliestireno .....	22
Baquelita .....	24
Vidrio .....	25
Cuarzo (fundido) .....	30
Plexiglás .....	40
Mica .....	150-200

Los dieléctricos, además de aumentar la capacidad de los condensadores, realizan en éstos otras dos importantes misiones. Por una parte, aseguran la separación de las armaduras del condensador, las cuales deben estar muy próximas para aumentar la capacidad; por otra, al tener una rigidez dieléctrica superior a la del aire, permiten mantener diferencias de potencial entre las armaduras que no serían posibles sin ellos, ya que el aire resulta perforado para 3 000 kV/m, al ionizarse y empezar a conducir.

### 31.1 Corriente eléctrica

Se denomina corriente eléctrica, en su sentido más amplio, a todo movimiento de cargas eléctricas en un medio cualquiera. Estas cargas pueden ser electrones libres, iones o partículas cargadas, y el medio en el que se desplazan pueden ser sólido, líquido o gas. En este capítulo, nos ocuparemos únicamente de la corriente eléctrica como movimiento de electrones en un medio conductor metálico, siendo los electrones libres de éste los portadores de la carga.

Ya hemos tenido ocasión de describir el mecanismo de redistribución de las cargas libres de un conductor cuando es introducido en un campo eléctrico  $\mathbf{E}$ . Los electrones se desplazan hasta que crean, dentro del conductor, un campo  $-\mathbf{E}$ , opuesto al exterior. En el instante en que esto se consigue, el campo en el interior del conductor se anula y cesa el desplazamiento de electrones. Hasta que se alcanza ese estado, ha tenido lugar un movimiento de cargas, una corriente eléctrica transitoria, que existe mientras exista campo eléctrico en el interior del conductor, o lo que es lo mismo, mientras haya puntos del conductor a distinto potencial.

Si dos conductores,  $A$  y  $B$ , a potenciales  $V_A$  y  $V_B$ , respectivamente, siendo, por ejemplo,  $V_A > V_B$ , se ponen en contacto mediante un hilo conductor  $h$  (Figura 31.1), en el interior de éste y por las razones que antes hemos indicado, se produce una corriente eléctrica transitoria, hasta que todos los puntos del conjunto conductor formado por  $A$ ,  $B$  y  $h$  alcanzan el mismo potencial  $V$ . Llamando  $Q_A$  y  $Q_B$  a las cargas que inicialmente poseían los conductores, la energía electrostática antes de unirlos es:

$$W = \frac{1}{2} (Q_A V_A + Q_B V_B)$$

Después de unirlos, la energía del conjunto, teniendo en cuenta el principio de conservación de la carga, es:

$$W = \frac{1}{2} (Q_A + Q_B) V$$

- 31.1. Corriente eléctrica
- 31.2. Circuito eléctrico.  
Corriente continua
- 31.3. Intensidad y densidad de corriente eléctrica
- 31.4. Ley de Ohm.  
Conductividad y resistividad
- 31.5. Teoría clásica de la conducción
- 31.6. Resistencia eléctrica
- 31.7. Resistencias en serie y en paralelo
- 31.8. Potencia entregada entre dos puntos de un circuito
- 31.9. Ley de Joule
- 31.10. Fuerza electromotriz
- 31.11. Tensión entre los bornes de un generador
- 31.12. Fuerza contraelectromotriz
- 31.13. Tensión entre dos puntos de un circuito
- 31.14. Ecuación del circuito
- 31.15. Redes. Leyes de Kirchhoff
- 31.16. Método matricial para el cálculo de redes
- 31.17. Corrientes derivadas. Aplicaciones
- 31.18. Puente de Wheatstone
- 31.19. Asociación de generadores
- 31.20. Carga y descarga de un condensador. Circuito R-C

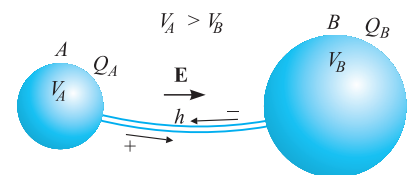


Figura 31.1.

Igualando ambas expresiones, obtenemos el valor del potencial de equilibrio del conjunto, ya que suponemos no hay pérdida de energía en el hilo.

$$V = \frac{Q_A V_A + Q_B V_B}{Q_A + Q_B}$$

Como se deduce de la expresión,  $V$  estará comprendido entre  $V_A$  y  $V_B$ . En el proceso, por lo tanto, el potencial del conductor  $A$  ha disminuido, mientras que el de  $B$  ha aumentado. Como el campo eléctrico tiene el sentido de los potenciales decrecientes, estas variaciones de potencial que han sufrido los conductores las podemos interpretar, o bien por un paso de cargas positivas de  $A$  a  $B$ , o bien por un paso de cargas negativas de  $B$  a  $A$ . Realmente, al ser los electrones cargas negativas, lo que ocurre es que éstos pasan de  $B$  a  $A$ , sin embargo, se toma, por convenio, como sentido positivo de la corriente el que llevarían las cargas positivas, es decir, el que va de  $A$  a  $B$ , que coincide con el sentido del campo.

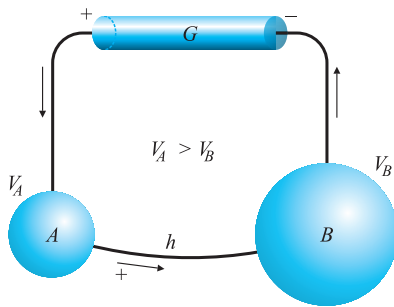


Figura 31.2. Circuito eléctrico.

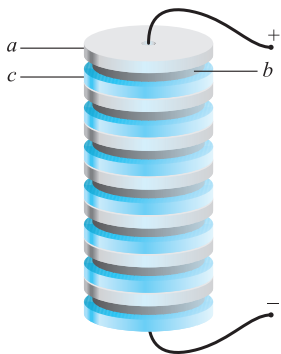


Figura 31.3. Pila de Volta.

## 31.2 Circuito eléctrico. Corriente continua

Si en el sistema anterior, formado por los dos conductores a potenciales  $V_A$  y  $V_B$ , dispusiéramos de un ingenio  $G$ , tal que, conectado a ambos (Figura 31.2), mantuviese los potenciales  $V_A$  y  $V_B$  constantes, incluso después de haberlos unido por el hilo  $h$ ; el campo en  $h$  permanecería también constante y las cargas no cesarían de pasar de  $A$  a  $B$ . En cualquier sección del hilo y en cualquier instante encontraremos el mismo estado de paso de cargas, diciéndose que el hilo es recorrido por una *corriente continua*.

Al dispositivo  $G$  se le llama generador. La corriente eléctrica (sentido convencional) va de  $A$  a  $B$ , a través del hilo  $h$ , y vuelve de  $B$  a  $A$  a través del generador. El conjunto de conductores y generador reciben el nombre de *circuito eléctrico*, y para las condiciones que hemos dado, es recorrido por la corriente en el sentido indicado en la Figura 31.2. El polo del generador que está a mayor potencial se llama polo positivo, y el polo que está a menor potencial, polo negativo; la corriente sale del generador por el polo positivo y entra en él por el negativo.

El primer generador eléctrico fue ideado por el italiano Alesandro Volta (1745-1827), el cual se dio cuenta de que entre dos metales separados por una solución salina aparece siempre una diferencia de potencial. Construyó su primera pila utilizando discos de plata y zinc, entre los cuales colocó pasta de cartón empapada en agua salina (Figura 31.3), comprobando que entre el disco de plata de un extremo y el de zinc del otro aparecía una diferencia de potencial. Volta comunicó su descubrimiento en marzo de 1800, en una carta dirigida a la Royal London Society.

## 31.3 Intensidad y densidad de corriente eléctrica

La *intensidad de corriente eléctrica*  $I$  es la cantidad de electricidad que pasa por una sección del conductor en la unidad de tiempo. En un tiempo elemental,  $dt$ , la cantidad de electricidad que pasa por una sección del conductor también será elemental,  $dQ$ , y el valor instantáneo de la intensidad de la corriente eléctrica se expresa:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad [31.1]$$



La intensidad de corriente eléctrica, en el Sistema Internacional de Unidades, se toma como magnitud fundamental, y su unidad, se denomina *amperio* (A) en honor al físico francés André M. Ampère (1775-1836). *El amperio es la intensidad de la corriente que transporta un culombio por segundo, A = C/s.* La Ecuación [31.1] nos permite establecer la ecuación de dimensiones de la carga eléctrica, que en el S.I. es magnitud derivada, siendo  $[Q] = I T$ .

Se define la **densidad de corriente  $\mathbf{j}$** , como el vector que en cada punto del conductor tiene la misma dirección y sentido que el movimiento de las cargas positivas y cuyo módulo es igual a la cantidad de electricidad que en la unidad de tiempo pasa por la unidad de superficie normal a la dirección de la corriente. Tiene, por tanto, el mismo sentido que el campo eléctrico y su ecuación de dimensiones es:

$$[j] = QT^{-1}L^{-2} = IL^{-2}$$

Su unidad es el amperio por metro cuadrado,  $A/m^2$ .

En una sección normal a la dirección de propagación de las cargas, un elemento de área,  $d\mathbf{A} = dA \mathbf{n}$ , (Figura 31.4) estará atravesado por una intensidad de corriente elemental,  $dI$ , cuya expresión es  $dI = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = j dA$ , y la intensidad de la corriente es:

$$I = \iint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = \iint j dA \tag{31.2}$$

Si la densidad de corriente es la misma en toda la sección, la intensidad de la corriente es  $I = jA$ . Si la sección considerada no es normal a la dirección de la corriente, la intensidad de ésta se expresa:

$$I = \iint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \tag{31.3}$$

La intensidad de la corriente eléctrica es el flujo del vector densidad de corriente a través de una sección cualquiera del conductor.

Los electrones dentro del conductor, cuando no existe campo eléctrico, se mueven aleatoriamente con altas velocidades, del orden de  $10^6$  m/s, pero su velocidad media es nula, debido a que todos los valores y direcciones posibles son igualmente probables. Si dentro del conductor se crea un campo eléctrico, aparece una fuerza sobre los electrones,  $-e\mathbf{E}$ , y éstos son acelerados en el sentido contrario al campo, resultando para su velocidad media un cierto valor neto en este sentido al que se denomina *velocidad de desplazamiento,  $v_d$* . Consideremos un conductor cilíndrico de sección recta  $A$ , que contiene  $n$  electrones por unidad de volumen; en un tiempo elemental,  $dt$ , todos los electrones contenidos en la porción de conductor cilíndrico de arista  $v_d dt$  (Figura 31.5) atravesarán la sección  $A$ , por tanto, la cantidad de electricidad que pasa por esa sección en el tiempo  $dt$  es:

$$dQ = enAv_d dt$$

y la intensidad de la corriente es:

$$I = \frac{dQ}{dt} = enAv_d \tag{31.4}$$

Siendo la densidad de corriente:

$$j = env_d \tag{31.5}$$

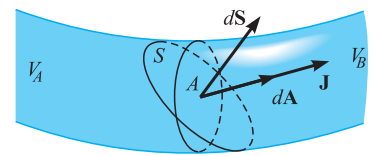


Figura 31.4.

Intensidad de la corriente eléctrica

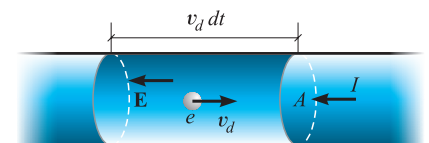


Figura 31.5.

Densidad de corriente eléctrica

**EJEMPLO 31.1 Velocidad del electrón de conducción**

Un conductor de cobre cuyo diámetro es de 1,6 mm es recorrido por una corriente de 1 amperio. Tomando para la densidad del cobre  $\rho = 8,91 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  y su masa molecular  $M = 63,5 \text{ g/mol}$ , calculemos la velocidad de los electrones de conducción.

**Solución:**

La velocidad de desplazamiento de los electrones se despeja de la [31.4],

$$v_d = \frac{I}{enA}$$

en la que son conocidas: el valor de la corriente que circula  $I = 1 \text{ A}$ , el área de la sección recta,  $A = \pi d^2/4 = \pi \times 1,6^2/4 = 0,64\pi = 2,01 \text{ mm}^2$ , y el valor de la carga elemental  $e = 1,6022 \times 10^{-19} \text{ C}$ ; únicamente debemos calcular el número de electrones por unidad de volumen, que en este caso es igual al número de átomos verificándose:

$$nM = \rho N_A$$

de donde,

$$n = \frac{\rho N_A}{M} = \frac{8,91 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 6,02 \times 10^{23} \text{ átomos/mol}}{63,5 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}} = 8,45 \times 10^{28} \text{ átomos/m}^3$$

con lo cual es:

$$\begin{aligned} enA &= 1,6022 \times 10^{-19} \text{ C} \times 8,45 \times 10^{28} \text{ átomos/m}^3 \times 2,01 \times 10^{-6} \text{ m}^2 = \\ &= 2,72 \times 10^4 \text{ C/m} \end{aligned}$$

y la velocidad de desplazamiento:

$$v_d = \frac{1 \text{ C/s}}{2,72 \times 10^4 \text{ C/m}} = 3,67 \times 10^{-5} \text{ m/s}$$

que resulta ser una velocidad muy pequeña comparada con la debida a la agitación térmica.

**31.4 Ley de Ohm. Conductividad y resistividad**

La ley de Ohm establece que en un conductor metálico ideal, *la densidad de corriente  $\mathbf{j}$ , en un punto, es proporcional al campo eléctrico en dicho punto.*

Conductividad eléctrica

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad [31.6]$$

siendo  $\sigma$  la *conductividad eléctrica*, que es una constante característica del material conductor y función de la temperatura a la que se encuentra. Los conductores en los que  $\sigma$  es independiente del campo eléctrico se llaman lineales u óhmicos. La ecuación de dimensiones de la conductividad se deducen de la [31.6]:

$$[\sigma] = [j][E]^{-1} = \text{IL}^{-2}\text{M}^{-1}\text{T}^2\text{Q} = \text{L}^{-3}\text{M}^{-1}\text{T}^3\text{I}^2$$

La unidad de conductividad, expresando el campo eléctrico en V/m, es:

$$U(\sigma) = \text{A m}^{-2} \text{V}^{-1} \text{m} = \text{A V}^{-1} \text{m}^{-1}$$

A la unidad  $\text{A}^{-1} \text{V} = \Omega$  se la denomina **ohmio** y a su inversa,  $\text{A V}^{-1} = \Omega^{-1} = \text{S}$ , **siemens**; con lo cual la unidad de conductividad en el S.I. es el siemens por metro  $U(\sigma) = \text{S/m}$ . En la Tabla 31.1 damos los valores de la conductividad a  $20^\circ\text{C}$  para algunos materiales:

**Tabla 31.1.** Conductividad de algunos materiales a  $20^\circ\text{C}$

Material	Conductividad (S/m)
<i>Conductores:</i>	
Plata .....	$6,29 \times 10^7$
Cobre .....	$5,95 \times 10^7$
Oro .....	$4,1 \times 10^7$
Aluminio .....	$3,75 \times 10^7$
Tungsteno .....	$1,8 \times 10^7$
Zinc .....	$1,7 \times 10^7$
Hierro .....	$1 \times 10^7$
Platino .....	$9,4 \times 10^6$
Estaño .....	$9 \times 10^6$
Plomo .....	$5 \times 10^6$
Mercurio .....	$1 \times 10^6$
<i>Semiconductores:</i>	
Grafito .....	$1 \times 10^5$
Teluro .....	$1 \times 10^2$
Agua de mar .....	4
Germanio .....	2,3
Silicio .....	$1,5 \times 10^{-3}$
Tierra .....	$5 \times 10^{-4}$
<i>Aisladores:</i>	
Agua destilada .....	$10^{-4}$
Baqelita .....	$10^{-9}$
Madera .....	$10^{-8} - 10^{-12}$
Vidrio .....	$10^{-9} - 10^{-12}$
Teflón .....	$10^{-13}$
Mica .....	$10^{-12} - 10^{-15}$
Ámbar .....	$2 \times 10^{15}$
Goma dura .....	$10^{-13} - 10^{-16}$
Parafina, caucho, azufre .....	$10^{-17}$
Cuarzo (fundido) .....	$10^{-18}$

### EJEMPLO 31.2 Campo eléctrico dentro de un conductor

Calculemos el campo eléctrico existente dentro del conductor del ejercicio anterior.

#### Solución:

El valor del campo se obtiene de la expresión [31.6],

$$E = \frac{j}{\sigma} = \frac{I}{\sigma A} = \frac{1}{5,95 \times 10^7 (\text{S/m}) \times 2,01 \times 10^{-6} (\text{m}^2)} = 8 \times 10^{-3} \text{ V/m}$$

La expresión [31.4] puede expresarse de la forma:

$$dQ = Idt = j dA dt = \sigma E dA dt = -\sigma \frac{dV}{dl} dA dt$$

que resulta análoga a la expresión [24.1] del volumen 1, la cual nos daba la cantidad de calor que se propaga por conducción, a través de una superficie elemental,  $dA$ , en un tiempo  $dt$ . Lo que en la [31.4] es cantidad de electricidad, potencial eléctrico y conductividad, allí son cantidad de calor, temperatura y conductibilidad térmica interna, respectivamente, estableciéndose así una analogía formal entre la corriente eléctrica y la conducción del calor.

A la inversa de la conductividad se le llama *resistividad* y la representaremos por  $\rho$ .

Resistividad

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \tag{31.7}$$

Su ecuación de dimensiones será  $[\rho] = [\sigma]^{-1} = ML^3T^{-3}I^{-2}$  y su unidad es el  $\Omega \times m$ .

La resistividad puede admitirse que varía de forma aproximadamente lineal con la temperatura absoluta, es decir,

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)] \tag{31.8}$$

en la que  $\alpha$  es el coeficiente de variación unitaria de la resistividad con la temperatura absoluta. En la Tabla 31.2 damos los valores de  $\alpha$  a 20°C para algunos materiales.

$$\alpha = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dT}$$

**Tabla 31.2.** Coeficiente térmico  $\alpha$  de la resistividad a 20°C

Material	$\alpha \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \times 10^{-3}$
Hierro .....	5
Tungsteno .....	4,5
Plomo .....	4,3
Platino .....	3,92
Cobre .....	3,9
Aluminio .....	3,9
Plata .....	3,8
Oro .....	3,4
Constantan .....	2,-
Mercurio .....	0,9
Carbono .....	-0,5
Germanio .....	-48,-
Silicio .....	-75,-

Este coeficiente es positivo para los conductores y negativo para dieléctricos y semiconductores, es decir, en aquellos la resistividad aumenta con la temperatura, mientras que en éstos disminuye. En la Figura 31.6 se representa esta variación.

Realmente, en los conductores, la resistividad en el cero absoluto no tiende, generalmente, a cero, sino que queda una resistividad residual.

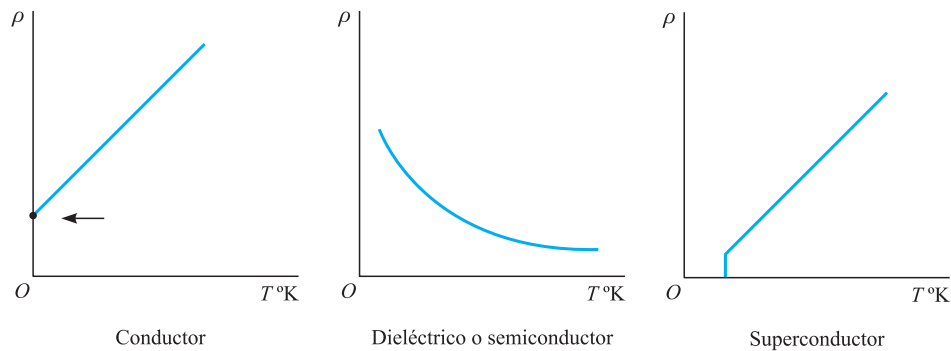


Figura 31.6. Resistividad en función de la temperatura.

## Superconductores

Hay unos casos especiales de gran importancia, en los cuales, a temperaturas próximas al cero absoluto, en algunos metales, mezclas y compuestos, la resistividad se hace bruscamente cero. Este efecto fue observado por vez primera en 1911 por Kamerlingh Onnes (1853-1926), en el mercurio puro a 4,15 K. A los materiales que lo presentan se les denomina *superconductores*, y al fenómeno, *superconductividad*, el cual se presenta en cada sustancia a partir de una cierta temperatura, denominada crítica,  $T_C$ . En la Tabla 31.3 damos los valores de  $T_C$  para algunos superconductores.

Tabla 31.3. Temperatura crítica de superconductores

Material	Temperatura $T_C$
Aluminio .....	1,18
Indio .....	3,41
Estaño .....	3,72
Mercurio .....	4,15
Talio .....	4,47
Plomo .....	7,196
Niobio .....	9,25
Niobio-Titanio .....	9,5
Niobio-Circonio .....	10,7
Vanadio-Galio .....	16,8
Niobio-Estaño .....	18,-
Niobio-Germanio .....	23,2
$\text{La}_{1,85}\text{Ba}_{0,15}\text{CuO}_4$ .....	30,-
$\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ .....	93,-
$\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{CaCu}_2\text{O}_6$ .....	118,-
$\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10}$ .....	128,-
$\text{HgBa}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_8$ .....	138,-

En los superconductores llamados del tipo I, al aumentar la densidad de corriente eléctrica disminuyen sus propiedades como superconductor y no se consigue conducir mayor densidad de corriente que en los conductores normales. Pertenecen a este tipo, entre otros, el aluminio, el indio, el estaño, el mercurio y el plomo.

Hacia 1950 se descubrieron los semiconductores del tipo II, que conservan sus propiedades hasta densidades de corriente de  $10^6$  A/cm<sup>2</sup>. A este tipo pertenece el

niobio, las mezclas de niobio y circonio, las mezclas de vanadio-galio, las mezclas de niobio y estaño y la mezcla de niobio-germanio.

En 1986, Bednorz y Müller desarrollaron cerámicas superconductoras basadas en óxidos de cobre, del tipo  $\text{La}_{1.85}\text{Ba}_{0.15}\text{CuO}_4$ , cuya temperatura crítica era de 30 K. En 1987, Paul Chu, de la universidad de Alabama, sustituyó el lantano por ytrio, consiguiendo con el compuesto  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  una temperatura crítica de 93 K, que ya es superior a la del nitrógeno líquido (77 K). Posteriormente, se ha sustituido el ytrio por talio, consiguiendo una serie de compuestos cuyas temperaturas críticas van desde 95 K a 128 K; recientemente se ha desarrollado una serie de compuestos sustituyendo el talio por mercurio, con los cuales se ha conseguido el compuesto  $\text{HgBa}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_8$  cuya temperatura crítica es de 134 K, estando el record actual en 138 K con el compuesto  $\text{Hg}_{0.8}\text{Tl}_{0.2}\text{Ba}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{8.33}$ .

En un circuito formado únicamente por superconductores, la corriente eléctrica establecida continuará constantemente, ya que en él, al ser la resistencia nula, no habrá disipación de energía. Al tender la conductividad a infinito, con un campo eléctrico muy débil, puede haber una densidad de corriente altísima. Las aplicaciones de los superconductores pueden constituir una revolución tecnológica: ayudarán a una mayor eficiencia en el uso de la energía, tanto en su generación, como en su transmisión, uso y almacenamiento; los equipos podrán hacerse más pequeños, los procesadores más rápidos, la transmisión de la información más veloz, los detectores más sensibles.

Los superconductores están permitiendo el desarrollo de trenes de levitación magnética, que han sido diseñados mediante dos técnicas diferentes: una en Alemania, la suspensión electromagnética (EMS) con su prototipo Transrapid, que alcanza velocidades de 500 km/h y otra en Japón, la suspensión electrodinámica (EDS), con su proyecto Yamanashi, que ha alcanzado velocidades de 580 km/h. La primera línea comercial, que ha sido construida con tecnología EMS, fue inaugurada en el 2002 y une Shanghai con el aeropuerto Pudong. Está en proyecto la extensión de esta línea en una longitud de 160 km, para unir Shanghai con Hangzho, con idea de su inauguración en el 2010 coincidiendo con la Expo de Shanghai. En Aichi (Japón) fue inaugurado, en la primavera del 2005, una línea de tren urbano levitado magnéticamente con tecnología EDS. Este mismo sistema está siendo desarrollado en Corea, para su instalación en la ciudad de Daejeon, y está prevista la inauguración en abril de 2007. También Alemania proyecta instalar su Transrapid entre Munich y su aeropuerto, 37 km que recorrería en menos de diez minutos. Otros muchos proyectos están en estudio, como son las líneas Washington-Baltimore, Londres-Edimburgo, Los Angeles-Las Vegas o Berlín-Hamburgo.

Otra importante aplicación de la levitación magnética es su utilización en lanzaderas espaciales, ya que permitiría conseguir grandes aceleraciones y con ello altas velocidades de salida en cortos espacios, habiéndose alcanzado los 1 000 km/h en las pruebas realizadas en Huntsville (EE.UU.). Esto puede posibilitar la puesta en órbita de pequeñas cargas o aportar alta velocidad de salida al cohete propulsor antes de poner en marcha su sistema de propulsión, disminuyendo así el consumo de combustible y, con ello, los costos y la contaminación.

### 31.5 Teoría clásica de la conducción

Una teoría elemental de la conducción metálica nos permite relacionar fácilmente la resistividad de un conductor metálico con las características de sus electrones de conducción. El electrón es acelerado por el campo, siendo la ecuación de su movimiento:

$$m_e \mathbf{a} = -e\mathbf{E}$$

y es frenado al chocar con la red atómica del conductor metálico. Suponiendo que el electrón parte del reposo después de cada choque y supuesto  $E$  constante, la velocidad máxima al final de cada recorrido libre es:

$$v_m = \frac{e}{m} E \tau$$

siendo  $\tau$  el tiempo del recorrido libre. La velocidad media durante el tiempo del recorrido libre del electrón o velocidad de desplazamiento es:

$$v_d = \langle v \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{e}{m} E t dt = \frac{1}{\tau} \frac{e}{m} E \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^\tau = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \tau = \frac{1}{2} v_m$$

Con ello, la densidad de la corriente, dada por la [31.5], se expresa:

$$j = \frac{ne^2\tau}{2m} E$$

y, al identificar ésta con la [31.6], resulta:

$$\sigma = \frac{ne^2}{2m} \tau$$

o bien,

$$\rho = \frac{2m}{ne^2\tau} \quad [31.9]$$

Cuanto más perfecta sea la red metálica, formada por iones idénticos y espaciados uniformemente, menor será la probabilidad de choque de los electrones contra ella, mayor será  $\tau$  y menor la resistividad. A temperatura ambiente, las vibraciones de la red perturban su estructura, y aumenta la frecuencia de choque de los electrones y con ello la resistividad. Este efecto, a temperatura ambiente, enmascara otros que también producen aumento de resistividad, como son las impurezas presentes en el conductor o las tensiones a que esté sometido. Por ello, a temperatura ambiente, la mayor o menor pureza del conductor influye relativamente poco en su resistividad. A muy bajas temperaturas, la red cristalina prácticamente no vibra y la resistividad es debida a las impurezas o tensiones que presenta el conductor.

En los dieléctricos, el número de electrones libres por unidad de volumen es muy pequeño y por ello su resistividad muy grande. Al aumentar la temperatura, aumenta la energía de los electrones y algunos más de éstos se liberan de la estructura del material, aumentando el número de electrones libres y disminuyendo, en consecuencia, la resistividad del material.

Esta teoría no es más que una aproximación clásica del fenómeno real. Un estudio más profundo exige el concurso de la Mecánica Cuántica y será realizado en capítulos posteriores.

**EJEMPLO 31.3**

Considerando el conductor de cobre del ejemplo anterior, calculemos el recorrido libre medio del electrón.

**Solución:**

Para ello, despejemos  $\tau$  de la Ecuación [31.9]

$$\tau = \frac{2m_e}{ne^2\rho}$$

en la que todos los factores que intervienen son conocidos,

$$\tau = \frac{2 \times 9,11 \times 10^{-31}(\text{kg})}{8,45 \times 10^{28}(\text{m}^3) \times 1,6022^2 \times 10^{-38}(\text{C}^2) \times 1,68 \times 10^{-8} (\Omega\text{m})} = 5 \times 10^{-14} \text{ s}$$

**31.6 Resistencia eléctrica**

Consideremos un conductor que está formando parte de un circuito eléctrico. En cada punto del conductor se verifica la ley de Ohm:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

La circulación del campo eléctrico, a lo largo de una línea del campo dentro del conductor, entre dos puntos a potenciales  $V_1$  y  $V_2$  (Figura 31.7), es:

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 E dl = \int_1^2 \frac{j}{\sigma} dl = \int_1^2 \frac{I}{\sigma A} dl$$

La última igualdad se escribe al considerar que todos los puntos de la sección  $A$  tienen el mismo  $j$ . Puesto que  $I$  es constante, se escribe:

$$V_1 - V_2 = I \int_1^2 \frac{dl}{\sigma A}$$

Al factor:

$$R = \int_1^2 \frac{dl}{\sigma A} \tag{31.10}$$

Resistencia eléctrica

se le denomina resistencia del conductor entre los puntos 1 y 2, pudiendo escribirse:

$$V_1 - V_2 = IR \tag{31.11}$$

expresión que se conoce con el nombre de ley de Ohm para conductores lineales.

Si el conductor es homogéneo,  $\sigma$  es constante en todos los puntos del mismo, y si además la sección de éste es constante, la resistencia se expresa:

$$R = \int_1^2 \frac{dl}{\sigma A} = \frac{1}{\sigma A} \int_1^2 dl = \frac{L}{\sigma A} = \rho \frac{L}{A} \tag{31.12}$$

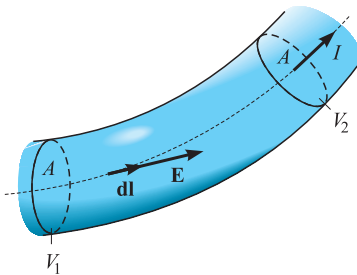


Figura 31.7. Circulación del campo E.



con lo cual, la ley de Ohm para conductores lineales, homogéneos y de sección constante se escribe:

$$V_1 - V_2 = I \rho \frac{L}{A}$$

que fue encontrada experimentalmente por Simon Ohm (1787-1854), en 1826. La ecuación de dimensiones de la resistencia es:

$$[R] = [V]I^{-1} = [\rho]L^{-1} = L^2MT^{-3}I^{-1}$$

En el S.I., la unidad de resistencia es el voltio por amperio, y se denomina *ohmio* ( $\Omega$ ), definiéndose como la *resistencia que presenta un conductor que transporta la intensidad de un amperio cuando la diferencia de potencial entre sus extremos es de un voltio*.

El símbolo que se emplea para esquematizar una resistencia en un circuito eléctrico es  $\sim\sim\sim\sim$ .

Para determinar la resistencia  $R$  entre dos secciones de un conductor cualquiera puede usarse la expresión general:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\oint_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}} = \frac{\oint_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\iint \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}} \quad [31.13]$$

### EJEMPLO 31.4 Resistencia eléctrica de una barra conductora

Calculemos la resistencia eléctrica de una barra homogénea, de conductividad  $\sigma$ , sección constante  $A$  y longitud  $L$ , cuyos extremos se mantienen bajo la diferencia potencial  $\Delta V$  (Figura 31.8).

#### Solución:

En este caso será:

$$\Delta V = \oint_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 E dl = E \int_1^2 dl = EL$$

y

$$I = \iint \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \sigma \iint E dA = \sigma E \iint dA = \sigma EA$$

Por tanto, es:

$$R = \frac{L}{\sigma A}$$

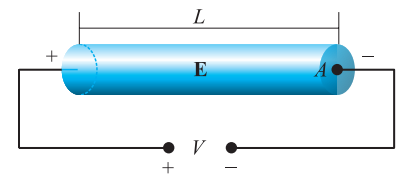


Figura 31.8.

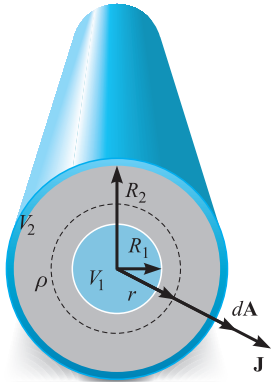


Figura 31.9. Cable coaxial.

**EJEMPLO 31.5 Resistencia eléctrica por unidad de longitud de un cable coaxial**

Un cable coaxial, cuya sección transversal se ha representado en la Figura 31.9, tiene sus conductores a potenciales  $V_1$  y  $V_2$ , y el dieléctrico interpuesto entre ellos tiene una resistividad  $\rho$ . Calculemos su resistencia eléctrica por unidad de longitud de cable.

**Solución:**

Veamos, en primer lugar, cuál es la intensidad de la corriente entre los dos conductores, para lo cual calculamos el flujo de  $\mathbf{j}$  a través de una superficie cilíndrica coaxial con los conductores y de radio  $r$ :

$$I = \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$$

puesto que  $\mathbf{j}$  y  $d\mathbf{A}$  son radiales, es decir, tienen la misma dirección y sentido, será:

$$I = \iint J dA = J \iint dA = J 2\pi r$$

Pero esta intensidad debe ser independiente de  $r$ , es decir, debe ser la misma para cualquier superficie cilíndrica coaxial con las anteriores y de radio  $R_1 < r < R_2$ . Por tanto,  $j$  debe ser de la forma  $j = k/r$  y, con ello,

$$I = 2\pi k$$

siendo  $k$  una constante arbitraria.

Por otra parte, es:

$$V_1 - V_2 = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \int_{R_1}^{R_2} \rho \frac{k}{r} dr = k\rho \ln \frac{R_2}{R_1}$$

En consecuencia, la resistencia total es:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\rho}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Y la corriente entre los conductores por unidad de longitud de hilo:

$$I_1 = \frac{2\pi}{\rho} \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

**31.7 Resistencias en serie y en paralelo**

**Asociación en serie**

Un conjunto de  $n$  resistencias, conectadas entre dos puntos 1 y  $n + 1$  de un circuito eléctrico (Figura 31.10), se dice que están *conectados en serie*, cuando por

todas y cada una de ellas pasa la misma intensidad  $I$ , que es la que circula por dicho circuito.

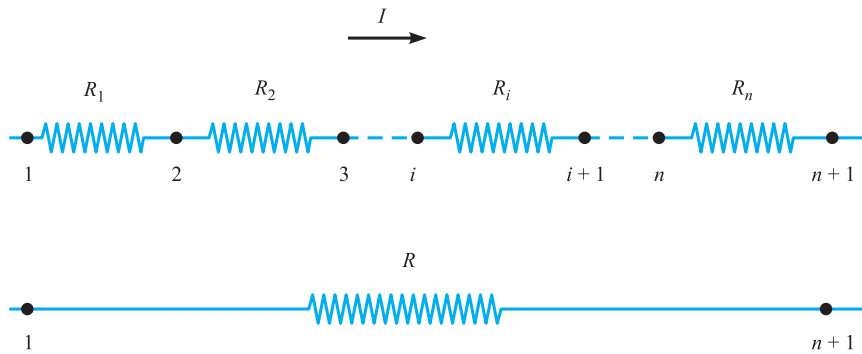


Figura 31.10.

La caída de potencial  $V_1 - V_{n+1}$  será la suma de las caídas de potenciales en cada una de las resistencias.

$$V_1 - V_{n+1} = \sum_{i=1}^n (V_i - V_{i+1}) \quad [31.14]$$

Para cada una de las resistencias se verifica, de acuerdo con la ley de Ohm, una ecuación del tipo:

$$V_i - V_{i+1} = R_i I \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Sumando todas ellas y puesto que la intensidad que atraviesa a cada una es la misma, resulta:

$$\sum_{i=1}^n (V_i - V_{i+1}) = I \sum_{i=1}^n R_i$$

La cual, teniendo en cuenta la [31.14], se escribe:

$$V_1 - V_{n+1} = I \sum_{i=1}^n R_i$$

La *resistencia equivalente* a un conjunto de resistencias en serie es aquella que provoca la misma caída de tensión al ser atravesada por la misma intensidad; es decir, verifica:

$$V_1 - V_{n+1} = IR$$

Comparando esta ecuación con la anterior, resulta:

$$R = \sum_{i=1}^n R_i \quad [31.15]$$

lo que nos indica que *la resistencia equivalente a un conjunto de resistencias en serie es igual a la suma de éstas*. Por tanto, su valor será mayor que la mayor de las resistencias.

### Asociación en paralelo

Un conjunto de resistencias está conectado en paralelo entre dos puntos  $A$  y  $B$  de un circuito cuando cada una de ellas está sometida a la misma caída de potencial  $V_A - V_B$  (Figura 31.11).

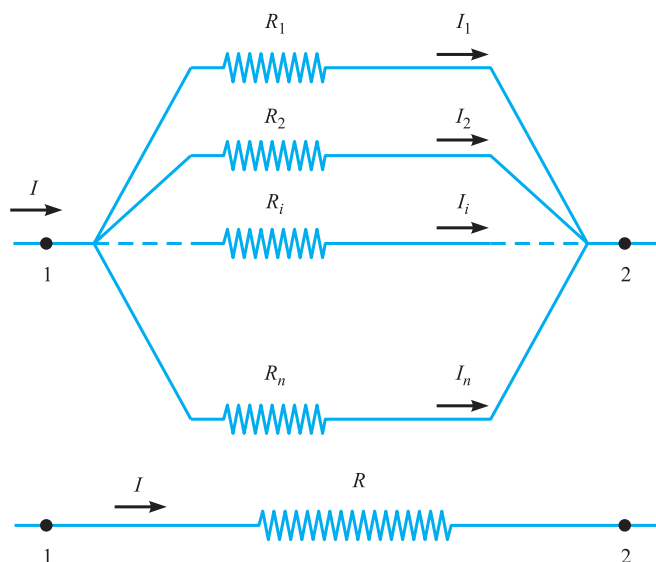


Figura 31.11.

La ley de Ohm, aplicada a cada una de las resistencias del conjunto, se expresa:

$$V_A - V_B = R_i I_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

que puede escribirse de la forma:

$$I_i = \frac{V_A - V_B}{R_i} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

La suma de estas  $n$  ecuaciones, teniendo en cuenta que es:

$$I = \sum_{i=1}^n I_i$$

da:

$$I = (V_A - V_B) \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

La resistencia equivalente al conjunto de resistencias en paralelo debe verificar:

$$I = \frac{V_A - V_B}{R}$$

ecuación que, al ser comparada con la anterior, da:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad [31.16]$$

Lo que nos indica que *la resistencia equivalente a un conjunto de resistencias en paralelo es tal que su inversa es igual a la suma de las inversas de las resistencias que constituyen el conjunto*. Por tanto, su valor será menor que el menor de las resistencias asociadas.

### 31.8 Potencia entregada entre dos puntos de un circuito

La energía que se libera al pasar la unidad positiva de carga desde un punto de potencial  $V_1$  a otro de potencial  $V_2$  es,  $V_1 - V_2$ , y si la cantidad de electricidad que pasa es  $dq$ , la energía entregada es:

$$dW = (V_1 - V_2) dq \quad [31.17]$$

La energía entregada por unidad de tiempo, o potencia entregada entre los citados puntos, es:

$$P = \frac{dW}{dt} = (V_1 - V_2) \frac{dq}{dt} = (V_1 - V_2) I \quad [31.18]$$

Evidentemente, la energía liberada o entregada en ese tramo de circuito aparecerá en él bajo otras formas de energía.

### 31.9 Ley de Joule

Si entre los dos puntos del circuito la única transformación de energía es la debida a la resistencia del conductor, la ley de Ohm [31.11], permite escribir la expresión [31.18] de la forma:

$$P = \frac{dW}{dt} = (V_1 - V_2) I = RI^2 \quad [31.19]$$

que constituye la expresión analítica de la ley de Joule. Toda la energía cedida en el tramo de circuito debe aparecer en forma de calor, ya que no existe en este tramo transformación alguna a otro tipo de energía. Por ello, la [31.19] da la energía eléctrica transformada en calor al circular una corriente de intensidad  $I$  por un conductor de resistencia  $R$ . Este efecto de calentamiento de los conductores por el paso de la corriente a través de ellos se denomina *efecto Joule*, en honor a su descubridor J. P. Joule (1818-1889), el cual estableció la ley que lleva su nombre en 1840.

La expresión [31.18] permite la definición del *voltio*, a partir del vatio y del amperio, como *la diferencia de potencial eléctrico que existe entre dos puntos de un conductor cuando éste es recorrido por la intensidad constante de 1 amperio, disipándose entre estos dos puntos la potencia de 1 vatio*.

Consideremos el tramo de conductor representado en la Figura 31.12 y sean  $A$  y  $A'$  dos secciones rectas del mismo, separadas entre sí una longitud  $dl$ . Un elemento de superficie  $dA$  de la sección  $A$  es atravesado por la intensidad:

$$dI = j dA$$

y la resistencia que presenta el elemento de volumen de longitud  $dl$  y bases  $dA$  y  $dA'$  es:

$$dR = \rho \frac{dl}{dA}$$

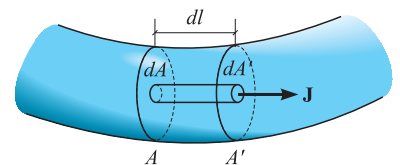


Figura 31.12.

Por tanto, la potencia disipada en el elemento de volumen,  $dv$ , es:

$$dP = dR(dI)^2 = \rho \frac{dl}{dA} J^2 dA^2$$

que, teniendo en cuenta el valor de  $j$ , se expresa:

$$dP = \frac{1}{\rho} E^2 dA dl = \frac{1}{\rho} E^2 dV$$

con lo cual, la potencia disipada por unidad de volumen es:

$$\frac{dP}{dV} = \sigma E^2 \quad [31.20]$$

### EJEMPLO 31.6 Calor disipado por efecto Joule

Calculemos la potencia disipada por efecto Joule en un conductor cilíndrico de diámetro  $D$ , longitud  $l$  y resistividad  $\rho$ , al ser recorrido por una corriente de intensidad  $I$ .

#### Solución:

La potencia disipada está dada por la ley de Joule,

$$P = RI^2$$

Expresemos  $R$  en función de los datos,

$$R = \rho \frac{L}{A} = \rho \frac{L}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{4\rho L}{\pi D^2}$$

Con lo cual, la potencia disipada se expresa:

$$P = \frac{4\rho L}{\pi D^2} I^2$$

## 31.10 Fuerza electromotriz

Una corriente estacionaria no puede mantenerse únicamente por la acción de un campo electrostático. En efecto, el campo se expresa:

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{J} = \frac{RA}{L} \mathbf{J} \quad [31.21]$$

y, hallando su circulación a lo largo del circuito, es:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{RA}{L} \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = \frac{RA}{L} \oint J dl = \frac{RA}{L} J \oint dl = RI$$

El primer miembro, circulación del campo electrostático a lo largo de una línea cerrada, es nulo [28.27], en consecuencia, el segundo miembro también debe serlo, por tanto, tiene que ser  $I = 0$ , y no hay corriente.

Por otra parte, en un campo potencial, los electrones, que parten de un punto y vuelven al mismo después de recorrer el circuito, no han ganado ni perdido energía. Por ello, la energía que se disipa en forma de calor por efecto Joule, no puede proceder del campo potencial.

Por todas estas razones, para establecer una corriente en un circuito, se hace necesaria la existencia de un campo eléctrico,  $\mathbf{E}_g$ , creado por un generador (Figura 31.13), además del campo electrostático potencial,  $\mathbf{E}_e$ . El campo eléctrico total será:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_g$$

Teniendo en cuenta la [31.21], es:

$$\mathbf{E}_e + \mathbf{E}_g = \frac{RA}{L} \mathbf{J}$$

y, hallando la circulación a lo largo del circuito, es:

$$\oint \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} + \oint \mathbf{E}_g \cdot d\mathbf{l} = \frac{RA}{L} \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = RI$$

El primer sumando del primer miembro será nulo, pues es la circulación de un campo potencial a lo largo de un circuito cerrado, por ello queda:

$$\oint \mathbf{E}_g \cdot d\mathbf{l} = RI$$

siendo  $R$  la resistencia total del circuito. Pues bien, la circulación del campo  $\mathbf{E}_g$ , no potencial, creado por el generador, es lo que se denomina *fuerza electromotriz del generador (f.e.m.)*,

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}_g \cdot d\mathbf{l} \quad [31.22] \quad \text{Fuerza electromotriz}$$

con lo cual, es:

$$\mathcal{E} = RI \quad [31.23]$$

La resistencia total,  $R$ , será la suma de la resistencia interna del generador,  $r$ , y de la resistencia  $R_0$ , del resto del circuito. Es decir,

$$\mathcal{E} = (R_0 + r)I = R_0I + rI = (V_1 - V_2) + rI \quad [31.24]$$

La ecuación de dimensiones de la fuerza electromotriz coincide con la del potencial, su unidad en el S.I. es el voltio.

De la propia definición se deduce el significado físico de  $\mathcal{E}$ , siendo: *la energía que debe desarrollar el generador para hacer circular la unidad positiva de carga a través todo el circuito, es decir, incluido el propio generador.*

La energía que libera el generador para hacer circular la cantidad de electricidad  $dq$  es:

$$dW = \mathcal{E} dq$$

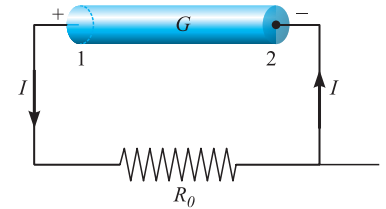


Figura 31.13. Circuito corriente continua.

y la potencia realizada por el generador puede expresarse de la forma:

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathcal{E} \frac{dw}{dt} = \mathcal{E}I \quad [31.25]$$

Multiplicando la expresión [31.24] por  $I$ , es:

$$\mathcal{E}I = (V_1 - V_2)I + rI^2$$

Por tanto, de la potencia entregada por el generador, una parte  $(V_1 - V_2)I$  es suministrada a la resistencia  $R_0$ , y otra parte,  $rI^2$ , es disipada en el interior del generador, calentándose este.

En consecuencia, un generador queda definido conociendo su fuerza electromotriz y su resistencia interna, por ello se representan en los circuitos mediante el símbolo  $\frac{\mathcal{E}}{r} \left| \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} \right.$ , en el cual, la barra vertical más corta representa el polo negativo, y la más larga, el positivo. Como el sentido de la corriente en el circuito es el de los potenciales decrecientes, en el interior del generador el sentido de la misma será del polo negativo al positivo.

### 31.11 Tensión entre los bornes de un generador

El valor de la tensión entre los bornes 1 y 2 de un generador de f.e.m.  $\mathcal{E}$ , lo deducimos de la expresión [31.24], siendo:

$$V = V_1 - V_2 = \mathcal{E} - rI \quad [31.26]$$

Es decir, *la diferencia de potencial entre los bornes de un generador es igual a su f.e.m. menos la caída óhmica debida a su resistencia interior.*

Cuando el circuito eléctrico se abre, se interrumpe el paso de cargas, con lo que se anula la intensidad y, en consecuencia, de acuerdo con la [31.26], es  $V_1 - V_2 = \mathcal{E}$ . Por tanto, *en circuito abierto, la f.e.m. de un generador es igual a la tensión entre sus bornes.*

La curva que representa la variación de  $V$  en función de  $I$  se llama «característica del generador». En nuestro caso, suponiendo  $\mathcal{E} = \text{cte}$ , será una recta que cortará el eje  $OV$  en el punto  $(0, \mathcal{E})$  y cuya pendiente es el valor de la resistencia interna (Figura 31.14).

Si definimos el rendimiento de un generador como el cociente entre la potencia que suministra al circuito y la total que produce, es:

$$\eta = \frac{VI}{\mathcal{E}I} = \frac{V}{\mathcal{E}} = 1 - \frac{rI}{\mathcal{E}} \quad [31.27]$$

de donde se deduce que el rendimiento es tanto mayor cuanto menor es el cociente  $r/\mathcal{E}$ .

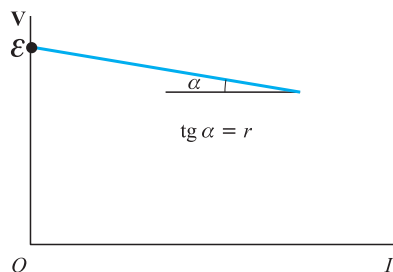


Figura 31.14.

### 31.12 Fuerza contraelectromotriz

Se da el nombre de receptor, en un circuito eléctrico, a todo aparato que recibe energía eléctrica del circuito y la transforma en otro tipo de energía distinta a la calorífica disipada por el efecto Joule. De ellos, uno muy importante es el motor



eléctrico, ingenio que transforma la energía eléctrica en energía mecánica y de cuyo principio de funcionamiento nos ocuparemos en un capítulo posterior. De momento es suficiente saber que de la corriente que pasa a su través, una parte servirá para producir energía mecánica y el resto se perderá por efecto Joule, en su resistencia eléctrica interna.

Supongamos al motor dentro de un circuito recorrido por una corriente de intensidad  $I$ , conectado entre los puntos 1 y 2, de potenciales  $V_1$  y  $V_2$ , respectivamente (Figura 31.15).

De acuerdo con la expresión [31.18], el circuito entrega al motor la potencia,  $(V_1 - V_2)I$ , la cual se emplea: una parte en producir potencia mecánica  $P'$ , y el resto se disipa en el interior del motor por efecto Joule,  $rI^2$ , siendo  $r$  la resistencia eléctrica interna del motor, es decir, se verifica:

$$(V_1 - V_2)I = P' + rI^2$$

Despejando,

$$P' = (V_1 - V_2 - rI)I$$

Al factor  $V_1 - V_2 - rI = \mathcal{E}'$  se le llama *fuerza contraelectromotriz* del receptor, en este caso del motor, y representa *la energía eléctrica convertida en mecánica por unidad de carga que pasa a su través*.

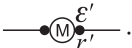
La potencia mecánica suministrada por el motor es:

$$P' = \mathcal{E}'I \quad [31.28]$$

Evidentemente, la diferencia de potencial entre los bornes del motor es:

$$V_1 - V_2 = \mathcal{E}' + rI \quad [31.29]$$


La ecuación de dimensiones de la fuerza contraelectromotriz es igual a la de la fuerza electromotriz, su unidad en el S.I. también será el voltio.

El motor de corriente continua está caracterizado por los valores  $\mathcal{E}'$  y  $r'$ , de su f.c.e.m. y su resistencia interna, por ello, en un circuito se representa mediante el símbolo .

El rendimiento del motor será el cociente entre la potencia mecánica producida y la absorbida del circuito,

$$\eta = \frac{\mathcal{E}'I}{(V_1 - V_2)I} = \frac{(V_1 - V_2) - rI}{V_1 - V_2} = 1 - \frac{rI}{V_1 - V_2} \quad [31.30]$$

Otro receptor muy usual es la bombilla incandescente, la cual transforma la energía eléctrica en energía calorífica, que calienta un filamento situado dentro de un bulbo de cristal donde se ha hecho el vacío, haciendo que aquél emita luz. La bombilla queda caracterizada por la tensión a la que debe ser conectada,  $V_1 - V_2$ , y su potencia,  $P$ . La corriente que debe pasar por ella tiene que verificar la [31.18],  $P = (V_1 - V_2)I$ . Además, puesto que el filamento se comporta como un conductor puro, su resistencia eléctrica debe verificar,  $V_1 - V_2 = RI$ .

En un circuito eléctrico la bombilla se representa por el símbolo .

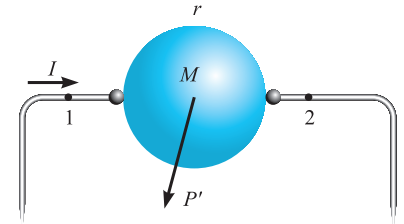


Figura 31.15. Motor eléctrico.

### Fuerza contraelectromotriz

### 31.13 Tensión entre dos puntos de un circuito

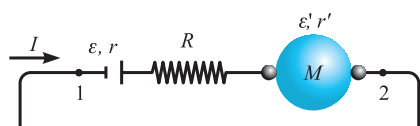


Figura 31.16.

Supongamos un circuito eléctrico, que entre dos puntos, 1 y 2, de potenciales  $V_1$  y  $V_2$  respectivamente, tiene conectados en serie los elementos que hasta ahora hemos visto: generador de f.e.m.  $\mathcal{E}$  y resistencia interna  $r$ ; resistencia óhmica  $R$ , y motor de f.c.e.m.  $\mathcal{E}'$  y resistencia interna  $r'$  (Figura 31.16).

Si la intensidad que circula es  $I$ , la potencia que el resto del circuito libera entre esos dos puntos es  $(V_1 - V_2)I$ . Además, el generador produce la potencia  $\mathcal{E}I$ . El resto de los elementos conectados entre los puntos 1 y 2 consume energía, siendo las potencias consumidas: por el generador,  $rI^2$ ; la resistencia  $RI^2$  y, por último, el motor consume  $\mathcal{E}'I$ , que transforma en mecánica, y  $r'I^2$ , que se pierde en calor. Por tanto, el balance de energías es:

$$(V_1 - V_2)I + \mathcal{E}I = RI^2 + rI^2 + r'I^2 + \mathcal{E}'I$$

Dividiendo por  $I$ , es:

$$V_1 - V_2 + \mathcal{E} - \mathcal{E}' = (R + r + r')I = I \sum R_i \tag{31.31}$$

que puede considerarse como una generalización de la ley de Ohm.

Las fuerzas contraelectromotrices siempre son negativas, no así las electromotrices. Éstas, si la corriente las atraviesa del polo negativo al positivo, son positivas, y si la corriente entra en ellas por el polo positivo y sale por el negativo, son negativas.

### 31.4 Ecuación del circuito

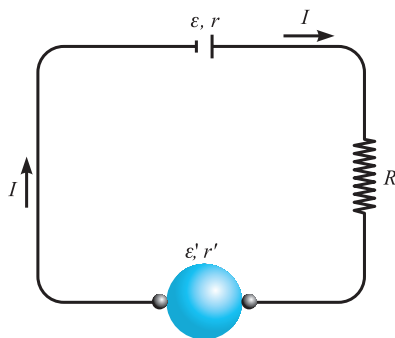


Figura 31.17.

Si unimos los puntos 1 y 2 del caso anterior obtenemos un circuito cerrado como el representado en la Figura 31.17.

Al unir los puntos 1 y 2, los ponemos al mismo potencial, y entonces es  $V_1 - V_2 = 0$ , con lo que la expresión [31.31] se transforma en:

$$I = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}'}{R + r + r'} = \frac{\sum \mathcal{E}_i}{\sum R_i} \tag{31.32}$$

que nos da la intensidad que circula por el circuito como el cociente entre la suma algebraica de todas las fuerzas electromotrices y contraelectromotrices del circuito y la suma de todas las resistencias del mismo.

#### EJEMPLO 31.7

Calculemos el valor de la intensidad de la corriente en el circuito de la Figura 31.18.

#### Solución:

Tomemos un sentido arbitrario para la intensidad de la corriente, por ejemplo, el de las agujas del reloj; con él se obtiene:

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2 + r_1 + r_2}$$

Si es  $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$ , será  $I > 0$  y la corriente tiene el sentido indicado, pero si es  $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2$ , resulta  $I < 0$  y la corriente tiene sentido contrario al indicado.

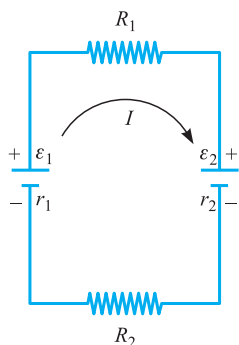


Figura 31.18.

**EJEMPLO 31.8**

Una batería de fuerza electromotriz  $\mathcal{E}$  y resistencia interna  $r$  está conectada en serie con una resistencia variable  $R$  (Figura 31.19). Determinemos:

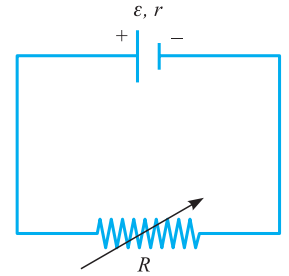


Figura 31.19.

- 1.º La intensidad que circula por el circuito.
- 2.º La potencia  $P$  suministrada a la resistencia.
- 3.º El valor de  $R$  que hace máxima esa potencia.
- 4.º El valor máximo de  $P$ .
- 5.º La representación gráfica de la variación de  $P$  con  $R$ .

**Solución:**

- 1.º La intensidad que circula está dada por la [31.32]:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

- 2.º La potencia suministrada a  $R$  es:

$$P = VI = (\mathcal{E} - rI)I = \left(\mathcal{E} - \frac{r\mathcal{E}}{R + r}\right) \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{r\mathcal{E}^2}{(R + r)^2}$$

- 3.º Los valores de  $R$  que hacen máxima  $P$  se obtienen de  $dP/dR = 0$

$$\frac{(R + r)^2 \mathcal{E}^2 - R \mathcal{E}^2 2(R + r)}{(R + r)^4} = 0$$

de donde  $R = r$ .

- 4.º Sustituyendo el valor anterior en la expresión de  $P$  del apartado 2.º, es:

$$P_m = \frac{r\mathcal{E}^2}{4r^2} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}$$

- 5.º La expresión de la potencia en función de  $R$  se anula para  $R = 0$  y para  $R \rightarrow \infty$ , presentando un máximo en  $R = r$ , cuyo valor se ha calculado. Por tanto, la curva  $P = P(R)$  es la dibujada en la Figura 31.20.

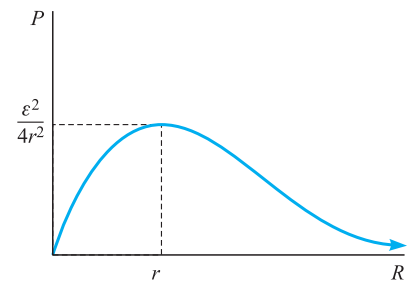


Figura 31.20.  $P$  función de  $R$ .

**EJEMPLO 31.9 Conexión de bombillas en paralelo**

Un conjunto de 11 bombillas, cuya potencia es de 100 W y su tensión de trabajo 220 V están conectadas en paralelo (Figura 31.21). La tensión es mantenida por un generador de fuerza electromotriz  $\mathcal{E}$  y resistencia interna  $r$ . Calculemos:

- 1.º La intensidad que debe atravesar cada una de las bombillas.
- 2.º La resistencia de cada bombilla.
- 3.º La intensidad que debe circular por el generador.
- 4.º La resistencia equivalente al conjunto de bombillas.
- 5.º La relación entre  $\mathcal{E}$  y  $r$ .

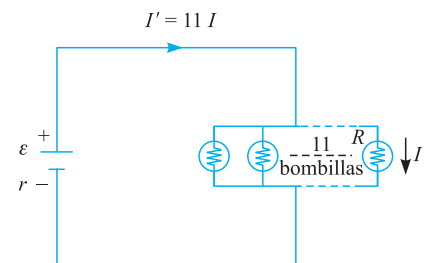


Figura 31.21.

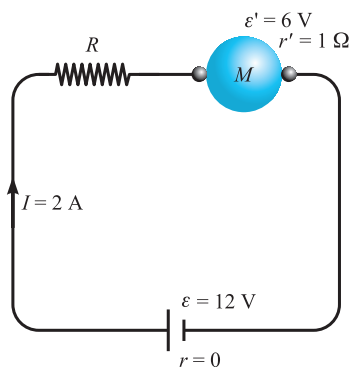


Figura 31.22.

**Solución:**

1.º El funcionamiento correcto de cada bombilla exige que se verifique:

$$100 \text{ (W)} = 220 \text{ (V)} \times I \text{ (A)}$$

de donde  $I = \frac{5}{11}$  A.

2.º La resistencia de cada bombilla debe verificar:

$$R = \frac{V}{I} = 220 \times \frac{11}{5} = 484 \Omega$$

3.º La intensidad que circula por el generador es  $I' = 11 I = 5$  A.

4.º Puesto que las bombillas son resistencias conectadas en paralelo, la resistencia equivalente es:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{11}{R} \quad R_e = \frac{R}{11} = 44 \Omega$$

5.º La relación entre  $\mathcal{E}$  y  $r$  está dada por la [31.24]

$$\mathcal{E} = 220 + 5r$$

**EJEMPLO 31.10 Motor de corriente continua**

Un motor de corriente continua, cuya fuerza contraelectromotriz es de  $\mathcal{E}' = 6$  V y su resistencia interna  $r' = 1 \Omega$ , se ha conectado, en serie con una resistencia  $R$ , a una fuente de fuerza electromotriz  $\mathcal{E} = 12$  V y resistencia interna despreciable (Figura 31.22). Sabiendo que por el motor debe pasar una corriente de 2 A, calculemos:

- 1.º El valor de la resistencia  $R$  para un correcto funcionamiento.
- 2.º La tensión a la que debe estar conectado el motor.
- 3.º La potencia eléctrica consumida por el motor y la potencia mecánica producida.
- 4.º El rendimiento del motor y la potencia disipada.
- 5.º El balance de potencias producidas y consumidas en el circuito.

**Solución:**

1.º La intensidad que circula por el circuito, de acuerdo con [31.32] debe verificar:

$$I = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}'}{R + r'} = \frac{6}{R + 1} = 2$$

de donde  $R = 2 \Omega$ .

2.º En el motor se debe verificar la [31.29]:

$$V_m = \mathcal{E}' + r'I = 6 + 1 \times 2 = 8 \text{ V}$$

3.º La potencia eléctrica consumida por el motor es  $P_e = V_m I = 8 \times 2 = 16$  W y la potencia mecánica producida  $P_m = \mathcal{E}' I = 6 \times 2 = 12$  W.

4.º El rendimiento del motor es:

$$\eta = \frac{P_m}{P_e} = \frac{12}{16} = 0,75$$

y la potencia disipada en el motor  $P_{dm} = r'I^2 = 1 \times 2^2 = 4 \text{ W}$ .

5.º El único elemento que produce energía es el generador,

$$P_g = \mathcal{E}I = 12 \times 2 = 24 \text{ W}$$

La potencia consumida en el motor es:

$$P_{cm} = P_m + P_{dm} = 12 + 4 = 16 \text{ W}$$

La potencia consumida en la resistencia es:

$$P_R = RI^2 = 2 \times 2^2 = 8 \text{ W}$$

Verificando la igualdad entre potencia total producida y consumida.

### 31.15 Redes. Leyes de Kirchhoff

Abordaremos ahora el estudio de circuitos eléctricos cualesquiera, en los que se dispongan generadores, motores y resistencias puras de forma más o menos complicada, constituyendo lo que se llama una red de conductores, como, por ejemplo, la dibujada en la Figura 31.23.

En toda red de conductores, definiremos los siguientes conceptos:

- 1.º **Nudo** es todo punto donde concurren tres o más conductores. En la red dibujada corresponden a los puntos *A*, *B*, *C* y *D*.
- 2.º **Tramo** es la porción de conductores, con sus elementos correspondientes en serie, comprendido entre dos nudos consecutivos. Son tramos del ejemplo propuesto, los *AB*, *AC*, *CB*, *AD*, *DC* y *DB*.
- 3.º **Malla** es un circuito cerrado, formado por una sucesión de tramos, de modo que partiendo de un punto, y siguiendo un mismo sentido de recorrido, se pueda volver a él sin pasar dos veces por el mismo tramo. Son mallas *ABCA*, *ABDA*, *ACDA* y *DCBD*.

Las leyes de Kirchhoff que vamos a enunciar nos van a permitir determinar las intensidades de las corrientes que circulan por los distintos tramos de la red, cuando se conocen las f.e.m., las resistencias y las f.c.e.m. de los distintos elementos que intervienen en la Red.

**Ley de los nudos:** la suma de las intensidades que llegan a un nudo es igual a la suma de las intensidades que salen de él, o bien, la suma algebraica de las intensidades en un nudo es nula, lo que no es más que la consecuencia de la conservación de la carga y del hecho de que un nudo no es manantial ni sumidero de cargas.

$$\sum I_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad [31.33] \quad \text{Ley de los nudos}$$

Habrà una ecuación de este tipo para cada uno de los nudos de la red. Así, por ejemplo, en el nudo *A* de la red dibujada, tomando como positivo el sentido de llegada al nudo es:

$$I_3 + I_5 = I_1 \quad \text{ó} \quad I_3 + I_5 - I_1 = 0$$

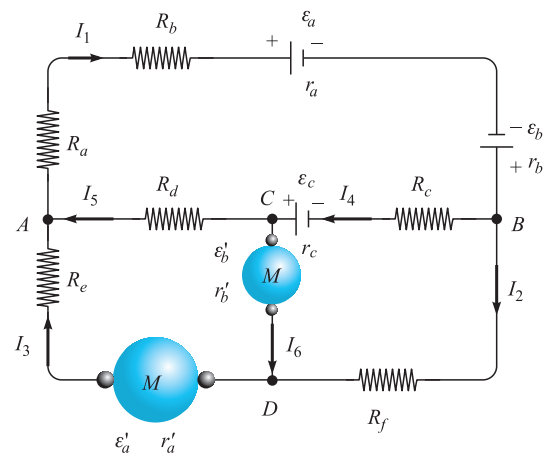


Figura 31.23. Red.

**Ley de las mallas:** en una malla, la suma algebraica de las f.e.m. y las f.c.e.m. es igual a la suma de las caídas de potencial en las resistencias (incluyendo las de generadores y motores).

Ley de las mallas

$$\sum \mathcal{E}_i = \sum R_i I_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad [31.34]$$

Habrá una ecuación de este tipo para cada una de las mallas de la red. Es muy importante en la ecuación de la malla el signo que se da a cada uno de los elementos, por esa razón, damos a continuación el convenio a seguir:

- a) La f.e.m. de un generador será positiva si al recorrer la malla encontramos primero el polo negativo y después el positivo, y negativa en el sentido contrario.
- b) Cualquiera que sea el sentido de la intensidad, la f.c.e.m. de un motor se considerará siempre negativa.
- c) Las caídas óhmicas en las resistencias se consideraran  positivas en el sentido de la corriente y negativas en el contrario.

Así, por ejemplo, en la malla DCBD, suponiendo los sentidos de las intensidades indicado en la Figura 31.23, es:

$$\mathcal{E}_c - \mathcal{E}'_b = (R_c + r_c)I_4 + r'_b I_6 - R_f I_2$$

Número de incógnitas en la red

Veamos en una red cuántas intensidades son independientes entre sí, es decir, cuántas incógnitas tenemos realmente en la red. Por cada tramo de la red circula una corriente  $I_k$ , si hay  $T$  tramos habrá  $T$  corrientes  $I_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, T$ . Pero éstas no son independientes entre sí, ya que por cada nudo hay una restricción, expresada por la correspondiente ley de Kirchhoff. Si en la red hay  $N$  nudos, parece, en principio, que el número de corrientes independientes es  $T - N$ . Ahora bien, las ecuaciones que expresan las leyes de los nudos no son independientes entre sí, hay una que es combinación lineal de las demás y, por tanto, las restricciones independientes entre sí son  $N - 1$ . En consecuencia, el número de corrientes independientes entre sí es:

$$n = T - (N - 1) = T - N + 1 \quad [31.35]$$

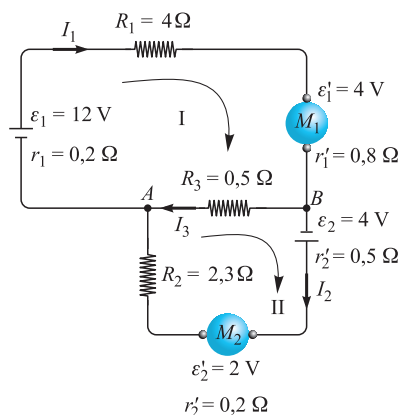


Figura 31.24.

EJEMPLO 31.11

En la red de la Figura 31.24 determinemos:

- 1.  Las intensidades que recorren cada tramo.
- 2.  La tensión entre los puntos A y B.
- 3.  La tensión a la que trabaja el motor  $M_2$ .

Solución:

1.  El número de intensidades independientes es:

$$n = 3 - 2 + 1 = 2$$

Elijamos las mallas I y II para resolver el problema. Tomando el sentido indicado para las intensidades, las ecuaciones de esas mallas son:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}'_1 &= (r_1 + R_1 + r'_1)I_1 + R_3 I_3 & 8 &= 5I_1 + 0,5I_3 \\ \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}'_2 &= (r_2 + R_2 + r'_2)I_2 + R_2 I_2 & 2 &= 3I_2 - 0,5I_3 \end{aligned} \right\}$$

Ecuaciones que, junto con la de los nudos  $I_1 = I_2 + I_3$ , permiten obtener:  
 $I_1 = 29/19$  A,  $I_2 = 15/19$  A e  $I_3 = 14/19$  A.

2.º La caída de potencial de B a A es:

$$V_B - V_A = R_3 I_3 = 7/19 \text{ V}$$

3.º La tensión a la que trabaja el motor  $M_2$  es:

$$V_{M_2} = \mathcal{E}'_2 + r'_2 I_2 = 2 + 0,2 \times 15/19 = 41/19 \text{ V}$$

**EJEMPLO 31.12**

En la red representada en la Figura 31.25 determinemos:

- 1.º La intensidad de la corriente que circula por cada uno de sus tramos.
- 2.º El potencial de los nudos B, C y O, cuando el nudo A se conecta a tierra.

**Solución:**

1.º La red de la Figura 31.25 tiene 6 tramos y 4 nudos, por tanto, su número de incógnitas es:

$$n = 6 - 4 + 1 = 3$$

El número de mallas de la red es de cuatro, debemos elegir tres para resolver el problema, pudiendo utilizar la cuarta para comprobación. Tomemos las mallas ABC, la 1 y la 2. Adoptando las corrientes indicadas en la Figura 31.26, las ecuaciones de las citadas mallas son:

Malla ABC  $0 = -I_1 - 2I_2 + 2I_3$

Malla 1  $0 = I_1 - 4I_2 - I_3$

Malla 2  $6 = I_1 + I_2 + 4I_3$

Sumando las dos primeras es:  $0 = -6I_2 + I_3$

Sumando la 1.ª y la última es:  $6 = -I_2 + 6I_3$

De donde se obtienen los valores:  $I_2 = 6/35$  A e  $I_3 = 36/35$  A.

Con los cuales de la ecuación de la malla 1 se obtiene:  $I_1 = 4I_2 + I_3 = 12/7$  A.

Podemos utilizar la malla 3 para hacer la comprobación.

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3 = (I_1 + I_3)1 + (I_1 - I_2)1 + I_1 1$$

$$6 = 3I_1 - I_2 + I_3 = 36/7 - 6/35 + 36/35 = 42/7 = 6$$

Las intensidades en los otros tres tramos son:

$$\text{Tramo } AO = I_1 + I_3 = \frac{12}{7} + \frac{36}{35} = \frac{96}{35} \text{ A}$$

$$\text{Tramo } OC = I_2 + I_3 = \frac{6}{35} + \frac{36}{35} = \frac{42}{35} \text{ A}$$

$$\text{Tramo } OB = I_1 - I_2 = \frac{12}{7} - \frac{6}{35} = \frac{54}{35} \text{ A}$$

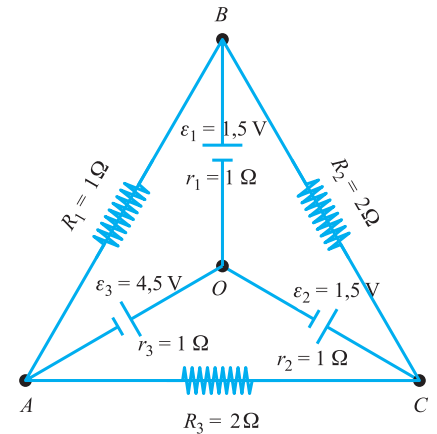


Figura 31.25.

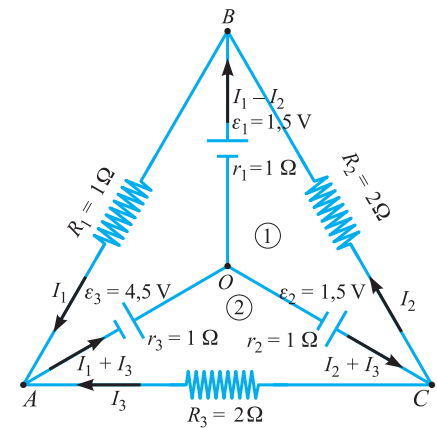


Figura 31.26.

2.º Las diferencias de potencial son:

$$V_A - V_B = -R_1 I_1, \quad V_A - V_C = -R_3 I_3 \quad \text{y} \quad V_C - V_B = R_2 I_2$$

Al conectar el nudo A a tierra es  $V_A = 0$  y los potenciales de B y C se obtienen de las dos primeras:

$$V_B = R_1 I_1 = 12/7 \text{ V y } V_C = R_3 I_3 = 72/35 \text{ V}$$

Podemos comprobar, usando la tercera,

$$V_C - V_B = 12/7 - 72/35 = 12/35 = R_2 I_2 = 2 \times 6/35 = 12/35$$

### 31.16 Método matricial para el cálculo de redes

La aplicación de las leyes de Kirchhoff a la resolución de redes resulta, en general, bastante laboriosa. Por ello, vamos a dar un método de análisis de redes, basado en el cálculo matricial, que permite un fácil planteamiento y resolución automática. Para mayor facilidad lo desarrollaremos sobre la red de la Figura 31.27, debiendo procederse de la siguiente forma:

1.º Se determina el número de incógnitas de la red. En la que nos sirve de ejemplo, que tiene 6 tramos y 4 nudos, el número de incógnitas, dado por la [31.35], es  $n = 6 - 4 + 1 = 3$ .

2.º Se eligen y numeran un número de mallas igual al de incógnitas. Hemos tomado las mallas señaladas con los números 1, 2 y 3.

3.º Se considera que cada malla es recorrida por una intensidad ficticia  $I_i$ , dándole un sentido arbitrario, que debe ser el mismo en todas las mallas, hemos elegido el de las agujas del reloj. Si un tramo pertenece sólo a la malla  $i$ , su intensidad es la  $I_i$ ; así, por ejemplo, en el tramo AB, perteneciente sólo a la malla 1, la intensidad es  $I_1$ . Si un tramo pertenece a dos mallas, su intensidad es la suma algebraica de las mismas: así, por ejemplo, la del tramo BC, en la malla 1, es  $I_1 - I_2$ , sin embargo, en la malla 2, es  $I_2 - I_1$ . De esta forma se obtiene la intensidad real que recorre cada tramo.

4.º Se establece el siguiente convenio de signos:

- a) Las f.e.m. se consideran positivas si al recorrer la malla en el sentido elegido se encuentra primero a su polo negativo y negativas en caso contrario.
- b) Las f.c.e.m. se consideran siempre negativas.
- c) Las caídas de tensión en cada tramo se consideran positivas en el sentido en el cual se recorre la malla.

Apliquemos el método a la red de la Figura 31.27, para lo cual establecemos las siguientes notaciones:

A la suma algebraica de todas las f.e.m. y f.c.e.m. de malla  $i$ , la representaremos por  $\mathcal{E}_i$ . Así, en la malla 1 es  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_b + \mathcal{E}_c - \mathcal{E}_a$ ; en la (2) es  $\mathcal{E}_2 = -\mathcal{E}_c - \mathcal{E}'_b$  y en la (3)  $\mathcal{E}_3 = -\mathcal{E}'_a - \mathcal{E}'_b$ .

La suma de todas las resistencias que sólo pertenecen a la malla  $i$  las llamaremos  $R_i$ , y la suma de las comunes a la malla  $i$  y a la  $j$ ,  $R_{ij}$ . Así, son:

$$R_1 = R_a + R_b + r_a + r_b, \quad R_{12} = r_c + R_c, \quad R_{13} = R_d$$

$$R_2 = R_f, \quad R_{23} = r'_b \quad \text{y} \quad R_3 = R_e + r'_a$$

Siendo, evidentemente,  $R_{ij} = R_{ji}$ .

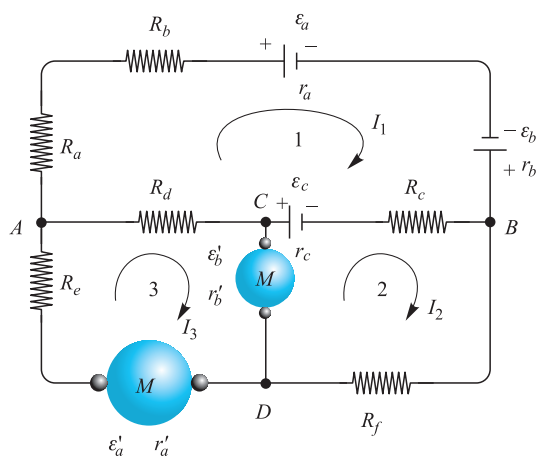


Figura 31.27.



Con todo ello, las ecuaciones de las mallas son:

- La malla 1;  $\mathcal{E}_1 = I_1 R_1 + (I_1 - I_2)R_{12} + (I_1 - I_3)R_{13}$
- La malla 2;  $\mathcal{E}_2 = I_2 R_2 + (I_2 - I_3)R_{23} + (I_2 - I_1)R_{21}$
- La malla 3;  $\mathcal{E}_3 = I_3 R_3 + (I_3 - I_1)R_{31} + (I_3 - I_2)R_{32}$

Sistema que, sacando factor común a las incógnitas, se escribe de la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= R_{11}I_1 - R_{12}I_2 - R_{13}I_3 \\ \mathcal{E}_2 &= -R_{21}I_1 + R_{22}I_2 - R_{23}I_3 \\ \mathcal{E}_3 &= -R_{31}I_1 - R_{32}I_2 + R_{33}I_3 \end{aligned}$$

en las que  $R_{ii}$  es la suma de todas las resistencias que pertenecen a la malla  $i$ .

Matricialmente, el anterior sistema se expresa:

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} - R_{12} - R_{13} \\ -R_{21} + R_{22} - R_{23} \\ -R_{31} - R_{32} + R_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{Bmatrix}$$

Lo que puede generalizarse para  $n$  mallas,

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{E}_n \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & -R_{12} & \cdots & -R_{1i} & \cdots & -R_{1n} \\ -R_{21} & R_{22} & \cdots & -R_{2i} & \cdots & -R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -R_{n1} & -R_{n2} & \cdots & -R_{ni} & \cdots & R_{nn} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{Bmatrix} \quad [31.36]$$

Si al determinante de la matriz de resistencias lo llamamos  $D$  y al adjunto del término  $R_{ij}$ ,  $D_{ij}$ , al aplicar la regla de Cramer para la resolución del sistema, es:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\begin{vmatrix} \mathcal{E}_1 & -R_{12} & \cdots & R_{1n} \\ \mathcal{E}_2 & R_{22} & \cdots & R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{E}_n & R_{n2} & \cdots & R_{nn} \end{vmatrix}}{D} = \mathcal{E}_1 \frac{D_{11}}{D} - \mathcal{E}_2 \frac{D_{21}}{D} + \dots \pm \\ &\pm \mathcal{E}_i \frac{D_{i1}}{D} + \dots \pm \mathcal{E}_n \frac{D_{n1}}{D} = \sum_{i=1}^n \mathcal{E}_i \frac{D_{i1}}{D} \end{aligned}$$

De la misma manera, es:

$$I_2 = \sum_{i=1}^n \mathcal{E}_i \frac{D_{i2}}{D}$$

y, en general,

$$I_j = \sum_{i=1}^n \mathcal{E}_i \frac{D_{ij}}{D}$$

que es la expresión general de las intensidades.

Los valores obtenidos de estas intensidades ficticias  $I_j$ , llevadas a cada uno de los tramos y sumándolas algebraicamente en los tramos comunes a dos mallas, dan los valores de las intensidades reales en cada tramo del circuito.

En cuanto a la interpretación de los resultados, se pueden establecer dos casos, dependiendo de la naturaleza de la red:

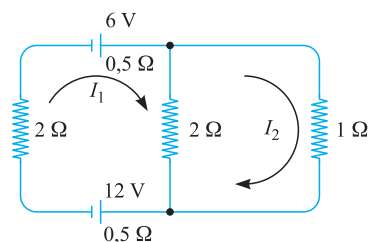


Figura 31.28.

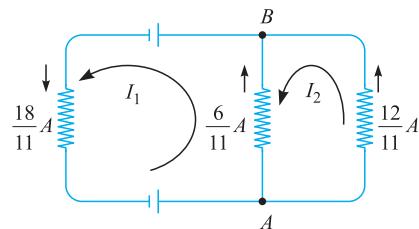


Figura 31.29.

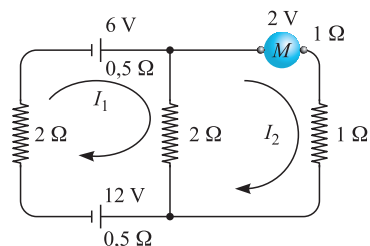


Figura 31.30.

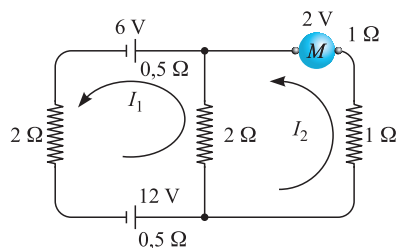


Figura 31.31.

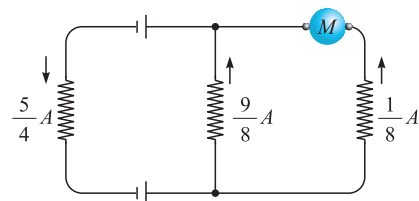


Figura 31.32.

1) Cuando en la red no existen receptores, es decir, que sólo está constituida por generadores y resistencias puras. Si la intensidad obtenida en una malla sale positiva, quiere decir que el sentido real de la misma coincide con el que la habíamos asignado de antemano arbitrariamente. Si, en alguna malla, la intensidad sale negativa, debe ser cambiado el sentido de la corriente, pero no hace falta repetir los cálculos, ya que saldrán los mismos resultados salvo el de la intensidad cambiada.

**EJEMPLO 31.13**

Resolvamos la malla de la Figura 31.28. En ella el número de incógnitas es  $n = 3 - 2 + 1 = 2$ .

$$\begin{Bmatrix} -6 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-18}{11} \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-12}{11}$$

Las corrientes reales son las indicadas en la Figura 31.29.

2) Cuando en la red hay receptores. Si la intensidad obtenida para una malla sale negativa se debe cambiar el sentido en todas las mallas y realizar nuevamente los cálculos.

**EJEMPLO 31.14**

Resolvamos la malla de la Figura 31.30.

$$\begin{Bmatrix} -6 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-28}{16} = \frac{-7}{4} \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-22}{16} = \frac{-11}{8}$$

Cambiamos de sentido la intensidad en las mallas (Figura 31.31).

$$\begin{Bmatrix} 6 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4} \text{ A} \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \text{ A}$$

Las intensidades en cada tramo son las indicadas en la Figura 31.32.

Si después de cambiar de sentido a las mallas y resolver de nuevo el problema siguiese saliendo alguna intensidad negativa, el problema no tiene solución real posible.

**EJEMPLO 31.15**

Resolvamos la malla de la Figura 31.33.

$$\begin{Bmatrix} -6 \\ -6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}}{16} = \frac{-36}{16} = \frac{-9}{4} \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -2 & -6 \end{vmatrix}}{16} = -\frac{21}{8}$$

Cambiamos de sentido a las dos mallas (Figura 31.34).

$$\begin{Bmatrix} 6 \\ -6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}}{16} = \frac{3}{4} \text{ A} \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -6 \end{vmatrix}}{16} = -\frac{9}{8} \text{ A}$$

El problema no es realmente posible. En efecto, una batería de 12 V no puede cargar otra de 6 V, alimentar un motor de f.c.e.m. 6 V y suministrar la energía que se disipa por efecto Joule.

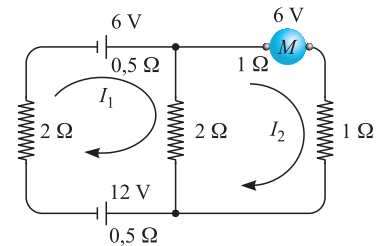


Figura 31.33.

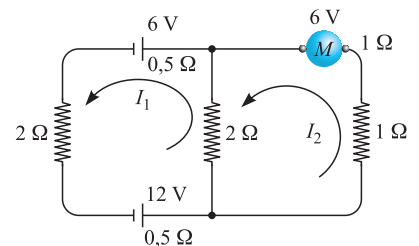


Figura 31.34.

**EJEMPLO 31.16**

Resolvamos el Ejemplo 31.11 aplicando el método matricial (Figura 31.35).

1.º El número de incógnitas de la red es  $n = 3 - 2 + 1 = 2$ . Elegimos dos mallas y un sentido para su recorrido, como se indica en la Figura 31.35. Escribimos la expresión matricial [31.36]:

$$\begin{Bmatrix} 8 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5,5 & -0,5 \\ -0,5 & 3,5 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix}$$

El determinante de las resistencias vale 19 y las intensidades en cada malla se expresan:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -0,5 \\ 2 & 3,5 \end{vmatrix}}{19} = \frac{29}{19} \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5,5 & 8 \\ -0,5 & 2 \end{vmatrix}}{19} = \frac{15}{19}$$

Con ello las corrientes en cada tramo son:  $I_1 = 29/19$ ,  $I_2 = 15/19$  y en el tramo AB  $I_3 = I_1 - I_2 = 14/19$ .

El resto de los apartados se calcula de la misma forma.

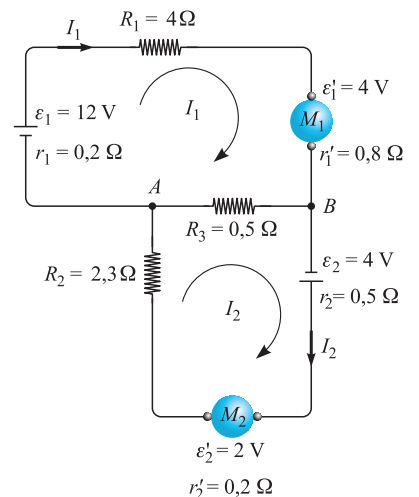


Figura 31.35.

**EJEMPLO 31.17**

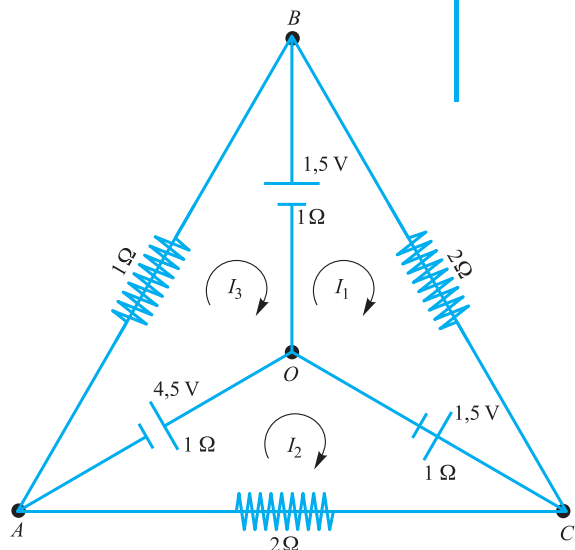


Figura 31.36.

Resolvamos, por el método de las mallas, el mismo ejemplo 31.12. El número de incógnitas es:

$$n = 6 - 4 + 1 = 3$$

Tomemos las tres mallas indicadas en la figura. La expresión [31.36] en este caso se escribe:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

El valor del determinante de la matriz de los coeficientes es:

$$\Delta = 48 - 1 - 1 - 4 - 3 - 4 = 35$$

Los valores de las intensidades son:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 6 & 4 & -1 \\ -6 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{35} = -\frac{6}{35} \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -6 & 3 \end{vmatrix}}{35} = \frac{36}{35}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 6 \\ -1 & -1 & -6 \end{vmatrix}}{35} = -\frac{60}{35}$$

Por tanto, las corrientes en los diferentes tramos son:

$$I_{CB} = -I_1 = \frac{6}{35} \quad I_{CA} = I_2 = \frac{36}{35} \quad I_{BA} = -I_3 = \frac{60}{35}$$

$$I_{AO} = I_2 - I_3 = \frac{36}{35} + \frac{60}{35} = \frac{96}{35} \text{ A} \quad I_{OC} = I_2 - I_1 = \frac{36}{35} + \frac{6}{35} = \frac{42}{35} \text{ A}$$

$$I_{OB} = I_1 - I_3 = -\frac{6}{35} + \frac{60}{35} = \frac{54}{35} \text{ A}$$

**31.17 Corrientes derivadas. Aplicaciones**

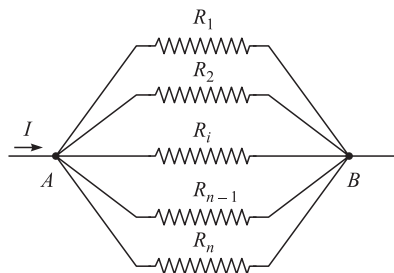


Figura 31.37. Corrientes derivadas.

Si a dos puntos A y B, de potenciales  $V_A$  y  $V_B$ , respectivamente, unimos un cierto número de conductores de extremos A y B, por cada uno de ellos pasará una corriente, que recibe el nombre de corriente derivada (Figura 31.37), quedando los conductores conectados en paralelo entre los puntos A y B.

En estos tramos en derivación pueden intercalarse generadores, resistencias y motores, aunque el caso que vamos a estudiar ahora es el que sólo poseen las resistencias puras.

La expresión [31.16] nos da el valor de la resistencia equivalente a un conjunto de resistencias conectadas en paralelo,

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

La caída de potencial  $V_A - V_B$  es la misma por cada una de las ramas, verificándose:

$$V_A - V_B = I_1 R_1 = I_2 R_2 = \dots = I_i R_i = \dots = I_n R_n$$

En el caso particular de dos ramas (Figura 31.38) es:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{y} \quad V_A - V_B = I_1 R_1 = I_2 R_2 \quad [31.37]$$

Es decir, las intensidades que circulan por las derivaciones son inversamente proporcionales a las resistencias de las mismas.

Las aplicaciones más importantes de esta propiedad son:

### 1. Empleo de un amperímetro como voltímetro

El amperímetro es un aparato que mide la intensidad en un conductor y se monta en serie con el mismo. Supongamos que queremos calcular la diferencia de potencial entre dos puntos  $A$  y  $B$ , entre los cuales hay unos elementos conectados en serie, tales como generadores, resistencias o receptores. Para ello, conectaremos una derivación entre  $AB$  que lleve en serie una alta resistencia  $R$  y el amperímetro  $A$  de que disponemos (Figura 31.39).

De acuerdo con [31.37], si  $R$  es muy grande,  $I_2$  es muy pequeña y prácticamente  $I_1$  es igual a  $I$ , con lo que el conjunto  $S$  no sufre apenas modificación en cuanto a intensidad. Con el amperímetro medimos  $I_2$  y como  $R$  es conocido podemos calcular la diferencia de potencial entre  $A$  y  $B$ .

$$V_A - V_B = I_2 R$$

### 2. Empleo de amperímetros para medir intensidades muy superiores al máximo tolerado por el aparato

Un amperímetro es un aparato que está diseñado para trabajar entre ciertos valores límites de intensidad, mínimo  $I_0$  y máximo  $I_m$ . Se trata de medir la intensidad de una corriente  $I$ , con un amperímetro  $A$  tal que  $I > I_m$ . Para ello, derivamos un tramo entre  $A$  y  $B$ , con una resistencia  $r_s$ , conocida, que se llama *shunt* (Figura 31.40).

Aplicando [31.37], es:

$$I_1 r_a = (I - I_1) r_s$$

o bien,

$$I = I_1 \left( 1 + \frac{r_a}{r_s} \right), \quad \text{a} \quad 1 + \frac{r_a}{r_s} = f_m$$

se le llama factor multiplicador del shunt a la expresión:

$$f_m = 1 + \frac{r_a}{r_s}$$

con lo cual se expresa  $I = f \times I_1$ .

La intensidad a medir  $I$  es igual a la que mide el amperímetro,  $I_1$ , multiplicada por el factor del shunt.

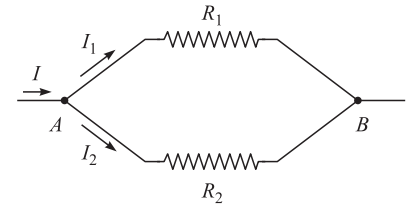


Figura 31.38.

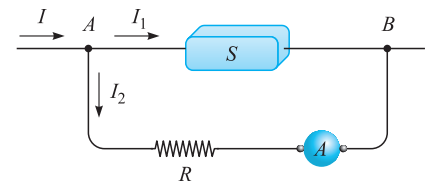


Figura 31.39. Amperímetro como voltímetro.

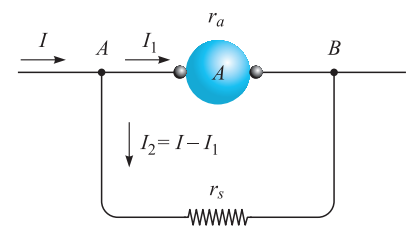


Figura 31.40. Shunt de un amperímetro.

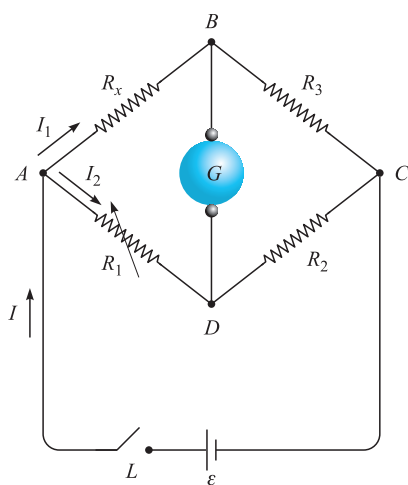


Figura 31.41. Puente de Wheatstone.

### 31.18 Puente de Wheatstone

Al conjunto de cuatro resistencias  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ , dispuestas como se indica en la Figura 31.41, unidos los vértices  $B$  y  $D$  con un amperímetro sensible o un galvanómetro y establecida una tensión entre  $A$  y  $C$ , se le conoce con el nombre de puente de Wheatstone, y se emplea para calcular el valor de una de las resistencias cuando son conocidos los valores de las otras tres. Supongamos desconocida la situada en el tramo  $AB$ ,  $R_x$ , siendo las otras tres conocidas y una de ellas variable, por ejemplo la  $R_1$ .

Si cerramos el interruptor  $L$ , circula la corriente  $I$  que al llegar a  $A$  se bifurca en  $I_1$ , por el tramo  $AB$  e  $I_2$ , por el tramo  $AD$ . Hacemos ahora variar la resistencia  $R_1$  hasta que no pase intensidad a través de  $G$ , diciéndose entonces que el puente está equilibrado y los puntos  $B$  y  $D$  estarán al mismo potencial, por lo que podemos escribir:

$$I_1 R_x = I_2 R_1$$

y también,

$$I_1 R_3 = I_2 R_2$$

con lo cual, al dividir miembro a miembro, resulta:

$$\frac{R_x}{R_1} = \frac{R_3}{R_2}$$

de donde:

$$R_x = R_1 \frac{R_3}{R_2}$$

obteniéndose así el valor de la resistencia incógnita.

### 31.19 Asociación de generadores

El caso general de asociación de generadores de características distintas, en una red de conductores, se calcula con el empleo de las leyes de Kirschhoff, sin embargo, en la práctica, es interesante asociar generadores de las mismas características con el fin de obtener intensidades y tensiones superiores a las que puede dar uno solo.

#### a) Asociación en serie de $n$ generadores iguales.

Al asociar en serie  $n$  generadores de f.e.m.  $\mathcal{E}$  y resistencia interior  $r$ , en un circuito de resistencia  $R$  (Figura 31.42), la ecuación del circuito nos da:

$$n\mathcal{E} = I(nr + R)$$

de donde la intensidad que circula es:

$$I = \frac{n\mathcal{E}}{nr + R} = \frac{\mathcal{E}}{r + \frac{R}{n}}$$

La tensión que suministran al circuito es:

$$V'_{AB} = n\mathcal{E} - nrI = n \left( \mathcal{E} - r \frac{n\mathcal{E}}{R + nr} \right) = \mathcal{E} \frac{nR}{R + nr} = \frac{\mathcal{E}R}{r + \frac{R}{n}}$$

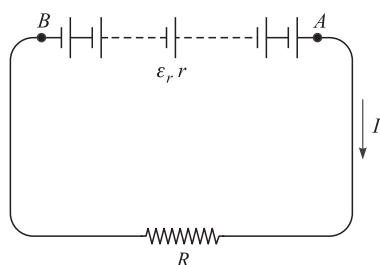


Figura 31.42. Asociación de generadores en serie.

una sola batería daría la tensión:

$$V_{AB} = \mathcal{E} - rI = \mathcal{E} - r \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{\mathcal{E}R}{R + r}$$

b) *Asociación en paralelo de n generadores iguales.*

Si los  $n$  generadores se asocian en paralelo, por cada uno de ellos pasa la intensidad  $I/n$  (Figura 31.43).

La diferencia de potencial entre  $A$  y  $B$  es, de acuerdo con [31.24],

$$V_A - V_B = \mathcal{E} - \frac{I}{n} r = RI$$

de donde la intensidad es:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + \frac{r}{n}}$$

Por tanto, el conjunto es equivalente a un solo generador cuya resistencia interna es  $n$  veces más pequeña que la de cada uno de ellos.

c) *Asociación mixta de generadores.*

Una asociación mixta de generadores iguales es aquella que lleva un conjunto de generadores montados en serie sobre tramos en paralelo o viceversa. El caso más interesante, en la práctica, es aquel en que todos los tramos en paralelo llevan el mismo número de generadores en serie (Figura 31.44). Si las series llevan distinto número de generadores hay que resolverlo aplicando las leyes de Kirchoff.

Consideremos una asociación de  $p$  tramos en paralelo, cada una de ellos con  $g$  generadores en serie. La intensidad que circula por cada rama es  $I/p$ . Una malla formada por una de las ramas y la resistencia  $R$  tiene por ecuación:

$$g\mathcal{E} = gr_0 \frac{I}{p} + RI = \left( \frac{g}{p} r_0 + R \right) I$$

y la intensidad que circula por la resistencia es:

$$I = \frac{g\mathcal{E}}{\frac{g}{p} r_0 + R} = \frac{gp\mathcal{E}}{gr_0 + pR}$$

Si el número total de baterías asociadas es  $n$ , será  $n = g \times p$  y la intensidad puede expresarse:

$$I = \frac{n\mathcal{E}}{gr_0 + \frac{n}{g} R} = \frac{ng\mathcal{E}}{g^2r_0 + nR}$$

La intensidad que suministraría una sola batería a la resistencia  $R$  es

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{r_0 + R} \text{ y la relación entre ambas intensidades:}$$

$$\frac{I}{I_0} = \frac{ng(r_0 + R)}{g^2r_0 + nR}$$

Si es  $p = g$ , será  $n = g^2$  y resulta  $I = I_0g$ .

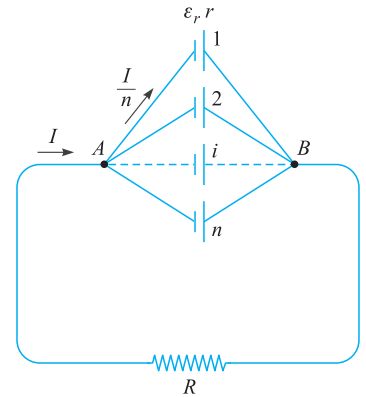


Figura 31.43. Asociación de generadores en paralelo.

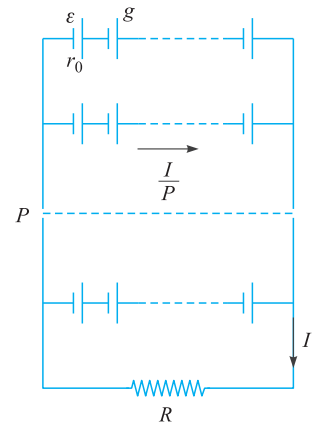


Figura 31.44. Asociación mixta de generadores.

Veamos cuál es la asociación mixta de  $n$  generadores con los cuales conseguimos intensidad máxima. Ella deberá verificar  $dI/dg = 0$ , lo que da:

$$(g^2 r_0 + nR)n\mathcal{E} - ng\mathcal{E}(r_0 \times 2g) = 0$$

$$g^2 r_0 + nR - 2g^2 r_0 = 0 \Rightarrow g = \sqrt{\frac{nR}{r_0}}$$

debiendo tomarse para  $g$  el entero más próximo. El valor máximo de la intensidad es:

$$I_m = \frac{n \sqrt{\frac{nR}{r_0}} \mathcal{E}}{2nR} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{r_0 R}} \mathcal{E}$$

La tensión suministrada a la resistencia por la asociación es:

$$V = g - g r_0(I/p) = -RI$$

La suministrada por una sola de las baterías  $V_0 = RI_0$ . La relación entre tensiones es la misma que entre intensidades. La tensión presentará un máximo para el mismo valor de  $g$ , que lo presenta la intensidad, y el valor del máximo será  $V_m = RI_m$ .

### EJEMPLO 31.18

Un conjunto de  $n$  generadores iguales, de f.e.m. constante  $\mathcal{E}_0$  y resistencia interna  $r_0$ , es tal que la corriente suministrada a una resistencia  $R$  es la misma tanto si los generadores se conectan en serie como en paralelo.

- 1.º Calculemos el valor de  $r_0$ .
- 2.º ¿Cómo deben asociarse estos generadores de manera que, sin que circule corriente entre ellos en ausencia de receptor, suministren la máxima corriente a una resistencia  $R'$ ?
- 3.º ¿Cuánto vale la corriente suministrada?

#### Solución:

- 1.º En el caso de estar todos conectados en serie (Figura 31.45) se debe verificar:

$$n\mathcal{E}_0 = nr_0 I + RI = (nr_0 + R)I$$

Y la intensidad que circula es:

$$I = \frac{n\mathcal{E}_0}{nr_0 + R}$$

Si todos los generadores están conectados en paralelo (Figura 31.46), se verifica:

$$\mathcal{E}_0 = RI + r_0 \frac{I}{n} = \left( R + \frac{r_0}{n} \right) I$$

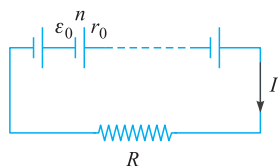


Figura 31.45.

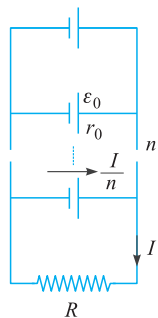


Figura 31.46.



Y la intensidad que circula es:

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R + \frac{r_0}{n}}$$

Igualando ambas,

$$\frac{n\mathcal{E}_0}{nr_0 + R} = \frac{n\mathcal{E}_0}{nR + r_0} \quad nr_0 + R = nR + r_0$$

$$(n - 1)r_0 = (n - 1)R$$

Resulta que deben ser  $r_0 = R$ .

2.º Al hacer una asociación mixta, todas las ramas en paralelo deben llevar el mismo número de generadores, ya que sin carga no debe haber corriente en las ramas. Por tanto, será de la forma indicada en la Figura 31.47, verificándose  $g \times p = n$ .

Por cada rama irá la corriente  $I/p$ . En la malla formada por uno de las ramas y la resistencia  $R'$  se verifica:

$$g\mathcal{E}_0 = R'I + g r_0 \frac{I}{p} = \left( R' + g \frac{r_0}{p} \right) I$$

de donde,

$$I = \frac{g\mathcal{E}_0}{R' + g \frac{r_0}{p}} = \frac{n\mathcal{E}_0}{pR' + g r_0} = \frac{n\mathcal{E}_0}{pR' + \frac{n}{p} r_0} = \frac{np\mathcal{E}_0}{p^2R' + nr_0}$$

El máximo de  $I$  se presentará para valores de  $p$  que deben verificar  $dI/dp = 0$ .

$$n\mathcal{E}_0(p^2R' + nr_0) - np\mathcal{E}_0 2pR' = 0$$

de donde,

$$p = \sqrt{\frac{nr_0}{R'}}$$

en consecuencia, debe ser  $g = \sqrt{\frac{nR'}{r_0}}$ .

3.º Llevando el valor de  $p$  a la expresión de  $I$  obtenemos el valor del máximo:

$$I_m = \frac{n\mathcal{E}_0}{2nr_0} \sqrt{\frac{nr_0}{R'}} = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \sqrt{\frac{n}{r_0 R'}}$$

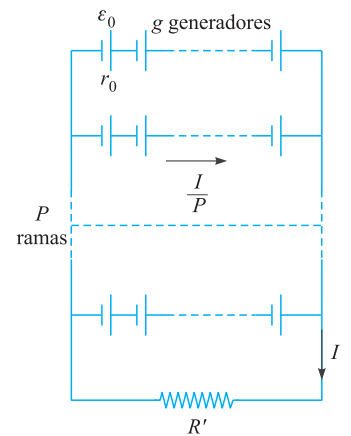


Figura 31.47.

### 31.20 Carga y descarga de un condensador. Circuito R-C

Consideremos un condensador de capacidad  $C$ , completamente descargado, conectado en serie con una resistencia  $R$  y una batería de fuerza electromotriz  $\mathcal{E}$ , como se indica en la Figura 31.48.

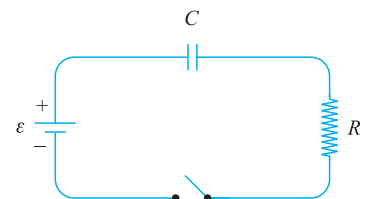


Figura 31.48. Carga de un condensador.

En el instante  $t = 0$  se cierra el interruptor y se establece una corriente de electrones desde una placa del condensador a la batería y de ésta a la otra placa del condensador. De esta forma, el condensador se va cargando y, de acuerdo con el proceso de carga, la variación de ésta con el tiempo es precisamente la corriente a través de batería y resistencia,  $I = dQ/dt$ . Hay que hacer notar que no se ha establecido un circuito completo, ya que la corriente no atraviesa el condensador.

La tensión suministrada por la batería,  $\mathcal{E}$ , es igual a la suma de las tensiones a través de la batería y del condensador,

$$\mathcal{E} = V_R + V_C = RI + \frac{Q}{C}$$

Sustituyendo el valor de  $I$ , es:

$$\mathcal{E} = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

que puede escribirse:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

ecuación diferencial de primer orden y completa, cuya solución general es la suma de la solución general de la homogénea, más una particular de la completa. Como solución particular de la completa tomamos  $Q_1 = \mathcal{E}C$ . La homogénea puede escribirse de la forma:

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC} dt$$

cuya integración da:

$$\ln Q = -\frac{t}{RC} + \ln A \quad \ln \frac{Q}{A} = -\frac{t}{RC} \quad \text{y} \quad Q_2 = Ae^{-t/RC}$$

La solución general es,

$$Q = Q_1 + Q_2 = \mathcal{E}C + Ae^{-t/RC}$$

y, como en el instante  $t = 0$  es  $Q = 0$ , resulta:

$$0 = \mathcal{E}C + A \Rightarrow A = -\mathcal{E}C$$

obteniéndose,

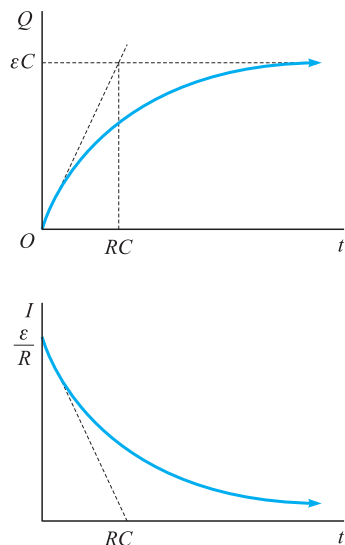
$$Q = \mathcal{E}C(1 - e^{-t/RC}) \tag{31.38}$$

La intensidad de la corriente a través de la batería y la resistencia es:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} \tag{31.39}$$

Al factor  $RC$  se le denomina *constante de tiempo* del circuito y nos mide la velocidad con que se carga el condensador, cuanto menor sea  $RC$  más rápidamente llega el condensador a su carga final  $Q$ .

En la Figura 31.49 se han representado  $Q = Q(t)$  e  $I = I(t)$ .



**Figura 31.49.** Representación de  $Q(t)$  e  $I(t)$ .

Hagamos un balance energético del proceso. A través de la batería ha pasado la carga total  $Q$  y, por tanto, la energía liberada por la batería es:

$$W = \mathcal{E}Q$$

La energía almacenada en el condensador es:

$$W_0 = \frac{1}{2} QV$$

Puesto que la tensión en el condensador es  $V = \mathcal{E} - RI$ ; al acabar el proceso de carga es  $I = 0$  y, por tanto,  $V = \mathcal{E}$ , con lo cual, la energía almacenada en el condensador es:

$$W_c = \frac{1}{2} Q\mathcal{E}$$

es decir, la mitad de la energía liberada por la batería.

La potencia que se disipa en la resistencia es:

$$\frac{dW_R}{dt} = RI^2$$

y la energía total disipada en ella:

$$\begin{aligned} W_R &= R \int_0^\infty I^2 dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/RC} dt = \\ &= -\frac{\mathcal{E}^2}{R} \frac{RC}{2} [e^{-2t/RC}]_0^\infty = -\frac{\mathcal{E}^2 C}{2} (-1) = \frac{\mathcal{E}^2 Q}{2 \mathcal{E}} = \frac{1}{2} Q\mathcal{E} \end{aligned}$$

Por tanto, la otra mitad de la energía liberada por la batería se disipa en la resistencia. Es muy curioso observar que, en este caso, la energía disipada en la resistencia es independiente del valor de ésta.

Analicemos ahora el proceso de descarga de un condensador a través de una resistencia  $R$  (Figura 31.50). Sea  $C$  la capacidad del condensador,  $Q_0$  su carga inicial y  $V_0 = Q_0/C$  su potencial inicial. Si cerramos el interruptor  $A$ , los electrones de la placa negativa pasarán a través de  $R$  e irán a la placa positiva, disminuyendo la carga del condensador y estableciendo una corriente a través de  $R$ , que será igual a la disminución de carga con el tiempo,

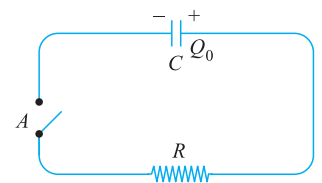
$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

En todo instante se verificará que la tensión entre las armaduras del condensador es igual a la caída óhmica en la resistencia,  $V = RI$ , o bien,

$$\frac{Q}{C} = -R \frac{dQ}{dt}$$

que se escribe:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = 0$$



**Figura 31.50.** Descarga de un condensador.

ecuación diferencial homogénea de primer orden cuya solución acabamos de obtener:

$$Q = Ae^{-t/RC}$$

y, puesto que para  $t = 0$  es  $Q = Q_0$ , resulta:

$$Q = Q_0 e^{-t/RC} \quad [31.40]$$

La corriente a través de la resistencia es:

$$I = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC} = -I_0 e^{-t/RC} \quad [31.41]$$

La constante de tiempo nos indica la velocidad con que disminuye la carga en el condensador, o con la que disminuye la intensidad de la corriente a través de  $R$ . En ambos casos, la constante de tiempo es el *tiempo de relajación*, es decir, el tiempo necesario para que la carga (intensidad) se reduzca a  $1/e$  de su valor inicial.

Evidentemente, la energía almacenada en el condensador debe disiparse totalmente a través de la resistencia  $R$ . En efecto: la energía almacenada inicialmente es:

$$W_c = \frac{1}{2} Q_0 V_0$$

La potencia disipada en la resistencia es:

$$\frac{dW_R}{dt} = RI^2$$

y la energía disipada,

$$\begin{aligned} W_R &= R \int_0^{\infty} I^2 dt = R \int_0^{\infty} \frac{Q_0^2}{R^2 C^2} e^{-2t/RC} dt = \\ &= \frac{Q_0^2}{RC^2} \left[ -\frac{RC}{2} e^{-2t/RC} \right]_0^{\infty} = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{1}{2} Q_0 V_0 \end{aligned}$$

### 32.1 Magnetismo. Campo magnético

Ya en la antigua Grecia conocían la propiedad de ciertos minerales, como la magnetita, de atraer limaduras de hierro. A los cuerpos que poseen esta propiedad se les denomina *imanes*, pudiendo ser naturales, como la citada magnetita, artificiales o producidos por magnetización de ciertos metales, como el hierro, cobalto, manganeso y níquel. Según la leyenda, la palabra magnetismo proviene del nombre de un pastor griego, *Μαγνησ*, el cual quedó sorprendido ante la atracción de la punta metálica de su bastón por una piedra imán.

El uso de la aguja magnética para orientarse parece ser que ya fue descrito por el matemático chino Sken Kua (1030-1090) y hacia el año 1100, según cita Chu Yu, ya se usaba para la navegación.

Petrus Peregrinus de Maricourt, colocando una aguja imantada en diferentes puntos de la superficie de un imán natural esférico, fue marcando sobre el imán las direcciones en que quedaba orientada la aguja y encontró que todas ellas pasaban por dos puntos opuestos formando una especie de meridianos análogos a los terrestres, por esta analogía a esos dos puntos se les denominó *polos del imán*, lo que publicó en su *Epístola de Magnete*, en 1269. Todo imán, sea cual fuere su forma, presenta siempre dos puntos opuestos, en los cuales su acción magnética presenta mayor intensidad, que son los denominados *polos del imán*.

Sir William Gilbert (1544-1603), en el año 1600, publicó *De magnete magnetisque corporibus et de magno magnete tellure* (sobre el magnetismo, los cuerpos magnéticos y el gran imán terrestre), donde analiza la existencia de polos en los imanes y describe las propiedades cualitativas de las interacciones magnéticas: *polos iguales se repelen y polos distintos se atraen*, demostrando que la Tierra se comportaba como un gran imán, lo que se comprueba con solo suspender una varilla magnetizada de forma que pueda girar libremente. La varilla se orienta siempre de la misma forma y su dirección sigue aproximadamente el meridiano geográfico, ello indica que la Tierra ejerce una acción magnética sobre la varilla, ya que esa acción no aparece sobre varillas no magnetizadas. Al polo de la

- 32.1. Magnetismo. Campo magnético
- 32.2. Fuerzas de un campo magnético sobre una carga móvil
- 32.3. Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético
- 32.4. El ciclotrón
- 32.5. Espectrógrafo de masas
- 32.6. Experiencia de Thomson. Medida de  $e/m$
- 32.7. Efecto Hall
- 32.8. Fuerza de un campo magnético sobre una corriente eléctrica
- 32.9. Acción de un campo magnético sobre circuito plano. Momento magnético
- 32.10. Polos magnéticos
- 32.11. Campo magnético producido por una corriente eléctrica
- 32.12. Campo magnético creado por una corriente rectilínea
- 32.13. Acciones entre corrientes rectilíneas paralelas. Definición de amperio
- 32.14. Campo magnético creado por una corriente circular. Dipolo magnético
- 32.15. Circulación del campo magnético B. Ley de Ampère

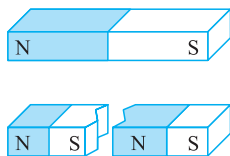


Figura 32.1.

varilla que apunta al norte se le denomina polo norte y al que apunta al sur, polo sur. Por ello, el polo magnético de la Tierra próximo al polo norte geográfico es un polo sur magnético y el polo magnético próximo al polo sur geográfico es un polo norte magnético.

En 1750, John Michell (1724-1793), publicó *A treatise of artificial magnets*, en el que establece la idea de que los polos magnéticos, al igual que las cargas eléctricas, también se atraen o repelen con fuerzas proporcionales a la inversa del cuadrado de la distancia que les separa, lo que parece ser comprobó utilizando la balanza de torsión por él diseñada. Esto fue confirmado en 1777 por Coulomb (1736-1806), lo que hizo que empezara a desarrollarse la magnetostática de forma análoga a la electrostática. Sin embargo, hay una diferencia fundamental, el polo magnético no tiene existencia real independiente, es decir, todo cuerpo magnetizado presenta los dos polos, norte y sur, opuestos pero de igual intensidad. Así, si fraccionamos un imán se crean dos imanes, ya que en las superficies de rotura aparecen sendos polos opuestos (Figura 32.1).

Análogamente a como se definió para el campo eléctrico, se dice que en una región del espacio hay un campo magnético cuando en ella se manifiestan acciones magnéticas sobre los imanes colocados en la misma.

En 1819, Christian Oersted (1777-1793) comprobó cómo una varilla imantada, que podía girar libremente, se desviaba al pasar la corriente eléctrica por un conductor próximo, lo que indicaba que las corrientes eléctricas generaban campos magnéticos. Inmediatamente Biot (1774-1862) y Savart (1791-1841), se dedicaron a estudiar este fenómeno y recopilaron una enorme cantidad de datos, pero parece ser que fue Laplace el que dedujo la ley que hoy se conoce con el nombre de Biot y Savart.

El 18 de septiembre de 1820 Ampère presentó su trabajo *Electrodinámica*, en el que establece que las corrientes eléctricas interactúan, atrayéndose o repeliéndose los respectivos conductores. Asimismo, comprobó que una espira conductora, que puede girar libremente alrededor de un eje vertical, al ser recorrida por una corriente eléctrica se orienta en la dirección norte-sur. Por todo ello, Ampère propuso la teoría de que las corrientes eléctricas son la causa de todos los fenómenos magnéticos e imaginó corrientes eléctricas moleculares para explicar el magnetismo de la materia. Si un cuerpo no está magnetizado, las distintas corrientes moleculares están orientadas al azar en todas las direcciones, neutralizándose sus efectos, pero en los magnetizados, los imanes moleculares están orientados en una determinada dirección, sumándose sus efectos, todo lo cual fue publicado en 1826, en su *Teoría de los fenómenos electrodinámicos*.

Parece ser que fue Henry (1797-1878) el primero en descubrir el efecto de inducción, según el cual, la variación del flujo del campo magnético a través de una espira conductora producía en ella una corriente eléctrica; lo que también fue descubierto de forma independiente por Faraday (1791-1867), el cual se adelantó en la publicación, que presentó en la Royal Society en septiembre de 1831. Faraday investigó las relaciones entre la electricidad, el magnetismo y la óptica, lo que publicó en su *Experimental Researches in electricity*, pero hay que llegar a Maxwell (1831-1879) para encontrar el desarrollo en sucesivas memorias de la teoría unificada del electromagnetismo, que quedó plasmada, en 1873, en *Treatise on electricity and magnetism*, en el cual establece de forma teórica la existencia de las ondas electromagnéticas, las cuales fueron producidas y detectadas en el laboratorio por Hertz (1857-1894).

El electromagnetismo presenta dos aspectos bien distintos: uno es, conocida la carga eléctrica y su movimiento, hallar el campo magnético que crea, y otro es, conocido el campo en una región del espacio, hallar la fuerza que éste ejerce sobre una carga móvil dentro de él.

## 32.2 Fuerzas de un campo magnético sobre una carga móvil

La existencia de campo magnético en un punto del espacio se comprueba colocando en él una aguja magnética, ésta se orientará en la dirección del campo. Si en un punto del espacio, en ausencia de campo eléctrico, existen acciones sobre cargas eléctricas móviles, también es señal inequívoca de la existencia de un campo magnético en ese punto. Las fuerzas que aparecen sobre las partículas cargadas móviles dentro de un campo magnético son proporcionales a la carga,  $q$ , y a la velocidad,  $\mathbf{v}$ , siendo perpendiculares a esta. Las experiencias llevan a la conclusión de que esas fuerzas se expresan de la forma:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad [32.1] \quad \text{Inducción magnética}$$

en la que  $\mathbf{B}$  representa una propiedad intrínseca del campo, que se denomina inducción magnética o simplemente campo magnético  $\mathbf{B}$ .

La dirección de la fuerza es perpendicular a la dirección del campo  $\mathbf{B}$  y a la velocidad  $\mathbf{v}$ , siendo el triedro  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{F}$ , a derechas si  $q$  es positiva y a izquierdas si  $q$  es negativa (Figura 32.2).

El módulo de la fuerza es  $F = qvB \sin \alpha$ , siendo, por tanto, nula cuando la partícula cargada se mueve en la dirección del campo magnético  $\mathbf{B}$  y máxima cuando lo hace en sentido normal a aquél.

De la última relación podemos deducir la ecuación de dimensiones de  $B$ :

$$[B] = [F]Q^{-1}[v]^{-1} = \text{MT}^{-2}\text{I}^{-2}$$

La unidad en el sistema internacional se denomina Tesla ( $T$ ) y sus unidades son:

$$T = \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} = \text{N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

El Tesla puede definirse como el valor del campo magnético  $B$  que produce la fuerza de un newton sobre una carga de un culombio que se mueve normalmente al campo con la velocidad de un metro por segundo.

En el sistema C.G.S., la unidad de inducción magnética es el Gauss y será el valor del campo magnético  $\mathbf{B}$  que ejerce la fuerza de una dina sobre la uem de carga, que se mueve dentro de él en dirección normal y con la velocidad de un centímetro por segundo. La equivalencia con el Tesla es:

$$1 \text{ Tesla} = 10^4 \text{ Gauss}$$

Si la partícula se mueve en una región del espacio en la que además del campo magnético  $\mathbf{B}$  existe también un campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , la fuerza sobre la partícula móvil de carga  $q$  y velocidad  $\mathbf{v}$ , es:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad [32.2] \quad \text{Fuerza de Lorentz}$$

expresión que se denomina *fuerza de Lorentz*.

## 32.3 Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético

Consideremos un campo magnético uniforme de inducción  $\mathbf{B}$ , en cuya dirección y sentido tomamos el eje de referencia  $OY$ . Si en este campo penetra una partícula de carga  $q$ , con una velocidad  $\mathbf{v}_0$ , normal a  $\mathbf{B}$ , la fuerza que sobre ella se ejerce está

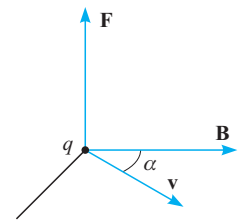


Figura 32.2.

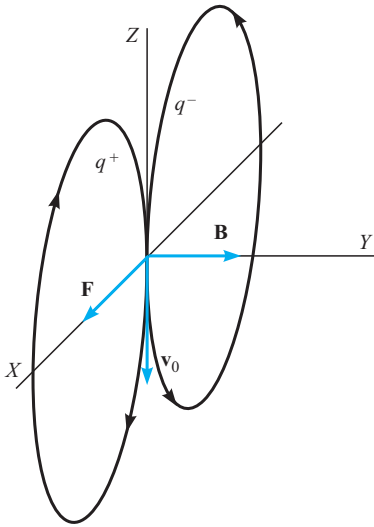


Figura 32.3.

dada por la [32.1], que tomando el eje  $OZ$  en la dirección de  $\mathbf{v}_0$  y sentido contrario (Figura 32.3), se escribe:

$$\mathbf{F} = q(-v_0\mathbf{k} \times B\mathbf{j}) = qv_0B\mathbf{i} \quad [32.3]$$

Puesto que la fuerza es normal a la velocidad, también será la aceleración normal a la velocidad y no habrá aceleración tangencial, con lo cual el módulo de la velocidad se mantiene constante,  $v = v_0$ . Únicamente habrá aceleración normal, cuyo valor es:

$$a_n = \frac{F}{m} = \frac{qv_0B}{m} \quad [32.4]$$

Por tanto, la aceleración normal es constante y, en consecuencia, debe serlo su radio de curvatura y la trayectoria será circular, siendo el valor del radio:

$$\frac{v_0^2}{\rho} = \frac{qv_0B}{m} \quad \rho = \frac{mv_0}{qB} = \text{cte} \quad [32.5]$$

La velocidad angular de este movimiento circular o frecuencia angular del movimiento,  $\omega$ , es:

$$\omega = \frac{v_0}{\rho} = \frac{q}{m} B \quad [32.6]$$

El periodo de rotación es  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$  y la frecuencia de rotación:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m} \quad [32.7]$$

que se denomina *frecuencia de ciclotrón*. Tanto esta como el periodo dependen de la relación  $q/m$ , pero no de la velocidad, ni del radio de la trayectoria.

Si la carga  $q$  es positiva, la fuerza  $\mathbf{F}$  tiene el sentido positivo del eje  $OX$  y la trayectoria es una circunferencia de radio  $\rho$ , centro  $(\rho, 0, 0)$ , que está en el plano  $y = 0$ , la cual es recorrida por la partícula en el sentido indicado en la Figura 32.3. Si la carga  $q$  es negativa, la fuerza  $\mathbf{F}$  tiene el sentido negativo del eje  $OX$ , y la trayectoria es la circunferencia de radio  $\rho$ , centro  $(-\rho, 0, 0)$ , que está en el plano  $y = 0$ , la cual es recorrida en el sentido indicado en la Figura 32.3. Por tanto, si se conocen el sentido del campo y el del movimiento de la partícula cargada, puede deducirse del sentido de la curvatura de la trayectoria de ésta, si su carga es positiva o negativa.

La aplicación de todo esto a trayectorias de partículas, obtenidas por fotografía en una cámara de niebla, condujo a Anderson (1905-1991) a descubrir, en 1932, como componente de los rayos cósmicos, al *positrón* o electrón positivo  $e^+$ , cuya existencia había sido predicha teóricamente por Dirac (1902-1984).

Si la velocidad inicial de la partícula no es normal al campo  $\mathbf{B}$ , podemos descomponerla en dos, una en la dirección del campo  $\mathbf{v}_{0B}$  y otra según la normal  $\mathbf{v}_{0n}$ . La fuerza que el campo ejerce sobre la partícula, de acuerdo con [32.1], siempre es normal a  $\mathbf{B}$  y, en consecuencia, la aceleración en la dirección de  $\mathbf{B}$  es nula. La proyección del movimiento en la dirección de  $\mathbf{B}$  es un movimiento uniforme de velocidad  $\mathbf{v}_{0B}$ . La proyección del movimiento sobre un plano normal a  $\mathbf{B}$  es un movimiento circular uniforme. La composición de ambos movimientos da como



trayectoria una hélice cilíndrica de eje en la dirección del campo (Figura 32.4), de radio  $r = mv_{0n}/qB$  y paso:

$$p = \frac{2\pi}{\omega} v_{0B} = \frac{2\pi m}{qB} v_{0B}$$

Si el campo magnético no es uniforme, el estudio del movimiento de partículas cargadas inmersas en él puede resultar muy complicado. Consideremos, como ejemplo interesante, el campo magnético representado en la Figura 32.5 por sus líneas y cuya intensidad es mayor en los extremos que en el centro. A este campo se le denomina *botella magnética*, ya que una partícula cargada puede quedar atrapada dentro de él, describiendo una especie de hélice de paso y radio variables de un extremo a otro. Analicemos esto de forma cualitativa.

Consideremos en el punto 1 (Figura 32.5) una partícula positiva de carga  $q$ , que se mueve normal al eje  $EE'$  del campo. Si  $\mathbf{B}_1$  fuese paralelo a  $EE'$ , la partícula quedaría moviéndose en la circunferencia que se indica en la Figura 32.5, pero por tener  $\mathbf{B}_1$  una componente normal al eje  $EE'$ , la fuerza  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1$  tiene una componente en dirección del eje y la partícula se mueve hacia la zona central del campo, aumentando el radio de su trayectoria al disminuir  $B$ . En el punto 2, el campo  $\mathbf{B}_2$  es paralelo al eje y no ejercerá fuerza en la dirección de éste, no obstante debido a la inercia, la partícula se sigue moviendo hacia la derecha. Entre 2 y 4 el campo magnético aumenta y además la fuerza que ejerce sobre la partícula se opone al movimiento de ésta hacia la derecha, disminuyendo su velocidad hasta anularse en 4. A partir de ese momento y por los mismos motivos, la partícula comienza a moverse hacia la izquierda, repitiéndose el proceso en sentido inverso. La partícula queda atrapada por el campo magnético, oscilando entre las secciones 1 y 4, describiendo una especie de hélice de paso y radio variables.

Este efecto de botella magnética es el ejercido por el campo magnético terrestre sobre los protones y electrones que tiene atrapados como se esquematiza en la Figura 32.6, constituyendo los cinturones de Van Allen.

El interno, más pequeño, es el de protones, cuya distancia al centro de la Tierra es aproximadamente de  $1,6 R$  y el externo, el de electrones, dista unos  $5 R$  del centro de la Tierra. Tanto unos como otros oscilan entre los polos norte y sur, confinados entre ciertas líneas del campo y describiendo trayectorias como las indicadas en la Figura 32.6.

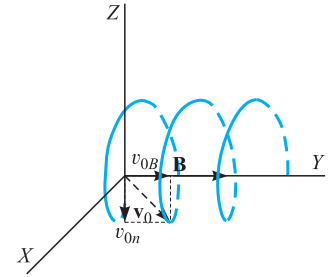


Figura 32.4.

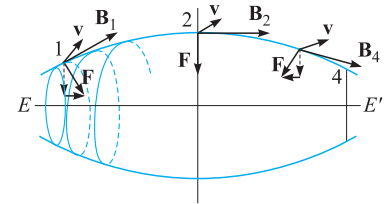


Figura 32.5. Botella magnética.

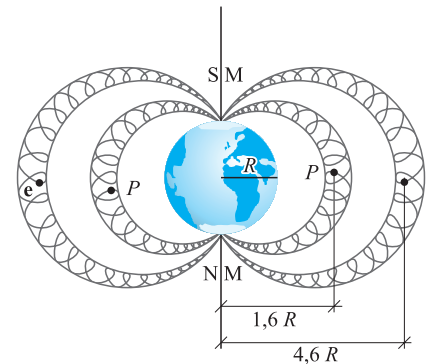


Figura 32.6. Cinturones de Van Allen.

## 32.4 El ciclotrón

El ciclotrón es un dispositivo ideado por Lawrence y Livingstone, en Berkeley (California), en 1932, para acelerar partículas cargadas. Está compuesto por dos semicilindros metálicos dispuestos como se indica en la Figura 32.7, a los cuales se les aplica una tensión alterna del orden de  $10^5$  V, que produce en la zona intermedia un campo eléctrico alterno, el cual será nulo en el interior de cada semicilindro. Cada semicilindro se denomina «de», van situados sobre un electroimán que produce un campo magnético uniforme, perpendicular a las bases y todo ello dentro de un recinto en el cual se ha hecho el vacío. Si una fuente,  $F$ , de partículas cargadas se sitúa próxima al centro, veamos qué energía es capaz de suministrarles el ciclotrón.

Una partícula de carga positiva que salga de la fuente será atraída por la «de» que en ese momento sea negativa y al penetrar en el interior de ella, el campo magnético la obliga a realizar una trayectoria semicircular hasta salir por A. En este instante cambia la polaridad de las «des», siendo atraída por la que ahora es ne-

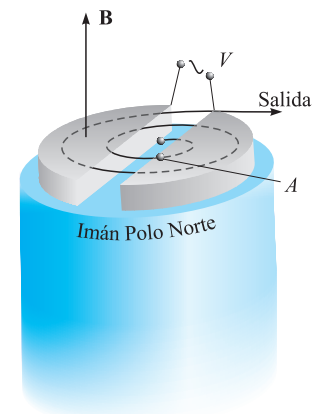


Figura 32.7. Ciclotrón.

gativa, pasando al interior de ella donde describe otra semicircunferencia y así sucesivamente, la partícula describe una trayectoria como la indicada en la Figura 32.7. En la zona de salida, el campo magnético se interrumpe bruscamente y la partícula sale según la tangente a la semicircunferencia que describe en ese instante.

La velocidad de la partícula en la vuelta  $i$  es, de acuerdo con la [32.5]:

$$v = \frac{q}{m} r_i B$$

y la velocidad angular:

$$\omega = \frac{v}{r_i} = \frac{q}{m} B$$

resulta ser constante, con lo cual, el tiempo que tarda la partícula en describir una semicircunferencia cualquiera es el mismo. A intervalos de tiempo iguales, debe cambiar la polaridad de las «des». De esta forma, cada vez que la partícula llega al espacio entre las cámaras es atraída por la  $D$  que tiene enfrente, sufriendo en este espacio una aceleración y su energía aumentará en  $qV$ .

La energía cinética de las partículas que salen del acelerador es:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mR^2 \left( \frac{q}{m} \right)^2 B^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{m} R^2 B^2 \quad [32.8]$$

La cual depende de las características de la partícula, del radio del ciclotrón y de la intensidad del campo magnético aplicado.

En general, el ciclotrón es usado para acelerar protones o electrones hasta conseguir una elevada energía cinética, utilizándose luego para bombardear núcleos, provocando reacciones nucleares, para obtener información de los núcleos y materiales radiactivos artificiales.

### EJEMPLO 32.1 Acelerando un protón

Calculemos la energía de un protón acelerado en un ciclotrón de radio 2 m, que emplea un campo de inducción  $B = 0,5$  T.

#### Solución:

La aplicación de la expresión [32.8], tomando para la masa del protón el valor  $m_p = 1,6726 \times 10^{-27}$  kg y para su carga  $q = 1,6022 \times 10^{-19}$  C, nos da:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \frac{1,6022^2 \times 10^{-38}}{1,6726 \times 10^{-27}} \times 2^2 \times 0,5^2 = 7,674 \times 10^{-12} \text{ J} = \\ &= 4,79 \times 10^7 \text{ eV} = 47,9 \text{ MeV} \end{aligned}$$

## 32.5 Espectrógrafo de masas

El espectrógrafo de masas es un instrumento ideado para determinar la relación entre la carga y la masa en las partículas, lo que permite determinar la existencia de isótopos y su abundancia relativa en la naturaleza. El primer diseño se debe a

Aston, en 1919, pero el más usual es el de Bainbridge, cuyo esquema se representa en la Figura 32.8.

Las partículas producidas en la fuente  $F$ , pasan a través de la rendija  $D_1$  y son aceleradas por el campo existente entre las rendijas  $D_1$  y  $D_2$ , que están a una diferencia de potencial de algunos miles de voltios. Entre la rendija  $D_2$  y la  $D_3$  se dispone un selector de velocidades, de forma que por  $D_3$  únicamente pasan las partículas con una velocidad concreta. Ello se consigue disponiendo un campo eléctrico,  $\mathbf{E}$ , normal a la trayectoria de las partículas y un campo magnético,  $\mathbf{B}_1$ , normal al eléctrico y también a la trayectoria, el cual en la Figura 32.8 se ha representado dirigido hacia el lector. Por  $D_3$  solamente pasarán aquellas partículas en las que se neutralice la fuerza del campo eléctrico y la del magnético y, en consecuencia, no sean desviadas, es decir, aquellas de velocidad  $\mathbf{v}$  tal, que verifique:

$$qE = qvB_1 \Rightarrow v = \frac{E}{B_1} \quad [32.9]$$

Las partículas que salen por  $D_3$  son sometidas a un campo magnético  $\mathbf{B}$  normal a su velocidad de salida, el cual, en la Figura 32.8, se ha representado dirigido hacia el lector. Las partículas describirán una trayectoria circular, cuyo radio, de acuerdo con la [32.5], es:

$$R = \frac{mv}{qB}$$

y, teniendo en cuenta la [32.9], se escribe:

$$R = \frac{mE}{qBB_1} \quad [32.10]$$

Al finalizar su trayectoria, las partículas inciden sobre una placa fotográfica impresionándola. La distancia del punto de impresión a la rendija  $D_3$  es  $2R$  y de la [32.10] se deduce el valor de:

$$\frac{q}{m} = \frac{E}{RBB_1} = \frac{2E}{dBB_1} \quad [32.11]$$

Para partículas de igual carga y distinta masa, el radio de la trayectoria [32.10] será proporcional a la masa y, en consecuencia, el dispositivo dispersa el haz de partículas que sale por  $D_3$  en su espectro de masas, de aquí que sea denominado espectrógrafo de masas.

### EJEMPLO 32.2 Isótopos del potasio

El filtro de velocidades de un espectrógrafo de masas está formado por un campo eléctrico  $\mathbf{E} = 3 \cdot 10^5 \mathbf{i}$  V/m, y un campo magnético  $\mathbf{B}_1 = -0,5 \mathbf{k}$  T, como se indica en la Figura 32.9. En el filtro se introducen iones potasio ( $Z = 19$ ), que al salir del filtro pasan a una cámara donde existe un campo magnético  $\mathbf{B}_2 = 0,4 \mathbf{k}$  T. En la placa han aparecido dos manchas, cuyas posiciones son  $x_1 = 64,2$  mm y  $x_2 = 67,48$  mm. Despreciando la masa del electrón y tomando  $m_n = m_p = 1,67 \times 10^{-27}$  kg y  $e = 1,602 \times 10^{-19}$  C, calculemos:

- 1.º La velocidad con la cual entran los iones en la cámara del espectrógrafo.
- 2.º La masa de cada uno de los isótopos y el número de neutrones que contiene.

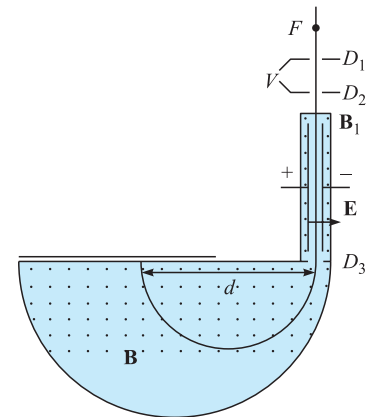


Figura 32.8. Espectrógrafo de masas.

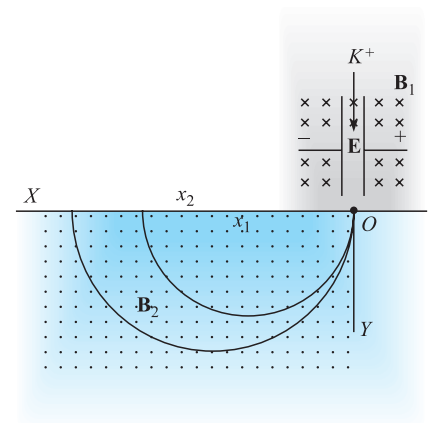


Figura 32.9.

**Solución:**

1.º Para que las partículas atraviesen el filtro es necesario que la resultante de las fuerzas que actúan sobre ellos sea nula,  $\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = 0$

$$q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1 = 0, \quad E\mathbf{i} - vB_1\mathbf{i} = 0$$

de donde,

$$v = \frac{E}{B_1} = \frac{3 \times 10^5}{0,5} = 6 \times 10^5 \text{ m/s}$$

2.º Dentro de la cámara, los iones potasio describen trayectorias circulares que verifican:

$$\frac{mv^2}{R} = q|\mathbf{v} \times \mathbf{B}_2| = qvB_2$$

de donde,

$$m = \frac{qB_2R}{v}$$

La masa del isótopo que ha creado la mancha a  $x_1 = 2R_1 = 64,2 \text{ mm}$ , es:

$$m_1 = \frac{19 \times 1,602 \times 10^{-19} \times 0,4 \times 32,05 \times 10^{-3}}{6 \times 10^5} = 65,036 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

La masa del segundo isótopo es:

$$m_2 = \frac{19 \times 1,602 \times 10^{-19} \times 0,4 \times 33,74 \times 10^{-3}}{6 \times 10^5} = 68,465 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

El número másico de cada uno de los isótopos es:

$$A_1 = Z + N_1 = \frac{65,036 \times 10^{-27}}{1,67 \times 10^{-27}} = 38,944$$

y

$$A_2 = Z + N_2 = \frac{68,465 \times 10^{-27}}{1,67 \times 10^{-27}} = 40,997$$

Por tanto, el número de neutrones en cada isótopo es:

$$N_1 = 20 \quad \text{y} \quad N_2 = 22$$

**32.6 Experiencia de Thomson. Medida de e/m**

En 1897, J. J. Thomson (1856-1940) midió la relación de la carga a la masa en los rayos catódicos, descubriendo con sus experiencias la identidad del electrón como partícula. Utilizó para ello el dispositivo indicado en la Figura 32.10: en una ampolla de vidrio, en cuyo interior se ha practicado un alto vacío, los electrodos A, anticátodo, y C, cátodo, están sometidos a una diferencia de potencial elevada, creándose entre ellos un campo eléctrico intenso que lanza a las partículas de carga

positiva del gas que rellena la ampolla sobre el cátodo, haciendo que éste emita los denominados *rayos catódicos*. Estos rayos son colimados por el diafragma  $D$  y, si en su marcha no existe campo eléctrico o magnético alguno, inciden en la pantalla en el punto central  $F$ , lo que se observa por la fluorescencia que produce. Si mediante las placas  $P$  y  $P'$  de un condensador, creamos un campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , el haz incide en el punto  $F'$ , lo que demuestra que son partículas de carga negativa las que forman los rayos catódicos, partículas a las que se denominó *electrones*. Estas partículas se obtenían cualquiera que fuera el material del cátodo, lo que significaba que el electrón era un constituyente fundamental de la materia.

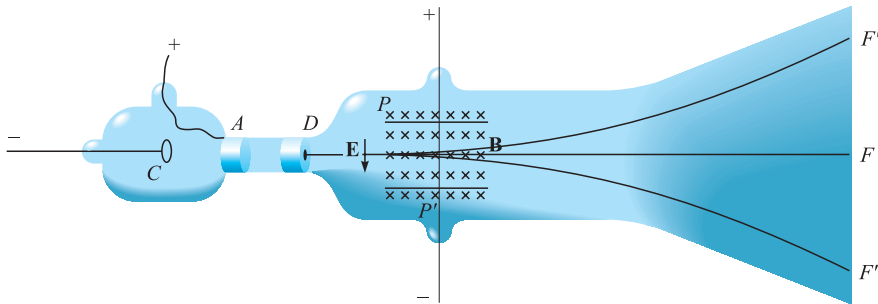


Figura 32.10. Tubo de rayos catódicos.

Si suprimimos el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y hacemos actuar un campo magnético de intensidad  $\mathbf{B}$  normal al haz inicial, el haz se desvía incidiendo en la pantalla en el punto  $F''$ . Actuando simultáneamente los dos campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , podemos regular sus intensidades adecuadamente y conseguir que el haz de electrones no se desvíe e incida en  $F$ . Ello querrá decir que la fuerza ejercida por el campo eléctrico es igual a la ejercida por el magnético.

$$evB = eE \Rightarrow v = \frac{E}{B} \quad [32.12]$$

Si en un instante, en el cual se está cumpliendo esta última relación, se suprime el campo magnético, los electrones describirán una parábola dentro del condensador y a su salida seguirán en línea recta hasta impactar con la pantalla (Figura 32.11), todo lo cual fue estudiado en el Epígrafe 29.13.

Utilizando la expresión [29.37] podemos despejar el cociente  $q/m$ ,

$$r = \frac{mv}{eB}$$

y, utilizando el valor de  $v$  dado por la [32.12], es:

$$\frac{e}{m} = \frac{h}{lD} \frac{E}{B^2} \quad [32.13]$$

Expresión que permite calcular la relación  $e/m$  al ser conocidos todos los valores que intervienen en ella. El valor más preciso de los obtenidos para la relación  $e/m$  en el electrón es:

$$e/m = 1,758820 \times 10^{11} \text{ C/kg}$$

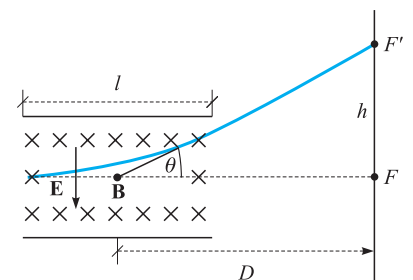


Figura 32.11.

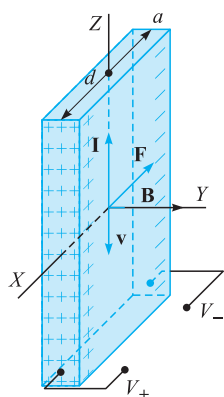


Figura 32.12. Efecto Hall.

## 32.7 Efecto Hall

Consideremos un conductor laminar metálico recorrido por una corriente de intensidad  $I$ . Siendo los portadores electrones, es  $q = -e$  y la velocidad será opuesta a  $I$ , es decir, de la forma  $\mathbf{v} = -v\mathbf{k}$ . Si la lámina está sometida a un campo magnético  $\mathbf{B}$ , como el indicado en la Figura 32.12, de acuerdo con la [32.1], la fuerza que actúa sobre cada electrón es:

$$\mathbf{F} = -e(-v\mathbf{k} \times B\mathbf{j}) = -veB\mathbf{i}$$

En consecuencia, los electrones se desplazan hacia el borde de la placa situado en la región negativa del eje de las equis, cargándolo negativamente y dejando cargado positivamente el otro borde. Ello hace que aparezca en el interior de la placa un campo eléctrico  $\mathbf{E} = -E\mathbf{i}$ , que ejercerá sobre los electrones la fuerza:

$$\mathbf{F}' = eE\mathbf{i}$$

llegándose a un equilibrio cuando se verifique  $F + F' = 0$ , o bien,  $eE = evB$ ,  $E = vB$ .

Entre los bordes laterales de la lámina aparece una diferencia de potencial, cuyo valor es:

$$V_+ - V_- = Ed = vBd$$

a la que se denomina *potencial Hall*. Este fenómeno fue descubierto por Edwin Hall (1855-1938), en 1879.

La densidad de corriente,  $i$ , en función de la densidad de portadores de carga,  $n$ , de la carga de éstos,  $e$ , y de su velocidad,  $\mathbf{v}$ , se expresa:

$$\mathbf{i} = nev \quad \frac{I}{S} = nev = \frac{I}{ad}$$

La diferencia de potencial Hall puede ahora expresarse:

$$\Delta V = \frac{i}{ne} B d = \frac{IB}{ane}$$

A la constante  $C_h = 1/ne$ , se la denomina *constante Hall*. Ésta puede determinarse experimentalmente, midiendo el potencial Hall, la densidad de corriente y la inducción magnética. De su signo y valor se deduce el signo de carga de los portadores y la densidad de éstos en el material. En casi todos los metales los portadores son electrones y la densidad obtenida para éstos coincide prácticamente con la de electrones de valencia de los átomos. Hay algunos metales, como el Fe, Co, Be, Zn, Cd, en los cuales los portadores son positivos. Una explicación profunda de esto hace necesario el concurso de la Mecánica Cuántica.

En la Tabla 32.1 recogemos algunos valores de  $C_h$  y  $n$ . La influencia de la temperatura sobre el valor de la constante Hall es muy pequeña.

El efecto Hall puede usarse para medir campos magnéticos, ya que la intensidad de éste es:

$$B = \frac{\Delta V}{C_h i d} = \frac{\Delta V}{C_h I} a \quad [32.14]$$

El conductor debe ser calibrado con campos magnéticos conocidos.

**Tabla 32.1.** Constante Hall y densidad de portadores

Elemento	$C_h \times 10^{-11}$	$n \times 10^{29}$
Cobre	-6	1,1
Plata	-9	0,7
Sodio	-25	0,2
Cobalto	25	0,2
Niquel	-60	0,1
Hierro	100	0,06
Bismuto	-500	0,01

### 32.8 Fuerza de un campo magnético sobre una corriente eléctrica

Consideremos un conductor que transporta una corriente de intensidad  $I$  y que está inmerso en un campo magnético de inducción  $\mathbf{B}$  (Figura 32.13). Un elemento de corriente cuya carga es  $dq = I dt$ , está sometido a una fuerza  $d\mathbf{F}$ , cuyo valor, dado por [32.1], es:

$$d\mathbf{F} = I dt (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

y, puesto que es  $\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} \mathbf{u}_T$ , resulta:

$$d\mathbf{F} = I(\mathbf{u}_T \times \mathbf{B}) ds \quad [32.15]$$

La fuerza sobre el conductor es

$$\mathbf{F} = \oint I(\mathbf{u}_T \times \mathbf{B}) ds = I \oint (\mathbf{ds} \times \mathbf{B}) \quad [32.16]$$

Si el campo magnético es uniforme, puede escribirse:

$$\mathbf{F} = I \left( \oint \mathbf{ds} \right) \times \mathbf{B} \quad [32.17]$$

Si además el circuito, es cerrado, será  $\oint \mathbf{ds} = 0$  y, por tanto,  $\mathbf{F} = 0$ . La fuerza resultante ejercida por un campo magnético uniforme sobre un circuito cerrado es nula, lo que no impide que pueda ejercer un momento sobre el citado circuito, como enseguida veremos. Si el campo de inducción  $\mathbf{B}$  no es uniforme, la fuerza que ejerce sobre un circuito cerrado no tiene por qué ser nula.

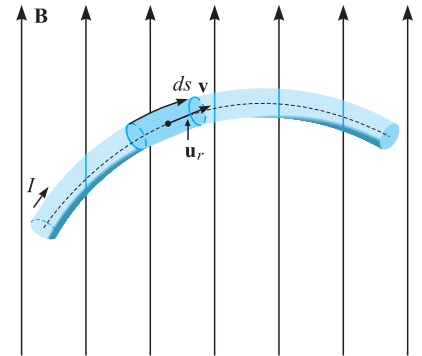
Para un conductor rectilíneo dentro de un campo  $\mathbf{B}$  no uniforme, la fuerza puede expresarse:

$$\mathbf{F} = I \mathbf{u}_T \times \int \mathbf{B} ds \quad [32.18]$$

Si además de ser un conductor rectilíneo de longitud  $L$ , el campo magnético es uniforme, resulta:

$$\mathbf{F} = I(\mathbf{u}_T \times \mathbf{B}) \oint ds = I(\mathbf{u}_T \times \mathbf{B}) L \quad [32.19]$$

Debemos hacer notar que  $\mathbf{u}_T$  tiene el sentido convencional de la corriente.


**Figura 32.13.** Corriente en un campo magnético.

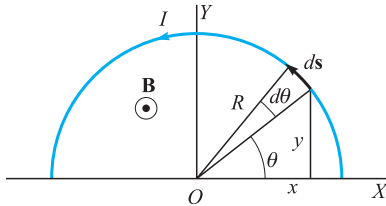


Figura 32.14.

**EJEMPLO 32.3**

Calculemos la fuerza ejercida sobre un conductor en forma de semicircunferencia de radio  $R$ , que transporta una corriente de intensidad  $I$ , por un campo magnético  $\mathbf{B}$  uniforme y normal al plano de la semicircunferencia.

**Solución:**

Supongamos que la corriente  $I$  circula en el sentido indicado en la Figura 32.14. El campo magnético, en el sistema de referencia elegido, se expresa  $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ .

La fuerza sobre el conductor, por ser el campo  $\mathbf{B}$  uniforme, está dada por la [32.17], debemos, pues, calcular para este conductor el valor de  $\int d\mathbf{s}$ , lo que puede hacerse de la siguiente forma:  $d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos \theta, & dx &= -R \sin \theta d\theta \\ y &= R \sin \theta, & dy &= R \cos \theta d\theta \end{aligned} \right\} d\mathbf{s} = R(-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) d\theta$$

$$\oint d\mathbf{s} = R \int_0^\pi (-\sin \theta) d\theta \mathbf{i} + R \int_0^\pi \cos \theta d\theta \mathbf{j} = R[\cos \theta]_0^\pi \mathbf{i} = R[\sin \theta]_0^\pi \mathbf{j} = -2R\mathbf{i}$$

Con ello, la fuerza sobre conductor resulta:

$$\mathbf{F} = I(-2R\mathbf{i}) \times B\mathbf{k} = 2RBI\mathbf{j}$$

**32.9 Acción de un campo magnético sobre circuito plano. Momento magnético**

Para mayor sencillez consideremos un circuito plano, rectangular, recorrido por una corriente de intensidad  $I$  en el sentido indicado en la Figura 32.15, que está inmerso en un campo magnético de intensidad  $B$ , cuya dirección forma un ángulo  $\alpha$  con la normal al plano del circuito.

La fuerza que ejerce el campo sobre cada lado del circuito se calcula mediante la [32.17]. Las fuerzas  $F_2$  y  $F_4$  son iguales y opuestas, por lo que únicamente tratan de producir deformación en el circuito.

Las fuerzas  $F_1$  y  $F_3$  son iguales y de distinto sentido, formando un par. La fuerza  $\mathbf{F}_1$  se expresa:

$$\mathbf{F}_1 = Ib(\mathbf{u}_T \times \mathbf{B}) = I(\mathbf{b} \times \mathbf{B})$$

El momento del par se expresa:

$$\mathbf{M} = \mathbf{a} \times \mathbf{F}_1 = a \times (\mathbf{b} \times \mathbf{B})I$$

siendo los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  los indicados en la Figura 32.15. Como fácilmente puede comprobarse, el momento puede escribirse de la forma:

$$\mathbf{M} = I(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B} = I\mathbf{S} \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \tag{32.20}$$

Denominándose *momento magnético del circuito* a:

$$\mathbf{m} = I\mathbf{A} = I(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \tag{32.21}$$

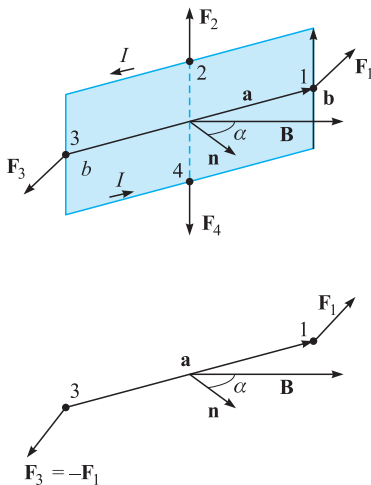


Figura 32.15. Momento sobre un circuito.



La ecuación de dimensiones del momento magnético es  $[m] = IL^2$  y su unidad en el S.I. es el amperio metro cuadrado,  $A m^2$ .

Aunque se ha utilizado un circuito rectangular para la deducción de la [32.20], esta ecuación es de validez general. Así, para una espira circular de radio  $R$ , recorrida por la corriente  $I$ , e inmersa en un campo magnético uniforme  $\mathbf{B}$  (Figura 32.16), es:

$$\mathbf{A} = \pi R^2 \mathbf{n}, \quad \mathbf{m} = I\mathbf{A} = I\pi R^2 \mathbf{n} \quad \text{y} \quad \mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = I\pi R^2 B \sin \alpha \mathbf{k}$$

### EJEMPLO 32.4

Sea una espira circular de radio  $R$ , recorrida por la corriente  $I$  y situada dentro de un campo uniforme  $\mathbf{B}$ , que forma con la normal a la espira un ángulo  $\theta$ . Hallemos el aumento que este campo provoca sobre la espira.

#### Solución:

Tomemos el centro de la espira como origen del sistema de referencia, la normal a ellas como eje  $OZ$  y como eje  $OX$  la intersección del plano de la espira con el plano definido por su normal y  $\mathbf{B}$  (Figura 32.17). En el sistema de referencia así definido se expresan:

$$\mathbf{B} = B(\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{k})$$

$$x = R \cos \varphi, \quad dx = -R \sin \varphi d\varphi$$

$$y = R \sin \varphi, \quad dy = R \cos \varphi d\varphi$$

$$d\mathbf{s} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} = R(-\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}) d\varphi$$

La fuerza sobre un elemento de corriente es:

$$d\mathbf{F} = I(d\mathbf{s} \times \mathbf{B})$$

y el momento sobre esta fuerza elemental:

$$\begin{aligned} d\mathbf{M} &= \mathbf{R} \times d\mathbf{F} = I\mathbf{R} \times (d\mathbf{s} \times \mathbf{B}) = I \begin{vmatrix} d\mathbf{s} & \mathbf{B} \\ \mathbf{R} \cdot d\mathbf{s} & \mathbf{R} \cdot \mathbf{B} \end{vmatrix} = I(\mathbf{R} \cdot \mathbf{B}) d\mathbf{s} = IRB \sin \theta \cos \varphi d\mathbf{s} = \\ &= IR^2 B \sin \theta (-\sin \varphi \cos \varphi \mathbf{i} + \cos^2 \varphi \mathbf{j}) d\varphi \end{aligned}$$

Por tanto, es:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= IR^2 B \sin \theta \left[ \int_0^{2\pi} -\frac{\sin 2\varphi}{\varphi} d\varphi \mathbf{i} + \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \mathbf{j} \right] = \\ &= IR^2 B \sin \theta [0\mathbf{i} + \pi \mathbf{j}] = I\pi R^2 B \sin \theta \mathbf{j} \end{aligned}$$

Puesto que el momento magnético de la espira es  $\mathbf{m} = \pi R^2 I \mathbf{k}$  se comprueba que es:

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{vmatrix} \pi R^2 I B = I\pi R^2 B \sin \theta \mathbf{j}$$

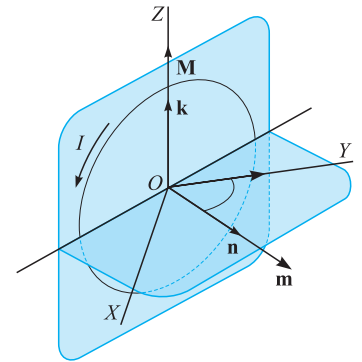


Figura 32.16. Momento sobre una espira.

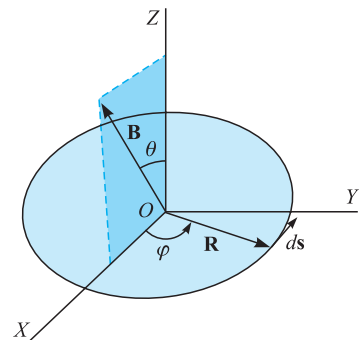


Figura 32.17.

Para un solenoide de  $N$  vueltas, que es un devanado con hilo conductor, si las vueltas están muy próximas, puede aceptarse como formado por  $N$  espiras circulares y el momento es:

$$\mathbf{M} = N\mathbf{m} \times \mathbf{B} = NI\pi R^2 B \text{ sen } \alpha \mathbf{k}$$

El campo  $\mathbf{B}$ , al actuar sobre un dipolo magnético, lo hará girar, empleando un trabajo que queda almacenado en el dipolo. Si el giro es elemental, el trabajo empleado es:

$$dW = -M_m d\theta = -mB \text{ sen } \theta d\theta$$

La variación de la energía potencial del dipolo es igual y cambiada de signo al trabajo realizado por las fuerzas del campo:

$$dU = -dW = mB \text{ sen } \theta d\theta$$

cuya integración da  $U = -mB \cos \theta + \text{Cte.}$

Si tomamos el origen de potenciales en  $\theta = 90^\circ$ , resulta nula la constante de integración y la energía potencial del dipolo se expresa:

$$U = -mB \cos \theta = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad [32.22]$$

### EJEMPLO 32.5

Una espira rectangular de dimensiones  $a, b$ , está construida con un hilo conductor de masa por unidad de longitud  $\lambda$  (kg/m) y puede girar alrededor de un eje horizontal que coincide con uno de sus lados  $a$ . Está situada en un campo magnético  $\mathbf{B}$ , homogéneo, de dirección vertical. Al ser recorrida por una corriente  $I$  alcanza una posición de equilibrio en la cual el plano de la espira forma un ángulo  $\alpha$  con el plano vertical (Figura 32.18). Determinemos el valor de  $B$  en función de  $I$  y de  $\alpha$ .

#### Solución:

En el equilibrio debe verificarse que el momento resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la espira es nulo. El momento resultante de las fuerzas gravitacionales es:

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 = \frac{1}{2} b (\text{sen } \alpha \mathbf{j} - \text{cos } \alpha \mathbf{k}) \times (-\lambda b g \mathbf{k}) = -\frac{1}{2} b^2 \lambda g \text{ sen } \alpha \mathbf{i}$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = b (\text{sen } \alpha \mathbf{j} - \text{cos } \alpha \mathbf{k}) \times (-\lambda a g \mathbf{k}) = -ab \lambda g \text{ sen } \alpha \mathbf{i}$$

$$\mathbf{M}_g = 2\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = -(a + b)b \lambda g \text{ sen } \alpha \mathbf{i}$$

El momento magnético es  $\mathbf{M}_m = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ , siendo  $\mathbf{m} = I\mathbf{a} \times \mathbf{b} = Iab\mathbf{n}$ , con lo cual es:

$$\mathbf{M}_m = Iab\mathbf{n} \times \mathbf{B} = IabB\mathbf{n} \times \mathbf{k} = IabB \text{ cos } \alpha \mathbf{i}$$

En el equilibrio debe ser  $\mathbf{M}_g + \mathbf{M}_m = 0$ ,

$$-(a + b)b \lambda g \text{ sen } \alpha + IabB \text{ cos } \alpha = 0$$

de donde,

$$B = \frac{\lambda g (a + b)}{Ia} \tan \alpha$$

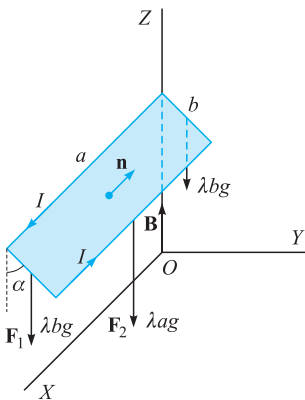


Figura 32.18.

### 32.10 Polos magnéticos

Hemos visto cómo las acciones magnéticas son más intensas en sendos puntos opuestos del imán, que hemos llamado polos y denominados polo norte y sur, según que al colocar el imán en el campo magnético terrestre, de forma que pueda girar, apunten al norte geográfico o al sur geográfico, respectivamente.

Es muy fácil comprobar que los polos magnéticos de igual nombre se repelen y de distinto nombre se atraen, siendo la fuerza de atracción o repulsión inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. De acuerdo con esto, puede establecerse una analogía formal entre carga eléctrica y polo magnético o carga magnética, que puede ser útil en el estudio de problemas sobre imanes, aun cuando el polo magnético aislado, o monopolo, no tenga existencia real como constituyente de la materia.

Si colocamos un imán en forma de barra en un campo magnético  $\mathbf{B}$ , aparece sobre el imán un momento que trata de alinearlo con el campo. Sobre el polo norte aparece una fuerza  $\mathbf{F}$  y sobre el sur otra igual y opuesta (Figura 32.19).

Definiremos la carga magnética como el cociente entre la fuerza de origen magnético  $\mathbf{F}_m$  y el campo  $\mathbf{B}$ ,

$$q_m = \frac{\mathbf{F}_m}{\mathbf{B}}$$

De esta forma se mantiene la analogía entre  $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$  y  $\mathbf{F}_m = q_m\mathbf{B}$ . La ecuación de dimensiones de la carga magnética es:

$$[q_m] = [F][B]^{-1} = [MLT^{-2}][MT^{-2}I^{-1}]^{-1} = LI$$

La unidad de carga magnética en el S.I. será el amperio  $\times$  metro.

El momento al que está sometido el imán por el campo  $\mathbf{B}$  es:

$$\mathbf{M} = \mathbf{l} \times \mathbf{F} = \mathbf{l} \times q_m \mathbf{B} = q_m \mathbf{l} \times \mathbf{B} = \mathbf{m}_M \times \mathbf{B}$$

expresión análoga a la [32.20], pudiendo establecerse la equivalencia  $I\mathbf{A} = q_m\mathbf{l}$ .

Al producto  $q_m\mathbf{l} = \mathbf{m}_m$  se le denomina momento magnético del imán, siendo  $\mathbf{l}$  el vector que va del polo sur al norte del imán.

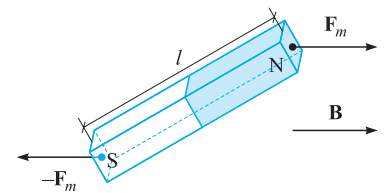


Figura 32.19. Momento sobre un imán.

### 32.11 Campo magnético producido por una corriente eléctrica

A partir de que Oersted, en 1819, comprobó que una corriente eléctrica desviaba una aguja magnética colocada en su proximidad, lo que era señal inequívoca de que producía un campo magnético, se realizaron infinidad de experiencias al objeto de relacionar el campo magnético producido con la geometría del circuito y la intensidad de la corriente que lo recorre, con lo que se obtuvo, como expresión general:

$$\mathbf{B} = KI \oint \frac{\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r}{r^2} ds \quad [32.23] \quad \text{Ley de Biot y Savart}$$

Esta ley se conoce con el nombre de ley de Biot y Savart, aunque parece ser que su expresión matemática fue deducida por Laplace. En esta expresión,  $\mathbf{u}_r$ , es el vector

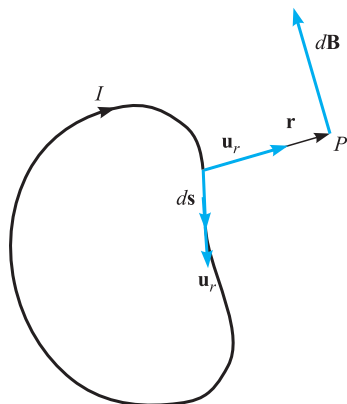


Figura 32.20. Campo **B** creado por un circuito.

unitario que va desde el elemento que crea el campo,  $ds$ , al punto del campo (Figura 32.20);  $\mathbf{u}_T$ , es el vector unitario en el sentido convencional de la corriente,  $I$ , es el valor de la intensidad de la corriente en el circuito,  $r$ , el módulo del vector  $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$ , que va del elemento de corriente que crea el campo al punto del campo, y  $K$  es una constante.

La ecuación de dimensiones de  $K$  se deduce de las de  $B$ , siendo:

$$[K] = [B]I^{-1}L = MLT^{-2}I^{-2}$$

El valor de la constante  $K$  depende del sistema de unidades elegido. La Conferencia General de Pesas y Medidas del año 1960, acordó adoptar como cuarta magnitud fundamental del sistema internacional, la intensidad de corriente eléctrica y dar a  $K$  el valor  $K = 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$ . Es conveniente poner la constante  $K$  de la forma:

$$K = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

denominándose a la nueva constante,  $\mu_0$ , permeabilidad magnética del vacío, cuyo valor es:

$$\mu_0 = 4\pi K = 4\pi \times 10^{-7} \text{ m kg s}^{-2} \text{ A}^{-2}$$

y en función de la cual la ley de Biot y Sarvart se escribe:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r}{r^2} ds \quad [32.24]$$

Concretamente, en el sistema internacional de unidades se expresa:

$$\mathbf{B} = 10^{-7} I \oint \frac{\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r}{r^2} ds \quad [32.25]$$

Es evidente que el elemento de circuito,  $ds$ , recorrido por la corriente de intensidad  $I$ , produce una intensidad elemental de campo magnético,  $d\mathbf{B}$ , dada por:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r}{r^2} ds = 10^{-7} I \frac{\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r}{r^2} ds \quad [32.26]$$

Campo elemental de inducción

El sistema electromagnético de unidades da a  $K$  el valor unidad y, por tanto, en él es  $\mu_0 = 4\pi$ . La relación entre la unidad electromagnética de intensidad y el amperio se determina así:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 4\pi \text{ g cm s}^{-2} \text{ uemI}^{-2} = 4\pi \times 10^{-7} \text{ m kg s}^{-2} \text{ A}^{-2} \\ \text{g cm uemI}^{-2} &= 10^{-7} 10^{-2} \text{ cm } 10^{-3} \text{ g A}^{-2} \end{aligned}$$

de donde resulta la equivalencia:

$$\text{uemI} = 10 \text{ A} \quad [32.27]$$

Es interesante hacer notar, que el producto  $\epsilon_0\mu_0$  es igual a la inversa del cuadrado de la velocidad de la luz, ya que siendo:

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \quad \text{y} \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$$

es:

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad [32.28]$$

relación que posteriormente demostraremos a partir de las ecuaciones de Maxwell.

### EJEMPLO 32.6

Calculemos el campo magnético  $\mathbf{B}$  creado, en el punto  $O$ , por la corriente  $I$ , que se indica en la Figura 32.21, centro de la semicircunferencia de radio  $R$ .

#### Solución:

Cada elemento de corriente creará en  $O$  un campo elemental, dado por la [32.26]. Los tramos rectos no crearán campo en  $O$ , pues, para cualquier elemento de corriente de ellos, siempre es  $\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r = \mathbf{0}$ . El campo en  $O$  será el creado por la corriente en forma de semicircunferencia de radio  $R$ . Para cualquier elemento de corriente de ésta, en el sistema de referencia de la figura, se expresa  $\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r = \mathbf{j}$ . Además son:  $r = R$  y  $ds = R d\theta$ , con todo lo cual se expresa:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} d\theta \mathbf{j}$$

La cual, integrada entre  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$  da:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4R} \mathbf{j}$$

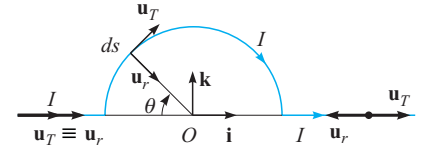


Figura 32.21.

## 32.12 Campo magnético creado por una corriente rectilínea

Consideremos una corriente rectilínea de intensidad  $I$ , cuyo vector unitario en el sentido de ella es  $\mathbf{u}_T$ . Un elemento de ella produce una intensidad elemental del campo magnético dada por [32.26]. En el caso que nos ocupa es:

$$\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r = \cos \alpha \mathbf{u}_n$$

En la que  $\mathbf{u}_n$  es un vector unitario normal al plano determinado por el conductor y el punto en el cual se calcula el campo, con sentido positivo de giro alrededor del conductor (Figura 32.22).

Se verifican las siguientes relaciones:

$$r = \frac{R}{\cos \alpha} \quad \text{y} \quad s = R \tan \alpha$$

Diferenciando, la última es:

$$ds = \frac{R}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

Todo lo cual, llevado a la [32.26], da:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cos \alpha d\alpha \mathbf{u}_n$$

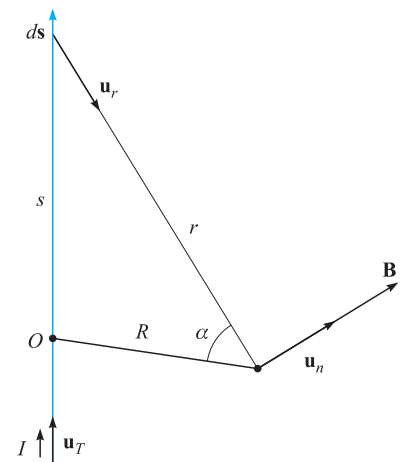


Figura 32.22.

que integrada entre  $\pm \pi/2$ , que son los valores de  $\alpha$  correspondientes a la posición de  $ds$  en  $-\infty$  y  $+\infty$ , respectivamente, resulta:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \mathbf{u}_n \quad [32.29]$$

Expresión que pone de manifiesto que el vector del campo magnético en un punto está contenido en el plano normal al conductor que pasa por el punto, y que las líneas del campo son circunferencias de centro en el conductor y plano normal a él.

### EJEMPLO 32.7 Campo de inducción creado alrededor de una corriente eléctrica

Sea un conductor rectilíneo infinitamente largo, recorrido por una corriente de intensidad  $I = 12$  A. Determinemos el campo de inducción magnética en puntos situados a las distancias  $R_1 = 2$  m,  $R_2 = 10$  m y  $R_3 = 50$  m.

#### Solución:

Aplicando la expresión [32.29] son:

$$B_1 = 12 \times 10^{-7} \text{ T}, B_2 = 24 \times 10^{-8} \text{ T} \quad \text{y} \quad B_3 = 4,8 \times 10^{-8} \text{ T}$$

Si en lugar de ser un conductor rectilíneo es sólo un segmento  $AB$ , los límites de integración serán  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  (Figura 32.23), resultando:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} [\text{sen } \alpha]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mathbf{u}_n = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\text{sen } \alpha_2 - \text{sen } \alpha_1) \mathbf{u}_n \quad [32.30]$$

Expresión en la cual  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  hay que ponerlos con su signo.

### EJEMPLO 32.8

Calculemos el campo magnético  $\mathbf{B}$  creado por un conductor de forma cuadrada, de lado  $L$ , en su centro, al ser recorrido por una corriente de intensidad  $I$  (Figura 32.24).

#### Solución:

Debido a la simetría del problema, el campo creado en  $P$  por el circuito será cuatro veces el campo creado por uno de los lados. Éste vendrá dado por la [32.30], siendo, en este caso,  $\alpha_1 = -45^\circ$  y  $\alpha_2 = 45^\circ$ , con lo cual es:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{L}{2}} [\text{sen } 45 - \text{sen } (-45)] \mathbf{u}_n = \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{2\pi L} \mathbf{u}_n$$

siendo  $\mathbf{u}_n$  el vector unitario normal al plano del circuito dirigido hacia el lector.

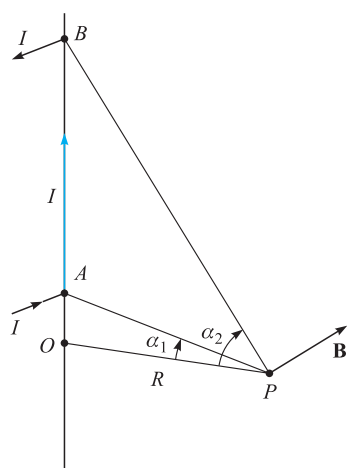


Figura 32.23.

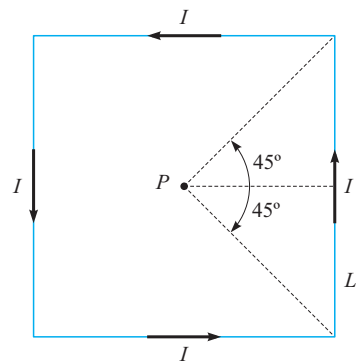


Figura 32.24.

El campo total en  $P$  será:

$$\mathbf{B} = 4\mathbf{B}_1 = \frac{2\mu_0 I\sqrt{2}}{\pi L} \mathbf{u}_n = 8 \times 10^{-7} \frac{I\sqrt{2}}{L} \mathbf{u}_n$$

Para una corriente de  $I = 10$  A y un lado  $L = 0,25$  m, el valor del campo en el centro del circuito es  $B = 4,525 \times 10^{-5}$  T.

### 32.13 Acciones entre corrientes rectilíneas paralelas. Definición de amperio

Sean dos conductores rectilíneos paralelos, recorridos por intensidades  $I_1$  e  $I_2$  del mismo sentido y separados ambos una distancia  $d$  (Figura 32.25).

El conductor 1 crea en los puntos del conductor 2 el campo:

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \mathbf{i}$$

Como consecuencia de este campo, el conductor 2 está sometido a una fuerza dada por [32.19], que por unidad de longitud es:

$$\mathbf{F}_2 = I_2(\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1) = -I_2 B_1 \mathbf{j} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \mathbf{j}$$

Lo que pone de manifiesto que el conductor 1 atrae al 2 con la fuerza calculada.

Aplicando el mismo razonamiento, el conductor 2 crea sobre los puntos del 1 el campo:

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} \mathbf{i}$$

Como consecuencia, el conductor 2 ejerce en  $O_1$  sobre el conductor 1 una fuerza por unidad de longitud dada por:

$$\mathbf{F}_1 = I_1(\mathbf{k} \times \mathbf{B}_2) = I_1 B_2 \mathbf{j} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \mathbf{j}$$

Resultando que el conductor 2 atrae al 1 con una fuerza igual a la que el 1 ejerce sobre él.

$$F_1 = F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} = 2 \times 10^{-7} \frac{I_1 I_2}{d} \quad [32.31]$$

Si tomamos  $d = 1$  m, hacemos circular corrientes iguales  $I_1 = I_2$  y regulamos éstas para que la fuerza que se ejercen los conductores por unidad de longitud sea  $2 \times 10^{-7}$  N, podemos definir el amperio (A), que es la unidad de intensidad de corriente eléctrica en el S.I., como la *intensidad de corriente que, circulando por dos conductores rectilíneos paralelos de longitud infinita y sección despreciable, situados con una separación de 1 m en el vacío, produce entre ellos una fuerza igual a  $2 \times 10^{-7}$  N por cada metro de longitud.*

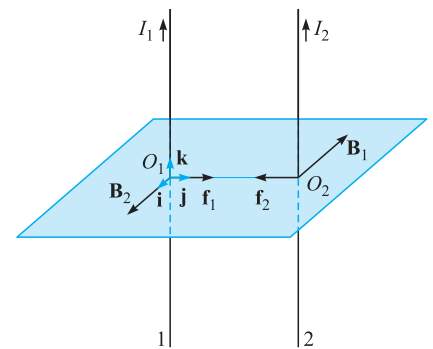


Figura 32.25. Acciones entre corrientes.

#### Definición de amperio

### 32.14 Campo magnético creado por una corriente circular. Dipolo magnético

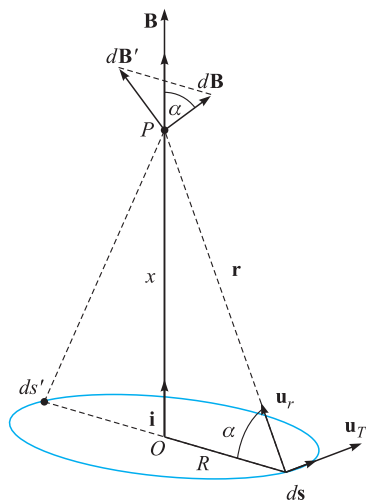


Figura 32.26. Campo **B** creado por una espira.

Consideremos un circuito circular de radio  $R$ , recorrido por una corriente de intensidad  $I$  y calculemos la intensidad del campo magnético que crea en un punto de su eje (Figura 32.26). Para ello utilizaremos la [32.26] que nos da la intensidad elemental del campo magnético creada por el elemento de corriente  $ds$ .

Los vectores unitarios  $\mathbf{u}_T$  y  $\mathbf{u}_r$  son, en este caso, siempre perpendiculares uno al otro. En consecuencia, la dirección de  $d\mathbf{B}$  es perpendicular al plano determinado por el punto donde vamos a calcular el campo y la dirección de  $\mathbf{u}_T$ , y su valor es:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{ds}{r^2} \mathbf{u}_n$$

La componente de  $d\mathbf{B}$  sobre la normal al eje se anula con la componente, también sobre la normal al eje, del vector  $d\mathbf{B}'$  creado por el elemento de corriente  $ds'$  simétrico del  $ds$ . En consecuencia, el campo en un punto del eje de la espira tendrá la dirección de éste y será la suma de las proyecciones sobre el eje de cada campo elemental creado por cada uno de los elementos de corriente:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\cos \alpha}{r^2} ds \mathbf{i}$$

Puesto que es  $\cos \alpha = R/r$ , la anterior se transforma en:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{R}{r^3} ds \mathbf{i}$$

La cual, integrada a lo largo de toda la circunferencia da:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{R}{r^3} \oint ds \mathbf{i} = \frac{1}{2} \mu_0 I \frac{R^2}{r^3} \mathbf{i}$$

Expresión que puede ponerse en función de la distancia,  $x$ , del punto al plano de la espira, ya que es  $r^2 = R^2 + x^2$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \mathbf{i} \tag{32.32}$$

Podemos expresar  $\mathbf{B}$ , en función del momento magnético del circuito  $\mathbf{m} = I\mathbf{A} = I\pi R^2 \mathbf{i}$ , resultando:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mathbf{m}}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \tag{32.33}$$

Hay que hacer notar que el sentido de  $\mathbf{B}$  es el mismo, tanto para  $x > 0$ , como para  $x < 0$ .

El módulo de  $\mathbf{B}$  tiene un máximo para  $x = 0$  y tiende a cero al tender  $x$  a  $\pm \infty$ . La variación de  $B$  con  $x$  representa en la Figura 32.27.

En los casos en que sea  $x > R$ , la última ecuación puede escribirse de la forma:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mathbf{m}}{x^3} \tag{32.34}$$

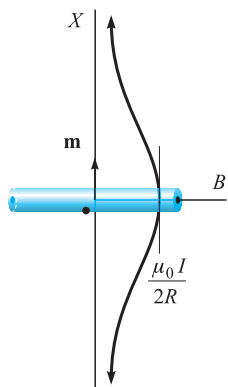


Figura 32.27. Módulo de **B**.



Podemos establecer la analogía de esta expresión con la [28.51] que da el campo creado por un dipolo eléctrico de momento  $\mathbf{m}$  en un punto de su eje, sin más que hacer  $1/\epsilon_0 < > \mu_0$ . De aquí que a una pequeña espira recorrida por una corriente se la denomine *dipolo magnético* y que se establezca una analogía formal entre los campos y potenciales que crean ambos elementos. Así, empleando la [28.50], que da el campo en un punto cualquiera de coordenadas  $(x, y, z)$ , creado por un dipolo eléctrico situado en el origen de coordenadas y cuyo momento  $\mathbf{m}$  tiene la dirección y sentido positivo del eje de las equis, podemos escribir, para el campo creado por una pequeña espira, también situada en el origen de coordenadas y de momento  $\mathbf{m} = m\mathbf{i}$ , la expresión de sus componentes en el punto  $(x, y, z)$ .

$$B_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m(r^2 - 3x^2)}{r^5} \quad ; \quad B_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m3xy}{r^5}$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m3xz}{r^5} \quad [32.35]$$

En estas expresiones,  $r$  va desde el centro de la espira al punto del campo, por lo cual  $R$  debe ser muy pequeño frente a  $r$ .

### 32.15 Circulación del campo magnético $\mathbf{B}$ . Ley de Ampère

Hemos visto cuál es el campo magnético  $B$  creado por un conductor rectilíneo infinitamente largo, al ser recorrido por la corriente eléctrica. Calculemos ahora la circulación de ese campo magnético a lo largo de una curva plana que encierra al conductor y cuyo plano es normal a él (Figura 32.28), lo que se expresa:

$$C = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

La cantidad subintegral se puede transformar así:

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}_1 + \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}_2 = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}_1 = B ds_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\theta$$

con lo cual, la circulación se expresa:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = \mu_0 I$$

es decir,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I \quad [32.36] \quad \text{Ley de Ampère}$$

Expresión conocida como ley de Ampère (1775-1836), establecida por éste en 1827: *la circulación del campo magnético  $\mathbf{B}$  a lo largo de una línea cerrada, que rodea al conductor que crea el campo, es proporcional a la intensidad que circula por el conductor.*

Si la curva no envuelve al conductor que crea el campo, la circulación es nula, porque la integral tendrá iguales sus dos límites de integración.

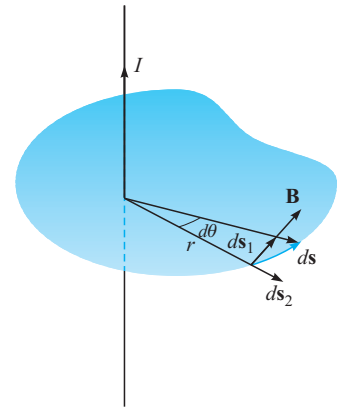


Figura 32.28. Circulación de  $\mathbf{B}$ .

Si la curva encierra una serie de corrientes de intensidades  $I_i$ , la circulación del campo  $\mathbf{B}$  será:

$$C = \sum_{i=1}^n C_i = \sum_{i=1}^n \oint \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_{i=1}^n \mu_0 I_i = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i$$

La ley de Ampère es mucho más general de lo que puede deducirse de la demostración que de la misma hemos hecho, ya que no es necesario que la curva que rodea el conductor sea plana, ni que la corriente sea transportada por un conductor rectilíneo. La corriente puede estar distribuida en el espacio con una cierta densidad de corriente y, en este caso, la ley de Ampère se expresa:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} \quad [32.37]$$

En la cual, la integral de superficie debe calcularse sobre una superficie cualquiera, limitada por la línea a lo largo de la cual se calcula la circulación y pudiendo enunciarse la ley así: *la circulación del campo magnético  $\mathbf{B}$ , a lo largo de una curva cerrada, es igual al producto de la permeabilidad magnética por el flujo del vector densidad de corriente a través de una superficie limitada por la citada curva.*

Hay que hacer notar una gran limitación de la ley de Ampère, ya que únicamente es válida para corrientes estacionarias. Para corrientes lentamente variables y para medios materiales no magnéticos, como por ejemplo el cobre, puede usarse con resultados aproximadamente válidos. Para corrientes variables con el tiempo o medios materiales magnéticos no es válida esta ley, debiendo ser generalizada como posteriormente veremos.

La ley de Ampère, en los casos en que es aplicable, resulta muy útil para calcular el campo magnético  $\mathbf{B}$  creado por corrientes conocidas, cuando la simetría del problema permite calcular fácilmente la integral de  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ . Veamos algunos ejemplos.

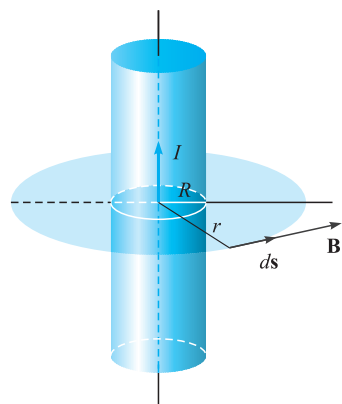


Figura 32.29.

### EJEMPLO 32.9 Campo magnético creado por una corriente cilíndrica

Calculemos el campo magnético creado por una barra conductora cilíndrica de radio  $R$ , recorrida por una corriente de intensidad  $I$ , distribuida homogéneamente en su sección (Figura 32.29).

#### Solución:

Calculemos, en primer lugar, el campo en un punto exterior a la barra, a una distancia  $r$  del eje de ésta. Para ello, apliquemos la ley de Ampère a la circunferencia de radio  $r > R$ , centro en el eje de la barra y plano normal a aquel,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

Por la simetría de la barra, el campo  $\mathbf{B}$  tendrá en todos los puntos de la circunferencia la dirección de  $d\mathbf{s}$ ,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint B ds$$

Además, su módulo dependerá únicamente de  $r$  y, por ello, será constante en todos los puntos la circunferencia.

$$\oint B ds = B \oint ds = B2\pi r$$

Con ello, la ley de Ampère se escribe:

$$B2\pi r = \mu_0 I$$

y el módulo del campo es:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

La dirección es perpendicular al plano determinado por el eje de la barra y el punto donde se calcula el campo y su sentido está dado por la regla de la mano derecha. Por tanto, el campo  $\mathbf{B}$  es el mismo que crearía una corriente lineal de intensidad  $I$  a lo largo del eje de la barra.

Para puntos interiores a la barra,  $r < R$ , la circulación tiene la misma expresión:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B2\pi r$$

pero la corriente encerrada por la circunferencia de radio  $r$  ya no es  $I$ , sino:

$$J\pi r^2 = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 = I \frac{r^2}{R^2}$$

Con ello, la ley de Ampère se escribe:

$$B2\pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2}$$

y el módulo del campo es:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R^2}$$

En consecuencia, el módulo del campo magnético  $B$  varía como se indica en la Figura 32.30.

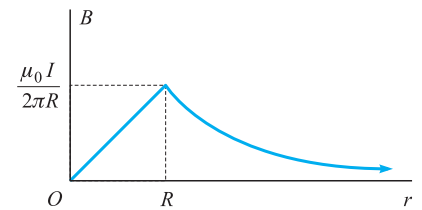


Figura 32.30. Módulo de  $\mathbf{B}$ .

### EJEMPLO 32.10 Campo magnético creado por una bobina toroidal

Campo magnético  $\mathbf{B}$  creado en los distintos puntos del espacio por una bobina toroidal de radio medio  $R_1$  y radio de la circunferencia generatriz  $R_2$ , cuyo arrollamiento de  $N$  espiras está recorrido por una corriente de intensidad  $I$  (Solenoid toroidal) (Figura 32.31).

#### Solución:

El espacio podemos clasificarlo en dos zonas: una, interior al toroide y, otra, exterior a él. Calculemos, en primer lugar, el campo  $\mathbf{B}$  en el interior del toroide.

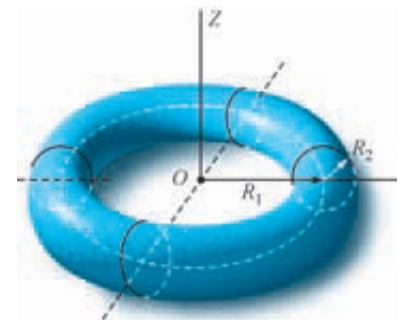


Figura 32.31. Solenoide toroidal.

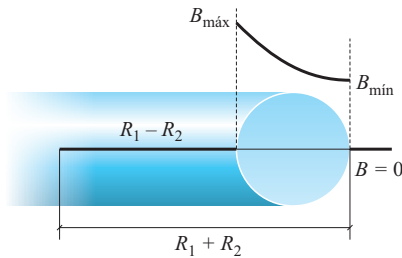


Figura 32.32. Módulo de **B**.

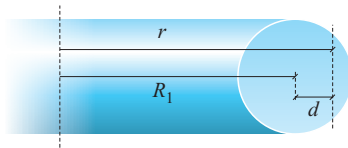


Figura 32.33.

Para ello, calcularemos la circulación de **B** a lo largo de una circunferencia de centro *O*, contenida en el plano ecuatorial del toroide,  $z = 0$ , y radio  $r$ , siendo  $R_1 < r < R_1 + R_2$ . Por la simetría del problema, en todos los puntos de esta circunferencia, el campo **B** tendrá el mismo módulo y siempre la dirección del correspondiente **ds**. Por ello, es:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint B ds = B \oint ds = B 2\pi r$$

Con lo cual la ley de Ampère se expresa:

$$B 2\pi r = \mu_0 N I$$

y el valor del módulo del campo es:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} = \mu_0 n I \frac{R_1}{r} \tag{32.38}$$

En la que  $n = N/2\pi R_1$  es el número de vueltas por unidad de longitud de la circunferencia media. En consecuencia, el valor del campo presenta un máximo para  $r = R_1 - R_2$  y un mínimo para  $r = R_1 + R_2$ , cuyos valores, respectivamente, son:

$$B_{\text{máx}} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi(R_1 - R_2)} \quad \text{y} \quad B_{\text{mín}} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi(R_1 + R_2)}$$

En la Figura 32.32 se representa la variación del módulo de **B** dentro del toroide.

En un punto cualquiera del interior del toroide es  $r = R_1 + d$  (Figura 32.33), con lo cual, el campo **B** se expresa:

$$B = \mu_0 n I \frac{R_1}{r} = \mu_0 n I \frac{R_1}{R_1 + d} \tag{32.39}$$

En la circunferencia media del toroide,  $r = R_1$ , el módulo de **B** es:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi R_1} = \mu_0 n I$$

Para puntos del exterior, hallaremos la circulación de **B** a lo largo de circunferencias de centro en el eje de simetría *OZ* y plano normal a él. Por la simetría del problema, en todos los puntos de cada una de ellas el campo **B** y la diferencial de arco **ds** tienen la misma dirección y sentido y, además, el módulo *B* es constante. Por tanto, la circulación se expresa,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B$$

En cualquiera de los casos posibles, las citadas circunferencias, o no encierran corriente alguna, o encierran *N* corrientes *I* y *N* corrientes  $-I$ . Por tanto, la ley de Ampère es:

$$2\pi r B = 0$$

y el campo **B** es nulo en todos los puntos exteriores al toroide.

**EJEMPLO 32.11 Campo creado por un solenoide cilíndrico**

Calculemos el campo magnético creado por un arrollamiento cilíndrico de radio  $R$ , longitud infinita, con  $n$  espiras por unidad de longitud, que está recorrido por una corriente de intensidad  $I$  (Solenoides cilíndrico) (Figura 32.34).

**Solución:**

Es evidente que la situación planteada se consigue con sólo hacer tender  $R_1$  a infinito en el ejemplo anterior. Para puntos del exterior, el campo seguirá siendo nulo, y para puntos del eje el campo seguirá valiendo:

$$B = \mu_0 n I$$

ya que estos valores son independientes de  $R_1$ .

Si en la expresión que da  $B$  en un punto cualquiera del interior del solenoide toroidal [32.29], hacemos tender  $R_1$  a infinito, obtendremos el campo en un punto cualquiera del interior del solenoide cilíndrico, resultando:

$$B = \mu_0 n I$$

Por tanto, el campo  $\mathbf{B}$  en el interior del solenoide cilíndrico de longitud infinita es uniforme.

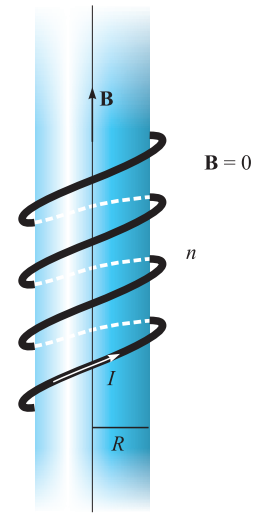


Figura 32.34. Solenoide cilíndrico.

**EJEMPLO 32.12 Solenoide cilíndrico de longitud  $L$** 

Calculemos el campo magnético en un punto del eje de un solenoide de longitud  $L$ , formado por  $N$  espiras recorridas por la intensidad  $I$  (Figura 32.35).

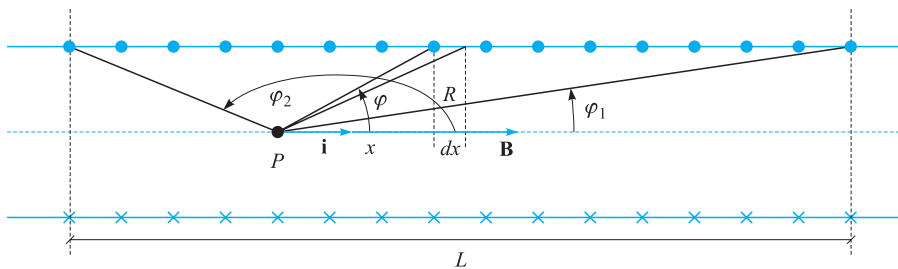


Figura 32.35. Solenoide cilíndrico.

**Solución:**

Evidentemente, en los solenoides reales de longitud finita aparecen unos efectos en los bordes y el campo  $\mathbf{B}$  no es uniforme en su interior, ni nulo en el exterior. En una primera aproximación, un solenoide cilíndrico puede considerarse como un conjunto de espiras circulares contiguas que se encuentran en planos perpendiculares a un eje longitudinal. Calculemos el campo  $\mathbf{B}$  en un punto de ese eje. Para ello, tomemos un elemento de longitud del eje,  $dx$ , en el cual el número de espiras contenidas es  $n dx$ , siendo  $n = N/L$  el número de espiras por unidad de longitud. Por razones de simetría, el campo en  $P$  sólo tendrá componente en la dirección del eje del solenoide y su valor se obtendrá multiplicando el campo creado por una espira [32.32] por el número de espiras:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2} n I \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} dx \mathbf{i}$$

Puesto que es  $x = R \operatorname{ctg} \varphi$ , será  $dx = -(R/\operatorname{sen}^2 \varphi) d\varphi$ , con lo cual se expresa:

$$d\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{2} nI \frac{R^2}{(R^2 + R^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi)^{3/2}} \frac{R}{\operatorname{sen}^2 \varphi} d\varphi \mathbf{i} = -\frac{\mu_0}{2} nI \operatorname{sen} \varphi d\varphi \mathbf{i}$$

integrando entre  $\varphi = \varphi_2$  y  $\varphi = \varphi_1$ , resulta:

$$B = \frac{\mu_0}{2} nI [\cos \varphi]_{\varphi_2}^{\varphi_1} \mathbf{i} = \frac{\mu_0}{2} nI (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \mathbf{i} \quad [32.40]$$

Expresión de validez general en cualquier punto del eje, tanto dentro del solenoide como fuera.

Para el caso particular de un solenoide muy largo  $L \gg R$ , el campo en su punto medio se obtiene haciendo  $\varphi_1 = 0$  y  $\varphi_2 = \pi$ , con lo cual resulta:

$$\mathbf{B} = \mu_0 nI \mathbf{i}$$

expresión que ya habíamos encontrado. En este mismo solenoide, el campo en su extremo se obtiene haciendo  $\varphi_1 = 0$  y  $\varphi_2 = \pi/2$ , resultando:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2} nI \mathbf{i}$$

Por tanto, el valor del campo en el extremo del solenoide es la mitad del correspondiente a su centro.

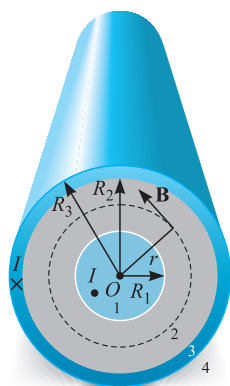


Figura 32.36. Cable coaxial. Campo  $\mathbf{B}$ .

### EJEMPLO 32.13 Campo magnético creado por un cable coaxial

Un cable coaxial está formado por un conductor cilíndrico de radio  $R_1$  y otro conductor en forma de corona cilíndrica, coaxial con el primero y de radios  $R_2$  y  $R_3$ . Por ambos conductores circula la misma intensidad de corriente,  $I$ , pero en sentidos opuestos (Figura 32.36). Calculemos el campo magnético  $\mathbf{B}$  en las distintas regiones del espacio.

#### Solución:

El espacio queda dividido, por las superficies cilíndricas, en cuatro zonas que se han numerado en la Figura 32.36.

La aplicación de la ley de Ampère está facilitada por la simetría del problema. La circulación del campo la haremos siempre a lo largo de una circunferencia de radio  $r$ , situada en la sección normal al conductor y centro en  $O$ , y su expresión es la misma para todas las regiones.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint B ds = B \oint ds = B 2\pi r$$

**Zona 1.**  $0 < r < R_1$ . La intensidad de la corriente abrazada por la circunferencia de radio  $r$  es:

$$I_1 = j_1 \pi r^2 = \frac{I}{\pi R_1^2} \pi r^2 = I \frac{r^2}{R_1^2}$$

Con lo cual, la ley de Ampère se expresa:

$$B_1 2\pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{R_1^2} \quad \text{de donde,} \quad \mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R_1^2} \mathbf{u}_\theta$$

**Zona 2.**  $R_1 < r < R_2$ . Ahora, la intensidad abrazada por la circunferencia de radio  $r$ , es  $I$  y la ley de Ampère se expresa:

$$B_2 2\pi r = \mu_0 I \quad \text{de donde,} \quad \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta$$

**Zona 3.**  $R_2 < r < R_3$ . En este caso, la intensidad abrazada por la circunferencia de radio  $r$  es toda la  $I$ , que circula por la zona 1, más la correspondiente a una corona cilíndrica de radios  $R_2$  y  $r$ , que circula en sentido contrario y en la cual la densidad de corriente es:

$$j_2 = \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)}$$

Por todo ello, la ley de Ampère se expresa ahora:

$$B_3 2\pi r = \mu_0 [I - j_2 \pi (r^2 - R_2^2)] = \mu_0 I - \frac{\mu_0 I}{R_3^2 - R_2^2} (r^2 - R_2^2) = \mu_0 I \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

Con todo lo cual, el campo en esta zona es:

$$\mathbf{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \mathbf{u}_\theta$$

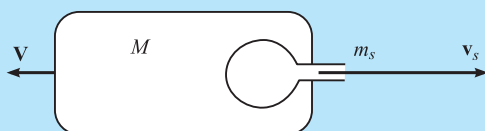
**Zona 4.**  $r > R_3$ . La corriente total neta abrazada por la circunferencia es nula y el campo también lo será,  $B_4 = 0$ .

## EL MOTOR IÓNICO

El principio de funcionamiento del motor iónico es el mismo que el de cualquier otro motor cohete: el principio de conservación de la cantidad de movimiento. Al eyectar pequeñas masas de propulsante almacenado en el motor cohete a gran velocidad en una dirección, se consigue incrementar la velocidad del cohete en la opuesta. El motor cohete iónico cada vez es más usado en la propulsión de satélites artificiales.

Supongamos un satélite de masa  $M_o$  que se mueve a la velocidad  $\mathbf{V}_o$ , al actuar el motor emite una masa de gas  $m_s$  a la velocidad  $\mathbf{v}_s$ , aumentando su velocidad y disminuyendo su masa, que deberán cumplir el principio de conservación de la cantidad de movimiento

$$M_o \mathbf{V}_o = M \mathbf{V} - m_s \mathbf{v}_s$$



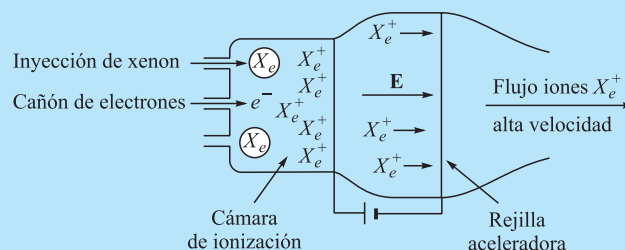
En un motor cohete convencional, la propulsión se consigue mediante la acción de dos sustancias: el combustible y el oxidante, que reaccionan en una cámara de combustión liberando energía y generando gases a alta temperatura, que se expanden a través de un conducto alcanzando altas velocidades de salida, las cuales pueden llegar a los 3000 m/s.

El motor iónico trabaja bajo un principio de funcionamiento bien distinto. En este caso no es la energía almacenada en el combustible la utilizada, ya que no hay ni combustible ni oxidante, sino simplemente un gas que se ioniza mediante un haz de electrones. Los iones positivos, portadores de la mayor parte de la masa, se aceleran mediante un campo eléctrico consiguiendo eyectar fuera del motor masas a altas velocidades lo que genera el correspondiente impulso que mueve el motor en el sentido contrario al de salida del flujo de iones.

De la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento se deduce que a más velocidad de salida de los gases o de los iones mayor eficiencia tiene el motor, es decir, mayor impulso es capaz de generar por unidad de masa consumida. Dado que la capacidad de almacenamiento en los satélites es muy reducida y no existe posibilidad de repostar en el espacio, conse-

guir altas velocidades de salida de iones es de gran importancia, además de ser un índice de la eficiencia del motor.

El gas empleado es xenón, químicamente inerte, cuatro veces más ligero que el aire y no explosivo. El consumo del motor es de unos ocho a diez gramos de xenón a la hora y la potencia eléctrica necesaria para su funcionamiento de unos 2500 vatios. Esta energía, necesaria para la ionización del gas y la creación del campo eléctrico que acelere los iones, se obtiene mediante paneles solares fotovoltaicos y resulta ser relativamente pequeña en comparación con la utilizada en otras necesidades energéticas del satélite, como computadores, sensores, receptores y emisores de comunicaciones y otros elementos electrónicos. Los iones son acelerados mediante una rejilla metálica a menor potencial que la fuente de iones, con lo cual acelera estos alcanzando velocidades de hasta 38 000 m/s, lo que les hace mucho más eficientes que los motores cohete convencionales, no obstante, como la masa que eyectan fuera del motor es muy pequeña, el empuje que se consigue es menor; por ello, el movimiento del satélite al inicio de la actuación del motor es muy pequeño, de unos pocos milímetros por segundo, lo que da buena precisión para ajustes finos. Al cabo del tiempo, mediante la acción continuada del motor se va incrementando la velocidad del satélite hasta alcanzar muy altas velocidades, por lo que a un destino lejano puede llegar en menos tiempo que cohetes de mayor empuje. Para evitar que el satélite se cargue negativamente se dispone una rejilla neutralizadora que emite electrones al exterior.



Aplicando la conservación de la energía (cinética más potencial eléctrica) se deduce fácilmente la velocidad de salida de los iones

$$v_s = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}$$



En esta, la carga del ion es  $q = 1,6 \times 10^{-19}$  C; la masa del ion, en el caso del Xenon, es  $m = 131,3 \times 1,67 \times 10^{-27}$  kg y para una diferencia de potencial acelerador de 1 kV, la velocidad de salida de los iones es

$$v_s = \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \times 10^{-19} \times 10^3}{131,3 \times 1,67 \times 10^{-27}}} \cong 38\,202 \text{ m/s}$$

Valor que es unas 10 veces superior al conseguido en motores cohetes convencionales.

El sistema fue desarrollado en la década de los años 70 en la Unión Soviética, que tiene en órbita numerosos satélites dotados de este tipo de motores, cuyo desarrollo no se produjo en Europa y América hasta la década de los años 90. El primer satélite comercial que usó este sistema fue el Panamsat-5, en 1997. En 1998, la NASA realizó la misión *Deep Space 1*, la cual, entre otras experiencias debía validar el comportamiento en el espacio de un prototipo de motor iónico, el NSTAR, el cual funcionó a plena satisfacción habiendo utilizado el mismo sistema en misiones posteriores, como el sobrevuelo de los cometas Wilson-Harrington y Borrelly, en 2001. En la actualidad numerosos satélites comerciales funcionan mediante motores iónicos, así podemos citar a los satélites: Astra-2A, en 1998; Artemis, en 2001. También la sonda SMART-1, que la ESA dirigió a la Luna en el 2003 iba equipada con este tipo de motor.

A partir del año 2005 comenzó a desarrollarse un nuevo modelo de motor iónico, de doble etapa y dotado de cuatro rejillas, siendo conocido mediante las siglas DS4G. En éste, una primera etapa está formada por dos rejillas, que operan a un potencial de 3 kV, cuyo cometido es extraer los iones de la cámara de ionización, los cuales, en una segunda fase, son acelerados por otro par de rejillas que operan a bajo potencial, consiguiendo velocidades de salida del orden de 200 000 m/s, unas cinco veces mayor que la conseguida en motores iónicos de una sola etapa.

La Agencia Espacial Europea ha aprobado la misión BepiColombo, que lanzará en agosto del 2013 una sonda hacia Mercurio, la cual llevará motores iónicos del nuevo modelo. La sonda llevará tres módulos, dos que orbitarán alrededor del citado planeta y un tercero que impactará sobre su superficie. Se trata de adquirir el mayor conocimiento posible sobre Mercurio: forma, composición, cráteres, atmósfera o campos magnéticos. La obtención de datos precisos sobre su órbita permitirá comprobar la teoría de la relatividad, con la cual, Einstein, en 1916, explicó la precesión del perihelio de la citada órbita.

El nuevo tipo de motor iónico permitirá impulsar sondas espaciales a confines alejados de nuestro sistema solar, lo que permitirá conocer mejor el espacio interestelar, con todos los secretos que seguro nos tiene reservados.



### 33.1 Fenómenos de inducción

Consideremos una espira conductora conectada a un galvanómetro. Si aproximamos hacia ella un imán por su polo norte, se observa en el galvanómetro la aparición de una corriente en la espira, cuyo sentido es el indicado en la Figura 33.1. Se comprueba que esta corriente existe mientras estemos moviendo el imán hacia la espira y cesa cuando dejamos inmóvil a éste, invirtiéndose su sentido al alejar el imán. Si aproximamos el imán por su polo sur, los fenómenos son los mismos, pero el sentido de la corriente en la espira es contrario al anterior.

Fenómenos completamente análogos suceden si dejamos fijo el imán y movemos, respecto a él, la espira, pudiendo parecer que la causa de los fenómenos indicados depende del movimiento relativo entre la espira y el imán, pero ésta no es la causa última.

Si en lugar del imán utilizamos una segunda espira conductora, por la cual se haga pasar la corriente, cuya intensidad podamos variar mediante un reóstato (Figura 33.2), podrá observarse lo siguiente:

a) Manteniendo constante la intensidad de la corriente en la espira 2, el hecho de que ambas espiras estén en movimiento relativo produce la aparición en la espira 1 de una corriente eléctrica. Si en el movimiento relativo las espiras se aproximan, la corriente en 1 tiene un cierto sentido y cuando se alejan, el contrario.

b) Manteniendo fija la posición relativa de ambas espiras, la variación de la intensidad de corriente que circula en la espira 2 produce una corriente en la 1. El sentido de esta corriente depende de si aumenta o disminuye la intensidad de corriente en la 2.

Es fácil observar que, en todas estas experiencias, lo que siempre se produce es una variación del flujo del campo magnético a través de la espira 1, siendo esta variación de flujo la causante de la corriente que aparece en la espira, corriente que se denomina de *inducción*. Evidentemente, la existencia de esta corriente exige la inducción en la espira de una fuerza electromotriz, que se denomina *fuerza electromotriz inducida*.

- 33.1. Fenómenos de inducción
- 33.2. Flujo del campo magnético B. Ley de Gauss del magnetismo
- 33.3. Fuerza electromotriz inducida. Ley de Faraday-Henry
- 33.4. Ley de Lenz
- 33.5. Corrientes de Foucault
- 33.6. Inducción mutua
- 33.7. Autoinducción
- 33.8. Corriente de cierre y apertura de un circuito
- 33.9. Energía del campo magnético asociado a una autoinducción
- 33.10. Densidad de energía del campo magnético
- 33.11. Descarga de un condensador en un circuito con autoinducción
- 33.12. Analogías electromecánicas

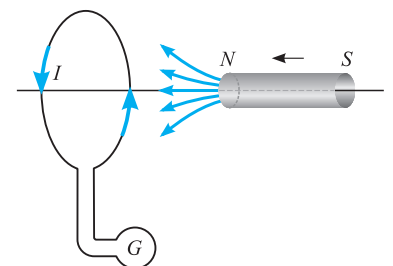


Figura 33.1.

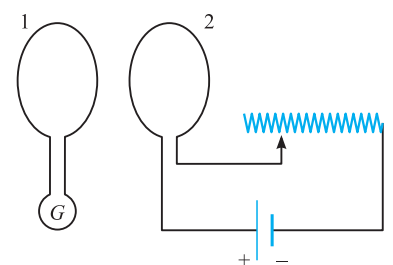


Figura 33.2.

Parece ser que el primero en descubrir los fenómenos de inducción fue Henry y, de forma casi simultáneamente, Faraday, el cual fue el primero en darlo a conocer mediante una memoria presentada en septiembre de 1831 a la Royal Society.

### 33.2 Flujo del campo magnético **B**. Ley de Gauss del magnetismo

La definición de flujo de un campo a través de una superficie fue establecida de forma general y estudiado en particular para el campo electrostático. Ahora, de forma completamente análoga, definimos el flujo elemental,  $d\phi_B$ , del campo magnético  $\mathbf{B}$ , a través del elemento de superficie,  $d\mathbf{A}$ , mediante la expresión:

$$d\phi_B = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA$$

siendo  $\mathbf{n}$  el vector unitario normal al elemento  $dA$ .

El flujo total a través de la superficie  $A$ , será:

Flujo de inducción

$$\phi_B = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad [33.1]$$

De esta expresión se deduce, para el flujo magnético, la ecuación de dimensiones:

$$[\phi_B] = [\mathbf{B}]L^2 = ML^2T^{-2}I^{-1}$$

La unidad de flujo magnético en el sistema internacional de unidades es el Tesla (T) metro cuadrado, que se denomina Weber (Wb).

$$1 \text{ Weber} = 1 \text{ Tesla} \cdot \text{m}^2$$

Hay que hacer notar que el campo magnético  $\mathbf{B}$  o inducción magnética, puede ahora verse como el flujo por unidad de área; de aquí que también se le denomine *densidad de flujo magnético* y pueda ser medido en  $\text{Wb} \cdot \text{m}^{-2}$ .

Al no existir masas o polos magnéticos libres, independientes de sus antagónicos, las líneas del campo magnético son siempre cerradas. Por tanto, a través de cualquier superficie cerrada, el flujo entrante debe ser igual al saliente, y en definitiva, *el flujo neto del campo magnético  $\mathbf{B}$* , a través de cualquier superficie cerrada, es siempre nulo,

Ley de Gauss

$$\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad [33.2]$$

lo que constituye la *ley de Gauss del magnetismo*, expresada en forma integral.

Análogamente a como se hizo para el campo electrostático, en el cual, a partir de la ley de Gauss en forma integral [28.36] se obtuvo la misma ley en forma diferencial [28.55]; ahora, siguiendo un proceso completamente análogo, pasaremos de la ley de Gauss del magnetismo expresada en forma integral a su expresión en forma diferencial, que es:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad [33.3]$$

### 33.3 Fuerza electromotriz inducida. Ley de Faraday-Henry

En un campo magnético de intensidad constante  $\mathbf{B}$ , coloquemos un conductor rectangular, uno de cuyos lados,  $AC$ , se puede deslizar paralelamente a sí mismo

(Figura 33.3). Si desplazamos este lado con una velocidad  $\mathbf{v}$ , los electrones libres que contiene están sometidos a la fuerza de Lorentz,

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Lo que equivale a la existencia de un campo inducido por el movimiento.

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

La circulación de este campo a lo largo del circuito será igual a la fuerza electromotriz inducida, pero el campo sólo tiene existencia dentro de la varilla móvil, por lo cual es:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \int_A^C \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \int_A^C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_A^C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{k} dl = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l} = \\ &= -(\mathbf{v} \times \mathbf{l}) \cdot \mathbf{B} = \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{l}}{dt} \cdot \mathbf{B} = -\frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} = -\frac{d\phi}{dt} \end{aligned} \quad [33.4]$$

Esta es la expresión de la denominada ley de Faraday-Henry: *la fuerza electromotriz inducida en un circuito es igual a la derivada respecto al tiempo, cambiada de signo, del flujo de inducción magnético que lo atraviesa*. Esta ley tiene una validez general, independiente de cuál sea la causa que provoque la variación del flujo magnético y se puede expresar:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad [33.5] \quad \text{Ley de Faraday-Henry}$$

Los campos eléctricos creados por cargas eléctricas estáticas, según vimos en [28.46], eran potenciales y en un circuito cerrado verificaban:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Esto no puede verificarse en los campos eléctricos creados por inducción, ya que si fuera nulo el segundo miembro de [33.5] no tendría existencia el campo  $\mathbf{E}_i$ , de aquí que el campo eléctrico creado por inducción no puede expresarse como el gradiente de una función potencial cambiado de signo.

Queremos resaltar el profundo significado de la Ecuación [33.5], la cual establece la existencia de un campo eléctrico siempre que exista un campo magnético variable en el tiempo. En una región del espacio en la cual exista un campo magnético variable, puede ponerse de manifiesto la existencia de un campo eléctrico, con solo colocar en ella una carga eléctrica en reposo.

La Ecuación [33.4] nos permite definir la unidad de flujo magnético, que en el S.I. se denomina *weber (Wb)*, como *el flujo magnético que, al anularse en un segundo decreciendo uniformemente, induce en la espira una f.e.m. de 1 voltio*.

Para que se induzca una fuerza electromotriz en un circuito es necesario que varíe el flujo del campo magnético  $\mathbf{B}$  a través de la superficie encerrada por ese circuito, y esto puede suceder por tres causas: que cambie la superficie del circuito, que cambie el ángulo que forma esa superficie con el campo  $\mathbf{B}$  o que varíe  $\mathbf{B}$  en el tiempo.

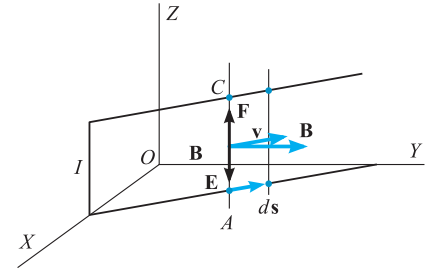
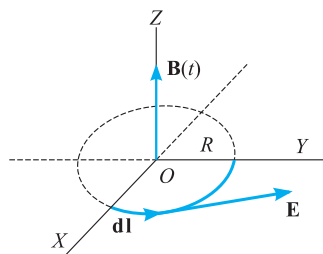


Figura 33.3. Inducción por movimiento.



**Figura 33.4.** Corriente inducida por un campo  $\mathbf{B}$  variable.

### EJEMPLO 33.1 Corriente inducida por un campo $\mathbf{B}$ variable

Consideremos un campo magnético  $\mathbf{B}$ , de dirección y sentido constantes, y cuyo módulo varía con el tiempo  $B = B(t)$ . Si colocamos una espira conductora de radio  $R$  en un plano normal al campo, calculemos la intensidad de la corriente que en ella se induce (Figura 33.4).

#### Solución:

El flujo del campo  $\mathbf{B}$  a través de la espira circular de radio  $R$ , situada en un plano normal al campo, es:

$$\Phi = \pi R^2 B(t)$$

Flujo que es variable con el tiempo, por lo cual se inducirá en la espira una f.e.m. de acuerdo con la ley de Faraday, cuyo valor es:

$$\mathcal{E}_i = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

Por la simetría del problema, en todos los puntos de la espira el campo eléctrico inducido es tangente a ella y el módulo de aquél es el mismo. Por tanto, la circulación del campo eléctrico a lo largo de la espira es:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint E dl = E \oint dl = E 2\pi R$$

y la ley de Faraday-Henry se expresa:

$$E 2\pi R = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

con lo cual, el campo inducido resulta ser:

$$E = -\frac{R}{2} \frac{dB}{dt}$$

La corriente inducida que aparece en la espira es:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r} = -\pi \frac{R^2}{r} \frac{dB}{dt}$$

siendo  $r$  la resistencia eléctrica de la espira.

## 33.4 Ley de Lenz

Lenz, en 1834, enunció la ley que lleva su nombre y que determina el sentido de la corriente inducida: *la corriente inducida tiene un sentido tal que se opone a la causa que la produce.*

Consideremos el circuito conductor rectangular, representado en la Figura 33.5, bajo la acción de un campo magnético variable con el tiempo, cuya dirección es normal a su plano y dirigido hacia el lector. Si el flujo del campo magnético a

través de la espira aumenta, la corriente inducida tendrá un sentido tal que se oponga a este aumento, es decir, tal que el campo magnético que ella crea, o campo magnético inducido, sea contrario al inductor, para lo cual, de acuerdo con [32.25] la corriente inducida,  $I$ , debe tener el sentido del giro de las agujas del reloj.

Si el flujo del campo magnético inductor a través del circuito disminuye, la corriente inducida,  $I$ , debe oponerse a esta disminución, para lo cual el campo magnético que ella crea, o campo magnético inducido, debe tener el mismo sentido del inductor y, de acuerdo con [32.25], la corriente inducida debe tener sentido contrario al del giro de las agujas del reloj.

Si la variación de flujo a través del circuito es debida al movimiento de éste o de alguna de sus partes, la corriente inducida debe ser de tal sentido, que la fuerza que sobre ella ejerza el campo  $\mathbf{B}$  se oponga al movimiento, lo que se conoce con el nombre de *frenado magnético*.

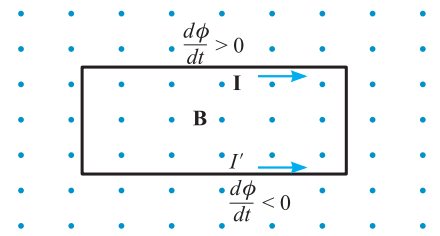


Figura 33.5. Ley de Lenz.

### EJEMPLO 33.2 Frenado magnético

Consideremos una espira rectangular de dimensiones  $a$ ,  $l$ , y un campo magnético,  $\mathbf{B}$ , uniforme, constante y limitado a una región del espacio, como se indica en la Figura 33.6. Desplacemos la espira sacándola del campo con velocidad constante  $\mathbf{v}$ . Determinemos: 1.º, la corriente inducida que la recorre y su sentido; 2.º, la fuerza magnética que se opone al movimiento; 3.º, la potencia mecánica aplicada a la espira para que se mueva con velocidad  $\mathbf{v}$  constante; 4.º, la potencia eléctrica generada, y 5.º, la potencia disipada en forma de calor.

#### Solución:

1.º El sentido de la corriente puede determinarse de dos formas:

a) Al ir sacando la espira del campo se produce una disminución del flujo del campo magnético a través del área limitada por ella, por tanto, de acuerdo con la ley de Lenz, la corriente inducida debe tener un sentido tal que el campo magnético que crea se oponga a esa disminución del flujo, es decir, su flujo debe sumarse al anterior. En consecuencia, la corriente inducida debe tener el sentido de giro de las agujas del reloj.

b) El campo magnético  $\mathbf{B}$  ejercerá sobre la corriente inducida una fuerza, que está dada por la expresión  $\mathbf{F} = I(\mathbf{u}_T \times \mathbf{B})$ , en la cual  $\mathbf{u}_T$  tiene el sentido de la corriente y este sentido ha de ser tal que la fuerza  $\mathbf{F}$  se oponga al movimiento, para lo cual, su sentido debe ser el de giro de las agujas del reloj.

El flujo del campo magnético a través de la espira es:

$$\Phi = Bl(a - x)$$

La f.e.m. inducida será:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv$$

siendo  $v$  la velocidad con que movemos la espira al sacarla del campo magnético.

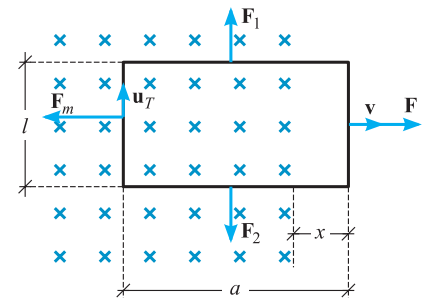


Figura 33.6. Frenado magnético.

Si la espira tiene una resistencia eléctrica total  $R$ , la corriente que circulará por ella es:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Blv}{R}$$

y su sentido, el de las agujas del reloj.

2.º El valor de las fuerza de origen magnético, que aparecen sobre los lados de la espira son:

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = (a-x)I(\mathbf{i} \times \mathbf{B}) = (a-x)IB\mathbf{j}$$

y

$$\mathbf{F}_m = Il(\mathbf{u}_T \times \mathbf{B}) = Il(\mathbf{j} \times -B\mathbf{k}) = -IlB\mathbf{i}$$

Las dos primeras no intervienen en el movimiento y  $\mathbf{F}_m$  es una fuerza que se opone al movimiento, como así debe ser de acuerdo con la ley de Lenz; por tanto, es una fuerza de frenado y el fenómeno se denomina *frenado magnético*.

Teniendo en cuenta el valor de  $I$  es  $\mathbf{F}_m$ :

$$\mathbf{F}_m = -\frac{Blv}{R}lB = -\frac{B^2l^2}{R}v\mathbf{i}$$

3.º Puesto que la espira la movemos con movimiento uniforme, la fuerza mecánica  $\mathbf{F}$ , directamente aplicada para ello y la fuerza de origen magnético  $\mathbf{F}_m$  son en todo momento iguales y opuestas,  $\mathbf{F}_m + \mathbf{F} = 0$ , y

$$\mathbf{F} = \frac{B^2l^2}{R}v\mathbf{i}$$

Para conseguir que la espira se mueva con velocidad  $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$ , debemos emplear la potencia mecánica.

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = IlBv = (Blv)^2/R$$

4.º La potencia eléctrica generada es:

$$P_e = \mathcal{E}I = BlvBlv/R = (Blv)^2/R$$

5.º La potencia eléctrica, puesto que no hay otro elemento en el circuito, sólo puede disiparse en forma de calor por efecto Joule.

$$P_c = RI^2 = R(Blv/R)^2 = (Blv)^2/R$$

Por tanto, la energía mecánica aplicada a la espira para moverla se transforma primero en energía eléctrica y finalmente en energía térmica.

Si en lugar de sacar la espira del campo, tratáramos de introducirla en él, la fuerza  $\mathbf{F}_m$  tendría sentido contrario, es decir, se opondría a esa penetración. La intensidad de la corriente tendría ahora el sentido contrario al de las agujas del reloj, pero todos los cálculos siguen siendo válidos.

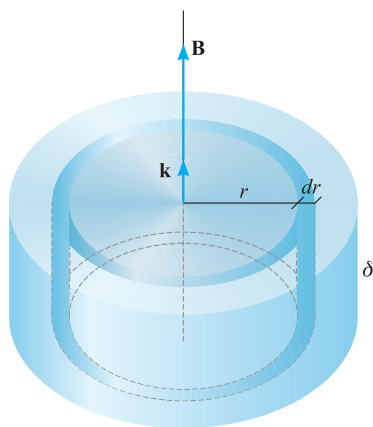


Figura 33.7.

### 33.5 Corrientes de Foucault

Cuando el conductor es una masa metálica, bien porque está inmersa en un campo magnético variable o bien porque se mueve dentro de un campo magnético, aparecen en su interior corrientes cerradas inducidas, que se denominan de Foucault y cuyo sentido se determina por la ley de Lenz.

Consideremos, como ejemplo, un disco metálico de radio  $R$ , espesor  $\delta$  y resistividad  $\rho$ , situado dentro de un campo magnético  $\mathbf{B} = B_0 \sin \omega t \mathbf{k}$  normal a él (Figura 33.7).



Por la simetría existente, las corrientes inducidas serán circunferencias de radio  $r$  y centro en el eje del disco. El flujo de  $\mathbf{B}$  a través del área limitada por estas líneas es:

$$\Phi = \pi r^2 B_0 \sin \omega t$$

Que por ser variable con el tiempo hace que se induzca una f.e.m.

$$\mathcal{E} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \pi r^2 B_0 \omega \cos \omega t$$

Esta f.e.m. hace que circulen los electrones libres estableciéndose una corriente en el anillo comprendido entre  $r$  y  $r + dr$  y espesor  $\delta$ , cuya resistencia, eléctrica aplicando la [31.12], es:

$$R_e = \rho \frac{2\pi r}{\delta dr}$$

y la intensidad de la corriente:

$$dI = \frac{\mathcal{E}}{R_e} = - \frac{r B_0 \omega \delta}{2\rho} \cos \omega t dr$$

Por efecto Joule se disipará en forma de calor la potencia:

$$dP = \mathcal{E} dI = \frac{\pi B_0^2 \omega^2 \delta}{2\rho} \cos^2 \omega t r^3 dr$$

que integrada para todo el disco es:

$$P = \frac{\pi B_0^2 \omega^2 \delta}{2\rho} \cos^2 \omega t \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi B_0^2 \omega^2 \delta}{8\rho} R^4 \cos^2 \omega t$$

El valor medio en un periodo de la potencia disipada, puesto que es  $\langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$ , es:

$$\langle P \rangle = \frac{\pi B_0^2 \delta}{16\rho} R^4 \omega^2$$

Que resulta proporcional al cuadrado de la frecuencia angular del campo  $\mathbf{B}$  aplicado.

Esta potencia disipada provoca un calentamiento que se aprovecha en las placas y hornos de inducción, en los cuales el material que se desea calentar o fundir es sometido a muy fuertes variaciones de flujo magnético, que da lugar a corrientes inducidas intensas.

Si una placa conductora está dentro de un campo magnético  $\mathbf{B}$ , por ejemplo normal a ella, como se indica en la Figura 33.8, y tratamos de sacarla de él desplazándola, provocaremos una variación de flujo del campo magnético a su través y se inducirán en ella corrientes de Foucault. El campo  $\mathbf{B}$  ejercerá una fuerza sobre estas corrientes, que de acuerdo con la ley Lenz se opondrá al movimiento de la placa, teniendo que ejercer un trabajo para sacarla del campo y disipándose una energía equivalente por efecto Joule dentro de la placa.

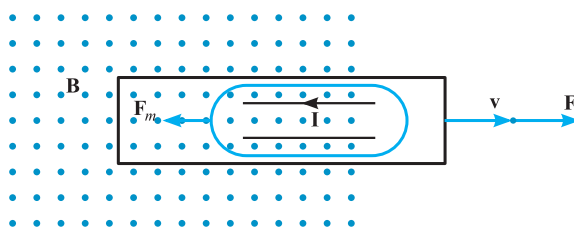


Figura 33.8.

### 33.6 Inducción mutua

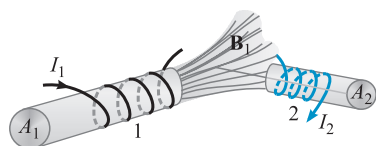


Figura 33.9. Inducción mutua.

Consideremos dos circuitos, 1 y 2, situados en presencia uno del otro (Figura 33.9). La corriente  $I_1$ , que circula por el circuito 1 crea un campo magnético que tendrá un cierto flujo a través del circuito 2,  $\Phi_{21} = \int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{A}_2$ . Éste dependerá de las características, disposición relativa de las bobinas e intensidad de la corriente en la 1. Además, la corriente en el circuito 2,  $I_2$ , creará un campo magnético que tendrá un flujo a través del propio circuito 2,  $\Phi_{22} = \int \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{A}_2$ .

Por tanto, el flujo total a través del circuito 2 es,  $\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}_2$ , siendo  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ .

Análogamente, el flujo total a través del circuito 1 es el debido al campo creado por el 2, más el creado por el 1,  $\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}$ .

Puesto que los flujos son proporcionales a las corrientes que los crean, podemos escribir:

$$\Phi_1 = M_{11}I_1 + M_{12}I_2 \quad \text{y} \quad \Phi_2 = M_{21}I_1 + M_{22}I_2 \quad [33.6]$$

A los coeficientes  $M_{ij}$  se les denomina de inducción mutua y a los  $M_{ii}$  de autoinducción; a estos, en general, se les simboliza con la letra  $L$ .

Su ecuación de dimensiones es:

$$[M] = \Phi I^{-1} = ML^2T^{-2}I^{-2}$$

Su unidad se denomina *Henrio (H)*.

Consideremos dos bobinas cilíndricas coaxiales de igual radio,  $r$ , y longitud,  $l$ ; una formada por  $N_1$  espiras y la otra por  $N_2$  (Figura 33.10). Si por la primera circula una corriente  $I_1$ , el campo magnético  $\mathbf{B}_1$  creado es,  $B_1 = \mu_0 I_1 N_1 / l$ .

El flujo de este campo a través de la bobina 2 es:

$$\Phi_{21} = N_2 B_1 A_2 = N_2 A \mu_0 I_1 N_1 / l = \mu_0 N_1 N_2 \frac{A}{l} I_1 = M_{21} I_1 \quad [33.7]$$

Siendo el coeficiente de inducción:

$$M_{21} = \mu_0 N_1 N_2 \frac{A}{l} \quad [33.8]$$

La relación [33.7] permite definir el *coeficiente de inducción mutua* como *el cociente entre el flujo a través de uno de los circuitos del campo magnético creado por el otro y la intensidad que circula por éste*,  $M_{21} = \Phi_{21} / I_1$ . No obstante, si el flujo a través del circuito 2 no es variable con el tiempo, no se inducirá en éste f.e.m. alguna y en, consecuencia, tampoco habrá corriente inducida.

Al variar la corriente en la bobina 1, variará el flujo del campo magnético a través de la bobina 2 y, en, consecuencia, se inducirá en ella una f.e.m.,  $\mathcal{E}_{21}$ ,

$$\mathcal{E}_{21} = - \frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad [33.9]$$

Podemos ahora decir que entre dos circuitos hay una *inducción mutua de un henrio cuando al variar la corriente en uno a razón de un amperio por segundo se induce en el otro una f.e.m. de un voltio*.

En los diagramas eléctricos, para indicar la inducción mutua entre dos circuitos, se emplea el símbolo:



**EJEMPLO 33.3 Inducción mutua entre dos bobinas cilíndricas**

Un caso de singular importancia es aquel en el que las dos bobinas son coaxiales, una de ellas de longitud  $l_1$ , con  $N_1$  espiras de sección  $A_1$  y la otra con  $N_2$  espiras de sección  $A_2$  y longitud  $l_2$ , muy pequeña en comparación con  $l_1$ , situada en el centro de la anterior (Figura 33.11). Determinemos el coeficiente de inducción entre ambas.

**Solución:**

El campo creado por la bobina 1 es:

$$B = \mu_0 \frac{N_1 I_1}{l_1} = \mu_0 n_1 I_1$$

El flujo de este campo a través de la bobina 2 es:

$$\Phi_2 = N_2 A_2 B = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A_2}{l_1} I_1$$

Con lo cual, en este caso, el coeficiente de inducción mutua es:

$$M_{12} = \frac{\Phi_2}{I_1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A_2}{l_1} \quad [33.10]$$

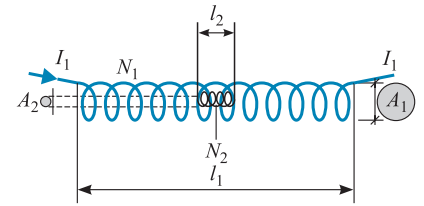


Figura 33.11.

**EJEMPLO 33.4 Coeficiente de inducción mutua entre dos bobinas toroidales**

Consideremos dos arrollamientos sobre una misma superficie toroidal, que tienen  $N_1$  y  $N_2$  espiras respectivamente y sin contacto eléctrico entre sí. Por el primero circula una corriente de intensidad  $I$  variable con el tiempo. Determinemos el coeficiente de inducción mutua entre ambas bobinas (Figura 33.12).

**Solución:**

La corriente del circuito 1 creará dentro del toroide un campo magnético  $B$  que podemos suponer uniforme al ser  $R_2 \ll R_1$  y cuyo valor es:

$$B_1 = \mu_0 n_1 I_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1$$

Siendo  $l$  la longitud de la circunferencia directriz del toroide  $l = 2\pi R_1$ .

Este campo dará un flujo a través del circuito 2,

$$\Phi_{21} = N_2 A B_1 = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{l} I_1$$

En la que  $A$  es el área de la sección normal del toroide  $A = \pi R_2^2$ .

Al ser la intensidad de la corriente en el circuito 1 variable con el tiempo, se inducirá en el circuito 2 una fuerza electromotriz, que de acuerdo con la [33.9] es:

$$\mathcal{E}_2 = - \frac{d\Phi_{21}}{dt} = - M \frac{dI_1}{dt} = - \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{l} \frac{dI_1}{dt}$$

Por tanto, el coeficiente de inducción entre ambos arrollamientos es:

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{l} \quad [33.11]$$

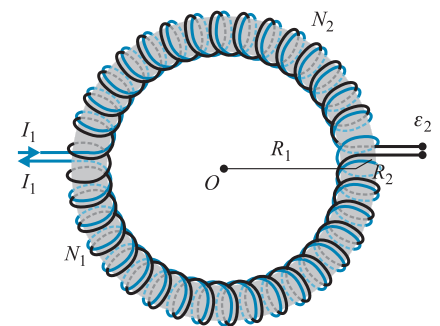


Figura 33.12.

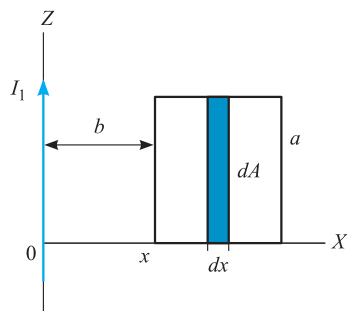


Figura 33.13.

### EJEMPLO 33.5 Coeficiente de inducción mutua entre dos circuitos

Determinemos el coeficiente de inducción mutua entre un conductor rectilíneo indefinido, que transporta la corriente  $I_1$ , y una espira conductora cuadrada, de lado  $a$ , coplanaria con el conductor y situada como se indica en la Figura 33.13.

#### Solución:

El campo creado por el conductor es normal al plano de la espira y en el sistema de referencia elegido se expresa:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \mathbf{j}$$

siendo  $x$  la distancia del punto del campo al conductor.

El flujo elemental a través del elemento de área  $d\mathbf{A} = a \, dx \, \mathbf{j}$ , es:

$$d\Phi_{21} = \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{A} = B_1 a \, dx = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} a \, dx$$

que integrado para toda la espira nos da el flujo total:

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi} \int_b^{b+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi} \ln \frac{a+b}{b}$$

Con lo cual el coeficiente de inducción mutua es:

$$M = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{a+b}{b}$$

### 33.7 Autoinducción

La corriente que recorre un circuito produce un campo magnético, cuyo valor  $\mathbf{B}$ , de acuerdo con la Ley de Biot y Savart, es proporcional a la intensidad de la corriente eléctrica,  $I$ , que recorre el circuito. Este campo magnético tendrá un cierto flujo a través del propio circuito que lo ha producido, flujo que resultará también proporcional a  $I$ , y que se denomina *flujo propio*, pudiendo expresarse:

$$\Phi = LI \tag{33.12}$$

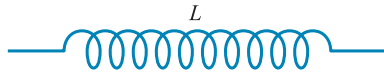
Al coeficiente de proporcionalidad  $L$  se le denomina *coeficiente de autoinducción*. Por tanto, el coeficiente de autoinducción de un circuito puede calcularse como *el flujo a través de él, del campo magnético que él mismo crea, dividido por la corriente que lo recorre*. Las dimensiones y unidades de  $L$  son, evidentemente las mismas que las de  $M$ .

Al variar la intensidad de la corriente en el circuito, variará el flujo a través de él, del campo magnético creado y, de acuerdo con la ley de Faraday, aparecerá en el circuito una fuerza electromotriz que se denomina de autoinducción,

$$\mathcal{E} = -d\Phi/dt = -LdI/dt \tag{33.13}$$

Pudiendo definirse ahora el *henrio* como *la autoinducción de un circuito, en el que se induce una f.e.m. de un voltio cuando la corriente eléctrica que lo recorre varía uniformemente a razón de un amperio por segundo*.

En los diagramas eléctricos, para simbolizar la autoinducción en un circuito, se utiliza el símbolo



### EJEMPLO 33.6 Coeficiente de autoinducción de una bobina toroidal

Calculemos el coeficiente de autoinducción de un solenoide toroidal de  $N$  espiras, longitud  $l$  de su circunferencia media y sección  $A$  muy pequeña, recorrido por una corriente de intensidad  $I$  (Figura 33.14).

#### Solución:

El campo magnético en su interior, de acuerdo con la [32.40] es  $B = \mu_0 n I$  y podemos admitir que es constante en toda la sección  $A$ , con lo cual el flujo propio es:

$$\Phi = NBA = N\mu_0 n IA = \mu_0 IA \frac{N^2}{l}$$

y, en consecuencia, el coeficiente de autoinducción del solenoide toroidal es:

$$L = \mu_0 A \frac{N^2}{l} = \mu_0 N^2 \frac{R_2^2}{2R_1} \quad [33.14]$$

Siendo  $R_1$  el radio de la circunferencia directriz y  $R_2$  el radio de la circunferencia generatriz del toroide. A este mismo resultado podíamos haber llegado con sólo hacer en la [33.12]  $N_1 = N_2 = N$ .

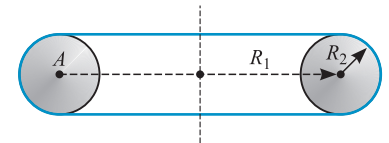


Figura 33.14. Bobina toroidal.

### EJEMPLO 33.7 Coeficiente de autoinducción de un solenoide cilíndrico

Consideremos un solenoide cilíndrico de sección recta  $A$ , longitud  $l$ , con  $N$  espiras y recorrido por una corriente de intensidad  $I$  (Figura 33.15). Calculemos su coeficiente de autoinducción.

#### Solución:

Este caso se obtiene haciendo  $N_1 = N_2$  en el Ejemplo 33.3 y el coeficiente de autoinducción buscado se obtiene haciendo  $N_1 = N_2$  en la Expresión [33.10], resultando:

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{l} \quad [33.15]$$

Si las espiras están juntas y el diámetro del hilo de la bobina es  $d$ , al ser  $l = Nd$ , el coeficiente de autoinducción se expresa:

$$L = \mu_0 \frac{NA}{d} \quad [33.16]$$

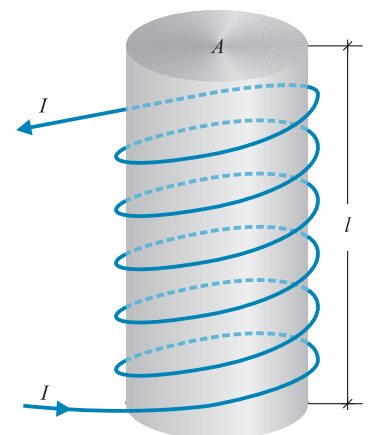


Figura 33.15. Solenoide cilíndrico.

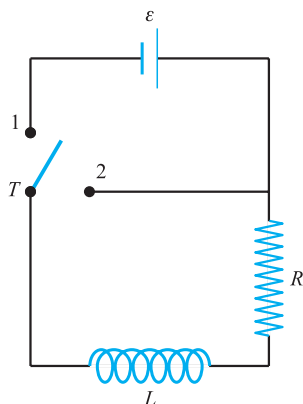


Figura 33.16.

### 33.8 Corriente de cierre y apertura de un circuito

Sea un circuito con una autoinducción  $L$ , un generador de f.e.m. y una resistencia eléctrica total  $R$  (Figura 33.16). Llamemos  $I_e$  a la intensidad que recorrerá el circuito cuando éste alcance el régimen estacionario, cuyo valor es:

$$I_e = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad [33.17]$$

Analicemos cómo se establece la corriente en un circuito de este tipo y qué fenómenos acompañan a su interrupción.

*Cierre del circuito:* desde el momento en que se cierra el circuito, mediante el interruptor  $T$ , hasta que alcanza el régimen estacionario, la intensidad  $I$  que circula por él va aumentando y, en consecuencia, se induce una f.e.m., siendo la ecuación del circuito:

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_i = RI$$

que, teniendo en cuenta la [33.13], se escribe:

$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = RI \quad [33.18]$$

y al dividir por  $R$ , teniendo en cuenta la [33.17], es:

$$I_e - \frac{L}{R} \frac{dI}{dt} = I$$

Al valor  $L/R = \tau$  se le denomina *constante de tiempo del circuito* y la ecuación anterior puede escribirse:

$$I_e - I = \tau \frac{dI}{dt} \quad \text{o} \quad \frac{dI}{I_e - I} = \frac{dt}{\tau}$$

cuya integración da:

$$\ln(I_e - I) = -\frac{t}{\tau} + \text{cte}$$

y puesto que para  $t = 0$  es  $I = 0$ , resulta que la constante de integración es  $\text{cte} = \ln I_e$ , lo que permite escribir:

$$\ln \frac{I_e - I}{I_e} = -\frac{t}{\tau}$$

Tomando antilogaritmos,

$$\frac{I_e - I}{I_e} = e^{-t/\tau}$$

y la expresión de la corriente que circula por el circuito en función del tiempo es:

$$I = I_e(1 - e^{-t/\tau}) \quad [33.19]$$

De aquí que podamos definir la constante de tiempo de un circuito, como el tiempo que requiere dicho circuito para que la intensidad que lo recorre alcance el valor  $I = I_e(1 - 1/e)$ . Si la constante de tiempo  $\tau = L/R$  es grande, la intensidad de la corriente tiende lentamente al valor  $I_e$ , pero si  $\tau$  es pequeño, la intensidad de

la corriente tiende rápidamente a  $I_e$ , como se observa analizando la pendiente de la curva  $I = I(t)$  (Figura 33.17),

$$\frac{dI}{dt} = \frac{I_e}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Cuyo valor en el origen es:

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_0 = \frac{I_e}{\tau}$$

*Apertura del circuito:* supongamos al circuito en régimen estacionario recorrido por una intensidad  $I_e$ . Al abrir el interruptor  $T$ , sin más precauciones, se interrumpe bruscamente la intensidad y se induce una f.e.m. muy elevada, que se opone a esa interrupción y se manifiesta con la aparición de chispas en el interruptor, existiendo peligro de deterioro en las diferentes partes del circuito. Este proceso de apertura del circuito no se puede someter a cálculo, ya que el valor de la resistencia del circuito cerrado por arco de chispa es indeterminado.

El problema de la apertura del circuito se puede resolver intercalando en el circuito un reostato y bajando con él gradualmente la intensidad, o montando en paralelo con el interruptor un condensador de modo que al cortar aquel se cargue el condensador, que se descargará posteriormente en el circuito, o cortocircuitando al generador, lo que sucede al llevar el interruptor a la posición 2. En este caso, al ser  $\mathcal{E} = 0$ , la [33.17] se escribe:

$$-L \frac{dI}{dt} = RI \quad [33.20]$$

y cuya integración da:

$$I = I_e e^{-t/\tau} \quad [33.21]$$

poniéndose de manifiesto que la corriente decrece exponencialmente, tanto más rápidamente como menor es  $\tau$ . Ahora  $\tau$  es el tiempo necesario para que la corriente tome el valor  $I_e/e$  y se denomina *tiempo de relajación*.

### 33.9 Energía del campo magnético asociado a una autoinducción

A partir de la Ecuación [33.18], multiplicándola por  $I dt$ , se obtiene el balance energético del circuito durante el intervalo de tiempo  $dt$

$$\mathcal{E}I dt - LI dI = RI^2 dt$$

o bien,

$$\mathcal{E}I dt = RI^2 dt + d\left(\frac{1}{2} LI^2\right)$$

en donde cada término representa: la energía que en el intervalo  $dt$  proporciona al circuito el generador ( $\mathcal{E}I dt$ ), consume la resistencia ( $RI^2 dt$ ) y consume o almacena la autoinducción  $d(1/2 LI^2)$ . A esta última se le denomina energía electromagnética asociada a la autoinducción y su valor, calculado por integración durante el tiempo en que  $I$  va aumentando desde cero hasta que alcanza el valor estacionario  $I_e$  es:

$$W_L = \int_0^{I_e} d\left(\frac{1}{2} LI^2\right) = \frac{1}{2} LI_e^2 \quad [33.22]$$

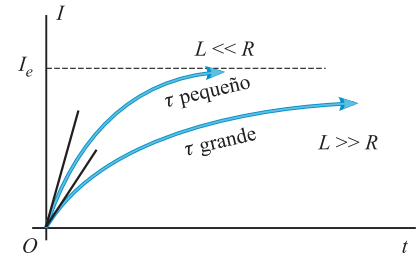


Figura 33.17.

Energía que queda almacenada en el campo magnético creado por la autoinducción.

En el instante en que se corta o abre el circuito y hasta que la intensidad en el mismo se anula, esta energía es restituida al circuito, disipándose en el mismo a través de la resistencia, como podemos comprobar, multiplicando por  $I dt$  la expresión [33.20] que da la intensidad de apertura del circuito, obteniéndose:

$$-LI dI = RI^2 dt$$

o bien,

$$d\left(\frac{1}{2} LI^2\right) + RI^2 dt = 0$$

que integrada, es:

$$\int_{I_e}^0 d\left(\frac{1}{2} LI^2\right) + \int_0^{\infty} RI^2 dt = 0$$

$$\int_0^{\infty} RI^2 dt = \frac{1}{2} LI_e^2$$

ya que para  $t = 0$  es  $I = I_e$  y para  $t = \infty$  es  $I = 0$ .

### 33.10 Densidad de energía del campo magnético

La energía electromagnética almacenada en el campo magnético creado por un solenoide toroidal de  $N$  espiras muy apretadas, longitud de la circunferencia media  $l$  y sección transversal  $A$ , está dada por la expresión [33.22]. Sustituyendo en ella el valor del coeficiente de autoinducción de una bobina toroidal, dado por la [33.14] nos da, para la energía almacenada en el campo magnético, el valor:

$$W_L = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{AN^2}{l} I_e^2$$

Por otra parte, el campo magnético creado por un solenoide toroidal está confinado en el interior de él y su valor es:

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I_e$$

con lo cual, despejando  $I_e$  y llevando su valor a la ecuación anterior, resulta:

$$W_L = \frac{1}{2\mu_0} A \cdot l \cdot B^2 = \frac{1}{2\mu_0} V \cdot B^2$$

siendo  $V$  el volumen en el que existe campo magnético.

La densidad de energía o energía por unidad de volumen almacenada en el campo magnético es:

Densidad de energía  
del campo magnético

$$w_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \quad [33.23]$$

Expresión que, aún cuando ha sido deducida para un solenoide toroidal, tiene validez general. En las regiones del espacio en las que existan simultáneamente un



campo eléctrico y uno magnético, la densidad de energía por unidad de volumen será:

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad [33.24]$$

Densidad de energía del campo electromagnético

y si el medio no es el vacío, será:

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 \quad [33.25]$$

### EJEMPLO 33.8 Energía magnética almacenada en el campo entre los conductores de un cable coaxial, densidad media de energía y coeficiente de autoinducción

Consideremos un cable coaxial como el indicado en la Figura 33.18, que transporta la corriente  $I$ . Hallemos para una longitud  $l$  del mismo:

- La energía almacenada en el campo magnético existente entre los conductores.
- La densidad media de energía almacenada.
- El coeficiente de autoinducción del mismo.

#### Solución:

- Por la simetría axial del problema, es de fácil aplicación en teorema de Ampère:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

Calculemos la circulación a lo largo de una circunferencia coaxial con el cable y de radio  $r$ ,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint B ds = B \oint ds = 2\pi r B$$

Con ello, el teorema de Ampère se escribe:

$$2\pi r B = \mu_0 I$$

y el módulo del campo magnético  $B$  es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

La densidad de energía está dada por la [33.23], resultando:

$$w_m = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

En un elemento de volumen  $dv$ , la energía almacenada es:

$$dW_m = w_m dv$$

Como elemento de volumen, tomaremos la corona cilíndrica de longitud  $l$ , comprendida entre dos superficies cilíndricas coaxiales de radios  $r$  y  $r + dr$ , cuyo valor es:

$$dv = 2\pi r l dr$$

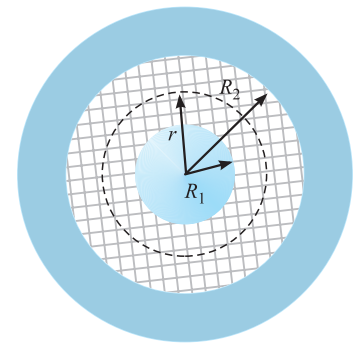


Figura 33.18. Cable coaxial.

Este elemento de volumen almacena la energía:

$$dW_m = w_m dv$$

Integrando entre  $R_1$  y  $R_2$ , obtenemos la energía total almacenada:

$$W_m = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

b) La densidad media de energía magnética en el espacio comprendido entre los conductores del cable coaxial la obtenemos al dividir la energía total almacenada por el volumen:

$$\langle w_m \rangle = \frac{W_m}{Vol} = \frac{\frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}}{\pi(R_2^2 - R_1^2)l} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2(R_2^2 - R_1^2)} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

c) Teniendo en cuenta la [33.22] podemos deducir el coeficiente de autoinducción para la longitud  $l$  del cable coaxial

$$\frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2} LI^2$$

de donde,

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

### 33.11 Descarga de un condensador en un circuito con autoinducción

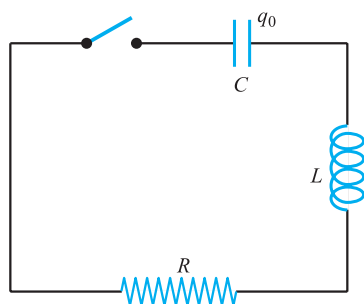


Figura 33.19. Circuito  $R, L, C$ , serie.

Estudiemos la descarga de un condensador de capacidad  $C$  a través de un circuito de resistencia  $R$  y autoinducción  $L$  (Figura 33.19). Supongamos que, inicialmente, el circuito está abierto y el condensador tiene una carga  $q_0$ . Al cerrar el circuito se establece en éste una corriente y, al cabo de un cierto instante, el valor de la intensidad de ésta será  $I$ , siendo en ese momento la carga que queda en el condensador  $q$ . La energía en el circuito se almacena en el condensador y en el campo magnético creado por la autoinducción, disipándose únicamente en la resistencia. La variación en el tiempo de la energía almacenada debe ser igual a la energía disipada, lo que se expresa:

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} LI^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right) = RI^2$$

que se transforma en:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = 0$$

y teniendo en cuenta que  $I = dq/dt$ , resulta:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \tag{33.26}$$

ecuación diferencial de segundo orden, con coeficientes constantes cuya ecuación característica es:

$$Lx^2 + Rx + \frac{1}{C} = 0$$

de soluciones:

$$x_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-R - \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L}$$

cuya realza depende del valor  $\Delta = R^2 - (4L/C)$  pudiéndose dar los siguientes casos:

1.  $\Delta > 0$ , para lo cual deberá ser  $R > 2\sqrt{L/C}$ . En este caso, tanto  $x_1$  como  $x_2$  son reales y negativas. La solución general de la [33.24] es de la forma:

$$q = A_1 e^{x_1 t} + A_2 e^{x_2 t}$$

En la que las constantes de integración se determinan por las condiciones iniciales  $q(0) = q_0$  y  $\dot{q}(0) = 0$ , de la siguiente forma:

Particularicemos la solución general para  $t = 0$ .

$$q_0 = A_1 + A_2$$

Derivemos la solución general respecto al tiempo y particularicemos para  $t = 0$ .

$$q = A_1 x_1 e^{x_1 t} + A_2 x_2 e^{x_2 t}, \quad 0 = A_1 x_1 + A_2 x_2$$

Ésta y la antepenúltima permiten obtener las constantes de integración  $A_1$  y  $A_2$

$$A_1 = -\frac{x_2}{x_1 - x_2} q_0 \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{x_1}{x_1 - x_2} q_0$$

con lo que la solución general se escribe de la forma:

$$q = \frac{q_0}{x_1 - x_2} (x_1 e^{x_2 t} - x_2 e^{x_1 t})$$

que da la carga en función del tiempo y de los parámetros que caracterizan al circuito.

La intensidad que circula en función del tiempo es:

$$I = \frac{x_1 x_2 q_0}{x_1 - x_2} (e^{x_2 t} - e^{x_1 t})$$

En la Figura 33.20 se han representado las funciones  $q = q(t)$  e  $I = I(t)$ .

Dentro de este caso se puede considerar aquél en el que la autoinducción es despreciable, en el cual al ser  $L = 0$ , la Ecuación [33.26] queda:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

de donde se obtienen las soluciones:

$$q = q_0 e^{-(t/RC)} \quad \text{e} \quad I = \frac{q_0}{RC} e^{-(t/RC)}$$

que representan los valores de  $q$  e  $I$  al descargarse el condensador a través de la resistencia  $R$ .

2.  $\Delta = 0$ . En este caso, la solución de la ecuación característica es doble y su valor es:

$$x = -\frac{R}{2L}$$

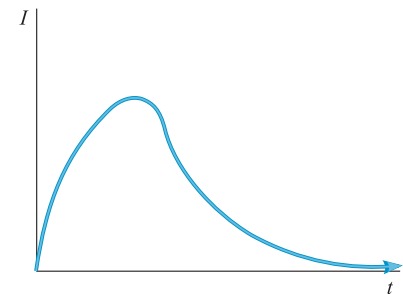
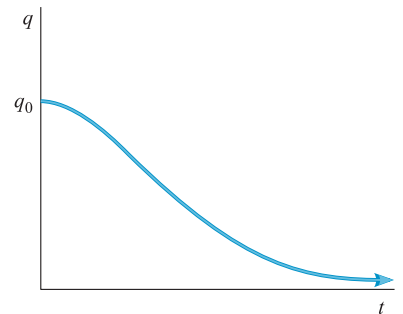


Figura 33.20. Carga e intensidad en función del tiempo.

Con ella, la carga y la intensidad se expresan en función del tiempo de la forma:

$$q = q_0(1 + xt)e^{-xt}$$

$$I = q_0 x^2 t e^{-xt}$$

A este régimen de descarga se le llama *crítico* y al valor de la resistencia  $R$ , que anula a  $\Delta$ :

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

se llama *resistencia crítica*.

3.  $\Delta < 0$ . Para ello, debe ser  $R < 2\sqrt{L/C}$  y las soluciones  $x_1$  y  $x_2$  son imaginarias

$$x_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}} \mathbf{j}$$

y

$$x_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}} \mathbf{j}$$

Si llamamos

$$\frac{R}{2L} = \lambda \quad \text{y a} \quad \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}} = \omega$$

queda:

$$x_1 = -\lambda + j\omega$$

$$x_2 = -\lambda - j\omega$$

Con ello, la solución general se escribe de la forma:

$$q = A_1 e^{-\lambda t + \omega t j} + A_2 e^{-\lambda t - \omega t j} =$$

$$= e^{-\lambda t} [A_1 (\cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t) + A_2 (\cos \omega t - j \operatorname{sen} \omega t)] =$$

$$= e^{-\lambda t} [(A_1 + A_2) \cos \omega t + (A_1 - A_2) j \operatorname{sen} \omega t]$$

que haciendo  $A_1 + A_2 = A \cos \varphi$  y  $(A_1 - A_2)j = -A \operatorname{sen} \varphi$  resulta:

$$q = A e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi)$$

y la intensidad:

$$I = -A e^{-\lambda t} [\lambda \cos(\omega t + \varphi) + \omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)] \quad [33.27]$$

Puesto que en el instante inicial,  $t = 0$ , es  $I = 0$ , se verifica:

$$0 = \lambda \cos \varphi + \omega \operatorname{sen} \varphi \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = -\frac{\lambda}{\omega}$$

Teniendo esto en cuenta, al desarrollar la [33.27] resulta:

$$I = A_1 e^{-\lambda t} \operatorname{sen} \omega t \quad [33.28]$$

en la que es:

$$A_1 = A \sqrt{\lambda^2 + \omega^2}$$

En el caso particular de ser el valor de  $R$  prácticamente nulo, la Ecuación [33.26] se reduce a:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$$

cuya solución es:

$$q = L^2 C q_0 \cos \frac{t}{LC}$$

que es una oscilación periódica no amortiguada. En efecto, al no haber pérdidas por efecto Joule a través de la resistencia  $R$ , la energía que suministra el condensador es almacenada en el campo magnético asociado a la autoinducción, pasando luego de ésta al condensador y así sucesivamente.

### 33.12 Analogías electromecánicas

La Ecuación [33.25],  $L\ddot{q} + R\dot{q} + (1/C)q = 0$  es formalmente análoga a la ecuación diferencial que describía el movimiento libre amortiguado  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ . Ello lleva a establecer las siguientes analogías entre magnitudes mecánicas y eléctricas.

**Tabla 33.1.** Analogías entre magnitudes mecánicas y eléctricas.

Magnitud mecánica		Magnitud eléctrica	
Carga del condensador .....	$q$	Desplazamiento .....	$x$
Corriente .....	$\dot{q} = I$	Velocidad .....	$\dot{x} = v$
Variación de la corriente .....	$\ddot{q} = \dot{I}$	Aceleración .....	$\ddot{x} = \dot{v} = a$
Coefficiente de autoinducción ..	$L$	Masa .....	$m$
Inversa de la capacidad .....	$1/C$	Constante elástica .....	$k$
Resistencia .....	$R$	Coefficiente de rozamiento .....	$c$
Factor de calidad .....	$Q = \frac{L\omega}{R}$	Factor de calidad .....	$Q = \frac{m\omega}{c}$
Frecuencia angular .....	$\omega$	Frecuencia angular .....	$\omega$
Energía potencial eléctrica .....	$W_e = \frac{q^2}{2C}$	Energía potencial elástica .....	$U = \frac{kx^2}{2}$
Energía potencial magnética ...	$W_m = \frac{LI^2}{2}$	Energía cinética .....	$T = \frac{mv^2}{2}$

Estas analogías permiten traducir los problemas mecánicos a sus análogos eléctricos y posibilitan, con ello, el estudio de problemas mecánicos mediante simuladores analógicos, lo que es de gran importancia en la ingeniería de diseño.



## FARADAY

Faraday nació en Newington, cerca de Londres, en 1791, de familia muy modesta, siendo educado según principios cristianos muy estrictos, que observó hasta el fin de su vida. Aprendió a leer y escribir en la escuela de la catequesis y a los 12 años tuvo que ponerse a trabajar en una librería como recadero. A los 14 años entró como ayudante en una encuadernadora, lo que le permitió leer una gran variedad de libros científicos. Un cliente, Mr. Dance, en 1812, viendo la inquietud de Faraday por el conocimiento científico, le regaló una invitación para asistir a una serie de conferencias que pronunciaría, en la *Royal Institution*, el prestigioso químico Davy, profesor de Química en esa institución. El propio Faraday escribió: *...tuve la suerte de escuchar las cuatro conferencias de Sir Humphry Davy, de las que tomé notas y luego las escribí de la forma más completa posible...* Faraday usó sus notas en dos ocasiones con desigual éxito: por un lado se las envió al presidente de la *Royal Society*, de lo que se justifica diciendo: *... mi deseo de dedicarme a la actividad científica, aunque fuese en su escala inferior, me indujo a escribir a Sir John Banks, del que, naturalmente, no tuve respuesta alguna;* por otro lado, animado por Mr. Dance, envió sus notas al propio Davy, que quedó gratamente impresionado y contrató a Faraday como ayudante en su laboratorio de Química de la citada institución.

En 1813, acompañó a Davy en un recorrido por Europa, que este debía realizar para impartir un ciclo de conferencias, lo que le permitió conocer a grandes científicos y realizar como ayudante de Davy importantes demostraciones.

A su regreso a Londres comenzó a investigar de forma independiente, en un principio en el campo de la Química, lo que le llevó a descubrir el benceno y algunos compuestos orgánicos clorados, pero a partir de 1821 comenzó sus investigaciones sobre el magnetismo y la electricidad. En 1824 fue admitido en la *Royal Institution*, no después de superar grandes dificultades, derivadas de una acusación de plagio, que le planteó Wollaston, vicepresidente de la institución, y que consiguió refutar, así como de una oposición inicial del mismo Davy.

En esta época sus investigaciones estaban dirigidas a descubrir el efecto inverso al hallado por Oersted, en 1819. Este había descubierto que la corriente eléctrica produce efectos magnéticos y el empeño de Faraday fue intentar producir corrientes a partir del magnetismo. Su

perseverancia y su tesón le llevaron, en 1831, al descubrimiento de su famosa ley de inducción: *la fuerza electromotriz inducida en un circuito de corriente eléctrica es igual, pero de sentido contrario, al flujo del campo magnético a través del circuito.*

En 1834, fruto de sus investigaciones sobre la acción de la corriente eléctrica a través de las disoluciones, emitió dos leyes sobre lo que él denominó *electrólisis*: a) *La cantidad de sustancia que deposita una corriente eléctrica es proporcional a la cantidad de electricidad que pasa por la disolución.* b) *Una misma cantidad de electricidad deposita cantidades distintas de distintas sustancias, que son proporcionales a sus equivalentes gramo.* También introdujo los términos de *ánodo* y *cátodo*, para designar, respectivamente a los electrodos positivo y negativo.

Faraday fue de alguna forma pionero en el concepto de campo, al establecer las *líneas del campo magnético* como las formadas por diminutas partículas de hierro, que situó sobre una lámina de papel dispuesta sobre un imán, las partículas se reagrupaban en líneas que iban de un polo al otro del imán, y sugirió, que las líneas así visualizadas existen de forma real aunque no sean visibles y son las que transmiten las acciones ejercidas por imanes o corrientes. Análogos estudios realizó con las acciones ejercidas por cargas eléctricas, que también consideró transportadas por las líneas de fuerza del campo.

Faraday diseñó el primer motor eléctrico, la primera dinamo y el primer transformador, así como su *Jaula de Faraday*, recinto de paredes conductoras conectadas a tierra que no permiten que penetren en su interior acciones eléctricas ni magnéticas desde el exterior. Le cabe también el honor de haber descubierto el diamagnetismo y, en 1845, el *Efecto Faraday*, efecto magneto-óptico por el que el plano de luz polarizada gira por acción de un campo magnético. Tuvo también inquietud por la unificación de las fuerzas de la naturaleza y es el único científico que ha dado nombre a dos unidades: *el faraday*, cantidad de electricidad necesaria para depositar un mol de cualquier sustancia monovalente, y *el faradio*, capacidad de un conductor que al cargarlo con un coulombio adquiere el potencial de un voltio.

En la cúspide de su carrera científica rechazó dos veces la presidencia de la *Royal Society*, así como el título de Sir, y es conocida su frase: *debo seguir siendo, simplemente, Michael Faraday.* Murió en Hampton Court, en 1867.

### 34.1 Introducción

Se conoce con el nombre de corriente alterna a toda corriente que invierte su sentido periódicamente. Aquí nos limitaremos al estudio del tipo más sencillo e interesante, que es aquél en el cual la intensidad de la corriente es función sinusoidal del tiempo.

$$I = I_M \cos(\omega t + \varphi) \quad [34.1]$$

en la que  $I_M$  es la intensidad máxima;  $\omega$ , la pulsación;  $\omega t + \varphi$ , la fase y  $\varphi$ , la fase inicial.

También puede expresarse en función del periodo:

$$I = I_M \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi\right) \quad [34.2]$$

y en función de la frecuencia  $\nu$ :

$$I = I_M \cos(2\pi\nu t + \varphi) \quad [34.3]$$

Una característica de la corriente alterna es que el valor medio de su intensidad,  $\langle I \rangle$ , durante un número entero de periodos es nulo.

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= \frac{1}{nT} \int_t^{t+nT} I dt = \frac{1}{nT} I_M \int_t^{t+nT} \cos(\omega t + \varphi) dt = \\ &= \frac{I_M}{nT\omega} [\text{sen}(\omega t + \varphi)]_t^{t+nT} = 0 \end{aligned}$$

ya que la función senoidal toma el mismo valor en los instantes  $t$  y  $t + nT$ .

- 34.1. Introducción
- 34.2. Producción de una f.e.m. alterna
- 34.3. Valor eficaz. Factores de amplitud y forma
- 34.4. Circuito con resistencia pura
- 34.5. Circuito con autoinducción pura. Reactancia inductiva
- 34.6. Circuito con capacidad pura. Reactancia capacitiva
- 34.7. Corriente alterna en un circuito  $R, L, C$ , serie. Régimen permanente
- 34.8. Representación vectorial
- 34.9. Resolución mediante complejos
- 34.10. Admitancia, conductancia y susceptancia
- 34.11. Asociación de impedancias
- 34.12. Respuesta en frecuencia
- 34.13. Potencia instantánea
- 34.14. Potencia media y aparente. Factor de potencia
- 34.15. Expresión compleja de la potencia. Potencia activa y reactiva

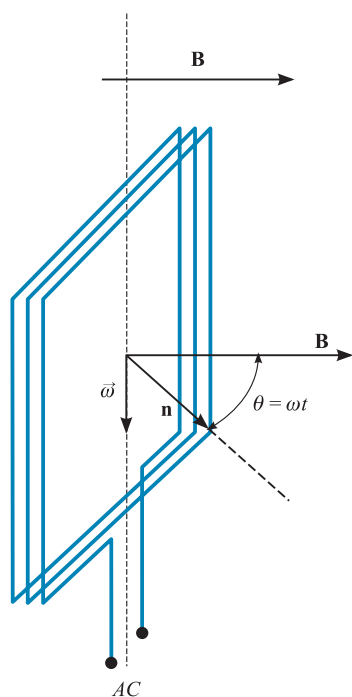


Figura 34.1. Producción de f.e.m. alterna.

### 34.2 Producción de una f.e.m. alterna

Consideremos una bobina rectangular de sección  $S$ , con  $N$  espiras, que gira con velocidad angular constante  $\omega$  en el interior de un campo magnético uniforme y constante  $\mathbf{B}$  perpendicular al eje de giro (Figura 34.1). Si es  $\theta$  el ángulo que forma la normal al plano de la bobina con la dirección del campo  $\mathbf{B}$ , y elegimos el origen de tiempos de modo que sea  $\theta = \omega t$ , el flujo del campo a través de la bobina es:

$$\phi = N \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = N \iint B \cos \omega t \, dS = NB \cos \omega t \iint dS = NSB \cos \omega t$$

y al ser el flujo variable con el tiempo, se inducirá en la bobina la f.e.m.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = NSB\omega \sin \omega t = \mathcal{E}_M \sin \omega t \tag{34.4}$$

siendo  $\mathcal{E} = NSB\omega$ . De esta forma se ha producido una f.e.m. alterna senoidal.

### 34.3 Valor eficaz. Factores de amplitud y forma

Se llama *valor eficaz de una magnitud senoidal a la raíz cuadrada del valor medio de su cuadrado*.

Para la intensidad de la corriente alterna senoidal, calculemos su valor eficaz  $I_e$ .

$$\begin{aligned} I_e &= \sqrt{\langle I^2 \rangle} = \left( \frac{1}{T} \int_0^T I^2 \, dt \right)^{1/2} = \\ &= I_M \left( \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t \, dt \right)^{1/2} = I_M \left( \frac{1}{2T} \int_0^T (1 + \cos 2\omega t) \, dt \right)^{1/2} = \\ &= I_M \left( \frac{1}{2T} \left[ t + \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right]_0^T \right)^{1/2} = \frac{I_M}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Intensidad eficaz

Análogamente, para la f.e.m. alterna, el valor eficaz será:

$$\mathcal{E}_e = \left( \frac{1}{T} \int \mathcal{E}_M^2 \sin^2 \omega t \, dt \right)^{1/2} = \frac{\mathcal{E}_M}{\sqrt{2}} \tag{34.5}$$

Tensión eficaz

Se define el *factor de amplitud de una magnitud senoidal como el cociente entre sus valores máximo y eficaz*. Tanto para la intensidad como para la f.e.m. alternas, el factor de amplitud es:

$$\frac{I_M}{I_e} = \frac{\mathcal{E}_M}{\mathcal{E}_e} = \sqrt{2} \tag{34.6}$$

Se define el *factor de forma de una magnitud senoidal como el cociente entre su valor eficaz y su valor medio en un semiperiodo sin alternancia*. Este valor es:

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} \mathcal{E}_M \sin \omega t \, dt = \frac{2}{\omega T} \mathcal{E}_M [-\cos \omega t]_0^{T/2} = \frac{2}{\pi} \mathcal{E}_M \tag{34.7}$$

y el factor de forma vale:

$$\frac{I_e}{I_m} = \frac{\mathcal{E}_e}{\mathcal{E}_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \tag{34.8}$$



Para poner de manifiesto el sentido físico de la intensidad eficaz, calculemos la energía media disipada por efecto Joule, en una resistencia  $R$ , durante un periodo. Admitiendo que *las leyes de la corriente continua son validas para valores instantáneos de la corriente alterna*, la potencia instantánea disipada es:

$$w = RI^2$$

La potencia media disipada, puesto que  $R$  es constante, es:

$$\langle w \rangle = R\langle I^2 \rangle$$

y, teniendo en cuenta la definición de intensidad eficaz, se escribe:

$$\langle w \rangle = RI_e^2$$

lo que pone de manifiesto que *la intensidad eficaz de una corriente alterna es igual al valor que necesitaría tener la intensidad de una corriente continua para disipar, por efecto de Joule, en una resistencia  $R$ , la misma energía que la corriente alterna.*

### 34.4 Circuito con resistencia pura

En el circuito de la Figura 34.2, la ley de Ohm para valores instantáneos es  $\mathcal{E} = RI$  y, puesto que  $R$  es constante, la intensidad que circula por el circuito es:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}_m \text{sen } \omega t}{R} \quad [34.9]$$

Por tanto, es de la misma frecuencia de la tensión aplicada y en fase con ella, siendo su valor máximo:

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{R}$$

es decir, la ley de Ohm no solamente se verifica para los valores instantáneos, sino también para los valores máximos y, en consecuencia, para los valores eficaces.

$$I_e = \frac{\mathcal{E}_e}{R}$$

### 34.5 Circuito con autoinducción pura. Reactancia inductiva

La ecuación del circuito de la Figura 34.3 para valores instantáneos es:

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_i = 0$$

siendo  $\mathcal{E}_i$  la f.e.m. inducida en la autoinducción, cuyo valor es:

$$\mathcal{E}_i = -L \frac{dI}{dt}$$

con lo cual, la ecuación del circuito se expresa:

$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = 0$$

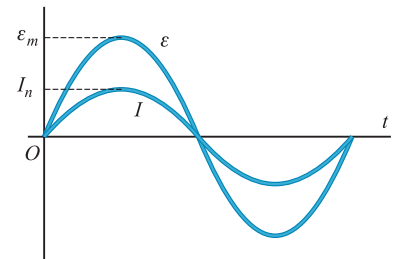
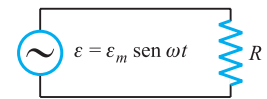


Figura 34.2. Circuito con solo resistencia.

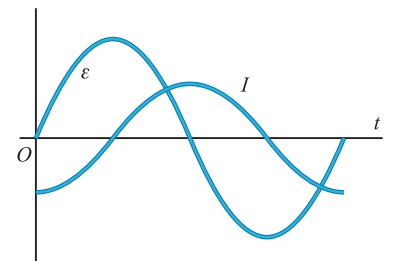
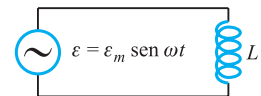


Figura 34.3. Circuito con solo autoinducción.

o bien,

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} = \frac{\mathcal{E}_m}{L} \text{sen } \omega t$$

cuya integración da:

$$I = -\frac{\mathcal{E}_m}{\omega L} \cos \omega t = \frac{\mathcal{E}_m}{\omega L} \text{sen} \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad [34.10]$$

Por tanto, la intensidad está retrasada, respecto de la tensión aplicada,  $\pi/2$  radianes y su valor máximo es:

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\omega L}$$

**Reactancia inductiva**

El factor  $\omega L$  juega el papel de una resistencia y se denomina *reactancia inductiva*. Para los valores eficaces, se verifica

$$I_e = \frac{\mathcal{E}_e}{\omega L}$$

Por tanto, las bobinas dificultarán el paso a las altas frecuencias.

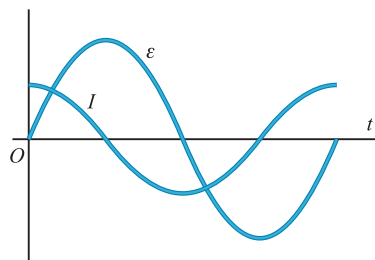
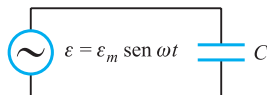


Figura 34.4. Circuito con solo capacidad.

**34.6 Circuito con capacidad pura. Reactancia capacitiva**

La ecuación del circuito de la Figura 34.4 para valores instantáneos es:

$$\mathcal{E} = \frac{q}{C}$$

Derivando esta ecuación respecto al tiempo se obtiene:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = \frac{I}{C}$$

y, puesto que es:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathcal{E}_m \omega \cos \omega t$$

resulta:

$$I = C\omega \mathcal{E}_m \cos \omega t = \frac{\mathcal{E}_m}{\frac{1}{\omega C}} \text{sen} \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad [34.11]$$

Por tanto, la intensidad está adelantada, respecto de la tensión aplicada,  $\pi/2$  radianes, y los valores máximos verifican.

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\frac{1}{\omega C}}$$

**Reactancia capacitiva**

El factor  $1/\omega C$  juega el papel de una resistencia y se denomina *reactancia capacitiva*.

Por tanto, los condensadores dificultan el paso de las bajas frecuencias y dejan pasar con facilidad las altas.

### 34.7 Corriente alterna en un circuito $R, L, C$ , serie. Régimen permanente

Consideremos el circuito de la Figura 34.5, en el que hay intercaladas una resistencia óhmica  $R$ , una bobina de autoinducción  $L$  y un condensador de capacidad  $C$ . Entre sus bornes  $A$  y  $D$  se establece una diferencia de potencial alterna sinusoidal y, en consecuencia, dicho circuito es recorrido por una intensidad también sinusoidal.

En todo instante se verifica:

$$V_A - V_D = V_A - V_B + V_B - V_C + V_C - V_D \quad [34.12]$$

en donde cada uno de los sumandos del segundo miembro son, respectivamente,

$$V_A - V_B = IR; \quad V_B - V_C = L \frac{dI}{dt} \quad \text{y} \quad V_C - V_D = \frac{q}{C} \quad [34.13]$$

siendo  $I$  y  $q$  los valores de la intensidad de la corriente y carga del condensador en ese instante. Suponiendo que la tensión aplicada en los bornes  $AD$  es  $V_A - V_D = V_M \text{sen } \omega t$ , la [34.12] se puede escribir:

$$V_M \text{sen } \omega t = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} \quad [34.14]$$

que es la ecuación del circuito. Derivando ésta respecto al tiempo, y teniendo en cuenta que es  $dq = I dt$ , resulta:

$$V_M \omega \cos \omega t = R \frac{dI}{dt} + L \frac{d^2 I}{dt^2} = \frac{I}{C} \quad [34.15]$$

ecuación diferencial de segundo orden completa.

Su integral general es la suma de la integral general de la ecuación homogénea, que es análoga a la [33.26] de la descarga de un condensador a través de una autoinducción y de una integral particular de la ecuación completa, es decir:

$$I = I_1 + I_2$$

La primera de ellas, según ya vimos, aunque teóricamente necesita un tiempo infinito para anularse, en realidad es prácticamente despreciable al cabo de un tiempo muy corto. La solución en régimen permanente está dada por la  $I_2$ , para la cual ensayaremos la forma:

$$I = I_M \text{sen } (\omega t + \varphi) \quad [34.16]$$

Llevando esta solución y sus derivadas a la [34.15], resulta:

$$\begin{aligned} V_M \omega \cos \omega t &= \omega R I_M \cos (\omega t + \varphi) - L I_M \omega^2 \text{sen } (\omega t + \varphi) + \frac{I_M}{C} \text{sen } (\omega t + \varphi) = \\ &= \left( R I_M \omega \cos \varphi - L I_M \omega^2 \text{sen } \varphi + \frac{I_M}{C} \text{sen } \varphi \right) \cos \omega t + \\ &+ \left( R I_M \omega \text{sen } \varphi + L I_M \omega^2 \cos \varphi - \frac{I_M}{C} \cos \varphi \right) \text{sen } \omega t \end{aligned}$$

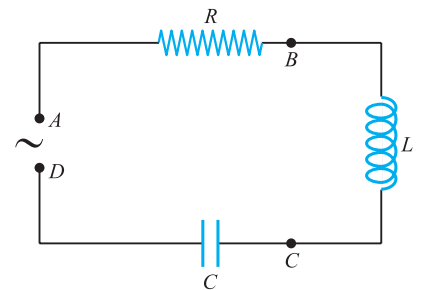


Figura 34.5. Circuito  $R, L, C$ , serie.

que exige se verifiquen:

$$I_M \left[ R\omega \cos \varphi - \left( L\omega^2 - \frac{1}{C} \right) \text{sen } \varphi \right] = V_M \omega \quad [34.17]$$

$$I_M \left[ R\omega \text{sen } \varphi + \left( L\omega^2 - \frac{1}{C} \right) \cos \varphi \right] = 0$$

De esta última se despeja:

$$\tan \varphi = \frac{\frac{1}{C\omega} - \omega L}{R} \quad [34.18]$$

que determina el desfase entre la intensidad  $I$  que recorre el circuito y la tensión  $V$  aplicada al mismo.

La determinación del valor de la intensidad máxima se consigue elevando al cuadrado y sumando las Ecuaciones [34.17], resultando:

$$I_M^2 \left[ R^2 \omega^2 + \left( L\omega^2 - \frac{1}{C} \right)^2 \right] = V_M^2 \omega^2$$

o,

$$I_M^2 \left[ R^2 + \left( L - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \right] = V_M^2$$

de donde:

$$I_M = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}} \quad [34.19]$$

En definitiva, cuando se ha establecido el régimen permanente, el circuito es recorrido por la intensidad dada por la Ecuación [34.16] y los valores de  $\varphi$  e  $I_M$  están determinados por las Ecuaciones [34.18] y [34.19], respectivamente. Al denominador de la Ecuación [34.19] se le denomina *impedancia* del circuito, designándose con  $Z$ .

Impedancia

$$Z = \sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} \quad [34.20]$$

Con ello, la citada ecuación se escribe:

$$I_M = \frac{V_M}{Z} \quad [34.21]$$

que es una generalización para la corriente alterna de la ley de Ohm, la cual también se verificará para los valores eficaces.

$$I_e = \frac{V_e}{Z} \quad [34.22]$$

Ambas ponen de manifiesto que la impedancia tiene las dimensiones de una resistencia y su unidad en el SI es el ohmio.

Hay que hacer notar que la impedancia depende, además de las características del circuito, de la pulsación  $\omega$  de la tensión aplicada. Por tanto, si la tensión aplicada es periódica, pero no sinusoidal, la impedancia no es única, ya que habría una para cada una de las pulsaciones fundamental y armónicas.

Se denomina *Reactancia* del circuito a la expresión:

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad [34.23] \quad \text{Reactancia}$$

### EJEMPLO 34.1 Resistencia y autoinducción en serie

El desfase entre la intensidad y la tensión aplicada está dado por la [34.18],

$$\tan \varphi = -\frac{\omega L}{R}$$

Expresión que nos da el ángulo  $\varphi$  de retraso de la intensidad respecto de la tensión aplicada y que pone de manifiesto que este retraso aumenta con la frecuencia.

El valor de la impedancia es:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

La intensidad máxima está dada por:

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Resultando que la intensidad disminuye al aumentar la frecuencia. La expresión de la intensidad instantánea es:

$$I = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$



Figura 34.6. Resistencia y autoinducción en serie.

### EJEMPLO 34.2 Resistencia y capacidad en serie

El desfase entre la intensidad y la tensión aplicada dado por la [34.18] es ahora:

$$\tan \varphi = \frac{X_C}{R} = \frac{1}{R\omega C}$$

Por tanto, la intensidad está adelantada respecto de la tensión un ángulo  $\varphi$ , tanto mayor cuanto menor es la frecuencia.

La impedancia del circuito es ahora:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

y el valor de la intensidad máxima es:

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$

En consecuencia, la intensidad aumenta al aumentar la frecuencia. La expresión de la intensidad instantánea es:

$$I = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \sin(\omega t + \varphi)$$

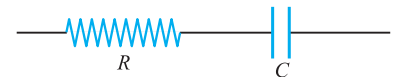


Figura 34.7. Resistencia y capacidad en serie.



Figura 34.8. Inducción y capacidad en serie.

### EJEMPLO 34.3 Autoinducción y capacidad en serie

El defase entre la intensidad y la tensión aplicada verifica:

$$\tan \varphi = \pm \infty$$

siendo  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  si es  $X_C > X_L$  y  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  si es  $X_C < X_L$ . La intensidad está en cuadratura con la tensión aplicada, adelantada en el primer caso y retrasada en el segundo.

La impedancia del circuito es:

$$Z = \left| \frac{1}{\omega C} - \omega L \right|$$

Para altas frecuencias es  $Z \simeq \omega L$  y para bajas frecuencias es  $Z \simeq 1/\omega C$ . La intensidad máxima que circula por el circuito es:

$$I_m = \frac{V_m}{\left| \frac{1}{\omega C} - \omega L \right|}$$

y la intensidad instantánea:

$$I = \frac{V_m}{\left| \frac{1}{\omega C} - \omega L \right|} \operatorname{sen} \left( \omega t \pm \frac{\pi}{2} \right)$$

Si es  $(1/\omega C) = \omega L$ , es decir,  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ , la intensidad se hace infinita. Realmente nunca se llega a esta situación, porque la bobina siempre presenta alguna resistencia, pero la intensidad puede hacerse excesivamente grande, deteriorando al circuito.

## 34.8 Representación vectorial

Como ya se vio en el Epígrafe 13.3 del Tomo I, toda magnitud senoidal puede ser representada mediante un vector rotatorio que gira en un plano, alrededor de un punto fijo, con una velocidad angular  $\omega$  igual a la pulsación de la magnitud senoidal y cuyo módulo coincide con la amplitud de aquélla. Tomando como origen de ángulos el eje  $OX$ , la tensión aplicada será la proyección sobre el eje  $OY$  de un vector rotatorio de módulo  $V_M$  que gira en el sentido contrario de las agujas del reloj con velocidad angular  $\omega$ . Vamos a representar de esta forma la tensión aplicada al circuito y las caídas de tensión en cada uno de los elementos que lo componen.

El vector representativo de la tensión aplicada tendrá de módulo  $V_M$  y en un instante  $t$  formará, con el origen de ángulos, el ángulo  $\omega t$ .

La caída de tensión en la resistencia es:

$$V_R = V_A - V_B = RI = RI_M \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

el vector representativo de ella tendrá de módulo  $RI_M$  e irá desfasada, respecto de la tensión aplicada, un ángulo  $\varphi$ .

La caída de tensión en la autoinducción es:

$$V_L = V_B - V_C = L \frac{dI}{dt} = -LI_M\omega \cos(\omega t + \varphi) = LI_M\omega \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

por tanto, el vector rotatorio que la representa tiene de módulo el valor  $LI_M$  y está adelantado respecto de la caída en la resistencia el ángulo  $\pi/2$ .

La caída de tensión en la capacidad es:

$$V_C = V_C - V_D = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int I dt = \frac{-I_M}{C\omega} \cos(\omega t + \varphi) = \frac{I_M}{C\omega} \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

En consecuencia, la caída de tensión en la capacidad está en oposición con la caída en la autoinducción o, lo que es igual, retrasada un ángulo  $\pi/2$  respecto de la caída en la resistencia, y el vector rotatorio que la representa tiene por módulo  $I_M/\omega C$ . En la Figura 34.9 se representan cada uno de los vectores rotatorios representativos de cada una de las tensiones indicadas. Asimismo, y puesto que éstas deben verificar la Ecuación [34.12], se ha representado el diagrama vectorial del circuito. Del triángulo rectángulo que en éste aparece y que se ha coloreado en la figura, se deducen fácilmente las Ecuaciones [34.18] y [34.19].

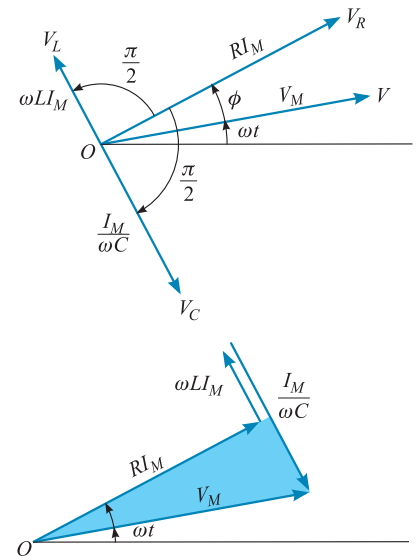


Figura 34.9. Diagramas vectoriales.

### 34.9 Resolución mediante complejos

La tensión aplicada,  $V = V_M \sin \omega t$ , puede expresarse mediante exponenciales complejas de la forma:

$$\bar{V} = V_M e^{j\omega t} \quad [34.24]$$

a condición de tomar solamente la componente sobre el eje imaginario. Vamos a resolver, en primer lugar, los casos simples para luego resolver el circuito  $R, L, C$ .

#### Circuito con resistencia pura

La intensidad en el circuito será:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{R} = \frac{V_M}{R} e^{j\omega t}$$

Por tanto, es:

$$I = \frac{V_M}{R} \sin \omega t \quad [34.25]$$

Lo que nos indica que está en fase con la tensión aplicada y sus valores máximos y eficaces verifican:

$$I_M = \frac{V_M}{R}$$

$$I_e = \frac{V_e}{R} \quad [34.26]$$

e

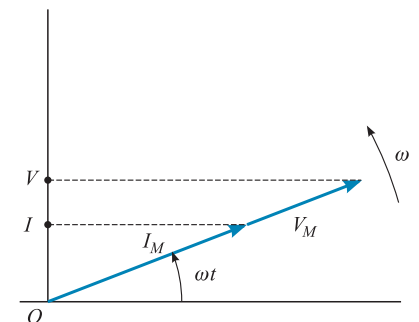


Figura 34.10.

En la Figura 34.10 se representan la tensión aplicada y la intensidad en el circuito.

### Circuito con autoinducción pura

En este caso debe verificarse:

$$\bar{\varepsilon}_i + \bar{V} = 0$$

o bien,

$$-L \frac{d\bar{I}}{dt} + V_M e^{j\omega t} = 0$$

De donde:

$$d\bar{I} = \frac{V_M}{L} e^{j\omega t} dt$$

cuya integración da:

$$\bar{I} = \frac{V_M}{j\omega L} e^{j\omega t} = -\frac{V_M}{\omega L} e^{j\omega t} = \frac{V_M}{\omega L} (\text{sen } \omega t - j \text{cos } \omega t)$$

Por tanto, es:

$$I = -\frac{V_M}{\omega L} \text{cos } \omega t = \frac{V_M}{\omega L} \text{sen} \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad [34.27]$$

Que pone de manifiesto que la intensidad va retrasada  $\pi/2$  respecto de la tensión aplicada y que la intensidad máxima es:

$$I_M = \frac{V_M}{\omega L} \quad [34.28]$$

En la Figura 34.11 se han representado la tensión aplicada y la intensidad en el circuito.

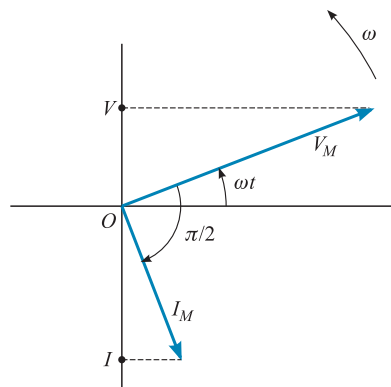


Figura 34.11.

### Circuito con capacidad pura

En todo instante, la carga en las armaduras del condensador es:

$$\bar{q} = C\bar{V} = CV_M e^{j\omega t}$$

y la intensidad en el circuito es:

$$\bar{I} = \frac{d\bar{q}}{dt} = j\omega CV_M e^{j\omega t} = \omega CV_M (-\text{sen } \omega t + j \text{cos } \omega t)$$

Por tanto, es:

$$I = -\frac{V_M}{\frac{1}{\omega C}} \text{cos } \omega t = I_M \text{sen} \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad [34.29]$$

Lo que nos indica que la corriente va adelantada  $\pi/2$  respecto de la tensión aplicada y su valor máximo verifica:

$$I_M = \frac{V_M}{\frac{1}{\omega C}} \quad [34.30]$$

En la Figura 34.12 se han representado la tensión y la intensidad en el circuito.

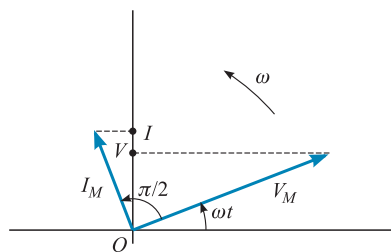


Figura 34.12.



### Circuito R, L, C, serie

Consideremos un circuito que lleva conectadas en serie una resistencia,  $R$ , una autoinducción,  $L$ , y una capacidad,  $C$  (Figura 34.13). La tensión aplicada al circuito es de la forma [34.24]. La corriente que recorrerá el circuito está dada por la [34.16], que en exponenciales complejas se expresa:

$$\bar{I} = I_M e^{j(\omega t + \varphi)} \quad [34.31]$$

a condición de quedarnos con la componente sobre el eje imaginario.

La tensión aplicada al circuito debe ser igual a la suma de las caídas de tensión en cada uno de los elementos que lo componen.

$$\bar{V} = \bar{V}_R + \bar{V}_L + \bar{V}_C \quad [34.32]$$

Calculemos cada una de estas caídas de tensión.

*Caída de tensión en la resistencia:*

$$\bar{V}_R = R\bar{I} \quad [34.33]$$

*Caída de tensión en la autoinducción:*

$$\bar{V}_L = L \frac{d\bar{I}}{dt} = j\omega L\bar{I} \quad [34.34]$$

*Caída de tensión en la capacidad:*

$$\bar{V}_C = \frac{\bar{q}}{C} = \frac{\int \bar{I} dt}{C} = \frac{\bar{I}}{j\omega C} = -j \frac{\bar{I}}{\omega C} \quad [34.35]$$

Llevando estas caídas de tensión a la [34.32], resulta:

$$\bar{V} = R\bar{I} + j\omega L\bar{I} - j \frac{\bar{I}}{\omega C} = \left[ R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right] \bar{I} = \bar{Z}\bar{I}$$

La expresión:

$$\bar{V} = \bar{Z}\bar{I} \quad [34.36]$$

es una generalización de la ley de Ohm. Se denomina *Impedancia compleja*, a la expresión:

$$\bar{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad [34.37] \quad \text{Impedancia compleja}$$

La Ecuación [34.36] puede escribirse:

$$V_M e^{j\omega t} = Z e^{j\varphi_1} \cdot I_M e^{j(\omega t + \varphi)}$$

o bien,

$$V_M = Z I_M e^{j(\varphi + \varphi_1)}$$

De donde deben ser:

$$V_M = Z I_M \quad \text{y} \quad \varphi = -\varphi_1 \quad [34.38]$$

Siendo,

$$Z = \left[ R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^{1/2} \quad [34.39]$$

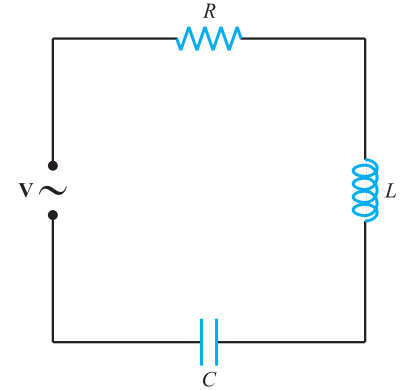


Figura 34.13. Circuito R, L, C, serie.

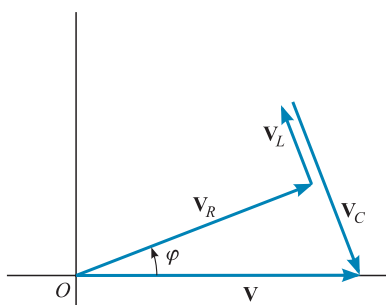


Figura 34.14. Diagrama de tensiones.

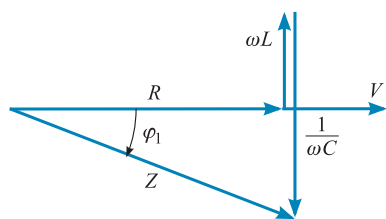


Figura 34.15. Diagrama de impedancias.

y

$$\tan \varphi_1 = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad [34.40]$$

siendo la intensidad que recorre el circuito:

$$I = \frac{V_M}{Z} \text{sen}(\omega t - \varphi_1) \quad [34.41]$$

Obteniéndose  $Z$  de la [34.39] y  $\varphi_1$  de la [34.40].

En la Figura 34.14 se han representado las caídas complejas de tensión en cada uno de los elementos del circuito y en la Figura 34.15 las componentes de la impedancia.

De la comparación de las Ecuaciones [34.33], [34.34] y [34.35] con la [34.36] se comprueba que las impedancias complejas de cada elemento del circuito son:

Impedancia de una resistencia  $Z_R = R$  [34.42]

Impedancia compleja de una autoinducción  $Z_L = j\omega L$  [34.43]

Impedancia compleja de una capacidad  $Z_C = -\frac{j}{\omega C}$  [34.44]

### 34.10 Admitancia, conductancia y susceptancia

Se denomina *admitancia compleja* a la inversa de la impedancia compleja.

$$\bar{A} = \frac{1}{\bar{Z}} \quad [34.45]$$

En función de la admitancia compleja, la Ecuación [34.36] se escribe:

$$\bar{I} = \bar{A} \cdot \bar{V} \quad [34.46]$$

Utilizando la expresión de la impedancia  $\bar{Z} = R + jX$ , la admitancia compleja se escribe:

Admitancia compleja

$$\bar{A} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2} - j \frac{X}{Z^2} = G - jS \quad [34.47]$$

A la parte real se le denomina *conductancia*,

$$G = \frac{R}{Z^2} \quad [34.48]$$

y a la imaginaria *susceptancia*.

$$S = \frac{X}{Z^2} \quad [34.49]$$

### 34.11 Asociación de impedancias

#### Asociación de impedancias en serie

Consideremos un conjunto de impedancias  $\bar{Z}_i$ , asociadas en serie (Figura 34.16), a las que se aplica una tensión alterna  $\bar{V}$ . La tensión aplicada debe ser igual a la suma de las caídas de tensión complejas en cada una de las impedancias.

$$\bar{V} = \sum \bar{V}_i$$

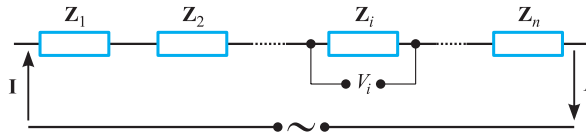


Figura 34.16. Impedancias en serie.

La caída de tensión en cada impedancia es  $\bar{V}_i = \bar{Z}_i \bar{I}$ , puesto que todas las impedancias están recorridas por la misma corriente. Llevando esta expresión a la anterior, es

$$\bar{V} = \bar{I} \sum \bar{Z}_i$$

La impedancia compleja equivalente es aquella que al estar sometida a la misma tensión del conjunto circula por ella la misma intensidad, es decir, verifica:

$$\bar{V} = \bar{Z}_e \bar{I}$$

Expresión que, al compararla con la anterior, resulta:

$$\bar{Z}_e = \sum \bar{Z}_i \tag{34.50}$$

La impedancia compleja equivalente a un conjunto de impedancias conectadas en serie es igual a la suma de las impedancias.

#### EJEMPLO 34.4 Circuito con elementos en serie

Para el circuito de la Figura 34.17 y los datos que en él se indican, calculemos:

- La impedancia compleja de cada uno de los elementos y la impedancia compleja equivalente.
- La intensidad que circula por el circuito.
- La caída de tensión en cada elemento.
- Comprobación analítica y gráfica de que se verifica  $\bar{V} = \sum \bar{V}_i$ .

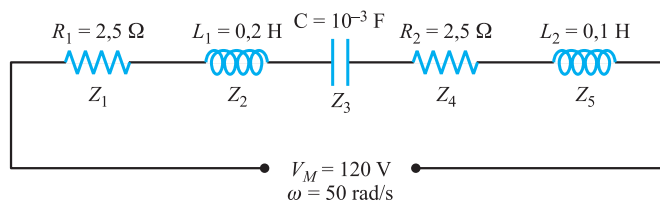


Figura 34.17. Circuito con elementos en serie.

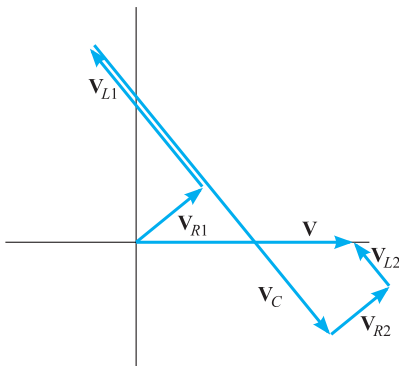


Figura 34.18. Comprobación gráfica.

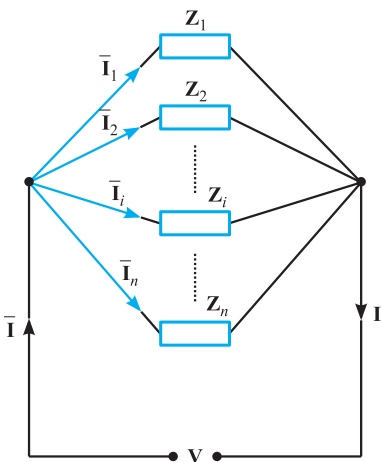


Figura 34.19. Impedancias en paralelo.

**Solución:**

a) La impedancia compleja de cada uno de los elementos está dada por las Expresiones [34.42], [34.43] y [34.44], siendo:

$$\bar{Z}_1 = 2,5 \Omega \quad , \quad \bar{Z}_2 = j50 \cdot 0,2 = 10j \Omega \quad , \quad \bar{Z}_3 = -j \frac{1}{50 \cdot 10^{-3}} = -20j \Omega$$

$$\bar{Z}_4 = 2,5 \Omega \quad \text{y} \quad \bar{Z}_5 = j50 \cdot 0,1 = 5j \Omega$$

La impedancia compleja equivalente está dada por la [34.50].

$$\bar{Z}_e = 5 - 5j$$

b) La intensidad que circula por el circuito está dada por la [34.36],

$$\bar{I} = \frac{120}{5 - 5j} = \frac{24}{1 - j} = 12(1 + j)$$

cuyo valor máximo es  $I_M = 12\sqrt{2}$ .

Y su desfase respecto de la tensión aplicada  $\tan \varphi = 1$ ,  $\varphi = \pi/4$  rad.

c) La caída de tensión en cada elemento del circuito, de acuerdo con la [34.36], es:

$$\bar{V}_1 = \bar{Z}_1 \bar{I} = 2,5 \cdot 12(1 + j) = 30(1 + j)$$

$$\bar{V}_2 = \bar{Z}_2 \bar{I} = 10j \cdot 12(1 + j) = 120(-1 + j)$$

$$\bar{V}_3 = \bar{Z}_3 \bar{I} = -20j \cdot 12(1 + j) = 240(1 - j)$$

$$\bar{V}_4 = \bar{Z}_4 \bar{I} = 2,5 \cdot 12(1 + j) = 30(1 + j)$$

$$\bar{V}_5 = \bar{Z}_5 \bar{I} = 5j \cdot 12(1 + j) = 60(-1 + j)$$

d) La comprobación analítica se hace sumando todas las caídas de tensión y comprobando que, efectivamente, su suma es 120, igual a la tensión aplicada. La comprobación gráfica se hace sumando geoméricamente los complejos que representan cada una de las caídas, lo que se ha realizado en la Figura 34.18.

**Asociación de impedancias en paralelo**

Consideremos un conjunto de impedancias  $\bar{Z}_i$  conectadas en paralelo (Figura 34.19) y sometidas a una tensión  $V$ . La intensidad compleja que circula por el circuito debe ser igual a la suma de las intensidades complejas que circulan por cada rama.

$$\bar{I} = \sum \bar{I}_i \tag{34.51}$$

Puesto que todas las impedancias están sometidas a la misma tensión, se verificará:

$$\bar{I}_i = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_i}$$

que llevado a la anterior es:

$$\bar{I} = \bar{V} \sum_i \frac{1}{\bar{Z}_i}$$

La impedancia compleja equivalente verifica:

$$\bar{I} = \bar{V} \frac{1}{\bar{Z}_e}$$

que, al compararla con la anterior, debe ser:

$$\frac{1}{\bar{Z}_e} = \sum_i \frac{1}{\bar{Z}_i} \quad [34.52]$$

La inversa de la impedancia compleja equivalente a un conjunto de impedancias conectadas en paralelo es igual a la suma de las inversas de las impedancias complejas.

Lo que, en función de las admitancias, puede expresarse: la admitancia compleja equivalente a un conjunto de admitancias conectadas en paralelo es igual a la suma de las admitancias complejas.

$$\bar{A}_e = \sum \bar{A}_i \quad [34.53]$$

### EJEMPLO 34.5 Circuito con los elementos en paralelo

Para el circuito de la Figura 34.20 y los datos que en él se indican, calculemos:

- La impedancia compleja y la admitancia compleja de cada rama.
- La intensidad compleja que circula por cada una de ellas, sus valores máximos y sus desfases respecto de la tensión aplicada.
- La admitancia compleja equivalente al conjunto.
- La intensidad compleja que recorre el circuito.
- La representación gráfica de las intensidades en cada rama y en el circuito.

#### Solución:

- La impedancia compleja en cada una de las ramas, de acuerdo con las [34.42], [34.43] y [34.44], es:

$$Z_1 = 20 \Omega \quad , \quad Z_2 = -\frac{j}{50 \cdot 10^{-4}} \Omega \quad \text{y} \quad Z_3 = 50j \Omega$$

$$A_1 = 1/20 = 5 \cdot 10^{-2} \quad , \quad A_2 = -50 \cdot 10^{-4}/j = 5 \cdot 10^{-3}j$$

$$\text{y} \quad A_3 = 1/50j = -j/50 = -2 \cdot 10^{-2}j$$

- Las intensidades complejas en cada rama, de acuerdo con [34.46], son:

$$\bar{I}_1 = V \cdot A_1 = 120 \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 6 \text{ A} \quad , \quad \bar{I}_2 = V \cdot A_2 = 120 \cdot 5 \cdot 10^{-3}j = 0,6j \text{ A}$$

$$\text{y} \quad \bar{I}_3 = V \cdot A_3 = 120 \cdot (-2 \cdot 10^{-2}j) = -2,4j \text{ A}$$

Los valores máximos son los hallados, estando  $I_1$  en fase con la tensión aplicada,  $I_2$  adelantada  $\pi/2$  e  $I_3$  retrasada  $\pi/2$ .

- La admitancia compleja equivalente al conjunto se obtiene por aplicación de la [34.53]:

$$A_e = 5 \cdot 10^{-2} + (0,5 - 2) \cdot 10^{-2}j = (5 - 1,5j) \cdot 10^{-2}$$

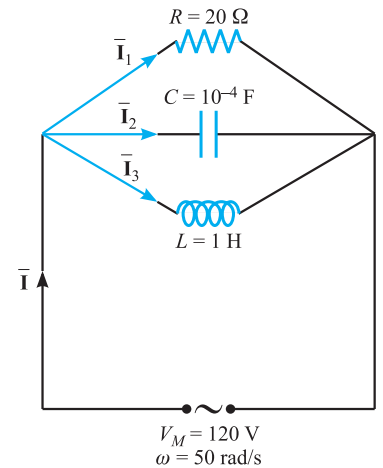


Figura 34.20. Circuito con elementos en paralelo.

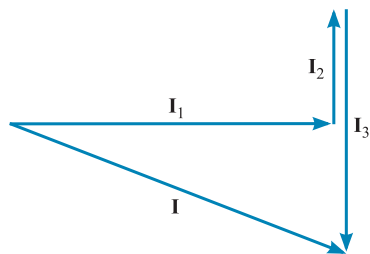


Figura 34.21. Comprobación gráfica.

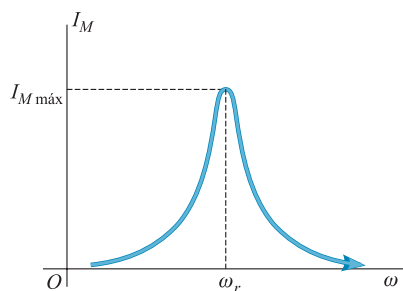


Figura 34.22. Respuesta en frecuencia.

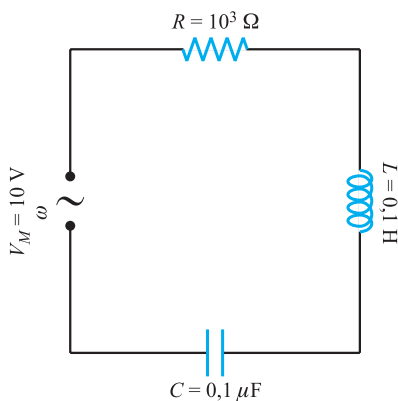


Figura 34.23. Circuito  $R, L, C$ , serie, frecuencia variable.

d) La intensidad compleja que recorre el circuito, de acuerdo con la [34.46], es:

$$\bar{I} = 120 \cdot (5 - 1,5j) \cdot 10^{-2} A = 6 - 1,8j$$

e) En la Figura 34.21 se han representado las intensidades que circulan por cada rama y la que circula por el circuito, comprobándose que se verifica la [34.51].

### 34.12 Respuesta en frecuencia

La intensidad que circula por el circuito está dada por la Expresión [34.19], la cual pone de manifiesto la relación entre la intensidad y la frecuencia aplicada al circuito. La representación de  $I_M = I_M(\omega)$  se ha realizado en la Figura 34.22.

#### Resonancia

La situación de resonancia en un circuito se produce cuando su impedancia es mínima, en cuyo caso la intensidad que lo recorre será máxima, presentándose el mínimo de  $Z$  cuando se anula su componente imaginaria.

En el caso de un circuito  $R, L, C$ , serie, la resonancia se producirá cuando sea:

$$\omega_r L - \frac{1}{\omega_r C} = 0$$

Siendo la frecuencia angular de resonancia:

$$\omega_r = (LC)^{-1/2} \tag{34.54}$$

#### EJEMPLO 34.6 Respuesta en función de $\omega$

En el circuito de la Figura 34.23 y para los datos que en él figuran, determinemos en función de  $\omega$ :

- Impedancia compleja equivalente del circuito y valor de la intensidad de la corriente.
- Valor de  $\omega$  que hace máxima la intensidad, comprobando que verifica la [34.54].
- Intensidad máxima en función del tiempo.
- Caídas de tensión en cada elemento del circuito.

#### Solución:

a) La impedancia compleja del circuito, teniendo en cuenta las [34.42], [34.43] y [34.44], es:

$$\bar{Z} = 10^3 + j \left( 0,1\omega - \frac{10^7}{\omega} \right)$$

Cuyo módulo es:

$$Z = \left[ 10^6 + \left( 0,1\omega - \frac{10^7}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Con lo cual, de acuerdo con la [34.21], es:

$$I_M = \frac{V_M}{Z} = \frac{10}{\sqrt{10^6 + \left( 0,1\omega - \frac{10^7}{\omega} \right)^2}}$$

b) Para que  $I_M$  sea máximo debe ser  $Z$  mínimo y para ello debe anularse el factor:

$$\left(0,1\omega - \frac{10^7}{\omega}\right) = 0$$

Para lo cual, debe ser  $\omega = 10^4$  rad.

Si aplicamos la [34.45], es:

$$\omega = (0,1 \cdot 10^{-7})^{-1/2} = (10^{-8})^{-1/2} = 10^4 \text{ rad}$$

c) El valor de la impedancia es ahora  $Z = 10^3$  y la intensidad está en fase con la tensión aplicada, luego es:

$$I = 10^{-2} \cos(10^4 t)$$

d) Caída de tensión en la resistencia:

$$\bar{V}_R = RI = 10^3 \cdot 10^{-2} = 10 \text{ V}$$

Caída de tensión en la autoinducción:

$$\bar{V}_L = j\omega LI = j10^4 \cdot 0,1 \cdot 10^{-2} = 10j \text{ V}$$

Caída de tensión en el condensador:

$$\bar{V}_C = -j(\omega L)^{-1}I = -j10^{-4} \cdot 10^7 \cdot 10^{-2} = -10j \text{ V}$$

## Filtros

Una de las aplicaciones de la respuesta en frecuencia se usa para el filtrado de éstas, de forma que podemos conseguir eliminar las bajas frecuencias (*filtro paso alto*) o bien, eliminar las altas frecuencias (*filtro paso bajo*).

### Filtros paso alto

Analizaremos dos circuitos que consiguen la eliminación de las bajas frecuencias, dejando paso únicamente a las altas.

Filtro A. En la Figura 34.24 representamos un circuito que filtra las bajas frecuencias.

El valor de la intensidad en el circuito es:

$$I_M = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$

La caída de tensión en la resistencia es:

$$V_R = RI_M = \frac{RV_M}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$

En esta expresión puede comprobarse cómo, al tender  $\omega$  a cero,  $V_R$  tiende a cero, es decir, las bajas frecuencias no pasan; mientras que, al tender  $\omega$  a infinito,  $V_R$  tiende a  $V_M$ , las altas frecuencias pasan tanto mejor cuanto mayor es  $\omega$ .

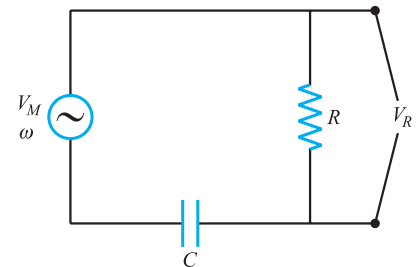


Figura 34.24. Filtro paso alto.

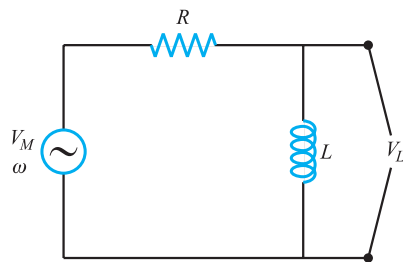


Figura 34.25. Filtro paso alto.

Filtro B. En la Figura 34.25 representamos otro circuito que también filtra las bajas frecuencias.

El valor de la intensidad en el circuito es:

$$I_M = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

La caída de tensión en los terminales de la autoinducción es:

$$V_L = \omega L I_M = \frac{\omega L V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Expresión que, al tender  $\omega$  a cero, tiende a cero, es decir, limita el paso de las bajas frecuencias; mientras que, al tender  $\omega$  a infinito,  $V_L$  tiende a  $V_M$ .

### Filtros paso bajo

Analizaremos dos circuitos que consiguen la eliminación de las altas frecuencias, dejando paso únicamente a las bajas.

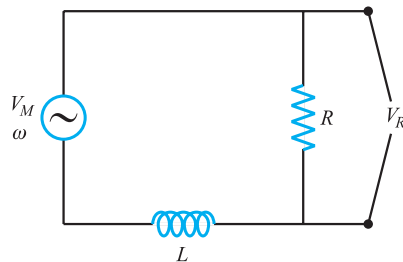


Figura 34.26. Filtro paso bajo.

Filtro C. En la Figura 34.26 representamos un circuito que filtra las altas frecuencias dejando paso únicamente a las bajas.

La intensidad en el circuito es:

$$I_M = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

La caída de tensión en la resistencia es:

$$V_R = R I_M = \frac{R V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Expresión que, al tender  $\omega$  a cero, tiende a  $V_M$ ; mientras que, al tender  $\omega$  a infinito, tiende a cero, es decir, limita el paso de las altas frecuencias.

Filtro D. En la Figura 34.27 representamos otro circuito que también filtra las altas frecuencias.

La intensidad que circula por el circuito es:

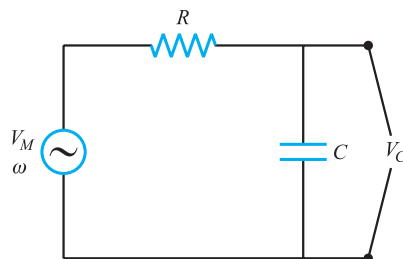


Figura 34.27. Filtro paso bajo.

$$I_M = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$

La caída de tensión en los terminales de la capacidad es:

$$V_C = \frac{I_M}{\omega C} = \frac{V_M}{\omega C \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = \frac{V_M}{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + 1}}$$

Expresión que, al tender  $\omega$  a cero, tiende a  $V_M$ ; mientras que, al tender  $\omega$  a infinito, tiende a cero, es decir, no deja pasar las altas frecuencias.



### 34.13 Potencia instantánea

Consideremos un circuito que está sometido a una tensión senoidal  $V = V_M \cos \omega t$  y sea la intensidad que lo recorre  $I = I_M \cos(\omega t + \varphi)$ .

La potencia instantánea,  $P = V \cdot I$ , puede escribirse de la forma:

$$P = V_M I_M \cos \omega t \cdot \cos(\omega t + \varphi) = V_M I_M [\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi]$$

Teniendo en cuenta la Ecuación [34.6], en función de los valores eficaces, se escribe:

$$P = V_e I_e [\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi] \quad [34.55] \quad \text{Potencia instantánea}$$

Veamos cuál es la potencia instantánea consumida en cada uno de los elementos pasivos simples del circuito.

*Resistencia.* Cuando únicamente hay una resistencia pura, la potencia disipada en el elemento es:

$$P = V_e I_e (1 + \cos 2\omega t)$$

siempre positiva:

*Autoinducción.* Si el circuito es una autoinducción pura, la intensidad que lo recorre está retrasada un ángulo  $\frac{\pi}{2}$  respecto de la tensión, es decir,  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  y la variación de potencia en la autoinducción es:

$$P = V_e I_e \cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = V_e I_e \sin 2\omega t$$

La autoinducción consumirá potencia en el intervalo  $0 < 2\omega t < \pi$ , pero devolverá esa potencia en el intervalo  $\pi < 2\omega t < 2\pi$ , en definitiva: su consumo total es nulo.

*Capacidad.* Cuando el circuito contiene únicamente una capacidad pura, la intensidad que lo recorre está adelantada un ángulo  $\frac{\pi}{2}$  respecto de la tensión, es decir,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  y la variación de la potencia en la capacidad es:

$$P = V_e I_e \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -V_e I_e \sin 2\omega t$$

La capacidad almacena potencia en el intervalo  $\pi < 2\omega t < 2\pi$  y la cede en el intervalo  $0 < 2\omega t < \pi$ , siendo nulo el consumo total de energía.

### 34.14 Potencia media y aparente. Factor de potencia

El valor de la *potencia media* se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{V_e I_e}{T} \int_0^T [\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi] dt = \\ &V_e I_e \cos \varphi + \frac{V_e I_e}{2\omega T} [\sin(2\omega t + \varphi)]_0^T = V_e I_e \cos \varphi \end{aligned} \quad [34.56] \quad \text{Potencia media}$$

La potencia media es función de  $\varphi$ , siendo máxima cuando la intensidad está en fase con la tensión,  $\varphi = 0$ , y nula cuando están en cuadratura  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ .

Al producto de la tensión eficaz por la intensidad eficaz se le denomina *potencia aparente*,

Potencia aparente

$$P_a = V_e I_e \quad [34.57]$$

y se denomina *factor de potencia* a  $\cos \varphi$ . Éste, para cada frecuencia, depende únicamente de los elementos que componen el circuito de utilización, y se obtiene a partir de la impedancia compleja del circuito. Es por esto que la potencia de un generador se suele dar en términos de potencia aparente, empleándose como unidad el voltio  $\times$  amperio o kilovoltio  $\times$  amperio (KVA).

La potencia media consumida en la instalación es el producto de la aparente del generador por el factor de potencia de la instalación. La potencia media consumida en una resistencia será:

$$\langle P_R \rangle = R_e I_e = R I_e^2$$

La consumida en una autoinducción  $\langle P_L \rangle = 0$  y en una capacidad  $\langle P_C \rangle = 0$ .

En la Figura 34.15, puede verse que el factor de potencia es:

Factor de potencia

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} \quad [34.58]$$

y la potencia media consumida es:

$$\langle P \rangle = V_e I_e \frac{R}{Z} = I_e^2 R \quad [34.59]$$

Expresión análoga a la obtenida para la corriente continua y que nos indica que toda la potencia es disipada en la resistencia.

### 34.15 Expresión compleja de la potencia. Potencia activa y reactiva

Para obtener lo que hemos denominado *expresión compleja de la potencia*, utilizaremos la tensión eficaz compleja:

$$\bar{V}_e = V_e e^{j\omega t}$$

y la intensidad eficaz compleja:

$$\bar{I}_e = I_e e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Definimos la expresión compleja de la potencia como:

$$\bar{P} = \bar{V}_e \bar{I}_e^*$$

en la que  $\bar{I}_e^*$  es la conjugada compleja de  $\bar{I}_e$ , resultando:

$$\bar{P} = V_e e^{j\omega t} \cdot I_e e^{-j(\omega t + \varphi)} = V_e I_e (\cos \varphi - j \sin \varphi) \quad [34.60]$$

Por tanto, el módulo de la potencia compleja así definida es igual a la potencia aparente, su parte real es igual a la potencia media consumida en la instalación, llamada también *potencia activa*, y su parte imaginaria la denominaremos *potencia reactiva*. Es decir, son:

$$P_a = V_e I_e \quad , \quad \langle P \rangle = V_e I_e \cos \varphi \quad \text{y} \quad P_r = V_e I_e \sin \varphi \quad [34.61]$$

De estas relaciones se deducen las siguientes:

$$P_a^2 = \langle P \rangle^2 + P_r^2, \quad \cos \varphi = \frac{\langle P \rangle}{P_a} \quad \text{y} \quad \tan \varphi = \frac{P_r}{\langle P \rangle} \quad [34.62]$$

que pueden también deducirse en la Figura 34.28.

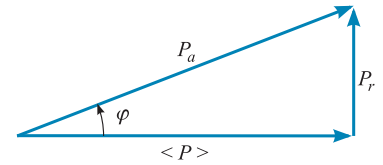


Figura 34.28. Diagrama de potencias.

## Asociaciones en serie

En un circuito formado por varios elementos en serie, en cada instante la intensidad que circula por cada uno de ellos es la misma y además se cumple que la d.d.p. entre los terminales del circuito es igual a la suma de las caídas de tensión entre los elementos que forman el circuito.

$$\bar{V} = \sum_i \bar{V}_i$$

La expresión de la potencia compleja para el elemento  $i$ , es:

$$\bar{P}_i = \bar{V}_{ei} \bar{I}_e^*$$

y para todo el circuito será:

$$\bar{P} = \sum_i \bar{V}_{ei} \cdot \bar{I}_e^* = \sum_i \bar{P}_i$$

es decir, la *potencia compleja del circuito formado por un conjunto de elementos en serie es la suma de las potencias complejas de cada uno de los elementos*.

## Asociaciones en paralelo

En un circuito formado por elementos en paralelo todos ellos están sometidos a la misma tensión y, en todo instante, las intensidades verifican:

$$\bar{I} = \sum_i \bar{I}_i$$

siendo  $\bar{I}_i$  la intensidad compleja que recorre el elemento  $i$ . La potencia compleja del elemento  $i$  es:

$$\bar{P}_i = \bar{V}_e \bar{I}_{ei}^*$$

La potencia compleja del circuito, teniendo en cuenta que la conjugada compleja de una suma es la suma de las conjugadas complejas de los sumandos, se escribe:

$$\bar{P} = \bar{V}_e \bar{I}_e^* = \bar{V}_e \sum_i \bar{I}_{ei}^* = \sum_i \bar{P}_i$$

lo que nos indica que *la potencia compleja de un circuito formado por un conjunto de elementos en serie es igual a la suma de las potencias complejas de cada elemento*.

En definitiva, *la potencia compleja de un circuito formado por elementos en serie y en paralelo es la suma de las potencias complejas de cada uno de los elementos que lo integran*.

De acuerdo con la definición de igualdad de números complejos, la potencia activa del circuito es la suma de las potencias activas de cada elemento y la potencia reactiva, la suma de las potencias reactivas.

La potencia activa es la utilizada por los receptores, transformándose en trabajo o en otras formas de energía. La potencia reactiva aparece cuando en el circuito hay bobinas o condensadores, pero no interviene en el balance energético del circuito, ya que su valor medio es nulo. Sin embargo, es de gran importancia ya que, al tener que cumplirse:

$$P_a^2 = P^2 + P_r^2$$

si la potencia reactiva es grande y debemos suministrar la potencia necesaria en nuestra instalación será necesario demandar mayor potencia aparente, aumentando la intensidad y con ello las pérdidas. El fenómeno se traduce a nivel global en una mayor necesidad de generación de potencia y mayor pérdida en las líneas de transmisión. Consecuentemente, en las instalaciones se debe buscar que la potencia reactiva sea muy pequeña, o lo que es igual, que  $\varphi$  sea muy pequeño. Con ello, la potencia activa se aproxima a la aparente del generador y el factor de potencia de la instalación tiende a la unidad.

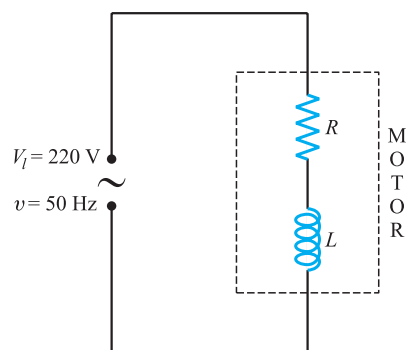


Figura 34.29. Motor monofásico, circuito equivalente.

### EJEMPLO 34.7 Motor monofásico

Un motor de corriente alterna monofásico es equivalente, desde el punto de vista eléctrico, a una resistencia  $R$  en serie con una autoinducción  $L$  (Figura 34.29). Se ha comprobado que, al conectarle a una red de tensión eficaz  $V_e = 220$  V y frecuencia  $\nu = 50$  Hz, produce una potencia mecánica de  $P_{me} = 1$  CV, siendo recorrido por una intensidad eficaz  $I_e = 6$  A y consumiendo una potencia eléctrica de  $P_e = 1$  Kw. Calculemos:

- El rendimiento del motor.
- Su factor de potencia.
- Los valores de  $R$  y  $L$  del circuito equivalente.

Ahora conectemos un condensador de capacidad  $C$  en paralelo con el motor y calculemos:

- Las intensidades complejas que circulan por el motor y el condensador, realizando su representación gráfica.
- El valor de  $C$  para que la corriente en la línea sea mínima.

#### Solución:

- El rendimiento del motor es el cociente entre la potencia producida y la consumida.

$$\eta = \frac{P_{me}}{P_e} = 0,736$$

- De la segunda [34.62], se obtiene:

$$\cos \varphi = \frac{P_e}{V_e I_e} = \frac{1000}{220 \cdot 6} = \frac{25}{33} \cong 0,76$$

- La impedancia compleja del circuito equivalente es:

$$\bar{Z} = R + j\omega L$$

siendo su módulo:

$$Z = \frac{V_e}{I_e} = \frac{220}{6} = \frac{110}{3}$$

Puesto que es  $\cos \varphi = R/Z$  y  $\cos \varphi$  está hallado en el apartado anterior, podemos despejar  $R$ :

$$R = Z \cos \varphi = \frac{110}{3} \cdot \frac{25}{33} = \frac{250}{9} \cong 27,78 \Omega$$

El valor de la impedancia:

$$Z^2 = R^2 + \omega^2 L^2$$

permite despejar el valor de:

$$L = \frac{(Z^2 - R^2)^{1/2}}{\omega} = \frac{2\sqrt{29}}{45\pi} \text{ H}$$

d) Conectemos el condensador en paralelo (Figura 34.30). La impedancia compleja del condensador es:

$$\bar{Z}_c = -\frac{j}{100\pi C}$$

La intensidad compleja en la rama del condensador es:

$$\bar{I}_{ec} = \frac{V_e}{\bar{Z}_c} = \frac{220}{\frac{-j}{100\pi C}} = j22 \cdot 10^3 \pi C$$

La impedancia compleja del motor es:

$$\bar{Z}_m = \frac{250}{9} + j100\pi \frac{2\sqrt{29}}{45\pi} = \frac{10}{9} (25 + j4\sqrt{29})$$

Con ello, la intensidad que circula por el motor es:

$$\bar{I}_{em} = \frac{220}{\frac{10}{9} (25 + j4\sqrt{29})} = \frac{198(25 + j4\sqrt{29})}{1089} = \frac{2}{11} (25 - j4\sqrt{29}) \text{ A}$$

En la Figura 34.31 se han representado las intensidades que circulan por cada rama y por el circuito.

e) Para que la intensidad en el circuito sea mínima, debe verificarse:

$$\bar{I}_{ec} + \bar{I}_{em} = \text{número real}$$

lo que se expresa:

$$22 \cdot 10^3 \pi C - \frac{8}{11} \sqrt{29} = 0$$

De donde:

$$C = \frac{4\sqrt{29}}{121\pi} \cdot 10^{-3} \cong 56,667 \mu\text{F}$$

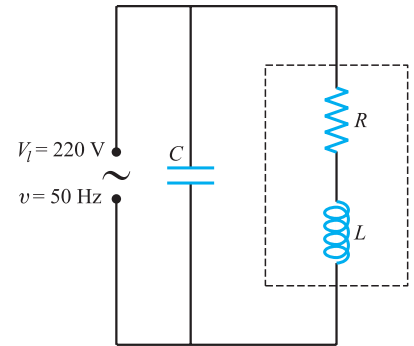


Figura 34.30. Motor con condensador en paralelo.

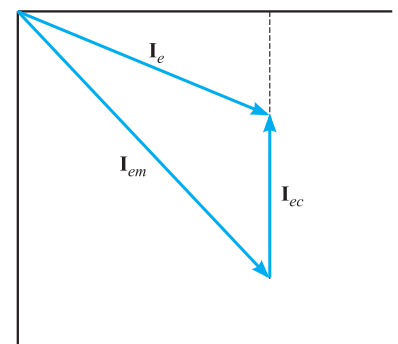


Figura 34.31. Diagrama de intensidades.

## GENERACIÓN DE ENERGÍA ELÉCTRICA

El Principio de conservación de la energía: *la energía no se crea ni se destruye, solamente se transforma*, hace necesaria, para la producción de energía eléctrica, la utilización de otra fuente de energía. Las fuentes de energía utilizadas en la producción de energía eléctrica pueden ser: energía del campo gravitacional (hidráulica), energía de los combustibles fósiles (carbón, petróleo y gas natural), energía nuclear (fisión), energía del viento (eólica), energía solar, energía geotérmica, energía de los océanos (de las mareas, de las olas y del gradiente térmico). Pueden ser clasificadas en *fuentes renovables* y *fuentes no renovables*, según que puedan o no restituir de forma natural su consumo.

### Fuentes no renovables:

- Combustibles fósiles: carbón, petróleo y gas natural.
- Material fisionable: uranio.
- Almacenamientos geotérmicos

### Fuentes renovables:

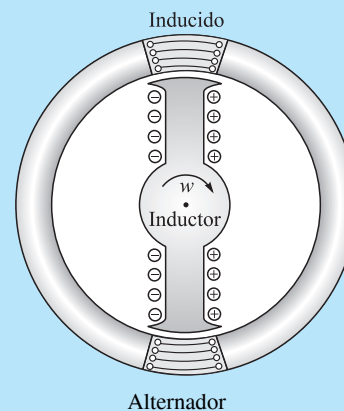
- Hidráulica.
- Solar.
- Eólica.

Energía de los océanos: de las mareas, de las olas y de los gradientes térmicos.

Salvo la energía nuclear, la geotérmica y la debida a las mareas, todas las demás tienen su origen, más o menos lejano, o más o menos directo, en el sol.

La transformación para obtener energía eléctrica se realiza en las denominadas centrales eléctricas, mediante distintos dispositivos, basados en diferentes principios físicos, pero en la gran generalidad utilizan el principio de inducción electromagnética: *al variar el flujo del campo magnético a través de una espira conductora se induce en ella una fuerza electromotriz*. El dispositivo que realiza la transformación se denomina *alternador*, el cual está compuesto de tres partes fundamentales: el *estator o inducido*, el *rotor o inductor* y la *turbina*.

El inductor está formado por bobinas móviles alimentadas mediante corriente continua, que puede proceder de una fuente auxiliar o de la salida del propio alternador previamente rectificadas, las cuales crean campos magnéticos. El inducido está formado por bobinas fijas (estator) sobre las cuales, al ser variable a



Alternador

través de ellas el flujo del campo magnético creado por las bobinas móviles del rotor, se induce en ellas una fuerza electromotriz. La turbina está dispuesta sobre el eje de giro del rotor y es la encargada de suministrar la energía necesaria para el giro de éste, energía que debe proceder de alguna de las fuentes indicadas y que presenta particularidades en función de aquella.

**Central hidroeléctrica.** En éstas se aprovecha la energía potencial del agua almacenada en un embalse, la cual es conducida hacia los álabes de la turbina del alternador, situado en una cota inferior. La energía potencial del agua se transforma en su caída en energía cinética, que en la turbina se transforma en energía cinética de rotación del inductor.

Es una energía limpia, renovable, de ligero impacto ambiental, pero de alto costo inicial de instalación y con las limitaciones impuestas por el régimen de lluvias y la posibilidad de encontrar zonas en las cuencas de los ríos que permitan la construcción de embalses.

**Centrales térmicas.** En éstas, la energía necesaria para mover la turbina se obtiene del vapor generado al calentar agua en una caldera. El vapor se produce a alta presión y se le hace llegar a los álabes de la turbina, la expansión del gas hace que ésta se ponga en movimiento. La energía para calentar el agua puede proceder de combustibles fósiles, de la fisión nuclear o de concentradores solares. La caldera es el elemento fundamental, en el cual se transforma la energía de la fuente en calor para evaporar el agua.

La combustión de combustibles fósiles es altamente contaminante, no son renovables, sus reservas son escasas y muy localizadas, su transporte es caro y,

siendo necesarios como materias primas en la industria química, farmacéutica y alimentaria, no parece lógico destruirles mediante combustión.

**Centrales nucleares.** En esencia no es más que una central térmica, en la cual la energía para calentar el agua de la caldera se obtiene de la fisión nuclear. El combustible nuclear, en general, es el  $^{235}\text{U}$ , que se encuentra en la naturaleza en forma de mineral de uranio, también puede utilizarse plutonio-239, que debe obtenerse artificialmente. El mineral de Uranio contiene solamente un 0,71% de  $^{235}\text{U}$ , por lo cual debe ser enriquecido hasta contener un 3% del citado elemento. Con él se elaboran unas barras cilíndricas que son utilizadas como material fisionable en las centrales nucleares. La reacción de fisión debe ser controlada, para lo cual entre las barras del material fisionable se sitúan otras de material moderador. La energía liberada en la fisión calienta agua en circuito cerrado que va al generador de vapor, donde cede la energía para que este sea producido. El denominado núcleo del reactor se encuentra encerrado herméticamente dentro de una vasija, todo lo cual a su vez está encerrado en un recinto de doble pared de acero y hormigón, para evitar contaminación y prevenir ante cualquier fallo en la instalación. No producen contaminación atmosférica, son de un gran rendimiento, ya que el consumo de un gramo de uranio al día produce una potencia de un megavatio y el costo de la energía eléctrica producida es bajo; su gran problema es la eliminación de los residuos de combustible.

**Centrales geotérmicas.** Son centrales térmicas en las que el vapor es suministrado por un reservorio natural desde el interior del suelo (reservorio geotérmico), por tanto, no necesitan caldera. No son contaminantes, pero no son renovables y únicamente pueden instalarse allí donde exista un reservorio geotérmico abundante.

**Centrales solares.** Son aquellas instalaciones que utilizan como fuente energética la energía radiante que nos llega del sol. Pueden hacerlo transformando de forma directa la energía radiante en energía eléctrica, son las *centrales fotovoltaicas*, o bien, como una central térmica, es decir, utilizando la energía que llega del sol para calentar agua, producir vapor y con él accionar una turbina, son las *centrales fototérmicas*.

Obviamente no son contaminantes, pero su dificultad reside en la intermitencia y estacionalidad de la radiación solar, en su dificultad de acumulación, así como

en su baja intensidad, lo que hace necesarias grandes superficies de captación.

*Centrales fototérmicas.* En éstas la energía solar, mediante una serie de espejos, que pueden ser fijos o seguir al Sol en su movimiento diurno, se concentra en una zona que absorbe la energía incidente y la transfiere a un fluido que la transporta a la zona de producción de vapor. Para evitar la discontinuidad del suministro energético solar, se pueden instalar centrales híbridas, en las cuales, en los momentos de falta de energía solar, pueden funcionar quemando gas natural.

*Centrales fotovoltaicas.* Estas centrales están constituidas por paneles solares, adecuadamente acoplados en función de la tensión y la corriente que se desee suministrar. A su vez, cada panel solar está formado por asociaciones de células solares, construidas de material semiconductor, en general silicio o arseniuro de galio, las cuales al absorber los fotones de la radiación solar liberan electrones y crean entre sus polos una diferencia de potencial. La tensión y la corriente que puede suministrar un panel dependen de la forma de asociación de las células que lo componen. La energía producida puede acumularse en baterías, para su uso en momentos de falta de energía solar, o bien transformarse en corriente alterna, para ser introducida en la red convencional de suministro. El rendimiento de las células solares es bajo, pero la tecnología está en continuo desarrollo para conseguir aumentarlo.

**Centrales eólicas.** En estas centrales se aprovecha la energía del viento para producir de forma directa corriente eléctrica alterna, la cual se introduce directamente en la red convencional de suministro. La captación de la energía del viento se hace mediante



aerogeneradores, que llevan el alternador instalado en la parte superior de un mástil metálico y cuyo giro se produce por el giro de unas palas al incidir sobre ellas el viento. El conjunto de aerogeneradores forma la central eólica, también denominada parque eólico. Su funcionamiento es variable dependiendo de la intensidad del viento y su contaminación únicamente afecta al paisaje, si bien, no es peor que las líneas de alta tensión a las que ya nos hemos acostumbrado.

**Energía de los océanos.** Los océanos proporcionan tres fuentes de energía: la debida a las mareas, la debida a las olas y la almacenada en su gradiente térmico. Todas ellas son fuentes limpias y renovables.

*Energía de las mareas.* Las mareas se producen por la variación del campo gravitacional en cada punto de los océanos, debido al giro de la Luna alrededor de la Tierra, al de esta alrededor del Sol y al de la Tierra alrededor de su eje. La frecuencia de las mareas está determinada por los citados movimientos, que dan lugar a dos mareas por día, aproximadamente una cada 12 horas, si bien de un día al siguiente llevan un retraso de una media hora. La altura de la marea depende de la posición relativa del punto de la superficie del océano, la Luna y el Sol, así como de la forma de la plataforma continental del lugar, pudiendo llegar a ser de más de 12 metros. Al subir la marea, el agua llena

lo que se denomina el pantano de marea, que podemos liberar cuando baja la marea haciéndola pasar por una turbina unida a un alternador para la producción de energía. La central más importante de este tipo se encuentra en Francia, tiene una potencia de 240 MW y una diferencia de nivel del agua de 8 metros.

*Energía de las olas.* Las olas transportan gran cantidad de energía, pero su frecuencia suele ser baja, entre 3 y 30 por minuto. La energía cinética de las olas puede ser utilizada situando adecuadamente una cámara conectada a un cilindro vertical rígido, en cuya parte superior se sitúa una turbina; al entrar la ola en la cámara tiende a subir por el cilindro comprimiendo el aire, el cual debe salir haciendo girar la turbina y con ello el alternador conectado a ella. Un sistema de este tipo está instalado en Noruega con una potencia de 500 kW.

*Energía del gradiente térmico.* La temperatura del agua en superficie, debido a la radiación solar, es mayor que la temperatura de las aguas profundas. Esta diferencia de temperaturas, que puede llegar a ser de 25 grados para profundidades de 100 metros, puede ser utilizada para hacer funcionar entre ellas un motor térmico, cuya energía será empleada para mover el alternador. El salto térmico es constante, es decir, el sistema es renovable y no contaminante.





- 35.1. Introducción
- 35.2. Imanación, imantación o magnetización
- 35.3. Relación entre  $B$ ,  $H$  y  $M$
- 35.4. Susceptibilidad magnética
- 35.5. Diamagnetismo
- 35.6. Paramagnetismo
- 35.7. Ferromagnetismo
- 35.8. Circuito magnético
- 35.9. Circuito magnético con entrehierro
- 35.10. Antiferromagnetismo y ferrimagnetismo
- 35.11. Magnetismo terrestre

## 35.1 Introducción

Los campos magnéticos no solamente son producidos por las corrientes eléctricas en conductores, tal y como se ha visto en el capítulo sobre electromagnetismo, sino también por algunos materiales magnéticos. De acuerdo con la teoría de Ampère, el campo magnético creado por estos materiales, también en última instancia, está originado por corrientes eléctricas, debidas al movimiento de los electrones dentro del material. Así, un electrón, en su giro alrededor del núcleo, crea un pequeño dipolo magnético y también el propio giro del electrón alrededor de su eje de simetría (espín) contribuye a la creación del campo magnético del material. Podemos decir que las propiedades magnéticas de los materiales están determinadas por su estructura atómica y molecular.

En general, todos los materiales son magnéticos y, en puro rigor, el único medio no magnético es el vacío. Ahora bien, su comportamiento magnético puede ser muy distinto y, según éste, los materiales se clasifican en tres categorías: diamagnéticos, paramagnéticos, y ferromagnéticos. Los materiales de las dos primeras categorías presentan efectos magnéticos débiles, mientras que los pertenecientes a la tercera presentan efectos magnéticos fuertes, interactuando fuertemente con los campos magnéticos externos.

## 35.2 Imanación, imantación o magnetización

Denominaremos así al proceso por el cual una sustancia adquiere propiedades magnéticas. Con excepción de la piedra imán o magnetita, que es el único material magnético natural, todos los demás han adquirido sus propiedades magnéticas por imanación. Ésta se produce cuando el material se introduce en un campo magnético exterior, al que se denomina *campo magnetizante* o *campo imanador*.

Ya hemos indicado cómo el fraccionamiento de un imán da lugar siempre a otro imán, no hay cuerpos magnéticos unipolares, todo fragmento de imán presenta los dos polos magnéticos. De aquí que todo elemento de volumen  $dv$ , de todo

material imantado, constituye un dipolo magnético, a cuyo *momento dipolar magnético* le simbolizaremos  $d\mathbf{m}$ . Pues bien, se define el *vector intensidad de imanación* o simplemente *imanación* como el *momento dipolar magnético por unidad de volumen*

Imanación

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{dv} \tag{35.1}$$

el cual es formalmente análogo al vector polarización de dieléctricos. La ecuación de dimensiones de la imanación es:

$$[M] = [m]L^{-3} = [L^{-2}I]L^{-3} = L^{-1}I$$

Su unidad en el SI es el amperio/metro ( $A\ m^{-1}$ ), la cual no tiene nombre específico.

El momento dipolar total de un material imantado será la suma de todos los momentos dipolares magnéticos extendida a todo su volumen,

$$\mathbf{m} = \int \mathbf{M} dv \tag{35.2}$$

Si el material está uniformemente imantado será:

$$\mathbf{m} = \mathbf{M} \int dv = \mathbf{M}v \tag{35.3}$$

siendo  $v$  el volumen total del material.

La imanación de un material puede verse desde dos puntos de vista: el de la carga equivalente y el de la corriente equivalente. En el primero, cada elemento de volumen es asiento de un pequeño imán, y si consideramos una barra uniformemente imantada, éstos estarán todos orientados en la misma dirección anulándose los polos norte y sur de cada pareja contigua, y quedando sin neutralizar únicamente todos los polos norte de la superficie de un extremo de la barra y todos los polos sur de la superficie del otro extremo (Figura 35.1). Si consideramos, tal y como se vio en el Capítulo 32, que cada polo de uno de los pequeños imanes es asiento de una carga magnética ficticia  $q_m$ , positiva en el polo norte y negativa en el polo sur, la barra en su conjunto presentará en uno de sus extremos un polo norte magnético, con carga ficticia,  $Q_m$ :

$$Q_m = \sum q_m$$

y en el otro, un polo sur con carga  $-Q_m$ , teniendo un momento dipolar magnético total:

$$m = Q_m l$$

cuya dirección es el eje de la barra y sentido del polo sur al norte.

El valor de la imanación es:

$$M = \frac{m}{v} = \frac{Q_m l}{A l} = \frac{Q_m}{A} = \sigma_m \tag{35.4}$$

Es decir, desde este punto de vista, la imanación es igual a una densidad superficial de carga magnética situada en la superficie de los extremos de la barra.

Desde el punto de vista de la corriente equivalente, que es debido a Ampère, cada elemento de volumen es asiento de un pequeño dipolo magnético, el cual puede representarse por una pequeña espira de corriente de acuerdo con la analogía que quedó establecida en el Capítulo 32. Las corrientes adyacentes de las diferentes

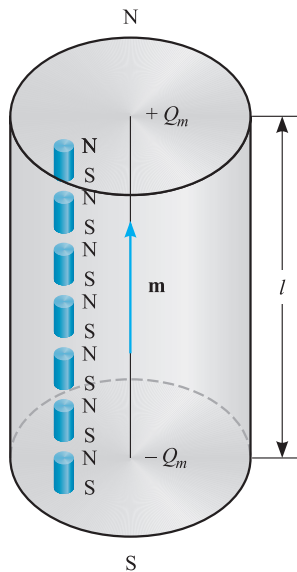


Figura 35.1. Momento dipolar magnético.

espiras se neutralizan al tener sentidos contrarios y únicamente queda una corriente superficial que circula por la superficie lateral de la barra (Figura 35.2).

El campo magnético creado por la barra imantada será el mismo que el creado por un solenoide cilíndrico, del mismo radio y longitud que ella, y por el cual circula una corriente ficticia  $I_m$ . Si se supone a este solenoide formado por un hilo muy fino y con  $n$  espiras por unidad de longitud, el campo magnético creado es:

$$B_M = \mu_0 n I_m$$

La corriente ficticia por unidad de longitud de solenoide es  $I' = n I_m$  y la corriente ficticia en un elemento diferencial de longitud de solenoide es  $dI' = n I_m dl$ .

La imanación puede expresarse ahora de la forma:

$$M = \frac{dm}{dv} = \frac{dI'A}{A dl} = \frac{dI'}{dl} = n I_m$$

Con lo cual, el campo magnético en el material es:

$$\mathbf{B}_M = \mu_0 \mathbf{M} \quad [35.5]$$

Los materiales diamagnéticos, como el vidrio o el cobre, no tienen momentos dipolares atómicos o moleculares permanentes, ellos son inducidos por el campo magnético exterior y se orientan en sentido contrario al de éste. En los materiales paramagnéticos, como por ejemplo el titanio, y en los ferromagnéticos, como por ejemplo el hierro, cobalto o níquel, sí existen momentos bipolares permanentes, los cuales se orientan en el sentido del campo exterior e incluso en algunos de estos últimos quedan orientados al suprimir el campo magnético exterior, constituyendo los imanes permanentes. Por ello, al situar un material en un campo magnético no uniforme, los diamagnéticos son repelidos débilmente en la dirección en la que disminuye el campo, los paramagnéticos son atraídos débilmente en la dirección en la que aumenta el campo, y los ferromagnéticos también son atraídos en esta dirección pero con gran intensidad.

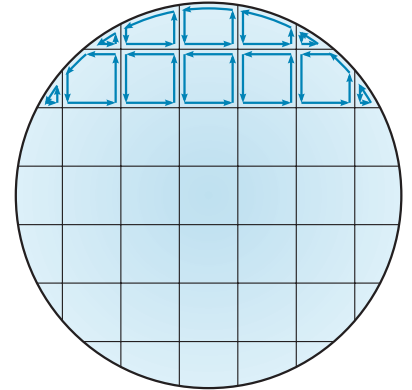


Figura 35.2. Espiras de corriente.

### 35.3 Relación entre $B$ , $H$ y $M$

Consideremos una bobina toroidal de  $N$  vueltas, que no lleva material en su interior y por la cual circula la corriente de intensidad  $I$ . El campo magnético en puntos de su interior,  $\mathbf{B}_0$ , verificará la ley de Ampère:

$$\int \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 N I \quad [35.6]$$

Si a la bobina toroidal le colocamos un núcleo de material, al ser recorrida por la misma intensidad  $I$ , resulta que el campo en su interior es ahora distinto y no se verificará la ley de Ampère:

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 N I \quad [35.7]$$

Para conseguir la expresión correcta es necesario tener en cuenta, además de la corriente en la bobina, la corriente ficticia como consecuencia de la imanación del material. Es decir, el campo  $\mathbf{B}$  será la suma del campo magnético  $\mathbf{B}_0$  y del campo  $\mathbf{B}_M$  creado por la corriente ficticia. El campo  $\mathbf{B}_0$  está dado por la [32.40] y el campo  $\mathbf{B}_M$  por la [35.5].

$$B = B_0 + B_M = \mu_0 N I + \mu_0 M \quad [35.8]$$

O bien,

$$\frac{B}{\mu_0} - M = nI$$

Si hallamos la circulación a lo largo de la circunferencia media de toroide es:

$$\oint \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{l} = nI \oint \mathbf{u}_T dl = nI \oint d\mathbf{l} = nIl = NI \quad [35.9]$$

Llamando *intensidad del campo magnético* al vector:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad [35.10]$$

La Expresión [35.9] puede escribirse de la forma:

Circulación del campo magnético

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI \quad [35.11]$$

*La circulación de la intensidad del campo magnético a lo largo de una curva cerrada sólo depende de las corrientes reales y, por ello, es independiente del medio.*

La Expresión [35.10] puede escribirse de la forma:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad [35.12]$$

Estas relaciones son de validez general para medios magnéticos, debiendo en éstos usarse la ley de Ampère de la forma [35.11] y no siendo válida la [35.7].

## 35.4 Susceptibilidad magnética

En los materiales magnéticos perfectos o lineales, diamagnéticos o paramagnéticos, ya que los ferromagnéticos no presentan linealidad, la imantación inducida es proporcional al campo excitador.

Susceptibilidad magnética

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad [35.13]$$

A la constante de proporcionalidad se le denomina *susceptibilidad magnética*, la cual es adimensional, ya que  $M$  y  $H$  tienen las mismas unidades.

En los materiales ferromagnéticos no se cumple la relación [35.13], la imantación no es proporcional al campo  $\mathbf{H}$  y depende de otros factores, como los tratamientos que haya sufrido el material. Estos materiales se dice que no son lineales o que no son magnéticamente perfectos. En ellos, ni la susceptibilidad magnética ni la permeabilidad magnética son características propias del material.

En los materiales magnéticos perfectos, al llevar [35.13] a la [35.12], ésta se escribe:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H} \quad [35.14]$$

Por tanto, es:

Permeabilidad magnética

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m) \quad [35.15]$$

expresión que relaciona la permeabilidad magnética del medio con la susceptibilidad magnética del mismo y que puede escribirse:

Permeabilidad magnética relativa

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m \quad [35.16]$$

El valor de  $\chi_m$  es ligeramente negativo en las sustancias diamagnéticas y ligeramente positivo en las paramagnéticas. De [35.13] se deduce que en los materiales diamagnéticos  $\mathbf{M}$  tiene sentido opuesto a  $\mathbf{H}$ , mientras que en los paramagnéticos  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{H}$  tiene el mismo sentido. Por ello, si acercamos un cuerpo diamagnético al polo de un imán será repelido, mientras que el paramagnético será atraído. En la tabla 35.1 se recogen valores de  $\chi_m$ .

**Tabla 35.1.** Valores de la susceptibilidad magnética

	Material	$\chi_m \cdot 10^{-5}$
<i>Diamagnéticos</i>	Bismuto	-16,6
	Mercurio	-2,9
	Diamante	-2,1
	Plomo	-1,8
	Cloruro sódico	-1,4
	Cobre	-0,98
	Agua	-0,9
	CO <sub>2</sub>	-0,12
<i>Paramagnéticos</i>	Uranio	40
	Platino	26
	Aluminio	2
	Paladio	0,82
	Sodio	0,72
	Oxígeno	0,2
	Aire	0,036

De la Expresión [35.14] se deduce que dentro de un material diamagnético el campo magnético es inferior al campo exterior o magnetizante, mientras que en un material paramagnético será mayor.

Si el medio diamagnético o paramagnético es lineal,  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{H}$  tienen la misma dirección, siendo  $\chi_m$  un escalar, pero si el medio es diamagnético o paramagnético no es lineal,  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{H}$  tienen direcciones distintas y  $\chi_m$  tiene naturaleza tensorial.

Finalmente, indicaremos que la susceptibilidad magnética en los diamagnéticos es independiente de la temperatura, mientras que en los paramagnéticos disminuye al aumentar la temperatura, así sucede también en los ferromagnéticos, en los cuales a partir de una temperatura característica, denominada temperatura de Curie, desaparecen sus propiedades como tal, convirtiéndose en paramagnéticos.

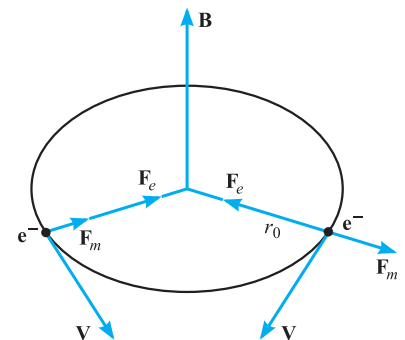
## 35.5 Diamagnetismo

El comportamiento diamagnético del bismuto fue descubierto por Faraday en 1845, al comprobar cómo una muestra del citado elemento era repelida al ser situada en presencia de un imán. El diamagnetismo puede explicarse en base al movimiento de los electrones en sus órbitas. Un electrón girando en su órbita de radio  $r_0$ , (Figura 35.3) es atraído por el núcleo con la fuerza:

$$\mathbf{F}_e = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r_0^2} \mathbf{u}_r$$

La ecuación de su movimiento es:

$$m_e r_0 \omega_0^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r_0^2}$$



**Figura 35.3.** Diamagnetismo.

con lo cual, su velocidad angular se expresa:

$$\omega_0 = \frac{e}{r_0} \sqrt{\frac{Z}{4\pi\epsilon_0 m_e r_0}} \quad [35.17]$$

La órbita descrita por el electrón puede verse como una espira recorrida por la corriente  $e\omega_0/2\pi$ , cuyo momento magnético será:

$$\mathbf{m}_1 = I\mathbf{A} = \frac{e\omega_0}{2\pi} \pi r_0^2 \mathbf{u}_n = \frac{1}{2} e\omega_0 r_0^2 \mathbf{u}_n \quad [35.18]$$

El electrón que se mueve en sentido contrario tiene un momento magnético  $\mathbf{m}_2 = -\mathbf{m}_1$  y, en consecuencia, el momento magnético resultante es nulo.

Si se aplica un campo magnético exterior  $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ , aparecen sobre los citados electrones fuerzas dadas por:

$$\mathbf{F}_m = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Según el sentido de giro de electrón, esta fuerza se sumará o restará a la eléctrica  $\mathbf{F}_e$ , dando lugar a las fuerzas:

$$\mathbf{F} = \left( -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r_0^2} \pm evB \right) \mathbf{u}_r = -r_0(m_e\omega_0^2 \pm e\omega B) \mathbf{u}_r$$

siendo  $\omega$  la nueva velocidad angular del electrón en su órbita y admitiendo que ésta no cambia de radio.

Ahora, las ecuaciones del movimiento son:

$$m_e r_0 \omega^2 \pm e r_0 \omega B = m_e r_0 \omega_0^2$$

Las cuales, simplificadas y reordenadas, se escriben:

$$\pm e\omega B = m_e(\omega^2 - \omega_0^2) = m_e(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)$$

Llamando y aproximando  $(\Delta + \omega_0) = 2\omega$ , la anterior se expresa:

$$\pm e\omega B = m_e \Delta \omega 2\omega$$

De donde resulta:

$$\Delta\omega = \pm \frac{eB}{2m_e} \quad [35.19]$$

Con lo cual, la variación del momento magnético de la órbita del electrón, de acuerdo con la [35.18] es:

$$\Delta m = \frac{1}{2} e r_0^2 \Delta\omega = -\frac{e^2 r_0^2}{4m_e} B \quad [35.20]$$

Puesto que los electrones están en diferentes órbitas, con radio e inclinaciones diferentes, debe considerarse un momento magnético dipolar medio, cuyo valor es:

$$\langle \Delta m \rangle = -\frac{e^2 \langle r_0^2 \rangle}{6m_e} B \quad [35.21]$$

La imanación inducida, calculada como el momento dipolar magnético por unidad de volumen, será:

$$\mathbf{M} = N\Delta\mathbf{m}$$

En la que  $N$  es el número de átomos por unidad de volumen. Utilizando la [35.20], se escribe:

$$\mathbf{M} = -N \frac{e^2 \langle r_0^2 \rangle}{6m_e} \mathbf{B} \quad [35.22]$$

El valor de la susceptibilidad magnética se deduce de la anterior utilizando la [35.13].

$$\chi_m = \frac{M}{B} = -N \frac{e^2 \langle r_0^2 \rangle}{6m_e} \quad [35.23]$$

Estas expresiones dan valores muy concordantes con la realidad, a pesar de haberse aplicado la mecánica clásica a nivel atómico.

Los dipolos magnéticos son inducidos y se orientan por acción del campo  $\mathbf{B}$ , pero no llegan a adquirir la dirección de éste, apareciendo un momento cinético  $\mathbf{L} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ , que hará que el dipolo precese alrededor de la dirección del campo, denominándose a la frecuencia de precesión, *frecuencia de Larmor*, cuyo valor es:

$$\omega_L = \frac{eB}{2m_e} \quad [35.24]$$

En concreto, el comportamiento diamagnético se presenta en materiales en cuyo estado fundamental el momento magnético orbital total es nulo, lo que sucede cuando tienen la capa exterior con parejas de electrones girando en sentidos opuestos. Es, por tanto, una propiedad de la configuración electrónica del material y, por ello, no está afectado por la temperatura.

## 35.6 Paramagnetismo

Los materiales paramagnéticos presentan momentos bipolares magnéticos permanentes, independientes de la existencia o no de campo exterior  $\mathbf{B}$ . La interacción entre estos dipolos magnéticos es muy pequeña y la agitación térmica o temperatura ambiente es suficiente para mantenerlos distribuidos al azar en todas las direcciones posibles. La aplicación de un campo  $\mathbf{B}$  exterior hace que los dipolos traten de alinearse en la dirección del campo y se crea una imanación neta en el material,  $\mathbf{M}$ , la cual es proporcional a  $\mathbf{B}$  y de la misma dirección y sentido, pero que desaparece cuando se suprime el campo exterior.

Los momentos magnéticos permanentes tienen su origen en electrones que giran en su órbita y no tienen simétrico que neutralice su momento magnético, y principalmente en el giro de estos electrones alrededor de su propio eje (espín).

No todos los momentos magnéticos permanentes se alinean en la dirección del campo, la fracción que lo hace es proporcional al propio valor  $\mathbf{m}$  y al valor del campo exterior  $\mathbf{B}$ , siendo inversamente proporcional a la temperatura. La fracción de dipolos que contribuyen a la imanación del material está dada por:

$$f = \frac{mB}{3kT}$$

en la cual,  $k$  es la constante de Boltzmann.

Si el material tiene  $N$  átomos por unidad de volumen, la imanación está dada por:

$$M = Nm f = N \frac{m^2 B}{3kT} = N \mu_0 \frac{m^2}{3kT} H = C \frac{H}{T} \quad [35.25]$$

en la que hemos tomado  $B = \mu_0(H + M) \approx \mu_0 H$ , ya que en los materiales paramagnéticos es  $M \ll H$ .

A la constante

$$\text{Constante de Curie} \quad C = \mu_0 N \frac{m^2}{3k} \quad [35.26]$$

la cual tiene las dimensiones de una temperatura, se le denomina *constante de Curie* y es característica para cada material.

En consecuencia, la susceptibilidad magnética también dependerá de la temperatura y está dada por:

$$\chi_m = \frac{M}{H} = \mu_0 N \frac{m^2}{3kT} = \frac{C}{T} \quad [35.27]$$

Resulta, pues, que tanto la imanación como la susceptibilidad magnética son inversamente proporcionales a la temperatura absoluta, lo que constituye la ley de Curie.

## 35.7 Ferromagnetismo

Las sustancias ferromagnéticas presentan efectos magnéticos fuertes y con frecuencia se reserva para ellas el nombre de «materiales magnéticos», un pequeño campo exterior provoca en ellos una fuerte imanación. Las sustancias ferromagnéticas a temperatura ambiente son el Fe, Ni, Co, sus aleaciones, algunos elementos de tierras raras y algunos compuestos de manganeso, pero a menor temperatura otros elementos se comportan como ferromagnéticos. Una característica de estos elementos es su dependencia de la temperatura, existiendo para cada uno de ellos una temperatura crítica, llamado *punto de Curie*, por encima de la cual pierden sus propiedades de ferromagnéticos y se transforman en paramagnéticos.

El origen del ferromagnetismo, al igual que el del paramagnetismo, reside en los momentos magnéticos permanentes asociados al espín de electrones no apareados. La relación entre el campo exterior  $\mathbf{H}$  y la imanación producida,  $\mathbf{M}$ , no es lineal y, además, ésta permanece cuando se suprime el campo exterior.

Por debajo del punto de Curie, los electrones de conducción están agrupados en pequeños dominios, dentro de los cuales tienen todos sus espines en la misma dirección y sentido. El tamaño de los dominios es variable, entre unos  $10^{-9}$  y  $10^{-12}$  m<sup>3</sup>, estando orientados aleatoriamente en el material no imantado y conteniendo varios miles de millones de átomos. Los momentos magnéticos pertenecientes a un dominio interactúan fuertemente entre sí y se autoorientan todos en la misma dirección y sentido, produciendo un campo muy fuerte en ese dominio. En cada «dominio», la dirección de orientación de sus momentos magnéticos es distinta, es decir, los dominios están orientados al azar, de forma que la configuración del material presente una mínima energía. En esta situación, los materiales ferromagnéticos también presentan campos exteriores débiles.

Una característica muy importante de estos materiales es que un campo externo  $\mathbf{H}$  débil puede producir la orientación de los dominios y, en consecuencia, un gran campo magnético creado por el material. Hay que hacer notar que el campo exterior  $\mathbf{H}$  contribuye muy poco a la imanación del material, que ya está preestablecida en cada dominio, su efecto lo hace a través de la orientación de los dominios, lo que da una gran magnetización al material en su conjunto y, como consecuencia, la creación de un gran campo  $\mathbf{B}$ . Los dominios más favorablemente orientados respecto al campo exterior crecen a expensas de los peor orientados, los cuales adquieren mayor facilidad para orientarse en la dirección del campo.



## Curva de imanación. Histéresis

En los materiales ferromagnéticos, la permeabilidad  $\mu = B/H$  no es una constante, o lo que es igual,  $B$  no es una función lineal de  $H$ . A la curva  $B = B(H)$  se le denomina *curva de imanación*, y hay que hacer notar que  $\mu$  no es la pendiente de esta curva, pues el valor de ésta es  $dB/dH$ .

Consideremos un solenoide toroidal con  $N$  espiras, cuyo radio medio sea  $R$  y recorrido por una corriente de intensidad  $I$ . El campo magnético creado por el toroide debe verificar la [35.11], cuya aplicación a la circunferencia media da:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint H dl = H \oint dl = Hl = NI \quad [35.28]$$

siendo  $l = 2\pi R$ , longitud de la circunferencia media, o bien,

$$H = \frac{NI}{l} = nI$$

siendo  $n$  el número de espiras por unidad de longitud de la circunferencia media. De aquí que a  $nI = H$  se le denomine *fuerza magnetizante*.

Si a la bobina toroidal se le coloca un núcleo de material ferromagnético, aparecerá en él un campo  $B$ , que variará al variar  $H$ , es decir, al variar la intensidad de la corriente  $I$ . Para la medida de  $B$  usaremos un segundo arrollamiento (secundario) en un sector de la bobina. Al variar  $B$  varía su flujo a través de este secundario y se induce en él una f.e.m. Mediante un fluxímetro se determina, en cada instante, el valor del flujo  $F$  y con él, el valor de  $B$ ,  $B = \Phi/A$ .

Si inicialmente la muestra está desimanada, la curva  $B = B(H)$  parte del origen, siendo su forma la indicada en la Figura 35.4, en la cual se ha representado  $B(T)$  frente a  $H(\text{A/m})$ . Al principio  $B$  crece rápidamente con  $H$ , pero luego la curva se hace prácticamente horizontal diciéndose que la muestra se ha *saturado magnéticamente*, alcanzando en ese momento el punto  $S$ , en el cual el campo en el interior es  $B_s$ .

Si ahora hacemos decrecer  $H$ , el campo  $B$  en el interior decrece, pero lo hace siguiendo la línea  $C$ , de forma que al llegar a  $H = 0$  queda en el material un *campo remanente*,  $B_R$ , denominado *retentividad*. Cambiando ahora el sentido del campo  $\mathbf{H}$ , al aumentar éste, llegamos a un valor de  $H = H_C$  para el cual la muestra se desimanta,  $B = 0$ , a ese valor se denomina *coercitividad*. Si se sigue aumentando el campo  $H$  se llega a un punto  $S'$  simétrico del  $S$ , en el cual la muestra se ha imantado a saturación pero en sentido opuesto al inicial. A partir de este punto, al disminuir  $H$  disminuye  $B$  siguiendo la curva  $C'$  y para  $H = 0$  el valor de  $B$  es  $B_R$ , pero con sentido contrario al inicial. Si ahora volvemos a cambiar el sentido de  $\mathbf{H}$  y lo aplicamos en el sentido inicial, comienza a desimantarse la muestra hasta llegar al valor  $H = H_C$  para el cual el campo  $B$  en el interior se anula y la muestra queda desimantada; un aumento de  $H$  hace que la muestra de vuelta a imanar en el sentido del campo aplicado hasta llegar de nuevo a la saturación en el punto  $S$ . A este ciclo, que va de  $S$  a  $S'$  por la curva  $C$  y vuelve a  $S$  por la curva  $C'$  se le llama *ciclo de histéresis a saturación*. Análogo ciclo puede realizarse sin llegar a la saturación, es decir, parando el aumento de  $H$  al llegar al punto  $A$ , en este caso, el *campo remanente*,  $B_r$ , se denomina *remanencia* y al valor  $H_c$  para el cual se anula el campo  $B$  dentro del material se denomina *fuerza coercitiva*, si bien hay que hacer notar que no es una fuerza, pues sus unidades son  $\text{A/m}$ .

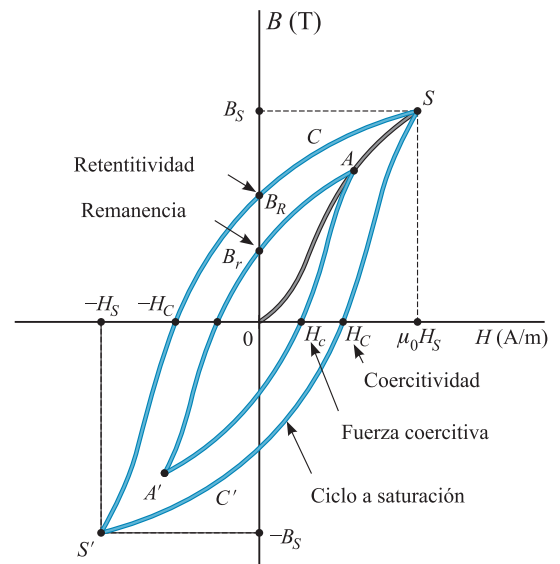


Figura 35.4. Ciclo de histéresis.

Como hemos indicado, en los materiales ferromagnéticos, un pequeño campo exterior induce grandes campos  $B$  internos y un valor muy grande de la imanación. Así, para el hierro, un campo  $H = 80 \text{ A/m}$ , que puede resultar saturante y producir un campo interno  $B = 2 \text{ T}$ , con lo cual la imanación es:

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H \cong \frac{2}{4\pi 10^{-7}} - 80 \cong \frac{5}{\pi} 10^6 - 80 \cong 10^6 \text{ A/m}$$

### Permeabilidad magnética

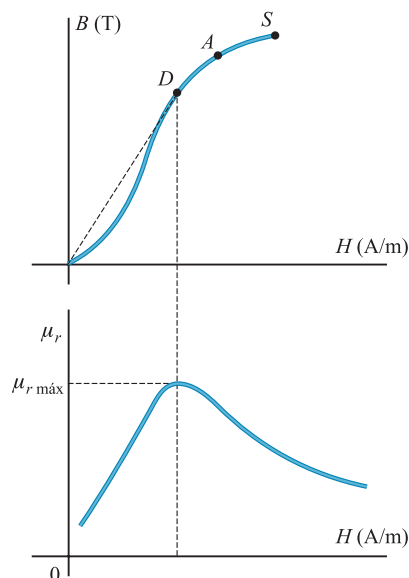
La permeabilidad magnética es función de  $H$  y se expresa:

$$\mu(H) = \frac{B(H)}{H} \quad [35.29]$$

Lo mismo sucede con la permeabilidad magnética relativa,

$$\mu_r(H) = \frac{\mu(H)}{\mu_0} = \frac{B(H)}{\mu_0 H} \quad [35.30]$$

Hay que hacer notar que  $\mu$  no es la pendiente de la curva  $B = B(H)$ , ya que esta es  $dB/dH$ ; así mismo, debemos indicar que los valores de  $\mu$  se dan calculados sobre la línea  $OS$  de imanación inicial del material. En la Figura 35.5 se ha representado la variación de  $\mu_r$  con el campo  $H$  aplicado, señalando la posición de  $\mu_r$  máxima.



**Figura 35.5.** Permeabilidad magnética relativa.

### Dependencia de la temperatura

La temperatura causa la agitación térmica que se opone a la alineación de los momentos magnéticos con el campo exterior. Por encima de un cierto valor,  $T_C$ , llamado *punto de Curie*, característico de cada material, la agitación térmica supera el poder de autoalineación de los momentos magnéticos dentro de los dominios y el material pierde sus propiedades de ferromagnético y se convierte en paramagnético. En la tabla se han recogido los valores de la temperatura de Curie para algunos materiales.

Material	Punto Curie (K)
Cobalto	1388
Hierro	1043
Niquel	627
MnBi	630
CrO <sub>2</sub>	386

### Energía almacenada en un material imanado

Un material imanado almacena energía magnética, ya que ha sido necesario comunicarle energía en el proceso de imanación. La densidad de energía acumulada durante el proceso de imanación, desde el estado de desimanación total, es:

$$w_m = \int_0^H B(H) \cdot dH \quad [35.31]$$

Integral que debe calcularse por la curva de primera imanación, desde  $H = 0$  hasta el valor final alcanzado. Su ecuación de dimensiones es:

$$[w_m] = [B][H] = MT^{-2}I^{-1}IL^{-1} = ML^{-1}T^{-2}$$

que es la ecuación de dimensiones de una densidad de energía o energía por unidad de volumen. Su unidad en el SI es el  $J\ m^{-3}$ .

### Pérdida de energía por histéresis

El área encerrada por el ciclo de histéresis,  $\oint B \cdot dH$ , es la energía suministrada al material por unidad de volumen para realizar el ciclo. Puesto que el material vuelve a su estado inicial, esta energía debe aparecer en forma de calor, es por tanto la energía disipada en forma de calor por ciclo realizado y unidad de volumen del material. Si el material va a estar sometido a campos alternos de varios ciclos por segundo, el área del ciclo de histéresis debe ser lo menor posible si deseamos evitar el calentamiento del material. Las pérdidas por histéresis son del orden de  $2\ J/m^3$  para el Supermalloy,  $30\ J/m^3$  del hierro puro o  $250\ J/m^3$  del hierro comercial.

### Materiales magnéticos «blandos» y «duros»

Se dice que un material magnético es «blando» cuando presenta ciclos de histéresis estrechos y altos, con muy poca área encerrada; en consecuencia, alto valor de la remanencia, muy baja densidad de energía magnética disipada por ciclo y elevado valor de la permeabilidad magnética. Serán materiales fácilmente magnetizables y presentarán muy baja fuerza coercitiva. Todas estas cualidades les hacen muy útiles en motores eléctricos, alternadores, transformadores, registradores magnéticos, etc. (Figura 35.6).

Los materiales magnéticos «duros» son los que presentan un ciclo de histéresis ancho y bajo, con gran área encerrada; en consecuencia, sus cualidades son opuestas a las de los «blandos», oponen gran fuerza coercitiva, bajo valor de la remanencia, alta densidad de energía magnética almacenada y bajo valor de la permeabilidad magnética. Son difícilmente magnetizables, pero presentan un gran magnetismo remanente. Se emplean para la fabricación de imanes permanentes.

En la tabla se indican algunos valores para algunos materiales magnéticos.

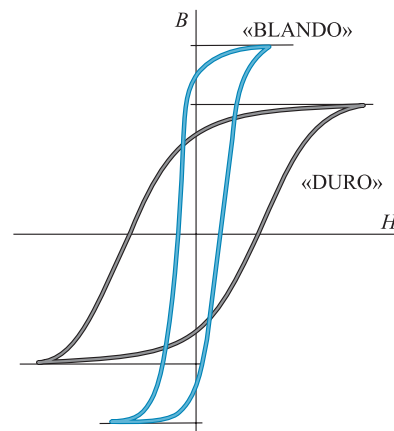


Figura 35.6. Ciclos de histéresis.

	Retentividad $B_R$ (T)	Coercitividad $H_C$ (A/m)
<b>BLANDOS:</b>		
Hierro comercial	0,77	4
Hierro silicio (3 por 100 de Si)	0,6	8
Supermalloy (16Fe; 79Ni; 5Mo)	0,5	0,16
<b>DUROS:</b>		
Acero al carbono (98Fe; 1C; 0,5Mn)	0,95	4000
Acero al cromo (95Fe; 3,5Cr; 1C; 0,5M)	1,00	5000
Alnico 5 (51Fe; 24Co; 14N; 8Al; 3Cu)	1,25	44000
Platino cobalto (77Pt; 23Co)	0,6	29000

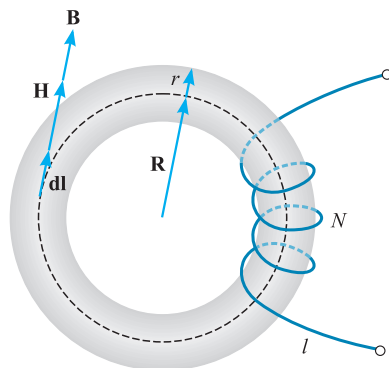


Figura 35.7. Circuito magnético.

### 35.8 Circuito magnético

Por analogía con el circuito eléctrico, se dice que existe un circuito magnético cuando las líneas del campo magnético son cerradas y confinadas en una región del espacio. Como ejemplo puede considerarse una pieza tórica de material de alta permeabilidad, que lleve un arrollamiento de  $N$  espiras, por el cual circule una corriente de intensidad  $I$  (Figura 35.7).

La ley de Ampère se escribe:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI$$

Si es  $r \ll R$ , podemos admitir que la densidad de flujo  $B$  es constante en toda sección del toroide, es decir:

$$B = \frac{\phi_m}{S} = \mu H$$

con lo cual, la ley de Ampère se expresa:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint H dl = \oint \frac{\phi_m}{\mu_s} dl = NI$$

o bien,

$$\oint \frac{dl}{\mu_s} = \frac{NI}{\phi_m} = \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}}{\iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}} \tag{35.32}$$

expresión que es completamente análoga a la [31.13],

$$R = \frac{\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}}$$

A la magnitud  $\mathcal{R}$  análoga de la resistencia  $R$  se le denomina *reluctancia*.

Reluctancia

$$\mathcal{R} = \oint \frac{dl}{\mu_s} \tag{35.33}$$

Fuerza magnetomotriz

A  $NI = \oint H \cdot dl = \text{f.m.m.}$ , que es análogo a la f.e.m. dada por la [31.22], se le denomina *fuerza magnetomotriz* (f.m.m.), siendo  $\Phi_m$  análogo de la intensidad de corriente eléctrica. Con ello, la [35.32] se escribe:

$$\mathcal{R} = \frac{\text{f.m.m.}}{\phi_m} \tag{35.34}$$

la cual es completamente análoga a la ley de Ohm del circuito eléctrico, quedando establecidas las siguientes analogías:

Circuito eléctrico	Circuito magnético
Intensidad del campo eléctrico: $\mathbf{E}$ Densidad de corriente eléctrica: $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ Intensidad de la corriente eléctrica:	Intensidad del campo magnético: $\mathbf{H}$ Densidad flujo magnético: $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ Flujo magnético:
$I = \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$	$\phi_m = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$
Resistencia: $R = \oint \frac{dl}{\sigma S}$	Reluctancia $\mathcal{R} = \oint \frac{dl}{\mu S}$
Fuerza electromotriz: $\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$	Fuerza magnetomotriz: $\mathcal{F} = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$
Conductividad: $\sigma$	Permeabilidad: $\mu$

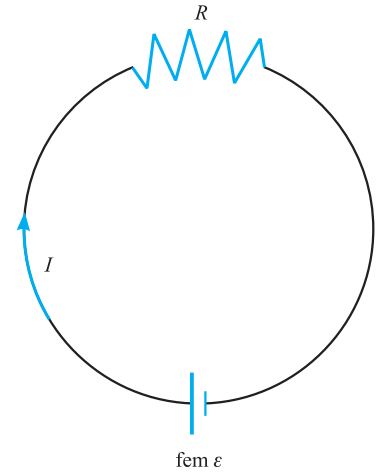


Figura 35.8.

La ecuación de dimensiones de la reluctancia, deducida de [35.33], es:

$$[\mathcal{R}] = [\mu]^{-1} L^{-1} = [MLT^{-2}I^{-2}]^{-1} L^{-1} = M^{-1} L^{-2} T^2 I^2$$

Su unidad de medida en el SI es el henrio<sup>-1</sup> ( $H^{-1}$ ).

En la Figura 35.8 se representa el circuito eléctrico equivalente al magnético en el toroide.

Por la analogía entre resistencia eléctrica y reluctancia deberá verificarse que *la reluctancia equivalente a una asociación de reluctancias en serie es la suma de éstas*. En efecto, consideremos un toroide formado por sectores de materiales diferentes, todos ellos de alta permeabilidad (Figura 35.9). La fuerza magnetomotriz se expresa:

$$NI = \sum \oint \mathbf{H}_i \cdot d\mathbf{l}_i = \sum \oint H_i dl_i$$

El flujo magnético en el circuito es:

$$\phi_m = B_1 S = B_2 S = \dots = B_i S = \dots = B_n S = \mu_1 H_1 S = \mu_2 H_2 S = \dots = \mu_i H_i S = \dots$$

lo que, llevado a la anterior, da:

$$NI = \sum \oint \frac{\phi_m}{\mu_i S} dl_i = \phi_m \sum_i \mathcal{R}_i$$

que, comparada con la [35.34], nos da  $\mathcal{R} = \sum \mathcal{R}_i$ .

Análogamente, *para reluctancias asociadas en paralelo, la inversa de la reluctancia equivalente debe ser igual a la suma de las inversas de aquéllas*. En efecto, consideremos el circuito magnético de la Figura 35.10, formado por dos reluctancias en paralelo.

La f.m.m. se expresa:

$$NI = \oint \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 = \oint \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l}_2 = \oint H_1 dl_1 = \oint H_2 dl_2$$

Los flujos magnéticos en cada reluctancia son:

$$\phi_{1m} = \mu_1 H_1 S_1 \quad \text{y} \quad \phi_{2m} = \mu_2 H_2 S_2$$

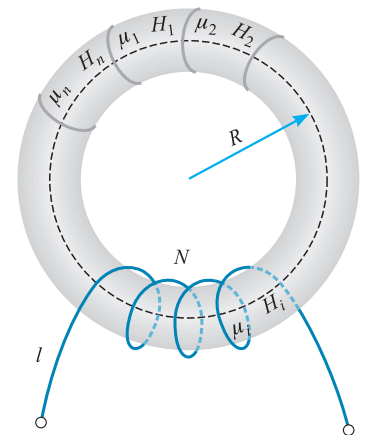


Figura 35.9. Reluctancias en serie.

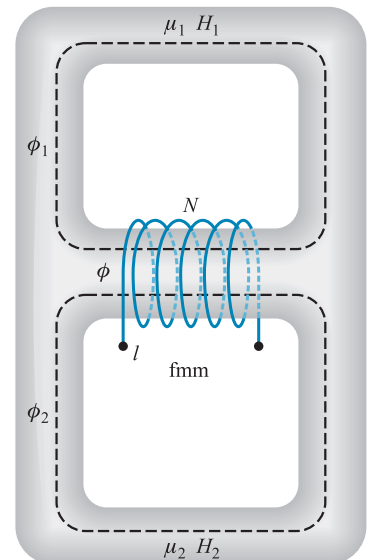


Figura 35.10. Reluctancias en paralelo.

y la f.m.m. puede expresarse de la forma:

$$NI = \oint \frac{\phi_{1m}}{\mu_1 S_1} dl_1 = \oint \frac{\phi_{2m}}{\mu_2 S_2} dl_2 = \phi_{1m} \mathcal{R}_1 = \phi_{2m} \mathcal{R}_2$$

Puesto que el flujo magnético total es la suma de los flujos en cada reluctancia, es:

$$\phi_m = \phi_{1m} + \phi_{2m} = \frac{NI}{\mathcal{R}_1} + \frac{NI}{\mathcal{R}_2}$$

o bien,

$$\frac{\phi_m}{NI} = \frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2}$$

Asimismo, las leyes de Kirschhoff para circuitos magnéticos son análogas de las correspondientes eléctricas.

Ley de los nudos: *en un nudo, la suma algebraica de los flujos magnéticos que concurren es nula.*

$$\sum \phi_m = 0$$

Ley de las mallas: *en una malla, la suma algebraica de f.m.m. es igual a la suma de los productos de los flujos magnéticos por la reluctancia correspondiente.*

$$\sum N_i I_i = \sum \mathcal{R}_i \phi_{mi}$$

### EJEMPLO 35.1

Un toroide de hierro tiene un radio  $R = 10/\pi$  cm y lleva un arrollamiento de 200 vueltas por el cual circula una corriente de 20 mA. Calculemos en el interior del toroide:

- El campo  $H$ .
- La densidad de flujo  $B$ .
- La imanación.

#### Solución:

- El campo  $H$  en el interior del toroide está dado por:

$$H = \frac{NI}{l} = \frac{200 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot \frac{10}{\pi} \cdot 10^{-2}} = 200 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$$

- El valor de la densidad de flujo  $B$  viene dada por:

$$B = \mu H$$

El valor de  $B$  o el de  $\mu$  deben ser conocidos o deducirse de la curva  $B = B(H)$  o  $\mu = \mu(H)$ , respectivamente. Así, para  $H = 200 \text{ Am}^{-1}$ , el valor de  $\mu(200)$  es:

$$\mu(200) = 6 \cdot 10^{-3}$$

con lo cual, es:

- Usando la [35.12], despejamos el valor de la imanación:

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{1,2}{4\pi \times 10^{-7}} - 200 = 954729 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$$

**EJEMPLO 35.2**

Un núcleo ferromagnético de permeabilidad  $\mu$ , como el indicado en la Figura 35.11, lleva las fuerzas magnetomotrices que se indican en ella. Calculemos:

- a) Circuito eléctrico equivalente.
- b) Reluctancias.
- c) Flujos magnéticos en cada tramo.
- d) Densidad de flujo magnético en cada tramo.
- e) Campos  $H$ .
- f) Imanación  $M$ .

**Solución:**

- a) El circuito eléctrico equivalente es el representado en la Figura 35.12.
- b) Los valores de las reluctancias son:

$$\mathcal{R}_1 = \frac{3a}{\mu S} = \mathcal{R}_2 \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_3 = \frac{a}{\mu S}$$

- c) La resolución del circuito eléctrico da:

$$\left. \begin{aligned} N_1 I_1 &= (R_1 + R_3)I'_1 + R_3 I'_2 \\ N_2 I_2 &= R_3 I'_1 + (R_2 + R_3)I'_2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} N_1 I_1 &= \frac{4a}{\mu S} I'_1 + \frac{a}{\mu S} I'_2 \\ N_2 I_2 &= \frac{4a}{\mu S} I'_1 + \frac{a}{\mu S} I'_2 \end{aligned} \right\}$$

$$\phi_1 = I'_1 = \frac{4N_1 I_1 - N_2 I_2}{15a} \mu S \quad ; \quad \phi_2 = I'_2 = \frac{7N_2 I_2 - 2N_1 I_1}{30a} \mu S$$

$$\phi_3 = \phi_1 + \phi_2 = \frac{6N_1 I_1 + 5N_2 I_2}{30a} \mu S$$

- d) Puesto que  $\mathbf{B}$  y  $d\mathbf{S}$  tienen en cada punto el mismo sentido y  $B$  en cada tramo es constante. Podemos escribir:

$$\phi = \iiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint B ds = B \iint dS = BS$$

Por tanto, son:

$$B_1 = \frac{\phi_1}{S} \quad ; \quad B_2 = \frac{\phi_2}{S} \quad \text{y} \quad B_3 = \frac{\phi_3}{S}$$

- e) El campo  $H$  en cada tramo será:

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu} = \frac{\phi_1}{\mu S} \quad ; \quad H_2 = \frac{\phi_2}{\mu S} \quad ; \quad H_3 = \frac{\phi_3}{\mu S}$$

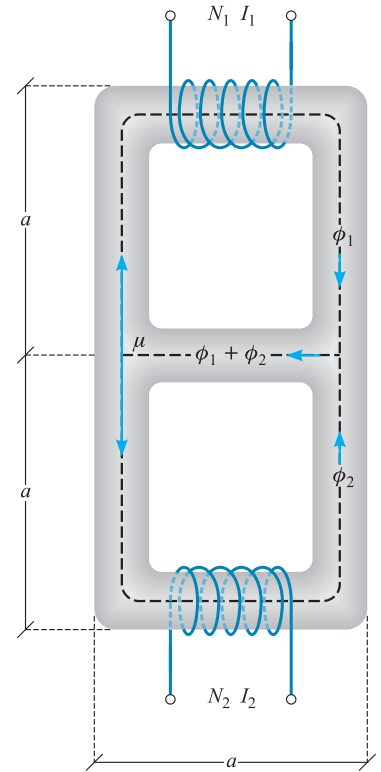


Figura 35.11. Circuito magnético.

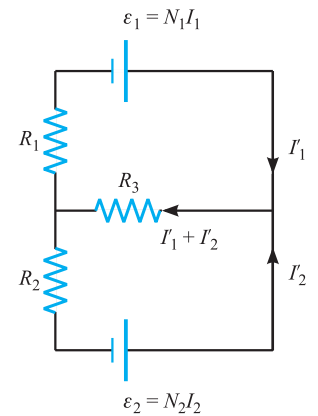


Figura 35.12. Circuito eléctrico equivalente.

f) La imanación en cada tramo será:

$$M_1 = \frac{B_1}{\mu_0} - H_1 = \frac{B_1}{\mu_0} - \frac{B_1}{\mu} = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right)B_1 = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right)\frac{\phi_1}{S}$$

$$M_2 = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right)\frac{\phi_2}{S} \quad \text{y} \quad M_3 = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right)\frac{\phi_3}{S}$$

### 35.9 Circuito magnético con entrehierro

Se denomina así a un circuito magnético cuyo núcleo ferromagnético ha sido abierto al suprimir en él una sección normal de pequeño espesor. En la Figura 35.13 se representa un circuito magnético toroidal de radio  $R$  abierto en un espesor  $d$  y cuya fuerza magnetomotriz es  $f.m.m. = NI$ .

Aplicando el teorema de Ampère a lo largo de la circunferencia de radio  $R$ , se obtiene:

$$NI = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint H dl = H_i(l - d) + H_e d$$

siendo:  $H_i$  el campo magnético dentro del núcleo;  $H_e$  el campo magnético en el entrehierro;  $l = 2\pi R$ , y  $d$  el ancho del entrehierro.

Admitiendo que no hay pérdidas de flujo en el entrehierro y puesto que la sección es constante, debe verificarse:

$$B = \mu_0 H_e = \mu H_i \tag{35.35}$$

de donde  $H_e = \mu_r H_i$ , y la ley de Ampère se expresa:

$$NI = H_i(l - d + \mu_r d) = H_i[l - d(1 - \mu_r)]$$

De la cual se despeja:

$$H_i = \frac{NI}{l + d(\mu_r - 1)} \tag{35.36}$$

Conocido  $H_i$ , se calculan  $H_e$  y  $B$  a partir de [35.35].

#### EJEMPLO 35.3

Un núcleo ferromagnético de radio medio  $R = 10/\pi$  cm, lleva practicado un entrehierro de anchura  $d = 1$  cm y un arrollamiento de  $N = 1000$  espiras por el cual se hace circular una corriente  $I = 200$  mA. Calculemos la densidad de flujo  $B$  en el entrehierro.

#### Solución:

El valor de  $B$  está dado por la [35.35], en la cual sustituiremos  $H_i$  por su valor dado por la [35.36], resultando:

$$B = \frac{NI}{l - d + \mu_r d}$$

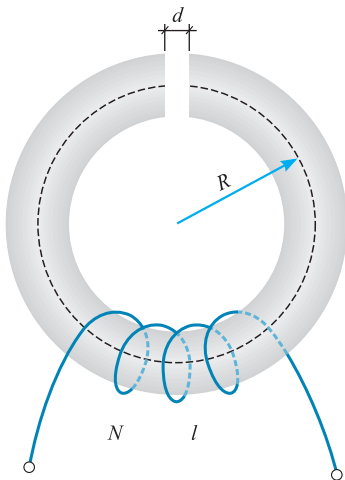


Figura 35.13. Circuito magnético con entrehierro.



Dividiendo numerador y denominador por  $\mu_r$ , se expresa:

$$B = \frac{NI}{\frac{l-d}{\mu_r} + d}$$

y, puesto que es  $\frac{l-d}{\mu_r} \ll d$ , podemos escribir:

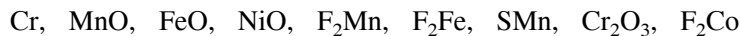
$$B = \frac{\mu_0 NI}{d}$$

En la cual, sustituyendo los valores numéricos, resulta:

$$B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 19^3 \times 200 \times 10^{-3}}{10^{-2}} = 0,025 \text{ T}$$

### 35.10 Antiferromagnetismo y ferrimagnetismo

Se denominan materiales *antiferromagnéticos* aquellos que no dan momento magnético macroscópico, pues presentan momentos magnéticos atómicos opuestos de forma que la resultante se anula. Según la teoría establecida por Neel, los átomos están organizados en dos redes: una de momentos magnéticos  $\mathbf{m}$  y otra de momentos magnéticos  $-\mathbf{m}$ , las cuales están intercaladas entre sí, de forma que se anula el momento magnético total. Como resultado, el material en su conjunto no presenta imanación neta. La susceptibilidad en estos materiales es positiva y aumenta con la temperatura, ya que la temperatura destruye algo la situación antiparalela de los momentos magnéticos atómicos y permite a un mayor número de átomos orientar su momento magnético en el sentido del campo excitador. A partir de un cierto valor de la temperatura, llamado *punto de Neel*, estas sustancias se comportan como paramagnéticas. Las principales sustancias antiferromagnéticas son:



Los materiales *ferrimagnéticos* presentan también momentos magnéticos antiparalelos, pero los de un sentido tienen menor módulo que los del opuesto. En consecuencia, en su conjunto, el material presenta una cierta imanación, que obviamente será menor que en los ferromagnéticos, ya que la imanación de saturación es de unos 0,3 T frente a los 2 T que se consiguen en los ferromagnéticos. En la Figura 35.14 se han representado los momentos magnéticos atómicos de los tres tipos de materiales: ferromagnéticos, antiferromagnéticos y ferrimagnéticos.

Otra particularidad muy importante de los ferrimagnéticos es que son aislantes eléctricos, cuya resistividad puede llegar a  $10^4 \Omega$ , mientras que en el hierro es de  $10^{-7} \Omega$ . En consecuencia, no se producen en ellos corrientes de Foucault y pueden ser usados en núcleos de bobinas y transformadores de alta frecuencia, en memoria de calculadoras, en dispositivos de microondas, etc. Por el contrario, presentan muy baja resistencia mecánica.

A los materiales ferrimagnéticos se les conoce con el nombre general de *ferritas*, que son materiales cerámicos cuya fórmula general es del tipo  $\text{Fe}_2\text{O}_3(\text{MO})$ , en la cual M es un metal divalente, como: Fe, Ni, Co, Cu, Mn, Zn, Cd, etc. El primer imán natural conocido, *la magnetita o piedra imán*, cuya fórmula es  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ , puede escribirse de la forma  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  (FeO) y en definitiva no se trata de un material

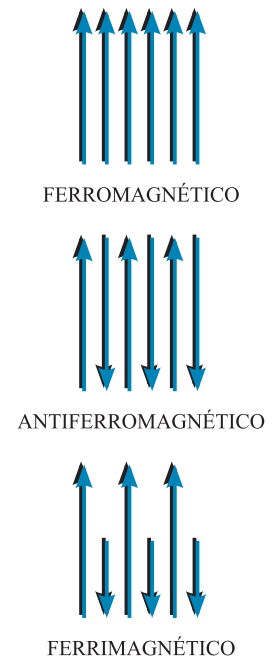
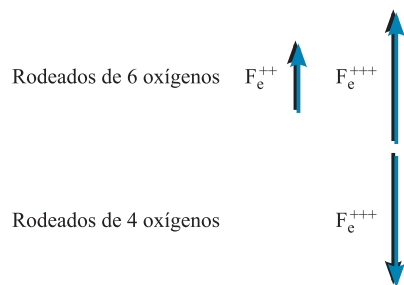
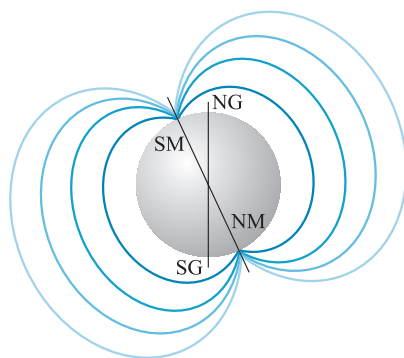


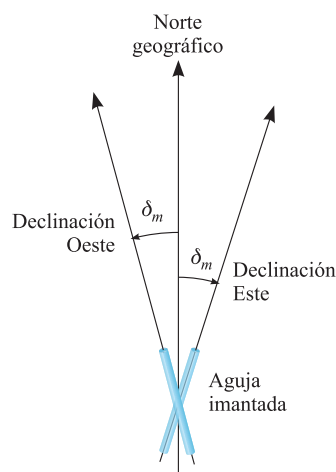
Figura 35.14. Momentos magnéticos.



**Figura 35.15.** Momentos magnéticos en la magnetita.



**Figura 35.16.** Campo magnético terrestre.



**Figura 35.17.** Declinación magnética.

ferromagnético, sino de una ferrita, ya que los átomos de hierro presentan momentos magnéticos de distinto sentido, los  $Fe^{++}$  están siempre rodeados por seis oxígenos y tienen todos el mismo momento magnético, mientras que los iones  $Fe^{+++}$  una mitad, que están rodeados por seis oxígenos, tienen un momento magnético de la misma dirección y sentido de los  $Fe^{++}$ , pero de mayor módulo, y la otra mitad, que están rodeados de cuatro oxígenos, tienen su momento magnético opuesto al de los otros  $Fe^{++}$ , lo cual ha sido representado en la Figura 35.15.

## 35.11 Magnetismo terrestre

En la antigua Grecia, en el siglo VI a.C., ya se había observado cómo la piedra imán (magnetita) atraía al hierro. Parece ser que en el siglo I a.C. ya se usaba un tipo rudimentario de brújula y en el siglo XI de nuestra era, según cita Shen Kua en su libro *Dream Pool Séais*, los chinos usaban la brújula en la navegación. La primera cita del uso de la brújula en occidente, como instrumento de navegación, se debe a Alexander Neckam, en 1189, en su libro *De naturas rerum*. Pierre de Maricourt escribió, en 1269, *Epístola de Magnete*, en la cual establece la existencia en todo imán natural de dos polos magnéticos, diametralmente opuestos y en los cuales las acciones magnéticas tienen mayor intensidad.

Cristóbal Colón hizo notar por vez primera que la dirección de la brújula no coincide exactamente con la del norte geográfico (Estrella Polar) y que, además, cambia desde las costas europeas, en las cuales se desvía hacia el este del norte geográfico, a las costas americanas, en las cuales la desviación es hacia el oeste. Todo lo cual, al no serle tomado en consideración, lo puso por escrito en una carta enviada desde Haití en 1498.

En 1581, el marino británico Robert Norman publicó *The Newe Atractive*, en el cual describe cómo una aguja imantada, suspendida por su c.d.g. mediante un hilo, no se mantiene en el plano horizontal, sino que se inclina por debajo de aquel. En 1600, Gilbert se dio cuenta de que la Tierra se comportaba como un gran imán, lo que describió en su tratado *De magnete, Magneticisque Corporibus et de Magno Magnete Tellure* (Del imán, de los cuerpos magnéticos y del gran imán de la Tierra).

Las agujas imantadas permitieron analizar el campo magnético de la Tierra, demostrando que sus polos magnéticos están en las proximidades de los geográficos. Por analogía con sus vecinos, al polo magnético próximo al norte geográfico se le llamó polo norte magnético, y al próximo al sur geográfico, polo sur magnético, pero ello no conduce más que a confusión, ya que las líneas del campo magnético terrestre salen del polo magnético situado en el hemisferio sur, luego éste es un polo norte magnético y entran en el polo magnético situado en el hemisferio norte, luego éste es un polo sur magnético. El eje geomagnético es el que une ambos polos magnéticos y el plano normal a él, que pasa por el centro de la Tierra, se denomina plano ecuatorial magnético.

Al no coincidir los ejes geográfico y geomagnético, tampoco coincidirán los meridianos (Figura 35.16).

En cada punto de la superficie terrestre, el campo magnético se caracteriza por tres propiedades:

La **declinación magnética**,  $\delta_m$ , o *ángulo que forma la aguja magnética que puede girar libremente con el meridiano del lugar*, fue por primera vez observada por Colón, y puede ser este, si la aguja apunta a la derecha del norte geográfico, y oeste, si lo hace a la izquierda (Figura 35.17).

La **inclinación**,  $\hat{i}$ , o *ángulo que forma la aguja magnética con el plano horizontal del lugar*, siempre por debajo de aquel, tanto en el hemisferio norte como en

el sur, fue por vez primera observada por Norman, y la **intensidad**, o *fuerza que ejerce el campo sobre un polo de la aguja* (Figura 35.18).

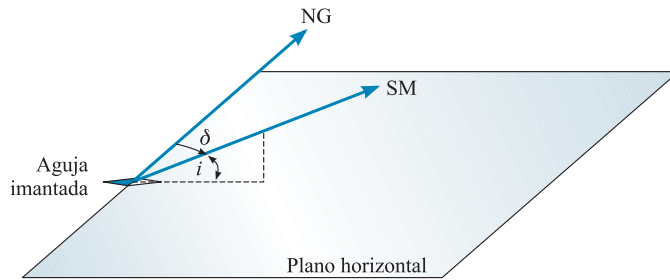


Figura 35.18. Inclinación magnética.

Las líneas de igual declinación magnética se llaman *isógonas*; las de igual inclinación magnética, *isoclinas*, y aquellas en las que todos sus puntos tienen la misma componente horizontal del campo magnético, *isodinámicas*.

Inicialmente se pensó que el origen del campo magnético terrestre era un potente imán situado en el interior de la Tierra, lo que concordaba con la existencia de un núcleo terrestre esférico, con un radio de unos 3000 km y compuesto de hierro y níquel, que a pesar de las altas temperaturas a las que se encuentra, aproximadamente unos 5000 °C, es sólido debido a las muy altas presiones a las que está sometido. Sin embargo, el hecho de que el núcleo tenga temperaturas superiores al punto de Curie de los materiales citados (770 °C para el hierro y 358° para el níquel) hace imposible que se conserven sus propiedades ferromagnéticas y el núcleo no puede ser un imán permanente.

No existe otra posibilidad para el origen del campo magnético terrestre que las corrientes eléctricas que deben producirse en el llamado núcleo externo, zona comprendida entre los 3000 y los 5000 km, compuesto también por hierro y níquel, pero donde se dan las condiciones para mantenerse fundidos (Figura 35.19).

En 1948 se propuso un modelo basado en la magnetohidrodinámica de forma que las corrientes convectivas en el núcleo exterior y los torbellinos ocasionados en él por la fuerza de Coriolis y por la diferente velocidad de rotación del núcleo y la corteza terrestre, serían las causantes del campo magnético terrestre. Todo lo cual puede modelizarse como una pareja de dínamos acopladas, lo que da lugar a un campo magnético similar al terrestre.

El polo sur magnético fue localizado por vez primera por James Ross, en 1831, en el archipiélago entre Groenlandia y Canadá, aproximadamente en latitud 70° norte y longitud 97° oeste; nadie volvió a buscarlo hasta que Amundsen, en 1904, lo localizó de nuevo, pero ahora unos 50 Km al norte de la situación anterior. Su movimiento ha seguido produciéndose en dirección nor-noroeste, y se encuentra actualmente muy próximo al polo norte en una longitud aproximada de 102° oeste.

El estudio de la imanación remanente en las rocas que contienen magnetita u otros materiales ferromagnéticos, especialmente rocas volcánicas, permite conocer el campo magnético terrestre en el momento en que se solidificaron, ya que éste es el que produjo su imanación en aquel momento. Ello ha hecho posible comprobar que en otras épocas geológicas el campo magnético terrestre ha sufrido varias inversiones en su polaridad.

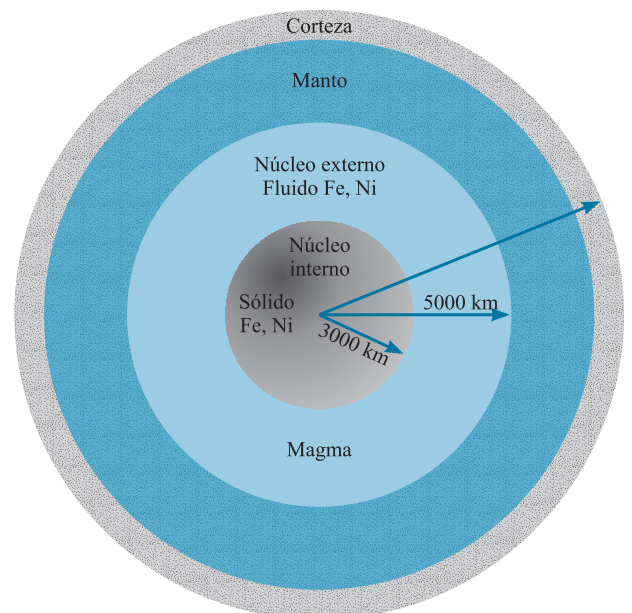


Figura 35.19. Estructura interna de la Tierra.

El estudio de los fondos marinos ha puesto de manifiesto la existencia de una cordillera volcánica en el fondo del Atlántico, a mitad de camino entre las costas de Europa-África por un lado y América por el otro. El análisis de la imanación de los fondos marinos detectó que ésta se distribuía en bandas paralelas a la citada cordillera y que estas bandas tenían imanación opuesta (Figura 35.20).

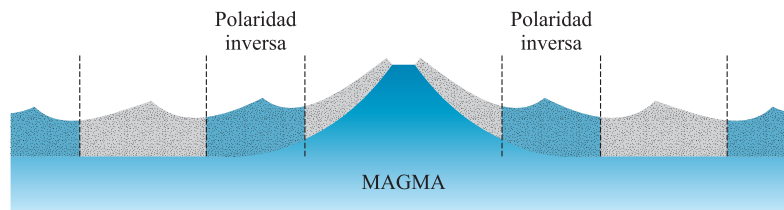


Figura 35.20. Polaridad inversa en las bandas de lava

Estas bandas estaban formadas por lava que ha sido emitida por la cordillera volcánica. Aquélla, al deslizarse por ambas laderas, hacia la parte de Europa-África y hacia la parte americana, y solidificarse, ha retenido la imanación que le producía el campo magnético terrestre en aquel momento. Se ha podido comprobar cómo estas bandas presentan imanación de sentido opuesto de forma alternativa. La polaridad actual parece que comenzó hace unos 700 000 años; un periodo de polaridad inversa comenzó hace unos 2,4 millones de años; otro de polaridad igual a la actual comenzó hace unos 3,4 millones de años, etc. Parece ser que una inversión completa de la polaridad magnética tarda entre unos 1000 a 10 000 años en producirse y su causa se desconoce. Fenómenos análogos al descrito se presentan en el fondo de los demás océanos.

Parece que, hace unos 150 años, pueda haber dado comienzo un nuevo periodo de inversión en la polaridad del campo magnético terrestre, ya que su intensidad viene disminuyendo constantemente y, en los últimos años, la disminución se está acelerando. De forma que, al ritmo actual en 1500 o 2000 años, la polaridad puede haber cambiado. Para estudiar el fenómeno, la Agencia Espacial Europea lanzará tres satélites en el 2009.

Actualmente la intensidad del campo es de unos  $25 \mu\text{T}$  en el ecuador y unos  $70 \mu\text{T}$  en los polos magnéticos. La declinación también varía con el tiempo existiendo una serie de valores para Londres, que comienza en la época de Gilbert, año 1600, en el cual era  $\delta_m = 16^\circ \text{ E}$ ; en 1800 era  $\delta_m = 24^\circ \text{ W}$ ; en 1935, su valor era  $\delta_m = 12^\circ \text{ W}$  y, actualmente, es  $\delta_m = 10^\circ \text{ W}$ .

Se ha podido comprobar que el campo magnético terrestre sufre variaciones temporales debidas a la rotación del eje geomagnético, lo que hace variar con el tiempo tanto la declinación como la inclinación del campo magnético. También parecen existir variaciones diurnas y anuales, atribuidas al movimiento relativo Tierra-Luna y Tierra-Sol. Por otra parte, existen también variaciones bruscas, accidentales, que se conocen con el nombre de *tempestades magnéticas* y que están relacionadas con periodos de gran actividad solar, en los cuales también tienen lugar las *auroras boreales*.

La anulación del campo magnético terrestre dejaría a la Tierra sin su protección frente a las radiaciones cósmicas y al viento solar, la radiación sobre la Tierra sería muy intensa y podría ocasionar modificaciones genéticas, con aparición o extinción de especies y afectando, en general, de forma profunda a la vida sobre la misma.

## 36.1 Introducción

Las ecuaciones denominadas de Maxwell (1831-1879) son un conjunto de cuatro ecuaciones que describen el comportamiento de los campos electromagnéticos, y que son: ley de Gauss del campo eléctrico, ley de Gauss del campo magnético, ley de Faraday-Henry y ley de Ampère-Maxwell, pudiendo cada una de ellas expresarse en su forma integral o diferencial.

Se denominan ecuaciones de Maxwell por haber sido éste quien se dio cuenta de que constituían las ecuaciones básicas para desarrollar toda la teoría del electromagnetismo, además de haber generalizado la ley de Ampère y haber introducido el concepto de campo, lo que hizo en su libro *Treatise on Electricity and Magnetism* (1873).

En capítulos anteriores se han estudiado las leyes de Gauss, tanto en su forma integral como diferencial, así como la ley de Faraday-Henry en su forma integral y la ley de Ampère. En este capítulo estudiaremos la ley de Faraday-Henry en su forma diferencial, la generalización de la ley de Ampère para campos variables con el tiempo, que dará lugar a la ley de Ampère-Maxwell, y la existencia y características de las ondas electromagnéticas.

## 36.2 Ley de Faraday-Henry en forma diferencial. Rotacional del campo eléctrico

Aplicaremos la ley de Faraday-Henry en su forma integral, la cual fue deducida en el Capítulo 33, a un rectángulo de lados  $dx$ ,  $dy$ , situado en el plano  $z = 0$ . Calculemos la circulación del campo eléctrico a lo largo de los lados del rectángulo  $NMPQ$  (Figura 36.1).

$$\oint_{NM} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{NM+MP+PQ+QN} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

- 36.1. Introducción
- 36.2. Ley de Faraday-Henry en forma diferencial. Rotacional del campo eléctrico
- 36.3. Conservación de la carga. Ecuación de continuidad
- 36.4. Ley de Ampère-Maxwell. Circulación y rotacional del campo magnético. Corriente de desplazamiento
- 36.5. Ecuaciones de Maxwell
- 36.6. Ecuaciones de Maxwell para medios materiales
- 36.7. Condiciones del contorno
- 36.8. Densidad de energía electromagnética
- 36.9. Ecuaciones del campo electromagnético en el vacío. Ondas electromagnéticas
- 36.10. Vector de Poynting
- 36.11. Presión de radiación

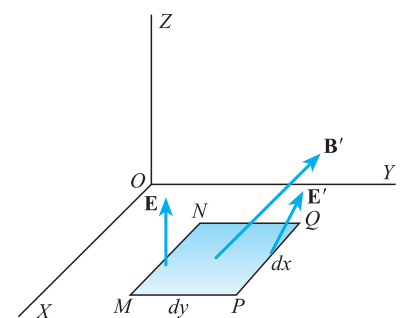


Figura 36.1. Ley de Faraday-Henry.

La circulación a lo largo del lado  $NM$  vale:

$$\oint_{NM} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{x_1}^{x_1+dx} \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} dx = \int_{x_1}^{x_1+dx} E_x \cdot dx$$

Tomando para  $E_x$  un valor constante en el intervalo  $x_1$ , a  $x_1 + dx$ , se escribe:

$$\int_{NM} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_x \int_{x_1}^{x_1+dx} dx = E_x [x]_{x_1}^{x_1+dx} = E_x dx$$

Análogamente, a lo largo del lado  $PQ$  es  $\int_{PQ} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -E'_x dx$ . Sumando ambas resulta,

$$\int_{NM+PQ} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = (E_x - E'_x) dx$$

El valor  $\mathbf{E}'$  del campo eléctrico en el lado  $PQ$ , puede ponerse en función del valor  $\mathbf{E}'$  sobre  $NM$ , mediante el desarrollo  $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} dy$  con lo que podemos escribir:

$$\int_{NM+PQ} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial E_x}{\partial y} dx dy \quad [36.1]$$

Análogamente, la circulación a lo largo del lado  $QN$  es:

$$\int_{QN} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -E_y dy$$

y a lo largo de  $MP$ ,

$$\int_{MP} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E''_y dy$$

cuya suma es:

$$\int_{MP+QN} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = (E''_y - E_y) dy$$

Teniendo ahora en cuenta el desarrollo  $\mathbf{E}'' = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} dx$ , resulta:

$$\int_{MP+QN} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\partial E_y}{\partial x} dx dy \quad [36.2]$$

Sumando las Ecuaciones [35.1] y [35.2] obtenemos la circulación total:

$$\oint_{NMPQ} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) dx dy$$

Calculemos ahora el flujo del campo magnético a través del referido rectángulo

$$\iint_{NMPQ} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = B_z dx dy$$

ya que es  $d\mathbf{A} = dx dy \mathbf{k}$ .

Con todo ello, una de las componentes de la ecuación de Faraday-Henry se escribe de la forma:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = - \frac{\partial B_z}{\partial t}$$

Procediendo análogamente con rectángulos situados en los planos  $x = 0$  e  $y = 0$ , se obtienen, respectivamente:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = - \frac{\partial B_x}{\partial t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = - \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

Las tres últimas ecuaciones se combinan en una única ecuación vectorial, que se escribe:

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad [38.3] \quad \text{Ley de Faraday-Henry}$$

Expresión que constituye la forma diferencial de la ley de Faraday-Henry, la cual relaciona, en cada punto de un campo electromagnético, a los campos eléctrico y magnético existentes en el mismo.

### 36.3 Conservación de la carga. Ecuación de continuidad

Consideremos una superficie cerrada  $A$ , en cuyo interior hay una cierta densidad de carga eléctrica  $\rho$  (Figura 36.2).

Si hay un flujo de cargas a través de la superficie  $A$ , forzosamente deberá producirse una variación en la densidad de carga en el volumen limitado por  $A$ , de forma que se verifique:

$$\oiint \mathbf{i} \cdot d\mathbf{A} = - \iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} dv$$

Es decir, la carga que sale a través de la superficie  $A$  en la unidad de tiempo, debe ser igual a la que desaparece del interior. Al vector  $\mathbf{i}$  se le denomina *densidad de corriente* y es la *cantidad de electricidad que atraviesa la unidad de superficie normal a la dirección de propagación en la unidad de tiempo*.

Aplicando el teorema de la divergencia, la expresión anterior se transforma en:

$$\iiint \nabla \cdot \mathbf{i} dv = - \iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} dv$$

Lo cual debe verificarse para cualquier volumen y por tanto, debe ser:

$$\nabla \cdot \mathbf{i} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad [36.4] \quad \text{Ecuación de continuidad}$$

Ecuación que se denomina de continuidad y relaciona la densidad de corriente  $\mathbf{i}$  y la densidad espacial de carga  $\rho$ , en cada punto. En aquellos puntos del campo donde no haya variación de la densidad de carga con el tiempo, la ecuación de continuidad se escribe:

$$\nabla \cdot \mathbf{i} = 0 \quad [36.5]$$

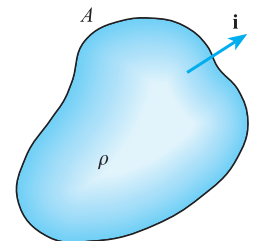


Figura 36.2. Conservación de la carga.

### 36.4 Ley de Ampère-Maxwell. Circulación y rotacional del campo magnético. Corriente de desplazamiento

Ya vimos cómo una corriente eléctrica producía un campo magnético, y la ley de Ampère cuantificaba el fenómeno,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

La cual puede escribirse de la forma:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \iint_A \mathbf{i} \cdot d\mathbf{A} \quad [38.6]$$

En la que  $d\mathbf{A}$  es el elemento de área de una superficie cualquiera que contenga a la curva cerrada sobre la cual se halla la circulación de  $\mathbf{B}$ ; e  $\mathbf{i}$ , la densidad de corriente eléctrica a través del citado elemento de área.

La Ecuación [36.6] es análoga a la de Faraday-Henry en forma integral. Por tanto, la forma diferencial de ella presentará la misma analogía que presenta la [36.3] respecto a su forma integral, es decir, verificará:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i} \quad [38.7]$$

Si multiplicamos la anterior escalarmente por nabra resulta:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{i}$$

Puesto que el primer miembro es idénticamente nulo, siempre deberá verificarse:

$$\nabla \cdot \mathbf{i} = 0 \quad [36.8]$$

Ahora bien, esto no es de validez general, ya que en general no se verificaría la Ecuación de continuidad [36.4]

$$\nabla \cdot \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

En consecuencia, la expresión de la ley de Ampère, en sus formas integral [36.6] y diferencial [36.7] no son generales, únicamente serán válidas cuando los procesos no comporten variación de carga eléctrica con el tiempo, ya que entonces la ecuación de continuidad coincide con la [36.5].

De acuerdo con Maxwell, la expresión general de la ley de Ampère en forma diferencial debe ser de la forma:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{i} + \mathbf{i}_D)$$

Al multiplicar ahora escalarmente por nabra, resulta:

$$\nabla \cdot \mathbf{i} + \nabla \cdot \mathbf{i}_D = 0$$

Teniendo en cuenta la ecuación de continuidad es,

$$\nabla \cdot \mathbf{i}_D = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$



Por otra parte, al derivar respecto al tiempo la expresión diferencial del Teorema de Gauss para el campo eléctrico [28.75], resulta:

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Con ello se puede escribir,

$$\nabla \cdot \mathbf{i}_D = \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

De donde se deduce:

$$\mathbf{i}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad [36.9]$$

Esta nueva corriente, producida por la variación del campo eléctrico, se denomina *corriente de desplazamiento*. Con ella, la ley de Ampère en forma diferencial se expresa, de manera general,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{i} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 (\mathbf{i} + \mathbf{i}_D) \quad [36.10] \quad \text{Ley de Ampère-Maxwell}$$

Expresión que es la forma diferencial de la ley de Ampère-Maxwell, denominada así por haber sido éste quien puso de manifiesto las limitaciones de las Ecuaciones [36.6] y [36.7] y las generalizó.

La expresión general en forma integral de la ley de Ampère-Maxwell se deduce estableciendo con la [36.10] la misma analogía que tiene la [36.6] con la [36.7], con lo cual es:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \iint \left( \mathbf{i} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A} \quad [36.11] \quad \text{Ley de Ampère-Maxwell}$$

Cuando el campo eléctrico es independiente del tiempo, como caso particular de las [36.10] y [36.11] resultan, respectivamente, las [36.7] y [36.6].

### EJEMPLO 36.1

Un condensador de láminas planas paralelas, cuya capacidad es  $C$ , está conectado a una fuente de tensión alterna de frecuencia angular  $\omega$  y tensión máxima  $V_M$ . Calculemos:

- La corriente de desplazamiento que atraviesa el condensador.
- Comprobemos que su valor coincide con la corriente que circula por el circuito (Figura 36.3).

#### Solución:

La intensidad de la corriente de desplazamiento es:

$$I_D = i_D \cdot A = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} A = \epsilon_0 A \frac{\partial}{\partial t} \frac{V}{d} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \frac{\partial V}{\partial t} = C \frac{\partial V}{\partial t}$$

La tensión alterna senoidal aplicada puede expresarse de la forma,

$$V = V_M e^{j\omega t}$$

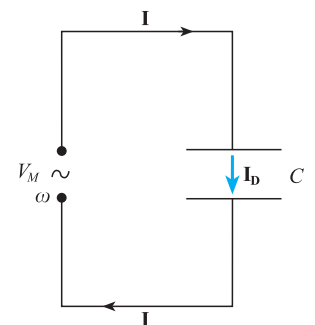


Figura 36.3. Corriente de desplazamiento.

con lo cual, la corriente de desplazamiento es:

$$I_D = Cj\omega V_M e^{j\omega t} = j\omega CV$$

La corriente que circula por el circuito es:

$$I = \frac{V}{Z_c} = \frac{V}{-\frac{i}{\omega C}} = j\omega CV$$

Valor que coincide con el de la corriente de desplazamiento, gracias a la cual la corriente alterna atraviesa los condensadores, cosa que no puede hacer la corriente continua.

## 36.5 Ecuaciones de Maxwell

Las leyes fundamentales del campo electromagnético se reducen a cuatro, que pueden adoptar forma integral o diferencial y que, aunque han sido todas ellas estudiadas en este y en capítulos anteriores, conviene aquí agruparlas y considerar su gran importancia. En la tabla 36.1 se expresan las cuatro citadas leyes en sus dos formas con indicación de su referencia en el capítulo en el que cada una fue deducida.

**Tabla 36.1.** Ecuaciones de Maxwell

	Forma integral	Forma diferencial
Ley de Gauss para el campo eléctrico	$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho \, dv$ [28.36]	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ [28.75]
Ley de Gauss para el campo magnético	$\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$ [33.2]	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ [33.3]
Ley de Faraday-Henry	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ [33.4]	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ [36.3]
Ley de Ampère Maxwell	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint \left( \mathbf{i} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A}$ [36.11]	$\nabla \times \mathbf{B} = -\mu_0 \left( \mathbf{i} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$ [36.10]

A estas ecuaciones se las denomina de Maxwell, ya que éste, además de formular la cuarta de ellas, generalizando la de Ampère para situaciones variables con el tiempo, se dio cuenta de su gran importancia al condensar en ellas la teoría del campo electromagnético. Las ecuaciones de Maxwell no solamente unifican la electricidad y el magnetismo, sino también estos con la óptica, ya que predicen la existencia de ondas electromagnéticas.

Además de su gran importancia científica, estas ecuaciones son los pilares de grandes y muy importantes sectores del actual desarrollo tecnológico, especialmente todas las tecnologías de la comunicación.

En la tabla 36.2 se expresan las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial para tres casos particulares de singular importancia: espacio libre de cargas y corrientes, caso estacionario o independiente del tiempo y caso estático o independiente del tiempo y sin corrientes. Las correspondientes expresiones en forma integral se deducen muy fácilmente por analogía.

**Tabla 36.2.** Ecuaciones de Maxwell, casos particulares

	Espacio libre	Caso estacionario	Caso estático
Ley de Gauss del campo eléctrico	$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Ley de Gauss del campo magnético	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Ley de Faraday-Henry	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$
Ley de Ampère-Maxwell	$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}$	$\nabla \times \mathbf{B} = 0$

### 36.6 Ecuaciones de Maxwell para medios materiales

En primer lugar hay que observar que la ley de Gauss para el campo magnético, [33.2] y [33.3], y la ley de Faraday-Henry, [33.4] y [36.3] son independientes del medio y, por tanto, de validez general en todas las situaciones. Las demás ecuaciones de Maxwell, tal y como se han expresado, son aplicables al vacío o al aire, pero no a dieléctricos ni a medios magnéticos. Buscaremos ahora la expresión general de estas para los citados medios materiales.

La ley de Gauss para el campo eléctrico ya fue generalizada para medios dieléctricos y su expresión en forma diferencial es la [30.11]

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_r \quad [36.12]$$

en la que  $\mathbf{D}$  es el vector *desplazamiento eléctrico, inducción eléctrica o densidad de flujo eléctrico* [30.10],

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

y  $\rho_r$ , la densidad espacial de cargas eléctricas reales.

Para la generalización de la ley de Ampère-Maxwell, debemos tener en cuenta, además de la densidad de corrientes libres,  $\mathbf{i}_r$ , la densidad de corriente debida a la imanación,  $\mathbf{i}_m$ , y la densidad de corriente debida a la polarización,  $\mathbf{i}_p$ . Con lo cual, la ley de Ampère-Maxwell en forma diferencial se expresa:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{i}_r + \mathbf{i}_m + \mathbf{i}_p + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad [36.13]$$

En un medio magnético debe verificarse la Expresión [35.12]; si la multiplicamos vectorialmente por nabla obtenemos:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\nabla \times \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{M})$$

Lo que pone de manifiesto que  $\nabla \times \mathbf{M}$  es una densidad de corriente, que es la *densidad de corriente debida a la imanación*,

$$\mathbf{i}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad [36.14]$$

Si además el medio es polarizable, aparecerá una densidad de corriente de polarización,  $\mathbf{i}_p$ ,

$$\mathbf{i}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad [36.15]$$

Inducción eléctrica

Llevando a la Expresión [36.13] los valores de  $\mathbf{i}_m$  e  $\mathbf{i}_p$  dados por las [36.14] y [36.15], respectivamente, se expresa:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{i}_r + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

Dividiendo por  $\mu_0$  y reordenando se escribe:

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{i}_r + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})$$

Al tener en cuenta las Expresiones [35.12] y [30.10] se obtiene,

Ley de Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i}_r + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{36.16}$$

Expresión que refleja la ley de Ampère-Maxwell para medios materiales cualesquiera.

En cualquier caso, para las aplicaciones debemos tener definido el medio, es decir, conocer sus características eléctricas y magnéticas, lo que se conoce con el nombre de *ecuaciones constitutivas del medio*, las cuales fueron deducidas en el capítulo 30 para materiales dieléctricos y en el capítulo 35 para materiales magnéticos. Ahora las presentamos juntas en la Tabla 36.3:

**Tabla 36.3.** Ecuaciones constitutivas del medio

Dieléctrico	Medio magnético
$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E}$ [30.14]	$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu \mathbf{H}$ [35.14]
$\epsilon = (1 + \chi_e) \epsilon_0$ [30.18]	$\mu = (1 + \chi_m) \mu_0$ [35.15]
$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ [30.15]	$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ [35.13]

### 36.7 Condiciones del contorno

En el Capítulo 30 se obtuvieron las condiciones de contorno en electrostática, tanto para la componente de la inducción eléctrica sobre la normal [30.19], como para la componente del campo eléctrico sobre la tangente [30.22], las cuales, respectivamente pueden ser expresadas de la forma:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_r \quad \text{y} \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \tag{36.17}$$

Ahora deduciremos las condiciones de contorno en magnetostática, tanto para la componente de la inducción magnética sobre la normal, como para la componente de la intensidad del campo magnético sobre la tangente, todo lo cual lo haremos de forma análoga a como se hizo en electrostática.

Para obtener la relación entre las componentes de la inducción magnética sobre la normal a la superficie de separación de dos medios usaremos la ley de Gauss para el campo magnético en su forma integral. Para ello, consideremos dos medios de permeabilidad magnética  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , respectivamente, y una superficie de Gauss de forma cilíndrica, de bases elementales,  $d\mathbf{A}$ , paralelas y muy próximas a la superficie de separación de los medios, una en el medio 1 y la otra en el 2 (Figura 36.4).

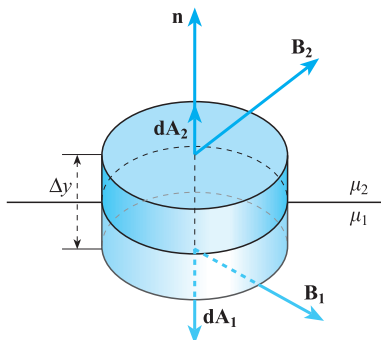


Figura 36.4.

El flujo del campo  $\mathbf{B}$  a través de cualquier superficie de Gauss debe ser nulo, ya que debe verificarse la [33.2]. En este caso, el flujo a través de la superficie lateral se anula al tender  $\Delta y$  a cero, por ello es:

$$\mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{A}_2 = 0$$

Puesto que es  $d\mathbf{A}_2 = -d\mathbf{A}_1 = \mathbf{n} dA$ , la anterior se escribe,

$$-\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n} dA + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

Resultando:

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{36.18}$$

De donde:

$$B_{2n} = B_{1n} \tag{36.19}$$

La componente sobre la normal de la inducción magnética se mantiene continua a través de la superficie de separación de los dos medios.

Para obtener las condiciones de contorno para la intensidad del campo magnético usaremos la ley de Ampère independiente del tiempo  $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$ . El cálculo de la circulación de  $\mathbf{H}$  lo haremos a lo largo de un rectángulo de dimensiones  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , que tiene dos lados paralelos a la superficie de separación, uno en el medio 1 y el otro en el 2 (Figura 36.5).

La circulación de  $\mathbf{H}$  a lo largo de los lados normales a la superficie de separación, al tender  $\Delta y$  a cero se anula, quedando:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{u}_x \Delta x - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{u}_x \Delta x &= I \\ \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{u}_x - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{u}_x &= I/\Delta x = k \end{aligned}$$

Al haber tendido  $\Delta y$  a cero,  $I$  es la corriente que circula por la superficie de separación y, por tanto,  $k$  es la densidad de corriente que circula por la superficie de separación. La anterior puede expresarse vectorialmente de la forma:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{k} \tag{36.20}$$

En un dieléctrico perfecto, las cargas superficiales son cargas ligadas y la densidad de corriente superficial,  $\mathbf{k}$ , es nula. Para ellos, las condiciones de contorno se expresan:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_r \quad ; \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad ; \quad (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \text{y} \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \end{aligned} \tag{36.21}$$

En el caso de que la superficie de separación esté libre de cargas reales, se expresan:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0 \quad ; \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad ; \quad (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \text{y} \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \end{aligned} \tag{36.22}$$

Si uno de los medios es un buen conductor, por ejemplo el medio 1, el campo eléctrico en su interior será nulo, y las condiciones de contorno se expresan:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2 = \sigma_r \quad ; \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 = 0 \quad ; \quad (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \tag{36.23}$$

Si la superficie de separación no tiene cargas reales son:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2 = 0 \quad ; \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 = 0 \quad ; \quad (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \tag{36.24}$$

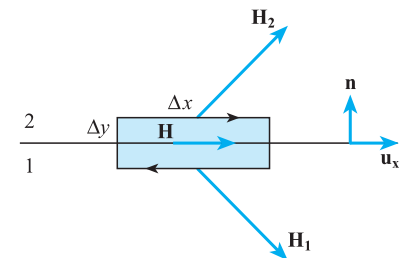


Figura 36.5.

Si los campos son variables con el tiempo, dentro del conductor también se anulará  $\mathbf{H}$ , pero el campo magnético, al variar con el tiempo, inducirá una corriente superficial y las condiciones de contorno para este caso se expresan:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2 = \sigma_r \quad ; \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 = 0 \quad ; \quad \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{k} \quad [36.25]$$

A continuación se recogen en la tabla 36.4 las condiciones de contorno de los campos eléctrico y magnético.

**Tabla 36.4.** Condiciones de contorno para los campos eléctrico y magnético.

	Componente tangencial	Componente normal
<b>Campo eléctrico</b>		
Medios dieléctricos con carga en la superficie de separación	$E_{2t} = E_{1t}$	$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_r$
Medios dieléctricos sin carga en la superficie de separación	$E_{2t} = E_{1t}$	$D_{2n} = D_{1n}$
Uno de los medios, el 1, es conductor:		
con superficie de separación cargada	$E_{2t} = 0$	$D_{2n} = \sigma_r$
con superficie de separación sin carga	$E_{2t} = 0$	$D_{2n} = 0$
<b>Campo magnético:</b>		
Medios cualesquiera con lámina superficial de corriente	$H_{2t} - H_{1t} = k$	$B_{2n} = B_{1n}$
Medios cualesquiera sin lámina superficial de corriente	$H_{2t} = H_{1t}$	$B_{2n} = B_{1n}$
Uno de los medios es un buen conductor y los campos variables con el tiempo	$H_{2t} = k$	$B_{2n} = 0$

### 36.8 Densidad de energía electromagnética

La densidad de energía del campo electromagnético fue calculada y está expresada por la [33.25],

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2\mu} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$$

Teniendo ahora en cuenta la [30.14],  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$  y la [35.14],  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , se puede escribir de la forma:

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \quad [36.26]$$

Densidad de energía electromagnética

que es la expresión más general de la densidad de energía del campo electromagnético.

### 36.9 Ecuaciones del campo electromagnético en el vacío. Ondas electromagnéticas

La forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell para el vacío, debido a la ausencia de cargas,  $\rho = 0$ , y de corrientes,  $\mathbf{i} = 0$ , toman la forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad [36.27]$$

Para obtener la ecuación de ondas del campo eléctrico, derivemos la cuarta ecuación de Maxwell respecto al tiempo,

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}$$

Teniendo en cuenta la tercera [36.26], se escribe:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad [36.28]$$

Puesto que en todo campo se verifica que el rotacional de su rotacional es igual al gradiente de su divergencia menos su laplaciano,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}$$

Dado que en este caso es  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , será:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\Delta \mathbf{E}$$

Con lo cual, la [36.27] se escribe:

$$\Delta \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad [36.29] \quad \text{Ecuación de ondas del campo eléctrico}$$

que es la ecuación diferencial de propagación del campo eléctrico en el vacío.

De forma completamente análoga se obtiene la ecuación de propagación del campo magnético en el vacío:

$$\Delta \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad [36.30] \quad \text{Ecuación de ondas del campo magnético}$$

Ambas ecuaciones son completamente análogas a la ecuación de propagación de las ondas [25.28] y de su comparación se deduce para la velocidad de propagación de una onda electromagnética en el vacío la expresión,

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \quad [36.31]$$

Las ecuaciones [36.28] y [36.29] se pueden ahora escribir de la forma:

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad \text{y} \quad \Delta \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad [36.32]$$

### Propagación en una sola dirección

Si únicamente estudiamos la propagación del campo en una cierta dirección, tomando a ésta como eje equis, será  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, t)$  y el laplaciano de  $\mathbf{E}$  se expresa

$$\Delta \mathbf{E} = \Delta E_x \mathbf{i} + \Delta E_y \mathbf{j} + \Delta E_z \mathbf{k} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \mathbf{k} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2}$$

Con ello: la primera [36.31] se escribe:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad [36.33]$$

Ensayemos como solución una onda senoidal del tipo [25.3], que en nuestro caso particular es:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \text{sen } k(x - ct) \quad [36.34]$$

en la que  $\mathbf{E}_0$  es un vector constante.

Calculemos las siguientes derivadas:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = k\mathbf{E}_0 \cos k(x - ct)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = -k^2 \mathbf{E}_0 \text{sen } k(x - ct) = -k^2 \mathbf{E}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -kc\mathbf{E}_0 \cos k(x - ct)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -k^2 c^2 \mathbf{E}_0 \text{sen } k(x - ct) = -k^2 c^2 \mathbf{E}$$

Todo lo cual, llevado a la [36.32], evidentemente la satisface, resultando que la [36.33] es la onda de propagación del campo eléctrico.

Puesto que siempre ha de verificarse la primera ecuación de Maxwell,  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , debe ser:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = kE_{0x} \cos k(x - ct) = 0$$

Lo que exige sea  $E_{0x} = 0$  y, por tanto, el vector  $\mathbf{E}_0$  es normal a la dirección de propagación, siéndolo también *el campo eléctrico*  $\mathbf{E}$ , que estará contenido en todo momento en el plano perpendicular a la dirección de propagación. Se trata, por tanto, de una *onda transversal*.

El campo eléctrico variable con el tiempo lleva necesariamente ligado un campo magnético, debiendo verificarse la tercera ecuación de Maxwell, y puesto que es:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_z}{\partial x} \mathbf{j} + \frac{\partial E_y}{\partial x} \mathbf{k}$$

deberán ser,

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \quad [36.35]$$

Por tanto, puesto que el campo eléctrico únicamente depende de  $x$  y  $t$ , el campo magnético solamente dependerá de esas variables. En consecuencia, el campo magnético debe satisfacer a la ecuación:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

cuya solución es de la forma,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \text{sen } k(x - ct) \quad [36.36]$$

Al tener que cumplir la segunda ecuación de Maxwell,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , debe ser:

$$kB_{0x} \cos k(x - ct) = 0$$



y, por tanto, el vector  $\mathbf{B}$  es normal a la dirección de propagación, siéndolo también *el campo B*, que también estará contenido en un plano perpendicular a la dirección de propagación. Por tanto, el campo de inducción magnética también *es una onda transversal*.

La segunda y tercera ecuaciones [36.34] se escriben, respectivamente:

$$\left. \begin{aligned} -cB_{0y} \cos k(x - ct) &= E_{0z} \cos k(x - ct) \\ cB_{0z} \cos k(x - ct) &= E_{0y} \cos k(x - ct) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} E_{0z} &= -cB_{0y} \\ E_{0y} &= cB_{0z} \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado, sumando y extrayendo la raíz cuadrada, resulta,

$$E_0 = cB_0 \tag{36.37}$$

Teniendo esto en cuenta, junto con la [36.24] y la [36.33], es evidente que también se verifica:

$$E = cB \tag{36.38}$$

Lo que pone de manifiesto que *los campos eléctrico y magnético están en fase*.

Veamos cómo, en todo momento, *los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí*, para ello calculemos su producto escalar:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} &= E_y B_y + E_z B_z = (E_{0y} B_{0y} + E_{0z} B_{0z}) \text{sen}^2 k(x - ct) = \\ &= c(B_{0z} B_{0y} - B_{0y} B_{0z}) \text{sen}^2 k(x - ct) = 0 \end{aligned}$$

Lo que evidencia la perpendicularidad de los campos eléctrico y magnético.

En la Figura 36.6 se ha representado la onda electromagnética senoidal que se propaga en la dirección positiva del eje equis, compuesta por una onda campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y una onda campo magnético  $\mathbf{B}$ , ambas perpendiculares a la dirección de propagación, perpendiculares entre sí y en fase.

Una onda como la representada, en la cual la proyección del extremo del vector campo en cada punto, sobre un plano perpendicular a la dirección de propagación, se mantiene siempre sobre una recta fija, se dice que es una *onda polarizada linealmente*, siendo el plano de polarización aquel en el cual oscila el citado vector, es decir, el definido por la dirección de propagación y la recta fija citada.

La Ecuación [36.37] puede escribirse de la forma:

$$E = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} B = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \mu_0 H = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H$$

de donde,

$$\sqrt{\epsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H \tag{36.39} \quad \text{Relación entre campos}$$

Ecuación de gran importancia en óptica física, y que para un medio cualquiera no ferromagnético será:

$$\sqrt{\epsilon} E = \sqrt{\mu} H \tag{38.40}$$

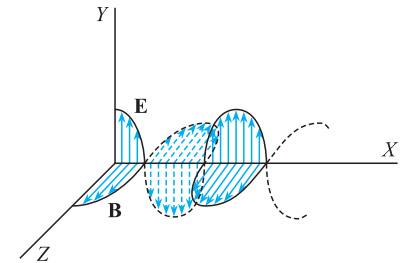


Figura 36.6. Onda electromagnética.

### EJEMPLO 36.2

Busquemos las condiciones para que la onda  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \text{sen}(kz - \omega t)$  sea una onda electromagnética.

#### Solución:

La onda dada, para ser una onda electromagnética, deberá verificar la ecuación de ondas del campo eléctrico, que en este caso es:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Calculemos las siguientes derivadas:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = k\mathbf{E}_0 \cos(kz - \omega t) \quad \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = -k^2 \mathbf{E}_0 \sin(kz - \omega t) = -k^2 \mathbf{E}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\omega \mathbf{E}_0 \sin(kz - \omega t) \quad \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{E}_0 \cos(kz - \omega t) = -\omega^2 \mathbf{E}$$

Sustituyendo los valores de las derivadas segundas en la ecuación de ondas se escribe:

$$-k^2 \mathbf{E} = -\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \mathbf{E}$$

De donde:

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Por tanto, la relación de los parámetros  $\omega$  y  $k$  de la onda dada debe ser igual a la velocidad de la luz.

### 36.10 Vector de Poynting

La densidad de energía del campo electromagnético, dada por la [36.26] podemos expresarla de la forma:

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2$$

Al elevar al cuadrado la [36.39] es,

$$\epsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2$$

Lo que pone de manifiesto que *la mitad de la energía es eléctrica y la mitad magnética*, pudiendo expresarse:

$$w = \epsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2$$

A través de un área  $A$ , normal a la dirección de propagación y durante un tiempo  $t$ , la energía que pasa transportada por la onda es:

$$wctA = \epsilon_0 E^2 ctA$$

Para la unidad de área normal a la dirección de propagación y en la unidad de tiempo, la energía transportada es la intensidad de la onda y se expresa:

$$S = c\epsilon_0 E^2 = \frac{\epsilon_0 E^2}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2 = EH$$

De forma vectorial se escribe,

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad [36.41]$$

Vector de Poynting

Al ser perpendiculares entre sí  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ , el módulo de  $\mathbf{S}$  coincide con el calculado, y al ser ambos perpendiculares a la dirección de propagación, la dirección y el sentido de  $\mathbf{S}$  coinciden con los de propagación de la onda. Al vector  $\mathbf{S}$ , que nos da el flujo de energía a través de la unidad de superficie normal a la dirección de

propagación y en la unidad de tiempo, se le denomina *vector de Poynting*. En el sistema internacional de unidades, al expresar el campo eléctrico en V/m y el campo magnético en A/m, obtenemos para el vector de Poynting las unidades:

$$[S] = \frac{V}{m} \frac{A}{m} = \frac{W}{m^2}$$

**EJEMPLO 36.3**

Un cable cilíndrico de radio  $R$ , conductor de resistividad  $\rho$ , es recorrido por una densidad de corriente  $\mathbf{j}$ , uniforme en su sección (Figura 36.7). Determinemos la potencia transportada por la onda electromagnética asociada.

**Solución:**

El campo eléctrico en el conductor es:

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j} = \rho j \mathbf{u}_z$$

El campo magnético  $\mathbf{B}$  en los puntos de la superficie tiene el valor,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \mathbf{u}_\theta = \frac{\mu_0 \pi R^2 j}{2\pi R} u_\theta = \frac{\mu_0}{2} R j \mathbf{u}_\theta$$

El campo magnético  $\mathbf{H}$  será:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} R j \mathbf{u}_\theta$$

En consecuencia, la intensidad transportada por la onda es:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -\frac{1}{2} R \rho j^2 \mathbf{u}_r$$

Onda que se dirige hacia el eje del conductor. El flujo de la potencia por unidad de área nos dará la potencia transportada por la onda hacia el interior del conductor, cuyo valor por unidad de longitud de este es:

$$P = \oiint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = \oiint S dA = SA = \frac{1}{2} R \rho j^2 2\pi R = \pi \rho R^2 j^2$$

La potencia disipada por efecto Joule por unidad de longitud de conductor es  $P' = rI^2$ , en la que  $r$  es la resistencia del conductor por unidad de longitud, cuyo valor es  $r = \rho/\pi R^2$ . Con lo cual, la potencia disipada por efecto Joule se expresa:

$$P' = rI^2 = \frac{\rho}{\pi R^2} (\pi R^2 j)^2 = \pi \rho R^2 j^2$$

Lo que pone de manifiesto que toda la potencia transportada por la onda se transforma en calor dentro del conductor.

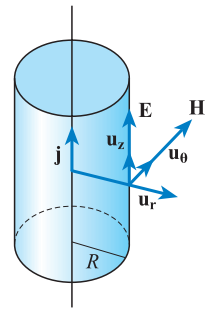


Figura 36.7. Onda electromagnética asociada a un conductor.

La potencia instantánea por unidad de área, es:

$$S = EH = \frac{1}{\mu_0} E_0 B_0 \text{sen}^2 k(x - ct) \tag{36.42}$$

La potencia media por unidad de área o intensidad de la onda, puesto que el valor medio del cuadrado del seno es  $1/2$ , se expresa:

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \quad (36.43)$$

### EJEMPLO 36.4

La intensidad media de la radiación solar que nos llega a la Tierra es de  $1400 \text{ W/m}^2$ . Suponiendo que fuera transportada por una sola onda, calculemos los valores máximos de los campos eléctrico y magnético.

#### Solución:

Aplicando (36.43) obtenemos el valor máximo del campo eléctrico:

$$\begin{aligned} E_0 &= \sqrt{2\mu_0 c \langle S \rangle} = \sqrt{2 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 3 \times 10^8 \times 1400} = \\ &= \sqrt{33,6 \times \pi \times 10^2} \text{ V/m} \cong 1027 \text{ V/m} \end{aligned}$$

El valor máximo del campo magnético, de acuerdo con la [36.39], será:

$$\begin{aligned} H_0 &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 = \sqrt{2\epsilon_0 c \langle S \rangle} = \sqrt{2 \frac{10^7}{4\pi c^2} c \times 1400} = \\ &= \sqrt{\frac{70}{\pi c}} \times 10^{-3} \text{ A/m} \cong 2,726 \times 10^{-7} \text{ A/m} \end{aligned}$$

## 36.11 Presión de radiación

La presión de radiación que ejerce una onda electromagnética al incidir normalmente sobre una superficie completamente absorbente para ella es:

$$\Pi = \frac{F}{A} = \frac{1}{A} \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad (36.44)$$

La densidad de energía del campo electromagnético en el vacío, aplicando la [36.25] puede escribirse,

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Teniendo en cuenta que la mitad de la energía es transportada por el campo eléctrico y la otra mitad por el campo magnético, la anterior se escribe:

$$w = \epsilon_0 E^2$$

Siendo su valor instantáneo,

$$w = \epsilon_0 E^2 \text{sen}^2 k(x - ct) \quad (36.45)$$

La potencia instantánea por unidad de área, dada por la [36.41], puede expresarse de la forma:

$$S = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \text{sen}^2 k(x - ct) \quad (36.46)$$

De la comparación entre [36.44] y [36.45] se deduce que debe ser:

$$S = \frac{w}{\epsilon_0 \mu_0 c} = cw \quad [36.47]$$

El momento lineal o cantidad de movimiento por unidad de volumen puede calcularse de la siguiente manera: consideremos una onda electromagnética con una densidad de fotones  $n$ ; puesto que la energía de cada fotón es  $e_f = pc$ , la densidad de energía de la onda será:

$$w = e_f n$$

El flujo de energía por unidad de área y unidad de tiempo,  $S$ , será la energía contenida en un cilindro circular recto de base unidad y longitud en dirección de la propagación de la onda,  $c$  (Figura 36.8), es decir:

$$S = e_f n c$$

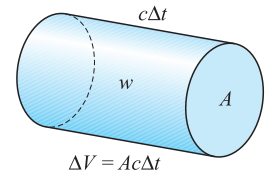


Figura 36.8.

También existirá una densidad para el momento lineal, cuyo valor es:

$$\frac{\Delta p}{\Delta V} = pn = \frac{e_f}{c} n = \frac{S}{nc} \frac{n}{c} = \frac{S}{c^2} = \frac{w}{c}$$

La última igualdad se ha escrito teniendo en cuenta la [36.47].

Ahora podemos despejar  $\Delta p$ :

$$\Delta p = \frac{w}{c} \Delta V = \frac{w}{c} Ac \Delta t = Aw \Delta t$$

Llevando el valor de  $\frac{\Delta p}{\Delta t} = Aw$ , a la Expresión [36.44] obtenemos que el valor de la presión de radiación es igual, numéricamente, a la densidad espacial de energía del campo electromagnético,

$$\Pi = w$$

La presión de radiación media en un período será:

$$\langle \Pi \rangle = \langle w \rangle = \frac{\langle S \rangle}{c} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad [36.48]$$

Para un cuerpo emisor, al emitir una onda electromagnética de potencia  $\Pi$  en una cierta dirección debe retroceder de forma que se conserve el momento lineal. Si la superficie sobre la que incide la onda es un conductor, la presión de radiación ejercida será el doble del valor correspondiente a una superficie absorbente total, ya que además de la absorción de la onda incidente debe luego emitirla y, por ello, la presión de radiación sobre un conductor es:

$$\langle \Pi \rangle = 2 \langle w \rangle = \epsilon_0 E^2 \quad [36.49]$$

### EJEMPLO 36.5

Tomando como intensidad media de la radiación solar que nos llega a la Tierra el valor  $1400 \text{ W/m}^2$ , calculemos:

- La presión de radiación que ejerce la radiación solar sobre la superficie terrestre.
- La relación entre la presión de radiación y la presión atmosférica al nivel del mar.

Presión de radiación

**Solución:**

a) La aplicación de la [36.48] nos da para la presión de radiación

$$\langle \Pi \rangle = \frac{\langle S \rangle}{c} = \frac{1400 \frac{W}{m^2}}{3 \times 10^8 \frac{m}{s}} = \frac{14}{3} \times 10^{-6} \text{ Pa} \cong 4,67 \times 10^{-6} \text{ (Pa)}$$

b)  $\frac{\Pi}{P_0} = \frac{4,67 \times 10^{-6}}{10^5} = 4,67 \times 10^{-11} \text{ (Pa)}$



## MAXWELL

James Clerk Maxwell nació en Edimburgo en 1831, hijo único de una familia que de antiguo contaba con figuras destacadas en la sociedad escocesa y que poseía una heredad próxima a Middelebie. Recibió una educación cristiana y, al igual que Faraday, conservó sus prácticas religiosas durante toda su vida, lo que ejerció influencia muy positiva en sus cualidades de científico. Parece ser que ya desde niño destacaron en él muy buenas capacidades personales, especialmente su prodigiosa memoria, que le permitía recordar literalmente una gran cantidad de salmos de la Biblia, la cual leyó asiduamente con gran interés. Cuando contaba ocho años falleció su madre, haciéndose cargo de su educación su tía Jane Cay. Recibió educación básica en la *Edimburg Academy* y destacó por su facilidad para las matemáticas, cualidad que fomentó su padre llevándole con frecuencia a conferencias en la *Edimburg Royal Society*, lo que propició que a los 14 años publicara su primer trabajo científico. A los 16 años ingresó en la universidad de Edimburgo y tres años después pasó al *Trinity College* de *Cambridge*, del que salió graduado en Matemáticas en 1854. Pensó iniciar sus trabajos de investigación en el campo de la electricidad y el magnetismo y, antes de comenzarlos, preguntó a Thomson, por entonces Rector del *Trinity College*, si le parecía bien que se dedicara a ese campo. La respuesta fue positiva, como así se lo comunicaba a su padre en una carta: *Thomson no tiene inconveniente en que yo haga incursiones en sus dominios eléctricos.*

La enfermedad de su padre le impidió aceptar una plaza en el *Trinity College* y se vio obligado a regresar a su tierra natal. Su padre murió en 1856 y poco tiempo después fue nombrado profesor de Filosofía natural en el *Mariscal College* de Aberdeen, donde conoció a la hija del director, que sería dos años después su mujer, Catherine Mary Dewar. Ese mismo año recibió el *Premio Adams* por su trabajo *On the stability of the motion of Saturn rings*, en el cual demostraba que los anillos debían estar fragmentados, pues de lo contrario el sistema sería inestable, lo que fue comprobado, cien años después, por la nave espacial Voyager I.

En 1860 obtuvo el puesto de Profesor de Filosofía natural en el *King's College* de Londres y ese mismo año la medalla *Rumford*, al establecer la posibilidad de la fotografía en color mediante filtros rojo, verde y azul. Al año siguiente ingresó en la *Royal Society*, y en 1871,

el duque de Devonshire le ofreció la Cátedra de Física del *Cavendish Laboratory* de Cambridge, en la que desarrolló una enorme labor, especialmente por sus estudios teóricos facilitados por su gran formación matemática.

Siempre estuvo preocupado por los problemas sociales y dio clases gratuitas para obreros tanto en Cambridge, como en Aberdeen y Londres. Al parecer estaba dotado de un gran sentido del humor y de una fina ironía, aunque, a veces, parecía algo tímido e inseguro.

Trabajó en diferentes áreas de la Física, pero especialmente en Termodinámica y Electromagnetismo. Estableció las ecuaciones en derivadas parciales que relacionan las diferentes magnitudes termodinámicas, *Relaciones de Maxwell*; desarrolló la Mecánica estadística, estableciendo una ley de distribución conocida como *Distribución de Maxwell-Boltzman* y enunció la *Ley de equipartición de la energía*.

En el campo del electromagnetismo es donde adquirió su mayor fama. Su primer trabajo fue *Sobre las líneas de fuerza de Faraday*, en el que dio consistencia matemática a los trabajos de Faraday en este campo, de los que siempre estuvo convencido de la gran precisión con que habían sido realizados y la enorme intuición con la que Faraday los había interpretado, no realizando ninguna investigación experimental para su comprobación, pero estableciendo claramente la noción de campo que había sido intuida por Faraday. Puesto que ya estaba claro que las corrientes eléctricas producían campos magnéticos y que éstos podían, a su vez, producir corrientes eléctricas, Maxwell se dedicó plenamente al estudio de la posibilidad de conseguir, de forma continua y alternativa esas transformaciones, para lo cual tanto los campos eléctricos como los magnéticos debían ser variables con el tiempo, lo que le llevó al establecimiento de la *corriente de desplazamiento*.

En el año 1865, debido a su precario estado de salud, cuando sólo contaba la edad de 34 años, renunció a su cátedra en el *King's College* y se retiró a sus heredades de Escocia. En 1868, se le ofreció el cargo de decano del *United College* en la universidad de *Saint Andrews*, pero prefirió seguir en su tierra dedicado a madurar sus estudios sobre electromagnetismo, publicando, en 1873, su famosa obra *Treatise on Electricity and Magnetism*, en cuya introducción puede leerse, que su único objetivo era justificar matemáticamente

fenómenos eléctricos y magnéticos descritos hasta entonces de forma cualitativa, como la ley de inducción y la noción de campo, enunciadas por Faraday. Maxwell unificó la electricidad y el magnetismo, y sintetizó todo el electromagnetismo en sus famosas cuatro ecuaciones, las *ecuaciones de Maxwell*, las cuales establecen la interrelación entre los campos eléctricos y magnéticos, y la existencia formal de ondas electromagnéticas, lo que sería verificado por Hertz, ocho años después de su muerte.

Hasta el fin de sus días estuvo siempre atento al cumplimiento de sus principios religiosos y sus obligaciones sociales; se preocupó del mantenimiento de la capilla local, a la que hizo aportaciones importantes, y a la que acudía asiduamente a los oficios religiosos, siendo habitual verle participando en las lecturas de los mismos. Su enfermedad se agravó en 1879, muriendo el día 5 de noviembre de ese año en Glenlair (Cambridge), a la edad de 48 años.



- 37.1. Introducción
- 37.2. Espectro de radiaciones electromagnéticas
- 37.3. Velocidad de la luz. Índice de refracción absoluto y relativo
- 37.4. Ángulo límite. Reflexión total
- 37.5. Camino óptico
- 37.6. Principio de Fermat. Leyes de la reflexión y la refracción

## 37.1 Introducción

Puesto que la luz está constituida por ondas electromagnéticas, sus características, propiedades, propagación y transporte de energía quedarán definidas por las ecuaciones de Maxwell, constituyendo la *Electrodinámica clásica*. Únicamente en el caso de que la luz interactúe con la materia se hace necesario considerar la constitución corpuscular de la luz, en la cual la energía se transporta por cuantos de energía, lo que da lugar a la *Electrodinámica cuántica*.

En muchos estudios de óptica podemos despreciar la longitud de onda, siempre que esta sea mucho menor que las dimensiones de los elementos con los que interactúa. En el caso de la luz es  $\lambda \approx 10^{-6}$  m, evidentemente mucho menor que las dimensiones de las rendijas o elementos con los que tiene que interactuar en los sistemas físicos. El caso límite,  $\lambda \rightarrow 0$ , constituye la denominada *Óptica geométrica*, ya que puede desarrollarse en base a la geometría. En este caso, la propagación de la onda en una dirección se representa por una línea, denominada *rayo de luz*, que señala la dirección y sentido de propagación. También es útil representar el lugar geométrico del espacio al cual llega la luz en el mismo instante, que es el denominado *frente de onda*, en él, obviamente, todos los puntos vibraran en fase. Si el medio es homogéneo e isótropo para la propagación de la luz y la fuente emisora puntual, el frente de onda será una superficie esférica.

Los campos de la óptica clásica en los cuales no puede prescindirse de la naturaleza ondulatoria de la luz, como las situaciones de interferencia, polarización o difracción, constituyen la *Óptica física*.

## 37.2 Espectro de radiaciones electromagnéticas

El espectro de ondas electromagnéticas se extiende de forma continua desde las frecuencias de  $10^{25}$  Hz, observadas en la radiación cósmica, hasta las más bajas frecuencias, para las cuales prácticamente no hay límite, que corresponden a ondas

electromagnéticas producidas mediante circuitos oscilantes. La frecuencia de la onda depende exclusivamente de la fuente emisora. A lo largo del espectro, las ondas tienen diferentes denominaciones, según la fuente de emisión o las propiedades de la misma, sin que sean rígidos los límites de separación, pudiendo establecerse la siguiente clasificación:

### Ondas hertzianas

Se denominan así por pertenecer a ellas las ondas usadas por Hertz. Comprenden desde las más bajas frecuencias, de unos pocos hercios, hasta frecuencias del orden de  $10^{11}$  Hz. Dentro de ellas podemos distinguir dos regiones: las *ondas de radiofrecuencia* y las *microondas*.

Las *ondas de radiofrecuencia* van desde unos pocos hercios hasta frecuencias de  $10^9$  Hz. Son utilizadas en radio y en televisión. En radio fundamentalmente en dos bandas: una de amplitud modulada (AM), desde los 500 a los 1600 kHz, y otra de frecuencia modulada (FM), de los 88 a los 108 MHz. En televisión se usan dos bandas: una de los 50 a los 220 MHz, denominada VHF (*Very High Frequency*) y otra de los 500 a los 800 MHz, denominada UHF (*Ultra High Frequency*). Todas ellas se pueden producir mediante circuitos electrónicos.

La región de las *microondas* se extiende desde los  $10^9$  Hz hasta los  $5 \times 10^{11}$  Hz. Tienen un gran interés en comunicaciones y en radioastronomía. Los repetidores de TV transmiten la señal mediante microondas, así como la TV por cable y algunos sistemas de telefonía móvil. De forma natural son emitidas por átomos de hidrógeno existentes en el espacio, también son emitidas por transiciones entre estados de algunos átomos, como el de cesio y, en general, pueden ser producidas por sistemas electrónicos, recientemente de estado sólido. El *radar* utiliza frecuencias que van desde los 30 MHz, en los radares de vigilancia, hasta los 50 GHz, en los radares de muy alta resolución.

### Radiación infrarroja

Fue descubierta por el astrónomo Herschel (1738-1822), en 1800. Su espectro de frecuencias va de  $5 \times 10^{11}$  Hz a  $4 \times 10^{14}$  Hz y se subdivide en tres zonas: el infrarrojo lejano, de  $5 \times 10^{11}$  Hz a  $5 \times 10^{13}$ ; el infrarrojo medio de  $5 \times 10^{13}$  a  $10^{14}$  y el infrarrojo próximo de  $10^{14}$  a  $4 \times 10^{14}$  Hz. Este tipo de radiación es emitida por todos los cuerpos en función de su temperatura y presenta un gran número de aplicaciones técnicas.

### Radiación luminosa o luz

Es la banda del espectro a la cual el ojo humano es sensible, de ahí que se le denomina espectro visible. Se extiende desde la frecuencia de  $4 \times 10^{14}$  Hz a la de  $8 \times 10^{14}$  Hz. El ojo humano no es igualmente sensible a las distintas frecuencias, la sensación que se produce en aquél depende de ésta y se denomina color. De aquí que una radiación de frecuencia muy definida se denomine monocromática (*monos*: uno, *chromos*: color). La percepción de los diferentes colores en una persona media se verifica en las siguientes bandas de frecuencias:

Rojo	3,82 a $4,82 \times 10^{14}$ Hz
Naranja	4,82 a $5,03 \times 10^{14}$ Hz
Amarillo	5,03 a $5,20 \times 10^{14}$ Hz
Verde	5,20 a $6,10 \times 10^{14}$ Hz
Azul	6,10 a $6,60 \times 10^{14}$ Hz
Violeta	6,60 a $7,70 \times 10^{14}$ Hz

La radiación visible se produce de forma natural en el Sol y artificialmente por la emisión atómica desde estados excitados. Permite la visión, es fuente directa de energía (energías fototérmica y fotovoltaica), es fuente indirecta de otras energías (eólica e hidráulica) y es la fuente remota de toda la energía almacenada en los combustibles fósiles (carbón, petróleo y gas).

### Radiación ultravioleta

La radiación ultravioleta fue descubierta por Ritter (1776-1810). Es aquella radiación con una frecuencia comprendida entre  $8 \times 10^{14}$  Hz y  $5 \times 10^{17}$  Hz. Una fuente importante de radiación ultravioleta es el Sol, pero a nivel del mar prácticamente no llega esta radiación, ya que es absorbida por la atmósfera, muy especialmente por la capa de Ozono de la estratosfera. Sistemas atómicos y moleculares pueden emitir este tipo de radiación como reajuste de sus estados energéticos. Muchos microorganismos mueren por acción de la radiación ultravioleta, por lo que se usa en la defensa contra ellos.

### Rayos X

Se denomina así a la radiación electromagnética de frecuencias comprendidas entre  $3 \times 10^{17}$  Hz y  $5 \times 10^{19}$  Hz. Fueron descubiertos por Roentgen (1845-1923), en 1895. Los rayos X son emitidos por transiciones atómicas, bien al chocar electrones de alta velocidad contra un blanco metálico pesado, generalmente Wolframio, o en el frenado de partículas muy energéticas (*bremstrahlung*). De forma natural se han detectado rayos X provenientes del Sol y de ciertas regiones del espacio. Son de enorme utilidad en medicina por su gran poder de penetración y su absorción selectiva en tejidos y huesos. También son usados para análisis de microcomponentes minerales y en la determinación de la estructura cristalina y de moléculas complejas.

### Radiación Gamma

Abarca un amplio espectro de frecuencias que van desde  $5 \times 10^{18}$  Hz hasta  $10^{24}$  Hz, solapándose ampliamente con los rayos X. Su origen es nuclear y son producidas por muchas sustancias radiactivas. Su gran poder de penetración y de ionización de los tejidos las hace muy peligrosas para los seres vivos. No obstante, debidamente controladas prestan grandes servicios en Medicina, Agricultura e Industria. En la Tabla 37.1 se recoge el espectro de o.e.m. con indicación de la frecuencia, la longitud de onda y la energía del fotón correspondiente.

## 37.3 Velocidad de la luz. Índice de refracción absoluto y relativo

La velocidad de la luz en el vacío,  $c$ , es independiente de la frecuencia; toda onda electromagnética se propaga en el vacío con la misma velocidad, cuyo valor es  $c$ .

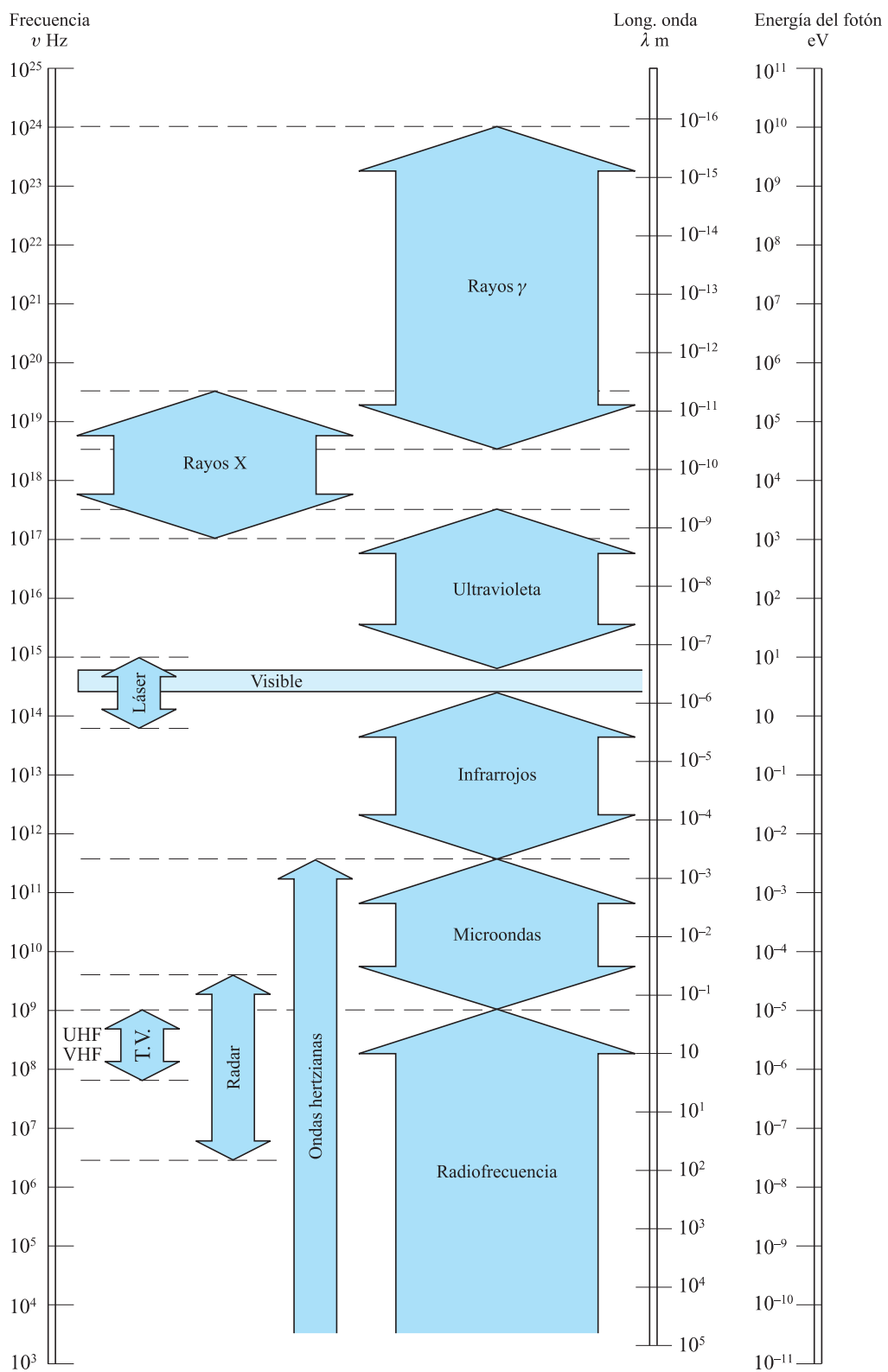
Desde Galileo, que hacia el año 1600 intentó la primera medición, hasta nuestros días, han sido muchas las determinaciones realizadas experimentalmente del valor de  $c$ , algunas de las cuales ya han sido citadas. Recientemente, la Conferencia General de Pesas y Medidas ha adoptado para  $c$  en el vacío el valor exacto:

$$c = 299\,792,458 \text{ km/s} \quad [37.1] \quad \text{Velocidad de la luz}$$

En los diferentes medios materiales, la velocidad de propagación depende de las características de estos y es distinta para las diferentes longitudes de onda, verificando:

$$\epsilon\mu c^2 = 1 \quad [37.2]$$

Tabla 37.1. Espectro de ondas electromagnéticas.



Se define el *índice de refracción absoluto* de un medio, para una radiación de cierta longitud de onda,  $\lambda$ , como el *cociente entre la velocidad de propagación de la onda en el vacío y la velocidad de propagación en el medio considerado*.

$$n_\lambda = \frac{c}{v_\lambda} \tag{37.3}$$

La cual se puede expresar de la siguiente forma:

$$n_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \tag{37.4} \quad \text{Índice de refracción}$$

Para materiales no ferromagnéticos puede tomarse sin error apreciable  $\mu_r = 1$ , resultando:

$$n_\lambda = \sqrt{\epsilon_r} \tag{37.5}$$

Para poder comparar los índices de refracción absolutos de diferentes sustancias se hace necesario determinarlos para una misma radiación monocromática, utilizándose generalmente la radiación correspondiente a la raya naranja *D* del sodio,  $\lambda = 5892,9 \times 10^{-10}$  m, respecto a la cual, las sustancias que se presentan en la Tabla 37.2 tienen los índices absolutos de refracción que se indican:

**Tabla 37.2.** Índices de refracción.

Material	$n_D$
Gases a 0°C y 1 atm:	
Aire	1,000294
Dióxido de carbono	1,000449
Helio	1,000034
Hidrógeno	1,000138
Monóxido de carbono	1,000340
Líquidos a 20°C:	
Agua	1,3330
Alcohol etílico	1,3624
Benceno	1,5035
Sulfuro de carbono	1,6278
Sólidos a 20°C:	
Ámbar	1,55
Diamante	2,42
Glicerina	1,47
Vidrios	1,51-1,75

El índice de refracción absoluto del aire es tan próximo a la unidad que puede tomarse prácticamente la velocidad de la luz en el aire igual a la del vacío.

El índice absoluto de refracción varía con la temperatura, obedeciendo con bastante aproximación a la ley empírica:

$$(n_\lambda - 1)(1 + Kt) = \text{cte} \tag{37.6}$$

en la que *K* es el coeficiente de dilatación cúbica y *t* la temperatura en grados centígrados. En general, el índice disminuye al aumentar la temperatura.

La frecuencia de la onda depende únicamente de la fuente emisora de la radiación y se mantendrá constante, no modificándose en las superficies de separación

de los medios. Si denominamos a la longitud de onda en el vacío  $\lambda_0$  y en el medio  $\lambda$ , será:

$$\lambda_0 v = c \quad \text{y} \quad \lambda v = v \tag{37.7}$$

Al dividir ambas resulta,

$$n_\lambda = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0}{\lambda} \tag{37.8}$$

Se define el *índice de refracción relativo de un medio 2 respecto de un medio 1, como el cociente entre la velocidad de propagación en el medio 1 y en el medio 2.*

$$n_{2,1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1 v}{\lambda_2 v} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tag{37.9}$$

Teniendo en cuenta la [37.8] podemos expresar el índice de refracción relativo de la forma:

$$n_{21} = \frac{\frac{c}{n_1}}{\frac{c}{n_2}} = \frac{n_2}{n_1} \tag{37.10}$$

Es decir, el índice de refracción relativo del medio 2 respecto al 1 es igual al cociente del índice absoluto de refracción del medio 2 entre el del 1. Si es  $n_2 > n_1$ , se dice que el medio 2 es más refringente que el 1.

De acuerdo con las Ecuaciones [37.9] y [37.10], la ley de Snell expresada en [27.3] se puede escribir de la forma:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } R} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1} \tag{37.11}$$

Lo que pone de manifiesto la existencia de dos invariantes en la refracción (Figura 37.1), que son:

$$\text{Invariante 1} \quad \frac{\text{sen } i}{v_1} = \frac{\text{sen } R}{v_2} = \frac{\text{sen } R'}{v_3} = \dots = \text{cte} \tag{37.12}$$

$$\text{Invariante 2} \quad n_1 \text{sen } i + n_2 \text{sen } R + n_3 \text{sen } R' = \dots = \text{cte} \tag{37.13}$$

En consecuencia, si la luz se propaga en sentido contrario, es decir, del medio 2 al 1, con un ángulo de incidencia  $R$  en el medio 2 (Figura 37.2), lo hará siguiendo la misma trayectoria, ya que el ángulo  $i$  ha de ser tal que verifique  $n_1 \text{sen } i = n_2 \text{sen } R$ , luego es el mismo de incidencia cuando iba en sentido contrario. Ello constituye el principio de reversibilidad del rayo luminoso: *la trayectoria de la luz es independiente de su sentido de propagación.*

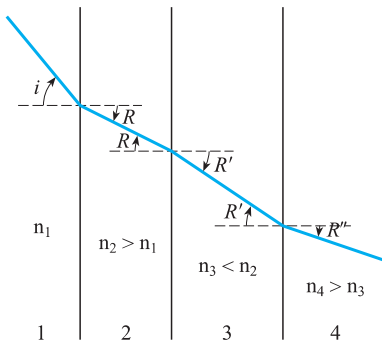


Figura 37.1. Invariantes en la refracción.

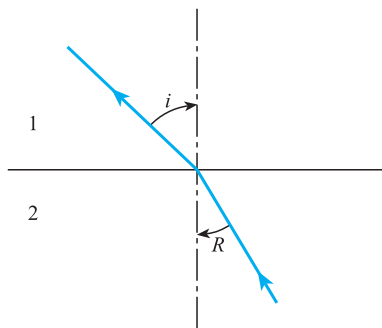


Figura 37.2. Reversibilidad del rayo luminoso.

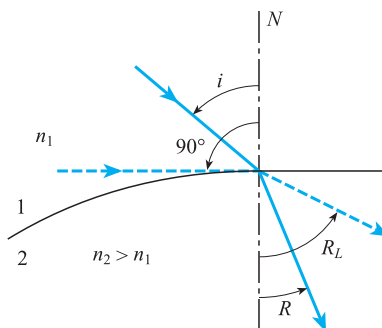


Figura 37.3. Ángulo límite de refracción.

### 37.4 Ángulo límite. Reflexión total

Si el medio 2 es más refringente que el 1,  $n_2 > n_1$ , de acuerdo con la [37.13] ha de ser  $\text{sen } i > \text{sen } R$ , y puesto que tanto  $i$  como  $R$  son agudos, es  $i > R$ , lo que demuestra que el rayo refractado se acerca a la normal.

Al crecer el ángulo de incidencia  $i$ , debe crecer  $R$  de forma que se cumpla la [37.13], pero el mayor valor que puede alcanzar  $i$ , es  $i = 90^\circ$ , al que corresponde el mayor valor posible de  $R$ , que se denomina *ángulo límite de refracción*,  $R_L$ , (Figura 37.3), cuyo valor es:

$$\text{sen } R_L = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{n_{21}} \tag{37.14}$$

Si el rayo incidente lo hace siguiendo la dirección de la normal es  $i = 0$ , será  $\text{sen } i = 0$  y, para que se cumpla [37.13], debe ser  $\text{sen } R = 0$ , es decir,  $R = 0$ , y el rayo no sufre desviación, transmitiéndose al segundo medio en la misma dirección de la normal a la superficie de separación.

Si el medio 2 es menos refringente que el 1,  $n_2 < n_1$ , de acuerdo con la [37.13] ha de ser  $\text{sen } i < \text{sen } R$  y, al ser tanto  $i$  como  $R$  agudos, es  $i < R$ , lo que demuestra que el rayo refractado se separa de la normal (Figura 37.4).

Al crecer  $i$  crece  $R$ , de forma que siempre se cumpla la [37.13], pero el mayor valor que puede alcanzar  $R$ , es  $R = 90^\circ$ , al que corresponde el mayor posible ángulo de incidencia,  $i_L$ , denominado *ángulo límite de incidencia*, el cual debe verificar:

$$\text{sen } i_L = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \quad [37.15]$$

Expresión que nos indica que el ángulo  $i_L$  es el de refracción límite cuando la luz pasa del medio 2 al 1.

Todo rayo que incida con un ángulo  $i > i_L$  no tendrá rayo refractado, será totalmente reflejado por la superficie, diciéndose que existe *reflexión total*.

Es obvia la comprobación de que siempre se verificará:

$$\text{sen } i_L \cdot \text{sen } R_L = 1 \quad [37.16]$$

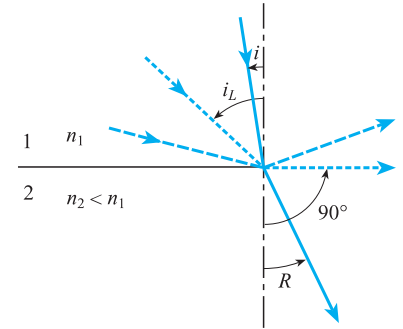


Figura 37.4. Ángulo límite de incidencia.

### EJEMPLO 37.1

Una cierta fibra óptica tiene su corazón fabricado de un material con un índice de refracción  $n_1$  para una cierta longitud de onda  $\lambda$  y su recubrimiento presenta para esa misma longitud de onda el índice de refracción  $n_2 < n_1$ . Determinemos:

- El ángulo máximo de incidencia,  $i_L$ , para que la onda viaje por el corazón de la fibra sin salirse de él (Figura 37.5).
- Los valores para el caso particular  $n_1 = 1,4$  y  $n_2 = 1,2$ .

#### Solución:

a) Consideremos un rayo que incide en  $O$  con un ángulo  $i$ , pasa al corazón de la fibra con un ángulo de refracción  $R$ , incide en un punto  $P$  de la superficie de separación entre el corazón y el recubrimiento con un ángulo,  $i_1$ , y se transmite al recubrimiento con un ángulo de refracción  $R_1$ . En  $P$  debe verificarse la [37.13],  $n_1 \text{sen } i_1 = n_2 \text{sen } R_1$ , por tanto, para que no exista rayo refractado y la onda se mantenga dentro del corazón, al menos debe ser  $R_1 = 90^\circ$  y por tanto,

$$n_1 \text{sen } i_{1L} = n_2$$

o bien,

$$i_1 > i_{1L} \arcsen \frac{n_2}{n_1}$$

En el triángulo rectángulo  $OQP$  se verifica:

$$i_1 = \frac{\pi}{2} - R, \quad \text{luego debe ser: } \frac{\pi}{2} - R > i_{1L} \quad \text{y de aquí, } R < \frac{\pi}{2} - i_{1L}$$

La ley de la refracción en  $O$  se expresa  $\text{sen } i = n_1 \text{sen } R$  y teniendo en cuenta la anterior es:

$$\text{sen } i < n_1 \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} - i_{1L} \right) = n_1 \cos i_{1L} \quad [37.17]$$

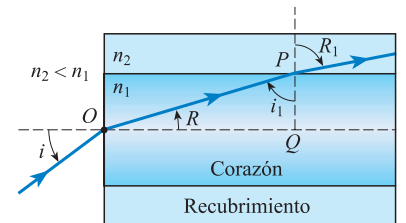


Figura 37.5. Fibra óptica.

De donde resulta:

$$i < \arcsen(n_1 \cos i_{1L})$$

b) Calculemos, en primer lugar,

$$\sen i_{1L} = \frac{1,2}{1,4} \quad \text{de donde,} \quad i_{1L} = 1,0297 \text{ rad}$$

El valor del coseno de este ángulo es  $\cos i_{1L} = 0,51508$ . Con ello la [37.17] nos da:

$$\sen i < 0,7211064 \quad \text{de donde} \quad i < 0,8054 \text{ rad,} = 46^\circ 08' 45''$$

### 37.5 Camino óptico

Se define el camino óptico entre dos puntos  $A$  y  $B$  de una cierta trayectoria  $\Gamma$  mediante la integral:

$$C = \int_A^B n ds \tag{37.18}$$

en la que  $n$  es el índice de refracción correspondiente al medio en el punto coincidente con el elemento  $ds$ .

Teniendo en cuenta que es  $n = \frac{c}{v}$  y  $v = \frac{ds}{dt}$ , el camino óptico puede expresarse de la forma:

Camino óptico

$$C = \int_A^B \frac{c}{v} dx = \int_A^B c dt = c(t_B - t_A) \tag{37.19}$$

Se pone así de manifiesto que *el camino óptico entre dos puntos  $A$  y  $B$  en un cierto medio es igual numéricamente al espacio que la luz recorrería en el vacío durante un tiempo igual al empleado en el medio para ir de  $A$  a  $B$ .*

### 37.6 Principio de Fermat. Leyes de la reflexión y la refracción

El Principio de Fermat establece que *la trayectoria real seguida por la luz para ir de un punto a otro es aquella que hace mínimo el camino óptico.*

Si el camino óptico entre dos puntos es mínimo, también será mínimo el tiempo empleado por la luz en ir de uno a otro, ello es evidente si observamos la [37.19].

Si el medio es homogéneo, es decir,  $n$  no varía de unos puntos a otros, el camino óptico es:

$$C = \int_A^B n ds = n \int_A^B ds = n(S_B - S_A) = nS_{AB} \tag{37.20}$$

y será mínimo cuando lo sea la longitud de trayectoria recorrida, debiendo, en consecuencia, ser ésta rectilínea. *En un medio homogéneo las trayectorias luminosas son líneas rectas.*

Sean dos puntos  $A$  y  $B$  que pertenecen a un mismo medio homogéneo de índice absoluto de refracción  $n$  (Figura 37.6).

Un haz luminoso monocromático sale de  $A$ , se refleja en una superficie  $S$  y llega a  $B$ . El camino óptico es:

$$C = n(s_1 + s_2)$$

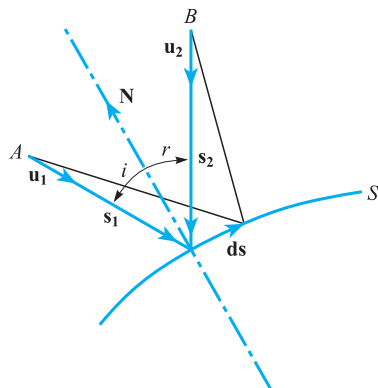


Figura 37.6. Leyes de la reflexión.



que puede expresarse:

$$C = n(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{u}_2)$$

y cuya diferencial es:

$$dC = n(ds_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{u}_1 + ds_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{s}_2 \cdot d\mathbf{u}_2)$$

Por ser unitarios  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$ ,  $d\mathbf{u}_1$  y  $d\mathbf{u}_2$  serán perpendiculares, respectivamente, a cada uno de ellos, verificándose  $\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{u}_1 = \mathbf{s}_2 \cdot d\mathbf{u}_2 = 0$ . Teniendo, además, en cuenta que es  $ds_1 = ds_2 = ds$  se escribe:

$$dC = n(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \cdot ds$$

Para que el camino óptico sea mínimo, verificándose así el principio de Fermat, debe ser  $dC = 0$ , lo que exige que los vectores  $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$  y  $ds$  sean perpendiculares. Puesto que  $ds$  es tangente a la superficie  $S$ , debe ser:

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = a\mathbf{N} \tag{37.21}$$

En la que  $\mathbf{N}$  es el vector unitario normal a la superficie en el punto de incidencia. El rayo incidente, de dirección y sentido  $\mathbf{u}_1$ , y el rayo reflejado, de dirección y sentido  $-\mathbf{u}_2$ , están en un mismo plano. El vector  $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$  estará en ese mismo plano, que según [37.21] deberá contener a la normal a la superficie en el punto de incidencia. Quedando así demostrado que *el rayo incidente, la normal a la superficie reflectora en el punto de incidencia y el rayo reflejado están en un mismo plano, que es el de incidencia.*

Si multiplicamos vectorialmente por  $\mathbf{N}$  la Expresión [37.21] llamando  $\mathbf{k}$  al vector unitario normal al plano de incidencia y dirigido hacia el lector, resulta:

$$\mathbf{u}_1 \times \mathbf{N} + \mathbf{u}_2 \times \mathbf{N} = 0$$

o

$$\text{sen } i \mathbf{k} - \text{sen } r \mathbf{k} = 0$$

es decir,

$$\text{sen } i = \text{sen } r \quad \text{y por tanto} \quad i = r$$

*Los ángulos de incidencia y reflexión son iguales.*

Análogamente, para la refracción (Figura 37.7) se escribe:

$$L = n_1 s_1 + n_2 s_2 = n_1 \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + n_2 \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{u}_2$$

$$dL = n_1 ds_1 \cdot \mathbf{u}_1 + n_1 \mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{u}_1 + n_2 ds_2 \cdot \mathbf{u}_2 + n_2 \mathbf{s}_2 \cdot d\mathbf{u}_2$$

Teniendo en cuenta que es:

$$\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{u}_1 = 0 \quad , \quad \mathbf{s}_2 \cdot d\mathbf{u}_2 = 0 \quad \text{y} \quad ds_1 = ds_2 = ds$$

resulta:

$$dL = (n_1 \mathbf{u}_1 + n_2 \mathbf{u}_2) \cdot ds$$

Para que el camino sea mínimo debe ser  $dL = 0$  y puesto que  $ds$  es tangente a la superficie, ha de ser:

$$n_1 \mathbf{u}_1 + n_2 \mathbf{u}_2 = b\mathbf{N} \tag{37.22}$$

El rayo incidente, de dirección y sentido  $\mathbf{u}_1$ , y el rayo refractado, de dirección y sentido  $-\mathbf{u}_2$ , están en un mismo plano, en el cual también estará el vector  $n_1 \mathbf{u}_1 + n_2 \mathbf{u}_2$  y que, por tanto, después de la [37.22] contendrá a la normal. *El rayo incidente, la normal en el punto de incidencia y el rayo refractado están en un mismo plano, que es el de incidencia.*

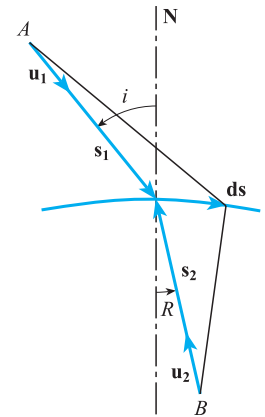


Figura 37.7. Leyes de la refracción.

Multiplicando vectorialmente por  $\mathbf{N}$ , la [37.22] resulta,

$$n_1 \mathbf{u}_1 \times \mathbf{N} + n_2 \mathbf{u}_2 \times \mathbf{N} = 0 \quad n_1 \sin i - n_2 \sin R = 0$$

$$\frac{c}{v_1} \sin i = \frac{c}{v_2} \sin R \quad \text{o} \quad \frac{\sin i}{\sin R} = \frac{v_1}{v_2}$$

que es la ley de Snell de la refracción.

### EJEMPLO 37.2

Un rayo luminoso procedente del Sol incide en la superficie exterior de la atmósfera. Admitiendo que el índice de refracción de esta varía con la altura según la ley:

$$n(z) = 1 + Ae^{-\frac{z}{9\,000}}$$

Determinemos el valor de  $A$  para que el rayo siga una trayectoria circular paralela al nivel del mar.

**Solución:**

El camino óptico se expresa (Figura 37.8).

$$C = \int n(z) ds = \int n(z) r d\theta$$

Para seguir una trayectoria paralela al nivel del mar debe ser  $z = \text{cte}$  y, por tanto, también  $r = R + z = \text{cte}$ . Con ello el camino óptico se expresa:

$$C = n(z)r\theta = n(z)(R + z)\theta$$

El Principio de Fermat exige que el camino óptico sea mínimo, es decir, debe verificarse que su derivada es nula:

$$\frac{dC}{dz} = \frac{dn(z)}{dz} (R + z)\theta + n(z)\theta = 0$$

Lo que exige que sea:

$$\frac{dn(z)}{dz} = -\frac{n(z)}{R + z}$$

Derivando la expresión de  $n(z)$  dada en el enunciado es:

$$\frac{dn(z)}{dz} = -\frac{A}{9\,500} e^{-\frac{z}{9\,500}}$$

Igualando las dos últimas:

$$\frac{dn(z)}{dz} = -\frac{A}{9\,500} e^{-\frac{z}{9\,500}} = -\frac{n(z)}{R + z} = -\frac{1 + Ae^{-\frac{z}{9\,500}}}{R + z}$$

Al nivel del mar  $z = 0$  resulta,

$$\frac{A}{9\,500} = \frac{1 + A}{R} \quad ; \quad A = \frac{9\,500}{R - 9\,500} = \frac{9\,500}{6\,390\,500} = 1,4866 \times 10^{-3}$$

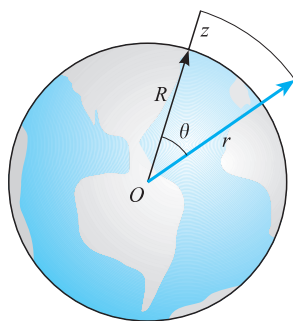


Figura 37.8.



## SOBRE LA NATURALEZA DE LA LUZ

Definimos la luz como el agente físico que nos permite la visión, siendo la Óptica la rama de la Física que tiene por objeto el estudio de la luz y sus propiedades. Los cuerpos visibles lo son, bien porque emiten luz *per se*, cuerpos luminosos, o bien porque la reciben y reflejan, cuerpos iluminados.

Ya en la antigua Grecia, siglos IV y III a.C., comienza a preocupar la naturaleza y propiedades de la luz. Platón, cuyo verdadero nombre era Arístocles de Atenas (428-348 a.C.), en su famoso tratado *La República*, ya cita el doblamiento aparente que presentan los objetos parcialmente sumergidos en el agua. Se suele atribuir a Euclides, que vivió en Alejandría hacia el año 300 a.C., el descubrimiento de las leyes de la reflexión, pero fue Herón de Alejandría (10-70 d.C.) quien, en su tratado *Catoptrica*, estudió las leyes de la reflexión y expresó su ley fundamental: *el ángulo de incidencia es igual al de reflexión*. En la Óptica de Euclides se adopta la teoría de que es el ojo quien envía rayos hacia el objeto que son devueltos, en contra de la teoría de Aristóteles (384-322 a.C.) que mantiene que es el objeto quien emite los rayos, lo cual llegó a ser creencia general: luz estaba formada por partículas emitidas por los cuerpos luminosos, las cuales se movían en línea recta a gran velocidad y, al penetrar en el ojo, excitaban el sentido de la vista. Esta teoría fue desarrollada por Ali-Alhazen (965-1039), que dio una descripción del ojo humano y estableció que los ángulos de incidencia y reflexión están en el plano normal al espejo.

Roger Bacon (1215-1294), monje franciscano conocido como *Doctor Mirabilis*, fue precursor del método científico y en su obra *Opus Maius*, que es un tratado de matemáticas, óptica y alquimia, describe la posibilidad de formar un telescopio a base de combinar lentes, y la posibilidad de mejorar la visión mediante lentes.

Galileo (1564-1642), en 1609, construyó el primer telescopio de refracción, cuya descripción había sido hecha a finales del 1608 por Lippershey. Con él descubriría las lunas de Júpiter, los anillos de Saturno y que las manchas solares giraban con la superficie del Sol.

En 1611, Kepler (1571-1630) publicó su obra *Dioptrice*, en la cual hace un estudio de la refracción estableciendo que los ángulos incidente y transmitido son proporcionales, pero fue Snell (1580-1626), en 1621,

quien encontró la ley que liga los citados ángulos y que lleva su nombre.

Pierre de Fermat (1601-1665) enunció en 1657 su célebre *Principio del Mínimo Tiempo*: la luz debe llegar de un punto a otro en un tiempo mínimo, para lo cual, en el caso de medios homogéneos, debe seguir una línea recta.

Los fenómenos de difracción de la luz fueron observados por vez primera por Grimaldí (1618-1663), cuyos trabajos fueron publicados en 1665 y donde se dice que la luz parece comportarse como lo hacen los movimientos ondulatorios e ilumina zonas prohibidas por la teoría de la propagación rectilínea. Robert Hooke (1635-1703) fue el primero en estudiar las interferencias y proponer la idea de que la luz era un movimiento vibratorio que se propaga a gran velocidad.

Newton (1642-1727), trabajando con prismas, encontró, en 1666, que la luz blanca está compuesta por toda una serie de luces de colores, cada una de las cuales tiene unas características especiales al refractarse. Quizás debido a la contradicción entre la propagación rectilínea y la teoría ondulatoria, Newton fue defensor de la teoría corpuscular de la luz, que publicó en 1675.

Huygens (1629-1695), en 1678, admitiendo como principio la naturaleza ondulatoria de la luz, en su *Traite de la lumiere*, consigue explicar las leyes de la reflexión y la refracción e incluso la doble refracción que observó trabajando con calcita, trabajos que también le llevarían al descubrimiento de la polarización de la luz. Su error fue considerar las ondas luminosas análogas a las sonoras, es decir, ondas mecánicas longitudinales, lo que hace necesario un medio material elástico para su propagación. Ello le llevó a establecer que el espacio estaba lleno de un medio propagador, que penetraba por los poros de los cuerpos y que llamó *éter*.

La primera medida de la velocidad de la luz fue realizada en 1676 por Roemer (1644-1710), analizando los tiempos entre eclipses sucesivos de las lunas de Júpiter y obteniendo el valor de 48 000 leguas por segundo, aproximadamente 214 000 Km/s.

Manteniendo sus ideas respecto a la naturaleza de la luz, Newton, en su célebre tratado *Opticks*, publicado en 1704, desarrolla una teoría corpuscular de la luz y del color, con la que logró explicar satisfactoriamente todas las propiedades más importantes de la misma y, dado su gran prestigio, quedó frenada por casi

un siglo la teoría ondulatoria de la luz, a pesar de que un matemático tan eminente como Euler (1707-1783) la defendiera.

La revitalización de la teoría ondulatoria de la luz se debe a Thomas Young (1773-1829), el cual presentó ante la *Royal Society* diversos artículos en su defensa, si bien todos ellos de forma cualitativa, y estableció el *Principio de interferencia*, en 1802. De forma independiente, Agustín Fresnel (1788-1827) desarrolló en Francia la teoría ondulatoria de la luz, explicando con ella todos los fenómenos conocidos. Sin embargo, no era posible explicar la polarización de la luz considerándola un movimiento ondulatorio longitudinal, y fue Young, en 1817, quien estableció que las ondas luminosas debían ser transversales.

La concepción mecanicista de la naturaleza ondulatoria de la luz hacía necesario, para la propagación de las ondas transversales, que el éter fuera sólido. Y dada la gran velocidad de la luz, que había sido determinada por Roemer, en 1676, y por Bradley, en 1729, aún cuando el éter fuera de una densidad bajísima, sería necesario que su módulo de elasticidad fuera muy superior al del acero, lo que resultaba contradictorio con la facilidad de movimiento de los sólidos a través de él.

En la primera mitad del siglo XIX, Faraday (1791-1867) desarrolló la teoría de los campos eléctricos y magnéticos en el espacio y encontró, en 1845, un fenómeno que relaciona el magnetismo y la luz, al comprobar que los campos magnéticos giran el plano de polarización de la luz. Maxwell (1831-1879) desarrolló la teoría del electromagnetismo, encontrando que el campo electromagnético se propaga con una velocidad que coincide con la hallada experimentalmente para la luz, lo que le llevó a establecer, en 1873, la naturaleza electromagnética de las ondas luminosas, diciendo: «están constituidas por un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y uno magnético  $\mathbf{H}$ , perpendiculares entre sí; ambos campos son funciones sinusoidales del tiempo, de igual periodo, y todas las ondas luminosas se propagan con la misma velocidad, que en el vacío vale  $c$  y que en los diferentes medios está ligada por la relación

$$\varepsilon\mu c^2 = 1$$

que para el vacío es

$$\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1»$$

Los valores de  $\varepsilon_0$  y  $\mu_0$  determinados experimentalmente, daban para  $c$  valores muy aproximados a los también obtenidos experimentalmente, lo que era una confirmación de la luz como onda electromagnética.

Hertz (1857-1894) consiguió, en 1888, la reproducción real de ondas electromagnéticas y realizó con ellas experiencias sobre todos los fenómenos conocidos, reflexión, refracción, interferencia, etc., confirmando plenamente con ellas la teoría electromagnética de la luz de Maxwell. Las ondas electromagnéticas se autogeneran y no necesitan de un medio propagador.

Con las ecuaciones de Maxwell quedaban unificadas la electricidad, el magnetismo y la óptica.

Un grave tropiezo apareció para la teoría electromagnética de la luz. Estudiando experimentalmente la radiación térmica, se había encontrado que estaba formada por un espectro continuo de longitudes de onda, lo que no tenía explicación posible a la luz de la citada teoría. Fue Max Planck (1858-1947) quien, en el año 1900, para poder explicar la emisión de espectros continuos, se vio en la necesidad de establecer su famosa hipótesis de los *cuantos*, según la cual, la energía emitida es múltiplo entero de un valor mínimo,  $\varepsilon = hv$ , denominado «cuanto de energía», en el cual  $h$  es una constante, llamada de Planck, y  $\nu$  la frecuencia de la onda, lo que expuso el 19 de octubre ante la *German Physical Society* y que constituye el origen de la *Mecánica cuántica*.

Para explicar el efecto fotoeléctrico, Einstein (1879-1955), en 1905, emitió su famosa teoría de los fotones, según la cual, el cuanto de energía emitido no se distribuye uniformemente sobre el frente de onda, sino que conserva su individualidad, constituyendo un corpúsculo que denominó *fotón*. Parece, pues, resurgir la teoría corpuscular de la luz, pero ahora los corpúsculos, llamados fotones, carecen de masa en contraposición a los establecidos por Newton.

Durante algún tiempo coexistieron la teoría electromagnética de Maxwell y la corpuscular de Einstein, aplicándose la primera a todos los fenómenos con excepción de aquéllos en los que interactuasen la radiación y la materia, a los cuales debe aplicarse la segunda.

Es Luis de Broglie quien se lleva la gloria de haber aunado ambas teorías al establecer, en 1924, que todo corpúsculo en movimiento lleva asociado una onda y que la intensidad de una onda en un punto, en un cierto instante, es la probabilidad de que el corpúsculo asociado esté en ese punto en el instante considerado, lo que es base de la *Mecánica ondulatoria*. Ambas mecánicas son formalismos de una misma realidad y fueron desarrolladas posteriormente por Schrodinger, Heisenberg, Born y Dirac, fundamentalmente.

## 38.1 Introducción

En los estudios que nos proponemos realizar en este capítulo no será necesario tener en cuenta la naturaleza ondulatoria de la luz. La representación de ésta mediante rayos será suficiente y comportará, además, gran simplificación en los problemas que se van a tratar.

Un medio se dice que es *transparente* para una determinada longitud de onda cuando permite el paso de ésta a su través, por el contrario, cuando no lo permite se dice que es *opaco* para esa longitud de onda, bien porque la absorbe en su interior o porque la refleja en su superficie.

Se define un *dióptrico* como el conjunto formado por dos medios transparentes, homogéneos e isotropos, con una superficie de separación perfectamente definida. El dióptrico se denomina según la forma de la superficie de separación, siendo los más usuales los planos, esféricos, cilíndricos o parabólicos.

Cuando la superficie límite de un medio es perfectamente reflejante se dice que constituye un *espejo*.

Un *sistema óptico* es todo conjunto de dióptricos y espejos. Si el sistema únicamente está formado por dióptricos se le denomina *sistema dióptrico*, como es, por ejemplo, el sistema óptico de un microscopio. Si el sistema óptico únicamente está formado por espejos, se dice que es un *sistema catóptrico*. Finalmente, si el sistema óptico está formado por dióptricos y espejos, se dice que es un *sistema cata-dióptrico*, como son, por ejemplo, los sistemas ópticos de los telescopios.

El sistema óptico se dice que es *centrado* cuando todas las superficies que limitan los medios homogéneos que lo forman, sean transparentes o reflejantes, son de revolución, siendo el eje de revolución común para todas. A este eje se le denomina *eje óptico* del sistema.

## 38.2 Estigmatismo y aplanatismo

En un sistema óptico centrado, el rayo luminoso que lleva la dirección del eje óptico del sistema, atraviesa a éste sin desviarse, ya que incide normalmente en todas las superficies de los dióptricos. Un rayo que parta de un cierto punto *A* del eje

- 38.1. Introducción
- 38.2. Estigmatismo y aplanatismo
- 38.3. Objetos e imágenes reales y virtuales
- 38.4. Óptica geométrica paraxial
- 38.5. Determinación analítica de un rayo óptico paraxial
- 38.6. Convenio de signos
- 38.7. Dióptrico plano
- 38.8. Lámina de caras planas paralelas
- 38.9. Prisma óptico
- 38.10. Dióptrico esférico
- 38.11. Espejo plano
- 38.12. Espejo esférico

óptico formando un ángulo  $\alpha$  con él, atravesará el sistema y, al salir, cortará al eje óptico en un cierto punto  $A'$ , que es el punto imagen del  $A$  que ha formado el sistema óptico. De acuerdo con el principio de Fermat, el camino seguido por el rayo luminoso para ir desde un punto  $A$  al  $A'$  es el que corresponde al camino óptico mínimo, lo que le hace, en general, único.

Sin embargo, en muchos sistemas ópticos particulares son infinitos los caminos que realmente puede seguir la luz para ir del punto  $A$ , atravesando el sistema, hasta el  $A'$ . Para todos ellos el camino óptico ha de ser mínimo, lo que exige que éste sea independiente de la trayectoria,  $C_{AA'} = \text{cte}$ . Cuando esto sucede se dice que el sistema óptico es *estigmático* para los puntos  $A$  y  $A'$ . A estos se les denomina *puntos conjugados* respecto al sistema.

Un sistema óptico estigmático, para una pareja de puntos, no lo es, en general, para otros puntos. En algunos sistemas centrados particulares, en los que  $A$  y  $A'$  son dos puntos de su eje óptico respecto a los cuales es estigmático, sucede que son estigmáticos para todo punto próximo de  $A$  y contenido en el plano normal al eje óptico por  $A$ , cuyo conjugado estará en el plano normal al eje óptico por  $A'$ . A estos sistemas se les denomina *aplanáticos*.

*Condición de aplanatismo*

Veamos cuál es la condición de aplanatismo de un sistema, que es estigmático para la pareja  $AA'$ . Consideremos un punto  $B$  próximo al  $A$ , tal que  $AB$  es normal al eje óptico del sistema, y sea  $B'$  la imagen que de  $B$  da el sistema (Figura 38.1).

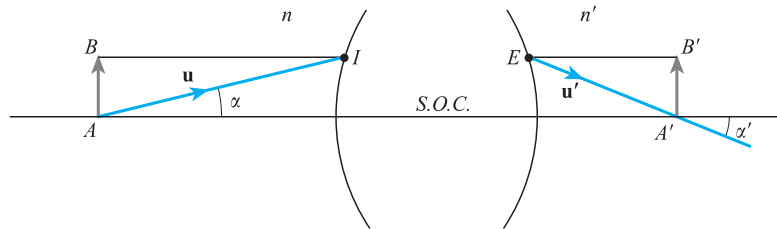


Figura 38.1. Sistema óptico aplanático.

Por ser el sistema estigmático para la pareja  $AA'$  el camino óptico entre ambos debe ser constante:

$$C_{AIEA'} = \text{cte}$$

Para que el sistema sea también estigmático para la pareja  $BB'$  debe ser  $C_{BIEB'} = \text{cte}$ . La diferencia entre ambos caminos ópticos será constante:

$$nAB \cdot u + n'A'B' \cdot u = \text{cte}$$

lo que se escribe:

$$nAB \text{ sen } \alpha - n'A'B' \text{ sen } \alpha' = \text{cte}$$

Puesto que para  $\alpha = 0$  es  $\alpha' = 0$ , la constante debe ser nula:

$$nAB \text{ sen } \alpha - n'A'B' \text{ sen } \alpha' = 0$$

De donde,

$$A'B' = AB \frac{n}{n'} \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \alpha'} \tag{38.1}$$

Esta expresión, para que el sistema óptico sea estigmático para la pareja  $BB'$ , debe ser independiente de  $\alpha$ , es decir, debe ser:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \alpha'} = \text{cte} \tag{38.2}$$

que es la condición de aplanatismo del sistema.

### 38.3 Objetos e imágenes reales y virtuales

Consideremos un sistema  $S$  estigmático para el par de puntos  $AA'$ . El punto  $A'$  se define como la imagen que del punto  $A$  da el sistema  $S$ . El punto  $A$  se dice que es el objeto del cual el sistema  $S$  forma la imagen  $A'$ .

Si todos los rayos que provienen del objeto  $A$ , a la salida del sistema óptico, convergen sobre el  $A'$ , se dice que la imagen es real: ella puede ser recogida sobre una pantalla situada en  $A'$  (Figura 38.2).

Si todos los rayos que provienen del objeto  $A$ , a la salida del sistema óptico son divergentes, el punto  $A'$  donde se cortarían sus prolongaciones es una imagen virtual, ya que no puede recogerse sobre una pantalla, aunque sí observada directamente (Figura 38.3).

El punto  $A$  del que parte el haz luminoso divergente que incide en el sistema se dice que es un punto objeto real.

Si el haz luminoso que incide en el sistema óptico está formado por rayos convergentes, cuyas prolongaciones se cortan en el punto  $A$ , se dice que éste es un punto objeto virtual (Figura 38.4).

El espacio en el cual se propagan los rayos incidentes en el sistema es el espacio objeto real; el espacio ocupado por el sistema es el espacio virtual, tanto objeto como imagen, y el espacio en el cual se propagan los rayos emergentes del sistema es el espacio imagen real (Figura 38.4).

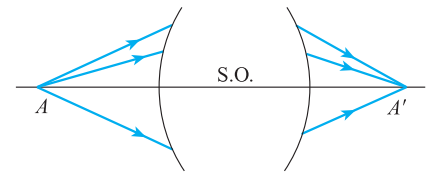


Figura 38.2. Objeto e imagen reales.

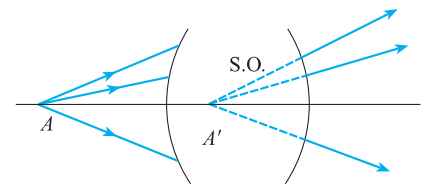


Figura 38.3. Objeto real e imagen virtual.

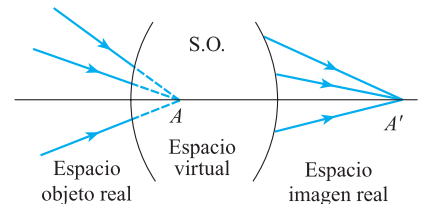


Figura 38.4. Objeto virtual e imagen real.

### 38.4 Óptica geométrica paraxial

Ya hemos indicado cómo muchos sistemas ópticos centrados, como son la gran mayoría de los usuales, son aplanáticos para puntos próximos al eje óptico. En estos sistemas, los rayos que intervienen en la formación de las imágenes hacen con el eje óptico del sistema ángulos muy pequeños, por lo que son denominados rayos paraxiales. A la óptica geométrica desarrollada a partir de este tipo de rayos se la denomina *óptica geométrica paraxial*, es de gran importancia y permite ciertas simplificaciones de gran utilidad, como son:  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\tan \alpha \approx \alpha$  y la ley de Snell puede escribirse de la forma  $ni = n'R$ , lo que facilita su uso.

### 38.5 Determinación analítica de un rayo óptico paraxial

Tomando un eje de referencia, que en general será el eje óptico del sistema en estudio, y un punto  $A$  de éste como origen, un rayo queda determinado por dos parámetros:  $y$ ,  $\alpha$ , que son la distancia normal desde  $A$  al rayo y el ángulo que el rayo forma con el eje (Figura 38.5).

El mismo rayo, tomando como origen otro punto  $A'$  queda determinado por los parámetros  $y'$ ,  $\alpha'$ , y si es  $d$  la distancia que separa  $A'$  de  $A$ , se cumplen las relaciones:

$$y' = y + d \cdot \alpha \quad ; \quad \alpha' = \alpha \tag{38.3}$$

Matricialmente se escriben:

$$\begin{Bmatrix} y' \\ \alpha' \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

A la matriz  $(d)$ ,

$$(d) = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{38.4}$$

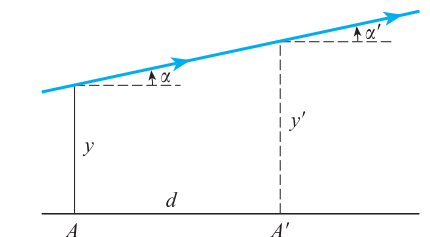


Figura 38.5. Determinación analítica de un rayo.

Matriz desplazamiento

se la denomina matriz de desplazamiento o de cambio de origen.

### 38.6 Convenio de signos

Siempre consideraremos que la luz entra en el sistema óptico de izquierda a derecha. Tomaremos el desplazamiento  $d$  positivo si tiene el mismo sentido de la marcha del rayo y negativo en caso contrario.

Las distancias al eje óptico serán positivas si el rayo está por encima del eje y negativas si esta por debajo.

Los ángulos serán positivos cuando su sentido sea el contrario al de giro de las agujas del reloj y serán negativos cuando su sentido sea el del giro de éstas. Veamos, como ejemplo, los dos casos de la Figura 38.6.

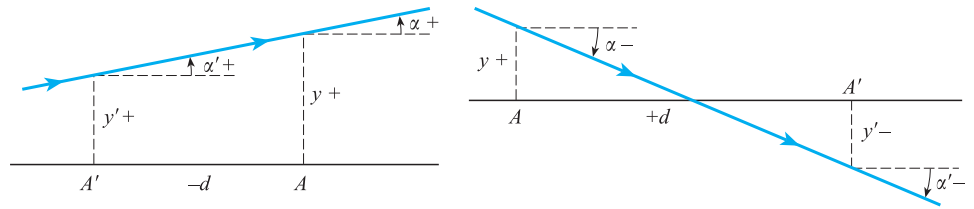


Figura 38.6.

En el primero, los ángulos son positivos, así como  $y$  e  $y'$ , mientras que el desplazamiento  $d$  es negativo. La matriz de desplazamiento en este caso es:

$$(d) = \begin{pmatrix} 1 & -d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El rayo en  $A'$  queda ahora definido matricialmente de la forma:

$$\begin{Bmatrix} y' \\ \alpha' \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

Los valores de  $y'$  y  $\alpha'$  que definen al rayo en  $A'$  son:

$$y' = y - d\alpha \quad y \quad \alpha' = \alpha$$

En el segundo caso, los ángulos son negativos, siendo  $y$  y  $d$  positivos. Por tanto, se escribe:

$$\begin{Bmatrix} y' \\ -\alpha' \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ -\alpha \end{Bmatrix}$$

En este caso los parámetros que definen al rayo en  $A'$  son:

$$y' = y + d\alpha \quad y \quad \alpha' = \alpha$$

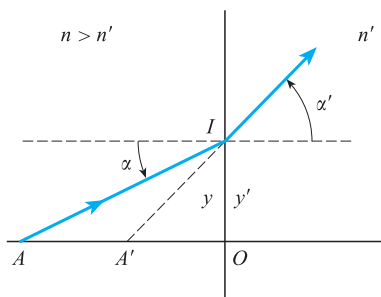


Figura 38.7. Dióptrico plano.

### 38.7 Dióptrico plano

Todo sistema formado por dos medios transparentes de distinto índice de refracción y cuya superficie de separación es plana se denomina *dióptrico plano*.

Consideremos un dióptrico plano cuyos medios transparentes tienen como índices de refracción a  $n$  y  $n'$ ,  $n > n'$  (Figura 38.7). Todo rayo  $AO$  que incida normalmente a la superficie del dióptrico, de acuerdo con las leyes de la refracción, la atravesará sin desviarse. Otro rayo, tal como el  $AI$ , cuyo ángulo de incidencia es  $\alpha$ , se refracta formando un ángulo de refracción  $\alpha'$ . La ley de la refracción,  $n \text{ sen } \alpha = n' \text{ sen } \alpha'$  exige, al ser  $n > n'$ , que sea  $\alpha' > \alpha$ . El punto imagen del  $A$  será el  $A'$ , que es un punto imagen virtual.



Veamos cuál es la posición de  $A'$ . Para ello calculemos la distancia  $OA'$ , lo que se hace de la siguiente forma:

$$OI = A'O \operatorname{tg} \alpha' = AO \operatorname{tg} \alpha \quad ; \quad A'O = AO \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'}$$

Utilizando la ley de la refracción eliminamos  $\alpha'$ , ya que es:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\operatorname{sen} \alpha'}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha'}} = \frac{\frac{n}{n'} \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{1 - \frac{n^2}{n'^2} \operatorname{sen}^2 \alpha}} = \frac{n \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{n'^2 - n^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}}$$

Con lo que resulta:

$$A'O = AO \frac{1}{n \cos \alpha} \sqrt{n'^2 - n^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} \quad [38.5]$$

En consecuencia, la posición del punto imagen  $A'$  depende del ángulo de incidencia  $\alpha$ , y el sistema no es estigmático. El dióptico plano únicamente es estigmático para puntos del infinito, ya que para cada punto del infinito del espacio objeto le corresponde un valor de  $\alpha$  constante.

Para rayos paraxiales puede escribirse:

$$A'O = AO \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'} \simeq AO \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = AO \frac{n'}{n} \quad [38.6]$$

y el dióptico plano puede considerarse para rayos paraxiales como aproximadamente estigmático.

Tomando como eje de referencia la normal  $AO$  y como origen el punto  $O$ , un rayo paraxial incidente en el punto  $I$  queda determinado por los parámetros  $y, \alpha$ . El rayo refractado quedará determinado en el punto  $I$  mediante los parámetros  $y', \alpha'$ , verificándose entre ellos las relaciones:

$$y' = y \quad , \quad \alpha' = \frac{n}{n'} \alpha$$

Relaciones que matricialmente se escriben:

$$\begin{Bmatrix} y' \\ \alpha' \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

Se denomina matriz de transferencia del dióptico plano a la matriz  $(DP)$ ,

$$(DP) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \quad [38.7] \quad \text{Matriz dióptico pleno}$$

matriz que nos permite determinar para cada rayo paraxial incidente el correspondiente refractado.

La imagen  $A'$  puede situarse por su distancia al objeto, y esto, teniendo en cuenta la [38.6], se expresa:

$$AA' = AO - A'O = AO \left( 1 - \frac{n'}{n} \right) = AO \left( \frac{n - n'}{n} \right) \quad [38.8]$$

Si es  $n > n'$ , la distancia  $AA'$  es positiva y  $A'$  está entre  $A$  y la superficie, como es el caso de la Figura 38.7, pero si es  $n < n'$ , la distancia  $AA'$  es negativa y  $A'$  se aleja de  $O$ . De acuerdo con ello, cuando se mira, perpendicularmente a la superficie libre del agua, el fondo de un depósito, puesto que el haz de rayos utilizado es muy estrecho, ya que está limitado por la pupila del ojo, nos parece que aquél está más cerca de la superficie, por ser  $n$  (agua)  $> n'$  (aire).

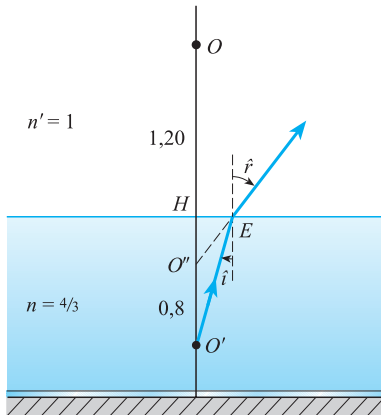


Figura 38.8. Visión de  $O'$  desde  $O$ .

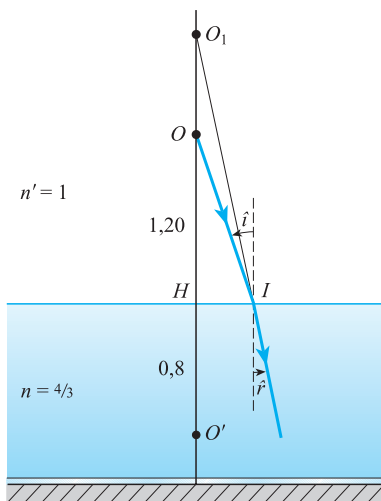


Figura 38.9. Visión de  $O$  desde  $O'$ .

**EJEMPLO 38.1**

Sobre la superficie libre del agua de una piscina, cuyo índice de refracción es  $n = 4/3$ , a una distancia de 1,20 m, se encuentra un observador  $O$ . A una profundidad de 0,8 m y en la misma vertical hay otro observador  $O'$  sumergido (Figura 38.8). Calculemos:

- a) La distancia a la que el observador  $O$  ve al sumergido  $O'$ .
- b) La distancia a la que el observador sumergido  $O'$  ve al  $O$ .

**Solución:**

a) El rayo luminoso que sale de  $O'$  se refracta en  $E$  y llega al ojo del observador  $O$  como si proviniera de  $O''$ .

La ley de la refracción en el punto  $E$  se expresa  $n \sin i = n' \sin r$ .

La distancia  $HE$  puede expresarse en los dos triángulos  $O'HE$  y  $O''HE$

$$HE = 0,8 \tan i = HO'' \tan r$$

de donde,

$$HO'' = 0,8 \frac{\tan i}{\tan r} \cong 0,8 \frac{\sin i}{\sin r} = 0,8 \frac{1}{n} = 0,8 \times \frac{3}{4} = 0,6 \text{ m}$$

La distancia desde el observador  $O$  a la imagen  $O''$  es  $OO'' = OH + HO'' = 1,80 \text{ m}$ .

b) El rayo luminoso que parte de  $O$  se refracta en  $I$  y llega al ojo del observador  $O'$  como si proviniera de  $O_1$  (Figura 38.9).

La ley de la refracción en  $I$  se expresa  $\sin i = n \sin r$ .

La distancia  $HI$  puede determinarse en los dos triángulos  $IHO$  e  $IHO_1$

$$HI = 1,20 \tan i = HO_1 \tan r$$

de donde,

$$HO_1 = 1,20 \frac{\tan i}{\tan r} = 1,20 \frac{\sin i}{\sin r} \cong 1,20 \times n = 1,60 \text{ m}$$

La distancia desde el observador  $O'$  a la que ve la imagen  $O_1$  es:

$$O'O_1 = O'H + HO_1 = 2,40 \text{ m}$$

**38.8 Lámina de caras planas paralelas**

Una lámina de caras planas paralelas está constituida por un medio transparente y homogéneo cuyo índice de refracción llamaremos  $n'$ , y cuyas superficies limitantes son planas y paralelas.

Supongamos a la lámina inmersa en un medio homogéneo y transparente, cuyo índice de refracción sea  $n$ . La imagen de un punto objeto fijo tal como el  $A$  se forma de la siguiente manera (Figura 38.10): el rayo  $AOO'$ , que incide normalmente a las caras de la lámina, de acuerdo con la ley de la refracción, no se desvía. Un rayo como el  $AI$ , cuyo ángulo de incidencia es  $i$ , se refracta dando lugar al rayo  $IE$ , cuyo ángulo de refracción es  $r$ , verificando  $n \sin i = n' \sin r$ .

El rayo  $IE$  que incide en la segunda cara de la lámina con un ángulo  $r$ , se refractará y el rayo emergente de la lámina formará con la normal un ángulo de salida  $i'$ , verificando,

$$n' \sin r = n \sin i'$$

De las dos últimas relaciones se deduce que es  $i = i'$ . Por tanto, el rayo emergente es paralelo al incidente y será su prolongación la que corte al eje óptico  $AOO'$  en el punto  $A'$ , que es la imagen virtual del punto  $A$ .

Determinemos la posición del punto imagen virtual  $A'$  por su distancia  $d' = A'O'$

$$\begin{aligned} d' = A'O' &= O'E \operatorname{ctan} i = (O'I' + I'E) \operatorname{ctan} i = (AO \tan i + e \tan r) \operatorname{ctan} i = \\ &= AO + e \frac{\tan r}{\tan i} = d + e \frac{n \cos i}{\sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 i}} \end{aligned} \quad [38.9]$$

Lo que pone de manifiesto que la lámina de caras planas paralelas no es un sistema estigmático, ya que la posición del punto imagen es función del ángulo de incidencia del rayo que pasa por el punto objeto. Únicamente para puntos objeto del infinito, la lámina de caras planas paralelas será estigmática.

Para rayos paraxiales se verificará:

$$d' = A'O' = AO + e \frac{\tan r}{\tan i} = d + e \frac{\sin r}{\sin i} = d + e \frac{n}{n'} \quad [38.10]$$

Por tanto, la lámina de caras planas paralelas es aproximadamente estigmática para rayos paraxiales.

Veamos, en este caso, cuál es el valor del desplazamiento  $AA'$  que la lámina produce aparentemente en el objeto,

$$AA' = AO + OO' - A'O' = e - e \frac{n}{n'} = e \left( 1 - \frac{n}{n'} \right) \quad [38.11]$$

Si es  $n' > n$ , el desplazamiento es positivo y, de acuerdo con el convenio de signos adoptado, se realizará en el mismo sentido de propagación del rayo incidente, aproximando aparentemente el objeto a la placa. Si es  $n' < n$  sucederá lo contrario.

Si el medio en el cual está inmersa la placa es el aire, para el cual admitimos  $n = 1$ , el desplazamiento está dado por la expresión:

$$AA' = e \left( 1 - \frac{1}{n'} \right) \quad [38.12]$$

Hallemos ahora la matriz de transferencia para la lámina de caras planas paralelas en el caso de rayos paraxiales. El rayo incidente en el punto  $I$ , tomando como origen  $O$ , queda definido por los parámetros  $y, i$  (Figura 38.11).

El rayo refractado en el punto  $I$ , estará definido por los parámetros  $y_1, r$ . Aplicando la [38.7] se escribe:

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ r \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ i \end{Bmatrix}$$

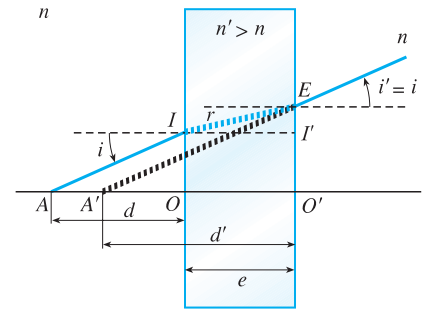


Figura 38.10. Lámina de caras planas paralelas.

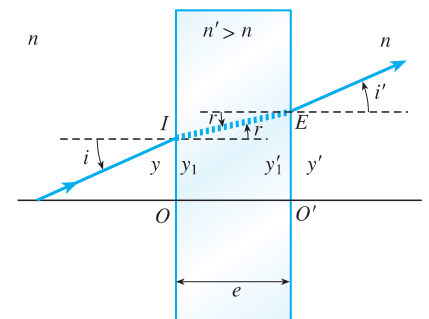


Figura 38.11. Matriz de transferencia. Lámina de caras planas paralelas.

El rayo refractado en  $I$ , tomando como origen  $O'$ , queda definido por los parámetros  $y'_1$ ,  $r$ , y aplicando la [38.4] escribimos:

$$\begin{Bmatrix} y'_1 \\ r \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ r \end{Bmatrix}$$

El rayo emergente en  $E$  queda definido con origen  $O'$  mediante los parámetros  $y'_1$ ,  $i'$ , y es el resultado de una segunda refracción en  $E$ . Aplicando la [38.7] se escribe:

$$\begin{Bmatrix} y' \\ i' \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y'_1 \\ r \end{Bmatrix}$$

Por simple sustitución, resulta:

$$\begin{Bmatrix} y' \\ i' \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ i \end{Bmatrix}$$

Efectuando la multiplicación de las matrices, se escribe:

$$\begin{Bmatrix} y' \\ i' \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e \frac{n}{n'} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ i \end{Bmatrix}$$

Con lo cual, la matriz de transferencia, correspondiente a la lámina de caras planas paralelas, es:

Matriz lámina caras planas

$$(LP) = \begin{pmatrix} 1 & e \frac{n}{n'} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [38.13]$$

La posición de la imagen es aquella en la cual el rayo emergente de la lámina corta al eje óptico, es decir, verifica  $y' = 0$ .

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ i' \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -d' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y' \\ i' \end{Bmatrix}$$

Por tanto, debe verificarse  $0 = y' - d'i'$

$$d' = \frac{y'}{i'} = \frac{y + i'e \frac{n}{n'}}{i} = \frac{y}{i} + e \frac{n}{n'}$$

### EJEMPLO 38.2

En el fondo de un recipiente que contiene dos líquidos no miscibles superpuestos hay un pequeño objeto  $A$ . El líquido de mayor densidad tiene una altura de 4 cm y un índice de refracción  $n_2 = 1,33$ . El de menor densidad tiene una altura de 2 cm y un índice de refracción  $n_1 = 1,36$ .

- a) Considerando rayos paraxiales procedentes de  $A$ , calculemos la profundidad a la que se verá desde el aire la imagen del objeto  $A$ .

- b) Considerando el líquido superior como una lámina de caras planas y paralelas, determinemos su matriz de transferencia.
- c) Suponiendo variable el espesor de la capa del líquido superior, obtengamos la relación entre ese espesor y la profundidad a la que se forma la imagen.

**Solución:**

a) En la Figura 38.12 hemos representado el sistema y la marcha de un rayo desde A hasta el ojo del observador.

De la geometría del sistema se expresa:

$$OA' \tan R = OE = OH + HE = 4 \tan i + 2 \tan r$$

Despejando el valor de la profundidad OA'

$$OA' = 4 \frac{\tan i}{\tan R} = 2 \frac{\tan r}{\tan R} \cong 4 \frac{\sin i}{\sin R}$$

El primer invariante en la refracción se expresa:

$$1,33 \sin i = 1,36 \sin r = \sin R$$

Con lo cual es,

$$OA' = 4 \frac{1}{1,33} + 2 \frac{1}{1,36} = 4,478 \text{ cm}$$

b) En la Figura 38.13 se ha representado la marcha del rayo de una forma más cómoda para determinar la matriz de transferencia de la lámina superior, ahora la de la derecha.

El rayo que parte de A se refracta en I y la matriz de transferencia de este dióptico, aplicando la [38.7], nos permite escribir:

$$\begin{Bmatrix} y \\ r \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1,33}{1,36} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ i \end{Bmatrix}$$

El rayo refractado queda definido en B, pero ahora debemos definirlo en O, para lo cual aplicamos la matriz de desplazamiento [38.4],

$$\begin{Bmatrix} y' \\ r \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ r \end{Bmatrix}$$

En E el rayo vuelve a refractarse y, aplicando de nuevo la matriz [38.7], es:

$$\begin{Bmatrix} y' \\ R \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1,36 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y' \\ r \end{Bmatrix}$$

Sustituciones sucesivas permiten expresar:

$$\begin{Bmatrix} y' \\ R \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1,36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1,33}{1,36} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ i \end{Bmatrix}$$

Haciendo la multiplicación de matrices, resulta:

$$\begin{Bmatrix} y' \\ R \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1,96 \\ 0 & 1,33 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ i \end{Bmatrix}$$

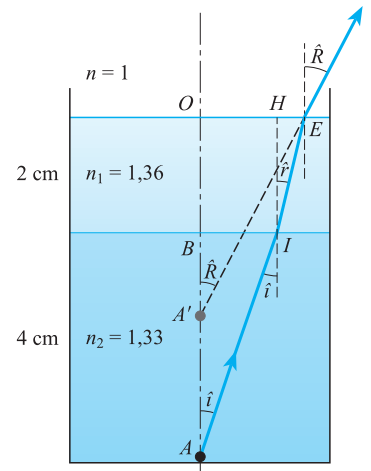


Figura 38.12.

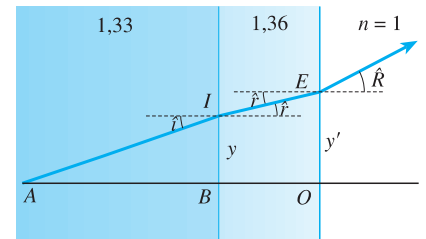


Figura 38.13.

c) Aplicando directamente el resultado del Apartado a) es:

$$OA' = 4 \frac{1}{1,33} + OB \frac{1}{136} = 3,0075 + 0,7353OB$$

**EJEMPLO 38.3**

Un sistema óptico situado en el aire está formado por dos láminas de caras planas y paralelas, como se indica en la Figura 38.14. Una onda luminosa monocromática parte de un punto A del eje óptico e incide en I con un ángulo de incidencia muy pequeño. Los índices de refracción de las láminas para la longitud de onda utilizada son  $n_1$  y  $n_2$ , y el espesor de las láminas  $e_1$  y  $e_2$ , respectivamente:

- a) Dibujemos la marcha del rayo hasta que emerja del sistema.
- b) Demostremos si el rayo emergente es o no paralelo al incidente.
- c) Hallemos la matriz de transferencia del sistema.
- d) Hallemos, utilizando la matriz del apartado anterior, la distancia  $A'O_2$  de la imagen a la cara de emergencia.
- e) Si es  $\lambda$  la longitud de onda incidente, calculemos las longitudes de onda en cada una de las láminas.

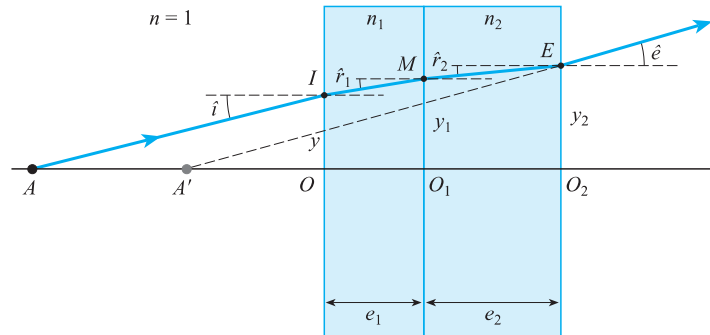


Figura 38.14.

**Solución:**

- a) En la Figura 38.14 se ha representado la marcha del rayo desde A hasta que emerge del sistema.
- b) El invariante de la refracción se expresa

$$\text{sen } i = n_1 \text{ sen } r_1 = n_2 \text{ sen } r_2 = \text{sen } e$$

Por tanto,  $e = i$  y el rayo emergente de este sistema óptico es paralelo al incidente.

- c) En el dióptrico plano de incidencia se cumple la [38.7]:

$$\begin{Bmatrix} y \\ r_1 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_1} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ i \end{Bmatrix}$$

El rayo refractado en I queda definido en O, pero ahora sufre un desplazamiento  $e_1$ ,

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ r_1 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ r_1 \end{Bmatrix}$$

En  $M$  sufre una nueva refracción:

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ r_1 \end{Bmatrix}$$

El rayo refractado en  $M$  se desplaza hasta incidir en  $E$ , la matriz de desplazamiento es:

$$\begin{Bmatrix} y_2 \\ r_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ r_2 \end{Bmatrix}$$

El rayo se refracta en  $E$  y emerge del sistema, la refracción en  $E$  se expresa:

$$\begin{Bmatrix} y_2 \\ i \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_2 \\ r_2 \end{Bmatrix}$$

Haciendo las sustituciones sucesivas, se expresa:

$$\begin{Bmatrix} y_2 \\ i \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_1} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ i \end{Bmatrix}$$

Realizando el producto de matrices resulta:

$$\begin{Bmatrix} y_2 \\ i \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{e_1}{n_1} + \frac{e_2}{n_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ i \end{Bmatrix}$$

Con lo cual, la matriz de transferencia de este sistema óptico es:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{e_1}{n_1} + \frac{e_2}{n_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) El punto  $A'$  es donde el rayo emergente corta al eje óptico, luego su distancia a ese eje es nula, condición que nos permite calcular la posición de  $A'$ :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ i \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -d' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_2 \\ i \end{Bmatrix}$$

De donde,

$$0 = y_2 - d'i \quad \text{e} \quad d' = \frac{y_2}{i}$$

Del apartado anterior sabemos que es:

$$y_2 = y + \left( \frac{e_1}{n_1} + \frac{e_2}{n_2} \right) i$$

Con lo cual, es:

$$d' = \frac{y}{i} + \frac{e_1}{n_1} + \frac{e_2}{n_2} = d + \frac{e_1}{n_1} + \frac{e_2}{n_2}$$

e) La ley de la refracción en  $I$  permite escribir:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Por tanto, es:

$$\lambda_1 = \frac{n}{n_1} \lambda = \frac{1}{n_1} \lambda$$

Análogamente, la refracción en  $M$  se expresa:

$$\frac{\text{sen } r_1}{\text{sen } r_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

De donde,

$$\lambda_2 = \frac{n_1}{n_2} \lambda_1 = \frac{n}{n_2} \lambda = \frac{1}{n_2} \lambda$$

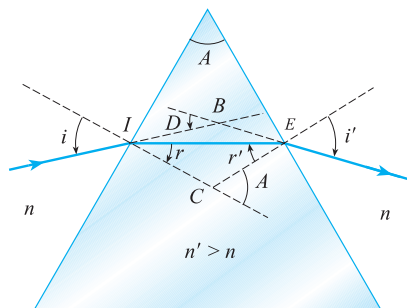


Figura 38.15. Prisma óptico.

### 38.9 Prisma óptico

Se denomina *prisma óptico* a todo sistema formado por un medio refringente limitado por dos caras planas no paralelas. Estos sistemas cumplen cuatro fórmulas fundamentales que pasamos a deducir

#### Fórmulas fundamentales

Supongamos que es  $n'$  el índice absoluto de refracción del prisma,  $n$  el índice absoluto de refracción del medio en el que está inmerso y  $A$  el ángulo del prisma, que es el formado por las dos caras planas que lo limitan. Consideremos una sección normal del prisma en la cual está contenido el rayo monocromático incidente (Figura 38.15).

La ley de Snell para la refracción en  $I$  se escribe:

$$n \text{ sen } i = n' \text{ sen } r \quad [38.14]$$

y para la refracción en  $E$ :

$$n' \text{ sen } r' = n \text{ sen } i' \quad [38.15]$$

Las normales a las caras del prisma en  $I$  y  $E$  se cortan en  $C$ , formando un ángulo  $A$ , igual al del prisma, y por ser exterior del triángulo  $CIE$  su valor es:

$$A = r + r' \quad [38.16]$$

Se llama ángulo de desviación de un prisma,  $D$ , al ángulo que forma la dirección del rayo incidente con el emergente. Por ser exterior del triángulo  $BIE$ , su valor es:

$$D = \widehat{BIE} + \widehat{BEI} = i - r + i' - r' = i + i' - A \quad [38.17]$$

Las cuatro relaciones [38.14], [38.15], [38.16] y [38.17] se conocen con el nombre de fórmulas fundamentales del prisma.

#### Condiciones de emergencia

No todo rayo que penetra en el prisma emerge de él, para ello es necesario que el rayo  $IE$  incida en  $E$  con un ángulo inferior al límite, es decir, se verifique:

$$-L < r' < L$$

Ángulo de desviación



Utilizando la [38.16] se escribe,

$$-L < A - r \leq L \quad [38.18]$$

o bien,

$$r - L \leq A \leq r + L$$

En la que  $L$  verifica:

$$n' \operatorname{sen} L = n \quad \text{y} \quad L = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{n}{n'}$$

Puesto que el máximo valor de  $r$  es  $L$ , la primera desigualdad se verificará siempre y la única condición que debe cumplir el prisma para que dé rayo emergente es:

$$A \leq 2L = 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{n}{n'} \quad [38.19]$$

Cambiando de signo a la [38.18], es:

$$L \geq r - A \geq -L$$

o bien,

$$A + L \geq r \geq A - L$$

La primera desigualdad siempre se verifica, ya que es  $r \leq L$ ; para que se verifique la segunda debe ser  $r \geq r_0 = A - L$ , para el cual corresponde un ángulo de incidencia,  $i_0$ , dado por:

$$n \operatorname{sen} i_0 = n' \operatorname{sen} (A - L)$$

Por tanto,  $i_0$  es el menor ángulo de incidencia que da rayo emergente, debiendo verificarse para que exista rayo emergente la condición:

$$i_0 \leq i \leq \frac{\pi}{2} \quad [38.20]$$

El rayo luminoso que incide en  $I$  con un ángulo  $i_0$ , rayo 1 (Figura 38.16), sale del prisma por  $E$  con un ángulo de emergencia  $i' = \pi/2$ . Por la reversibilidad del rayo luminoso, el rayo que incide en  $I$  con un ángulo  $i = \pi/2$ , rayo 2, emerge en  $E'$  con un ángulo  $i' = i_0$ .

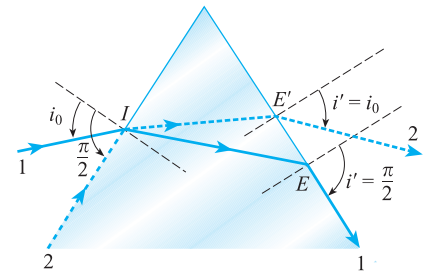


Figura 38.16.

### EJEMPLO 38.4

Un prisma cuyo ángulo es  $A$  está en contacto con el aire ( $n = 1$ ). Un rayo luminoso monocromático, para el cual el material del prisma tiene un índice de refracción  $n' = 1,5$  incide sobre la cara  $AB$  con un ángulo de incidencia  $i$  (Figura 38.17):

- Completemos la marcha del rayo hasta que emerja del prisma.
- Calculemos el ángulo límite de incidencia sobre  $AC$  para que exista rayo emergente.
- Si es  $A = 50^\circ$  calculemos el valor mínimo del ángulo de incidencia sobre  $AB$  para que exista rayo emergente.
- Calculemos la desviación que provoca el prisma sobre un rayo que incide sobre  $AB$  con un ángulo  $i = 20^\circ$ .

#### Solución:

- En la Figura 38.16 se ha dibujado la marcha del rayo desde su incidencia en  $I$  hasta que emerje en  $E$ .

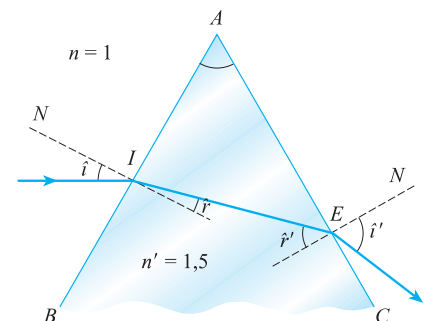


Figura 38.17.

b) El ángulo límite de incidencia en  $E$ , para que exista rayo emergente, debe verificar:

$$1,5 \operatorname{sen} r'_L = 1 \quad ; \quad r'_L = 41^\circ,81 = 0,729728 \text{ rad}$$

La condición para que exista rayo emergente es:

$$r' < 0,729728 \text{ rad} = 41^\circ 48' 37'',13$$

c) La ecuación fundamental del prisma [38.16] nos permite escribir:

$$A = r + r' \leq r + r'_L \quad \text{de donde} \quad r \geq -r'_L = 8^\circ,19$$

La refracción en  $I$  cumple:

$$\operatorname{sen} i = 1,5 \operatorname{sen} r \quad \text{o bien} \quad \operatorname{sen} i_0 \geq 1,5 \operatorname{sen} 8^\circ,19$$

Con lo que el ángulo mínimo de incidencia para que exista rayo emergente del prisma es  $i_0 = 12^\circ,338348$ .

d) La desviación que provoca el prisma está dada por la [38.17]

$$D = 20 + i' - 50 = i' - 30$$

La incidencia en  $I$  nos da:

$$\operatorname{sen} 20^\circ = 1,5 \operatorname{sen} r \quad \text{de donde} \quad r = 13^\circ,180142$$

Con ello, en la [38.16] obtenemos:

$$r' = A - r = 36^\circ,819858$$

La refracción en  $E$  nos permite obtener  $i'$

$$1,5 \operatorname{sen} r' = \operatorname{sen} i' \quad , \quad 1,5 \operatorname{sen} 36^\circ,819858 = \operatorname{sen} i' \quad \text{de donde} \quad i' = 64^\circ,020603$$

Con ello resulta:

$$D = 34^\circ,020603 = 34^\circ 01' 14'',17$$

### Prismas de reflexión total

Hemos visto la condición que debe cumplir el ángulo del prisma para que dé rayo refractado emergente, que es la [38.19]. Por tanto, aquellos prismas cuyo ángulo sea igual o superior al doble del ángulo límite del material que los forma, no darán rayo refractado emergente, denominándose de reflexión total.

Así, en los prismas de vidrio de ángulo  $A = 90^\circ$  situados en el aire, al incidir normalmente a uno de sus catetos una radiación de longitud de onda  $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$ , puesto que el índice de refracción del vidrio para esa longitud de onda es  $n' = 1,52$ , el ángulo límite es de  $41^\circ,1397$ , por lo que serán prismas de reflexión total y no darán rayo refractado emergente. A estos prismas isósceles y de ángulo  $A = 90^\circ$  se les denomina de Porro (Figura 38.18). En la posición a) el rayo incidente sufre la reflexión total en la hipotenusa  $BC$  y sale en dirección normal al incidente. En la posición b) el rayo incidente sufre dos reflexiones totales, una en el lado  $AC$  y otra en el  $AB$ , y sale paralelo al incidente y en sentido contrario.

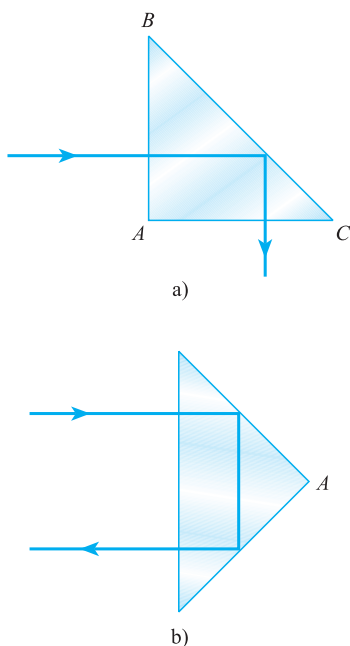


Figura 38.18. Prismas de reflexión total.

### Variación del ángulo de desviación, desviación mínima

El ángulo de desviación del prisma,  $D$ , varía en función del valor del ángulo de incidencia  $i$ . Para estudiar esta variación derivemos respecto a  $i$  la [38.17],

$$\frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di}$$

Diferenciando las [38.14] y [38.15] se obtiene, respectivamente:

$$n \cos i \, di = n' \cos r \, dr \quad \text{y} \quad n' \cos r' \, dr' = n \cos i' \, di'$$

lo que permite escribir:

$$\frac{dD}{di} = 1 + \frac{n' \cos r' \, dr'}{n \cos i'} \cdot \frac{n \cos i}{n' \cos r \, dr}$$

Al diferenciar la [38.16] se obtiene  $0 = dr + dr'$  o  $dr = -dr'$ ; teniendo en cuenta lo cual resulta:

$$\frac{dD}{di} = 1 - \frac{\cos r' \cos i}{\cos i' \cos r}$$

Para  $i = i_0$  es  $i' = \frac{\pi}{2}$  y  $\frac{dD}{di} \rightarrow \infty$ , por tanto la curva  $D = D(i)$  tiene tangente vertical en el punto correspondiente a  $i = i_0$ . Para  $i = -\frac{\pi}{2}$  es  $i' = i_0$  y  $\frac{dD}{di} = 1$ , la dirección de la tangente a la citada curva en el punto correspondiente a  $i = i_0$  es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

Los máximos o mínimos de  $D$  se presentarán para aquellos valores de  $i$  que verifiquen:

$$\frac{\cos r' \cdot \cos i}{\cos i' \cdot \cos r} = 1$$

Elevando al cuadrado está expresión puede ponerse de la forma:

$$\cos^2 i \cdot \cos^2 r' = \cos^2 i' \cdot \cos^2 r$$

o bien,

$$(1 - \text{sen}^2 i)(1 - \text{sen}^2 r') = (1 - \text{sen}^2 i')(1 - \text{sen}^2 r)$$

Teniendo en cuenta las Expresiones [38.14] y [38.15], es:

$$(1 - \text{sen}^2 i) \left( 1 - \frac{n^2}{n'^2} \text{sen}^2 i' \right) = (1 - \text{sen}^2 i') \left( 1 - \frac{n^2}{n'^2} \text{sen}^2 i \right)$$

Desarrollando, simplificando y sacando factor común, resulta:

$$\left( \frac{n^2}{n'^2} - 1 \right) \text{sen}^2 i = \left( \frac{n^2}{n'^2} - 1 \right) \text{sen}^2 i'$$

Esto exige que sea  $i = i'$ , que es la condición para que la desviación sea mínima. El ángulo de desviación del prisma es mínimo cuando el ángulo de incidencia y el de emergencia son iguales,  $i = i' = i_m$ . Realmente es mínimo el valor de  $D$ , puesto que para  $i < i_m$  es  $\frac{dD}{di} < 0$  y para  $i > i_m$  es  $\frac{dD}{di} > 0$ .

La función  $D = D(i)$  se ha representado en la Figura 38.19, en la que se ha llamado  $D_0$  al mayor valor de la desviación, que se presenta para los valores  $i = i_0$  e  $i = \frac{\pi}{2}$  y vale:

$$D_0 = i_0 + \frac{\pi}{2} - A$$

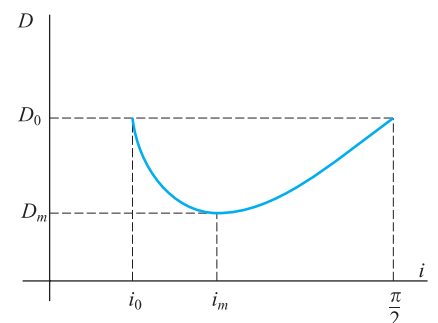


Figura 38.19. Ángulo de desviación función del incidente.

El valor del mínimo se obtiene sustituyendo en la [38.17] la condición de mínimo:

$$D_m = 2i_m - A \quad [38.21]$$

Si se cumple la condición de mínimo, de acuerdo con las [38.14] y [38.15], también será  $r = r' = r_m$ , cuyo valor se deduce de la [38.16], siendo:

$$r_m = \frac{A}{2}$$

Por todo ello, *la trayectoria del rayo de mínima desviación es simétrica respecto al plano bisector del prisma.*

La Ecuación [38.14] para el rayo de mínima desviación se escribe:

$$n \operatorname{sen} i_m = n' \operatorname{sen} \frac{A}{2} \quad [38.22]$$

y, utilizando el valor de  $i_m$  dado por la [38.21], es:

$$n \operatorname{sen} \frac{D_m + A}{2} = n' \operatorname{sen} \frac{A}{2}$$

o,

$$\frac{n'}{n} = \frac{\operatorname{sen} \frac{D_m + A}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A}{2}} \quad [38.23]$$

Expresión que permite determinar el índice de refracción de la sustancia de que está constituido el prisma, si se determina experimentalmente el ángulo de mínima desviación y el ángulo  $A$  del prisma.

## Dispersión

Si la velocidad de propagación de un cierto tipo de ondas en un determinado medio es función de la frecuencia  $v = v(\nu)$ , aquellas ondas compuestas por la superposición de varias armónicas, al llevar cada una de estas velocidad diferente por tener distinta frecuencia, se desdoblán en sus componentes, fenómeno que se conoce con el nombre de *dispersión*. Al conjunto de ondas simples que formaban la onda primitiva se le denomina *espectro* de ésta.

La refracción permite poner en evidencia la dispersión, ya que si la velocidad de propagación es función de la frecuencia, también lo será el índice de refracción

$n' = \frac{c}{v}$  y, por la [38.14], el ángulo de refracción será también función de la frecuencia

$r = r(\nu)$ . En consecuencia, cada onda, según su frecuencia, aparece con un determinado ángulo de refracción y el haz incidente queda descompuesto en su espectro. Así, si se hace llegar a un prisma un haz de luz blanca, a la salida del mismo nos encontramos separadas las diferentes radiaciones monocromáticas que constituyen el espectro de la incidente. Como cada longitud de onda lleva asociado un color, aparece el espectro coloreado de la luz blanca: rojo, naranja, amarillo, verde, azul, añil y violeta, siendo el rojo el menos desviado y el violeta el más.

Estudiemos ahora cómo varía la desviación  $D$  en función del índice de refracción. Para ello, derivemos la [38.17] respecto a  $n'$  y, puesto que tanto  $i$  como  $A$  son constantes, será:

$$\frac{dD}{dn'} = \frac{di'}{dn'} \quad [38.24]$$

Suponiendo que el medio en el cual está inmerso el prisma es el vacío o el aire, las ecuaciones [38.14] y [38.15] se escriben, respectivamente:

$$\text{sen } i = n' \text{ sen } r \quad \text{y} \quad n' \text{ sen } r' = \text{sen } i$$

Al derivarlas respecto a  $n'$  dan, respectivamente:

$$0 = n' \cos r \frac{dr}{dn'} + \text{sen } r \quad [38.25]$$

y

$$n' \cos r' \frac{dr'}{dn'} + \text{sen } r' = \cos i' \frac{di'}{dn'} \quad [38.26]$$

La derivada respecto a  $n'$  de la [38.16] es:

$$0 = \frac{dr}{dn'} + \frac{dr'}{dn'} \quad \text{o bien} \quad \frac{dr'}{dn'} = - \frac{dr}{dn'}$$

Esto permite escribir la [38.24] de la forma:

$$\cos i' \frac{dD}{dn'} = -n' \cos r' \frac{dr}{dn'} + \text{sen } r'$$

De la [38.25] se deduce que es  $-n' \frac{dr}{dn'} = \frac{\text{sen } r}{\cos r}$ , lo que llevado a la anterior da:

$$\cos i' \frac{dD}{dn'} = \frac{\text{sen } r}{\cos r} \cos r' + \text{sen } r'$$

Al multiplicar por  $\cos r$ , resulta:

$$\cos r \cos i' \frac{dD}{dn'} = \text{sen } r \cos r' + \cos r \text{sen } r' = \text{sen } (r + r') = \text{sen } A$$

de donde:

$$\frac{dD}{dn'} = \frac{\text{sen } A}{\cos r \cos i'} > 0 \quad [38.27]$$

Por tanto, la desviación es función creciente del índice de refracción del medio refringente.

Para la situación de mínima desviación es  $r = A/2$ , lo que permite simplificar la anterior,

$$\frac{dD}{dn'} = \frac{2 \text{sen } \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos i_m} = \frac{2 \text{sen } \frac{A}{2}}{\cos i_m}$$

Teniendo en cuenta la [38.22], escrita en el caso de ser el medio el vacío o prácticamente, el aire es

$$\text{sen } \frac{A}{2} = \frac{\text{sen } i_m}{n'}$$

Con lo cual, finalmente es:

$$\frac{dD}{dn'} = \frac{2}{n'} \frac{\text{sen } i_m}{\cos i_m} = \frac{2}{n'} \text{tg } i_m \quad [38.28]$$

La *dispersión de un prisma* se define como la *derivada de la desviación respecto a la longitud de onda*,

Dispersión

$$\delta = \frac{dD}{d\lambda} \quad [38.29]$$

Que puede escribirse de la forma:

$$\delta = \frac{dD}{dn'} \frac{dn'}{d\lambda}$$

El primer factor está dado por la [38.27] y, en el caso de mínima desviación, por la [38.28]. El segundo factor depende de la naturaleza del medio y del tipo de onda. Para las ondas electromagnéticas Cauchy estableció una fórmula que da el índice de refracción en función de la longitud de onda y que es:

$$n' = a + \frac{b}{\lambda^2} \quad [38.30]$$

En la que  $a$  y  $b$  son dos constantes características para cada substancia. Derivando esta respecto a  $\lambda$  se obtiene:

$$\frac{dn'}{d\lambda} = -\frac{2b}{\lambda^3}$$

Teniendo esto en cuenta, así como la Expresión [38.27], la dispersión se expresa:

$$\delta = \frac{\text{sen } A}{\cos r \cos i'} \left( -\frac{2b}{\lambda^3} \right) \quad [38.31]$$

y, en el caso de mínima desviación,

$$\delta = -\frac{4b}{n'\lambda^3} \text{tg } i_m = -\frac{4b}{\lambda(a\lambda^2 + b)} \text{tg } i_m \quad [38.32]$$

Al ser la dispersión negativa, la desviación disminuirá al aumentar la longitud de onda, lo que explica que el rojo sea el menos desviado, y el violeta el de mayor desviación.

### 38.10 Dióptrico esférico

Ya quedó definido el dióptrico esférico como el sistema formado por dos medios homogéneos, transparentes y de diferente índice de refracción, cuya superficie de separación es esférica.

Los dióptricos esféricos se denominan cóncavos o convexos según presenten concavidad o convexidad, respectivamente, al rayo incidente.

#### Invariante fundamental

Consideremos el dióptrico esférico cóncavo, de radio  $R$ , que se indica en la Figura 38.20, cuyo centro es  $C$ . Sea  $A$  un punto objeto real situado en el eje del dióptrico a una distancia  $d$  de su vértice  $O$ .

La imagen  $A'$  estará sobre el eje del dióptrico, puesto que el rayo  $AO$  no se desvía por incidir normalmente al dióptrico. Otro rayo cualquiera  $AI$  se refracta cumpliendo la ley de Snell  $n \text{sen } i = n' \text{sen } r$  y si es  $n' > n$ , será la prolongación del rayo refractado la que forme la imagen  $A'$ , que, por tanto, será virtual.

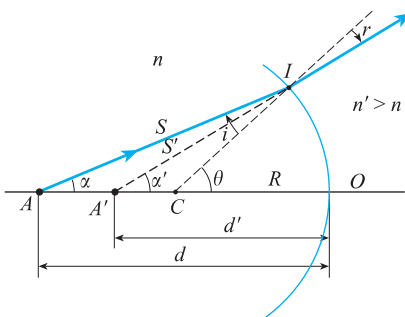


Figura 38.20. Dióptrico esférico.

En los triángulos  $AIC$  y  $A'IC$  se verifica, respectivamente:

$$\frac{AI}{\text{sen } \theta} = \frac{AC}{\text{sen } i} \quad \text{y} \quad \frac{A'I}{\text{sen } \theta} = \frac{A'C}{\text{sen } r}$$

Dividiendo miembro a miembro es:

$$\frac{AI}{A'I} = \frac{AC}{A'C} \cdot \frac{\text{sen } r}{\text{sen } i} = \frac{AC}{A'C} \cdot \frac{n}{n'}$$

Lo que puede escribirse de la forma:

$$n \frac{AC}{AI} = n' \frac{A'C}{A'I} \tag{38.33}$$

o bien,

$$n \frac{d - R}{s} = n' \frac{d' - R}{s'} \tag{38.34} \quad \text{Invariante fundamental}$$

En consecuencia, la cantidad  $n \frac{d - R}{s}$  se conserva en la refracción en un dióptrico esférico y se denomina *invariante fundamental del dióptico esférico* o invariante de Abbe.

### Estigmatismo

La posición del punto imagen, despejada de la [38.34], se expresa:

$$d' = \frac{n}{n'} (d - R) \frac{s'}{s} + R \tag{38.35}$$

Para que la posición de  $A'$ , es decir, el valor de  $d'$  sea independiente del rayo considerado y, por tanto, el sistema estigmático, hace falta que sea constante la relación  $\frac{s'}{s}$ . Pero esta relación únicamente se mantiene constante para una determinada pareja de puntos, para los cuales el dióptico esférico será estigmático, que se denominan de Weierstrass; para los restantes puntos el dióptico esférico no es estigmático.

La determinación de los puntos de Weierstrass puede hacerse siguiendo el procedimiento dado por éste. Para ello, tracemos dos superficies esféricas concéntricas con el dióptico, una de radio  $R_1 = \frac{n}{n'} R$  y otra de radio  $R_2 = \frac{n'}{n} R$  (Figura 38.21).

El rayo incidente en  $I$  ha cortado a la esfera de radio  $R_2$  en un punto que llamaremos  $A$ . Uniendo este punto con el centro del dióptico se corta a la esfera de radio  $R_1$  en un punto que llamaremos  $A'$ . Pues bien, el rayo refractado es el que pasa por  $A'$  e  $I$ . En efecto, para demostrarlo será suficiente demostrar que el ángulo  $\varphi$  es el de refracción correspondiente. Los triángulos  $IAC$  e  $IA'C$  son semejantes, porque tienen un ángulo igual, el  $C$ , y los lados adyacentes proporcionales, ya que son:

$$\frac{CA}{CI} = \frac{R_2}{R} = \frac{n'}{n} \quad \text{y} \quad \frac{CI}{CA'} = \frac{R}{R_1} = \frac{n'}{n}$$

Por tanto, los ángulos opuestos a lados homólogos serán iguales y, concretamente, es  $\widehat{IA'C} = i$ , ello permite escribir para el triángulo  $IA'C$ :

$$\frac{CI}{\text{sen } i} = \frac{CA'}{\text{sen } \varphi} \quad \text{o} \quad \frac{CI}{CA'} = \frac{\text{sen } i}{\text{sen } \varphi} = \frac{n'}{n}$$

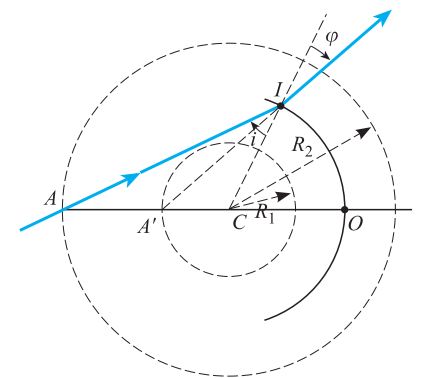


Figura 38.21. Construcción de Weierstrass.

En consecuencia, el ángulo  $\varphi$  verifica la ley de Snell y, por tanto, es el de refracción.

Los dos puntos  $A$  y  $A'$  son precisamente los puntos de Weierstrass, ya que para ellos permanece constante la relación:

$$\frac{s'}{s} = \frac{A'I}{AI}$$

En efecto, los lados  $A'I$  y  $AI$  son homólogos en los triángulos semejantes y estarán en la misma razón de semejanza,

$$\frac{s'}{s} = \frac{A'I}{AI} = \frac{R}{R_2} = \frac{R_1}{R} = \frac{n}{n'} \quad [38.36]$$

La situación de los puntos de Weierstrass con relación al centro del dióptrico está dada por:

$$CA = \frac{n'}{n} R \quad \text{y} \quad CA' = \frac{n}{n'} R$$

y, con relación al vértice del dióptrico, por:

$$d = R + \frac{n'}{n} R = R \left( 1 + \frac{n'}{n} \right) \quad \text{y} \quad d' = R \left( 1 + \frac{n}{n'} \right) \quad [38.37]$$

Otro punto para el cual el dióptrico esférico es estigmático es su centro,  $C$ . Éste será conjugado de sí mismo, ya que todo rayo que pasa por él se refracta sin desviarse. Asimismo, respecto de todos los puntos que forman el dióptrico, éste es estigmático y cada punto conjugado de sí mismo.

Dividiendo miembro a miembro las [38.37], resulta:

$$\frac{d'}{d} = \frac{n}{n'}$$

Teniendo en cuenta la [38.36], es:

$$\frac{d'}{d} = \frac{s'}{s} \quad [38.38]$$

Lo que llevado a la [38.35] se escribe:

$$d' = \frac{n}{n'} (d - R) \frac{d'}{d} + R$$

Multiplicando por  $n'$  y dividiendo por  $R \cdot d$  queda:

$$\frac{n'}{R} = n \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{d} \right) + \frac{n'}{d'}$$

Lo que puede escribirse:

Relación de estigmatismo

$$\frac{n' - n}{R} = \frac{n'}{d'} - \frac{n}{d} \quad [38.39]$$

Relación que verifican los puntos conjugados para los cuales el dióptrico esférico es estigmático.



## Caso de rayos paraxiales

Cuando sobre el dióptico únicamente incidan rayos que formen ángulos muy pequeños con su eje, puede admitirse que es  $s \approx d$  y  $s' \approx d'$  o  $\frac{s'}{s} \approx \frac{d'}{d}$ . Es decir, se verifica aproximadamente la [38.38] y, por tanto, se verificará también de forma aproximada la [38.39], pudiendo decirse que, en el caso de rayos paraxiales, el dióptico esférico se comporta como prácticamente estigmático para puntos de su eje y próximos a él, cumpliéndose la [38.39]. En lo sucesivo, dentro del estudio del dióptico esférico, nos referiremos siempre a rayos paraxiales.

## Convenio de signos

Ya adoptamos, como convenio de signos, que las distancias medidas en el sentido de la marcha del rayo sean positivas, y negativas en el sentido contrario. Establecemos ahora que el origen para la medida de distancias sea el vértice del dióptico. Todo ello referido a las distancias medidas según el eje del mismo, y siempre consideraremos que la luz llega al dióptico de la izquierda hacia la derecha.

En cuanto a las distancias transversales al eje, se medirán desde éste y adoptamos el convenio de que sean positivas hacia arriba del mismo y negativas hacia abajo.

La Ecuación [38.39] será válida, con sólo aplicar el convenio de signos en cada una de las cuatro situaciones que pueden presentarse: dióptico cóncavo,  $R < 0$ , o convexo,  $R > 0$ , pudiendo ser en cada caso  $n > n'$  o  $n < n'$ .

## Focos

Cuando el punto objeto es el punto del infinito de la dirección del eje del dióptico en el espacio objeto, su punto conjugado se denomina *foco imagen* y su posición queda determinada por  $f' = d'$ , que se calcula haciendo  $d \rightarrow \infty$  en la [38.39], resultando:

$$\frac{n' - n}{R} = \frac{n'}{f'} \quad \text{o} \quad f' = \frac{n'}{n' - n} R \quad [38.40] \quad \text{Foco imagen}$$

De acuerdo con el convenio de signos establecido, la posición del foco imagen  $F'$  es la indicada en la Figura 38.22 para cada uno de los cuatro casos posibles.

Cuando el punto imagen es el punto del infinito del eje óptico en el espacio imagen, el punto objeto conjugado de él se denomina *foco objeto* y su posición se obtiene haciendo en [38.39]  $d' \rightarrow \infty$ , resultando:

$$\frac{n' - n}{R} = -\frac{n}{f} \quad \text{o} \quad f = -\frac{n}{n' - n} R \quad [38.41] \quad \text{Foco objeto}$$

Si hallamos la relación entre las distancias focales, resulta ser:

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'} \quad [38.42]$$

La relación entre las distancias focales es igual a la relación de los índices de refracción cambiada de signo, lo que quiere decir que cada uno de los focos está a uno de los lados del vértice  $O$ . Así se han señalado en las Figuras 38.22.

Sumando las distancias focales se comprueba que verifican la relación:

$$f + f' = R \quad [38.43]$$

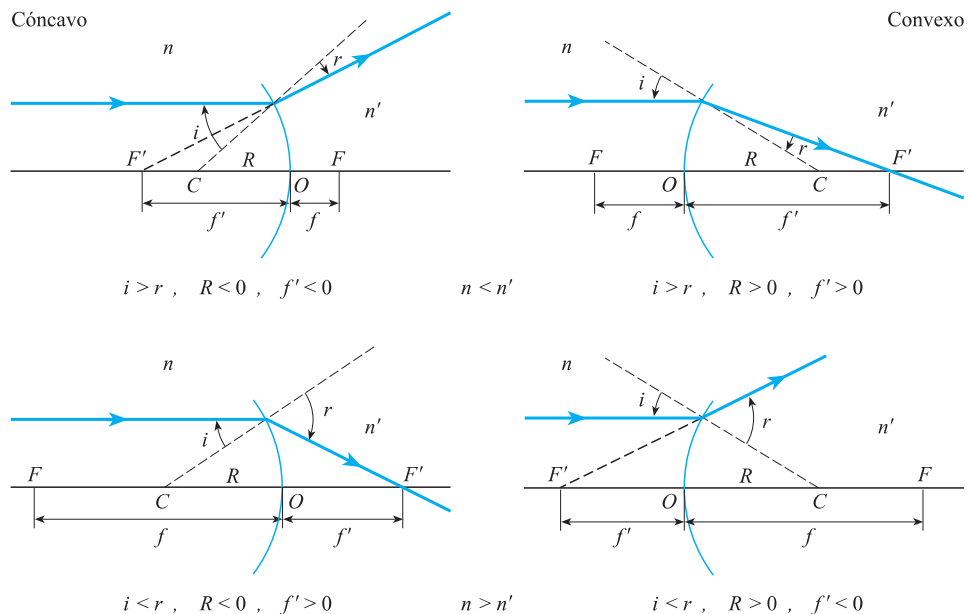


Figura 38.22. Posición de los focos objeto e imagen.

Dividiendo por dos, la (38.43) es:

$$\frac{f + f'}{2} = \frac{R}{2}$$

Lo que nos dice que el punto medio del segmento  $FF'$  coincide con el punto medio del segmento  $OC$ . De ello, y del hecho de tener que estar un foco a cada uno de los lados de  $O$ , se deduce que es imposible la existencia de un foco en el segmento  $OC$ . Asimismo, es fácil comprobar que la distancia de un foco al vértice del dióptrico es igual a la distancia del otro foco al centro.

Dividiendo la Ecuación [38.39] por su primer miembro, se escribe:

$$1 = \frac{Rn'}{(n' - n)d'} - \frac{Rn}{(n' - n)d}$$

Teniendo en cuenta las expresiones [38.40] y [38.41], resulta:

$$\frac{f}{d} + \frac{f'}{d'} = 1 \quad [38.44]$$

Expresión que relaciona las distancias focales con las distancias al objeto y a la imagen.

### Fórmula de Newton

Tomando como origen de distancias, para el espacio objeto, al foco objeto,  $F$ , y para el espacio imagen al foco imagen,  $F'$ , será:

$$d = f + x \quad \text{y} \quad d' = f' + x' \quad [38.45]$$

Llevado esto a la [38.44], se expresa:

$$\frac{f}{f + x} + \frac{f'}{f' + x'} = 1$$

Lo que, tras sencillas operaciones, se reduce a:

$$x \cdot x' = f \cdot f' \quad [38.46] \quad \text{Fórmula de Newton}$$

Expresión que se conoce con el nombre de *fórmula de Newton de la óptica*.

### Formación de la imagen

Una vez conocido el dióptrico, es decir, los índices de refracción de los dos medios y el radio de la superficie esférica que los separa, los focos quedan determinados por las Ecuaciones [38.40] y [38.41]. Consideremos, por ejemplo, el caso de un dióptrico convexo de radio  $R$  en el cual es  $n < n'$ . Los focos, según ya hemos visto, están situados como se indica en la Figura 38.23.

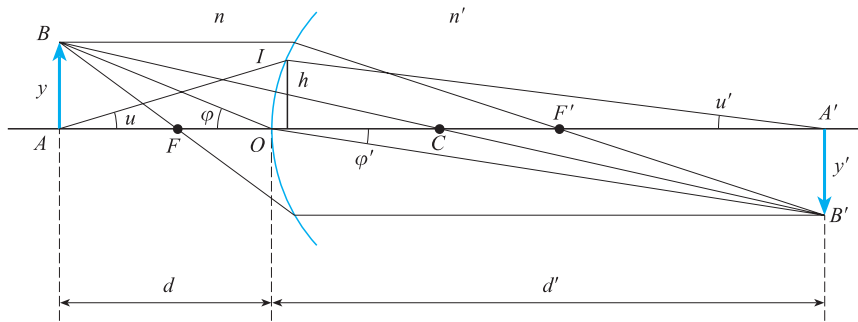


Figura 38.23. Formación de la imagen.

Veamos cómo se forma la imagen de objeto  $AB$ . El rayo que sale de  $B$  paralelo al eje se refracta pasando por el foco imagen. El rayo que pasa por el centro del dióptico no se desvía y corta al anterior en el punto  $B'$ , imagen del  $B$ . La imagen del objeto  $AB$  será la  $A'B'$ . Cualquier otro rayo que parta de  $B$ , como el  $BO$ , se refractará pasando por  $B'$ . Análogamente, cualquier rayo que parta de  $A$ , como el  $AI$ , se refractará pasando por  $A'$ .

### Aumentos lateral y angular. Ecuación de Helmholtz

Se llama aumento lateral de un dióptico al *cociente entre el tamaño de la imagen y el del objeto*, se designa generalmente con la letra  $m$  y se expresa:

$$m = \frac{y'}{y} \quad \text{Aumento lateral}$$

De la Figura 38.23, en la que se ha construido la imagen, se deduce inmediatamente que es:

$$\text{tg } \varphi = \frac{y}{d} \quad \text{y} \quad \text{tg } \varphi' = \frac{y'}{d'}$$

La ley de Snell para el rayo  $BOB'$  se escribe:

$$n \text{ sen } \varphi = n' \text{ sen } \varphi'$$

Puesto que para rayos paraxiales el seno y la tangente son infinitésimos equivalentes, se escribe:

$$n \frac{y}{d} = n' \frac{y'}{d'} \quad [38.47]$$

Por otra parte, en el rayo paraxial  $AIA'$  se cumple:

$$h = ud = u'd' \quad \text{o} \quad \frac{d}{d'} = \frac{u'}{u} \quad [38.48]$$

Con ello, la Ecuación [38.47] se escribe:

Invariante de Helmholtz [38.49]

$$nyu = n'y'u'$$

que es la expresión del denominado *invariante de Helmholtz del dióptrico esférico*  $nyu = \text{cte}$ . El producto del índice de refracción del medio objeto o imagen por el tamaño del objeto o imagen, respectivamente, y por el ángulo de inclinación del rayo correspondiente es constante.

Se define el aumento angular como el cociente entre el ángulo que forma el rayo refractado con el eje y el que forma el incidente,

Aumento angular [38.50]

$$\gamma = \frac{u'}{u}$$

Teniendo en cuenta el invariante de Helmholtz, se expresa:

$$\gamma = \frac{ny}{n'y'}$$

y, en función del aumento lateral,

$$\gamma = \frac{1}{m} \cdot \frac{n}{n'} \quad [38.51]$$

Expresión que relaciona los aumentos lateral y angular con los índices de refracción de los medios que forman el dióptrico.

### Matriz de transferencia del dióptrico esférico

Un rayo incidente, proveniente de un punto  $A$  del eje óptico, queda definido en el punto de incidencia,  $I$ , por los parámetros  $y, \alpha$ . El rayo refractado queda definido en el mismo punto por los parámetros  $y', \alpha'$  (Figura 38.24).

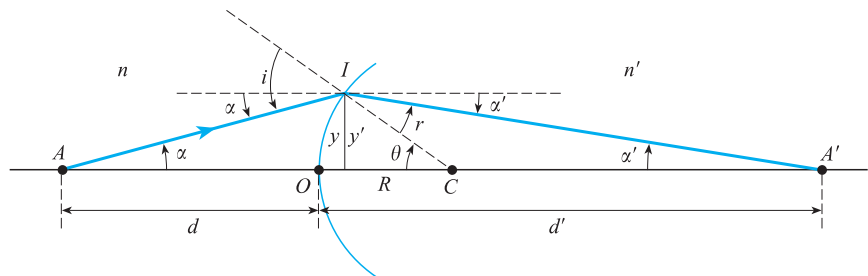


Figura 38.24. Dióptrico esférico, matriz de transferencia.

Es evidente que se verifica  $y = y'$ . Veamos qué relación guardan los otros dos parámetros. Los triángulos rectángulos de la Figura 38.24, teniendo en cuenta el convenio de signos establecido, nos permiten escribir:

$$y = -d\alpha \quad \text{e} \quad y' = d'(-\alpha')$$

Llevando estos valores a la expresión fundamental del dióptrico esférico (38.39), es:

$$\frac{n' - n}{R} = -\frac{n'\alpha'}{y'} + \frac{n\alpha}{y}$$

De donde, despejando  $\alpha'$ , resulta:

$$\alpha' = \frac{n}{n'} \alpha - \frac{n' - n}{n'R} y$$

La expresión matricial de las relaciones entre los parámetros que relacionan en  $I$  el rayo incidente y el refractado es:

$$\begin{Bmatrix} y' \\ \alpha' \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n' - n}{n'R} & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

Con lo que la matriz de transferencia para el dióptico esférico resulta ser:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n' - n}{n'R} & \frac{n}{n'} \end{pmatrix}$$

[38.52] Matriz dióptico esférico

### EJEMPLO 38.5

Un dióptico esférico cóncavo de radio  $R = 8$  cm, está situado en el aire y construido de un material con un índice de refracción, para la longitud de onda de trabajo,  $n' = 1,5$  (Figura 38.25). Calculemos:

- Su matriz de transferencia.
- La distancia focal imagen,  $f'$ .
- La distancia focal objeto,  $f$ .
- La posición,  $d'$ , y el tamaño,  $y'_0$ , que el dióptico formará de un objeto  $AB = y_0$ , normal al eje óptico y situado en  $d = -32$  cm.

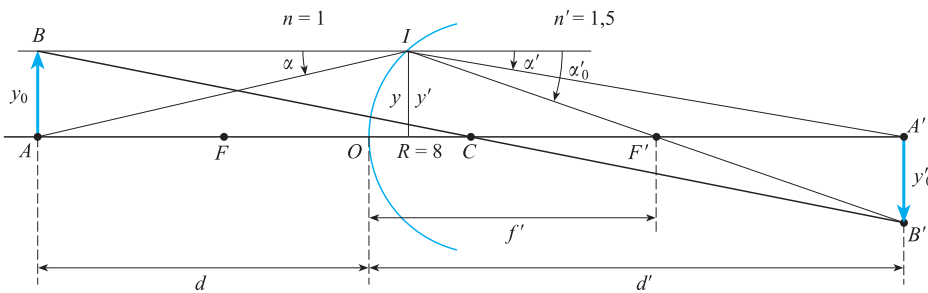


Figura 38.25.

### Solución:

- La matriz de transferencia se obtiene por aplicación de la (38.52),

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/24 & 2/3 \end{pmatrix}$$

- El rayo que llega paralelo al eje óptico ( $\alpha = 0$ ) se refracta en  $I$  y pasa por  $F'$ . En este punto, su definición es  $(0, \alpha'_0)$  y ha sufrido un desplazamiento  $f'$  desde  $I$ , que verifica:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha'_0 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & f' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y' \\ \alpha'_0 \end{Bmatrix}$$

Usando la matriz de transferencia del dióptrico, podemos escribir:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha'_0 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/24 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{f'}{24} & \frac{2}{3}f' \\ -\frac{1}{24} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Por tanto, debe verificarse  $0 = y(1 - f'/24)$ , de donde  $f' = 24$  cm.

c) La simple aplicación de la (38.43) nos da  $f = R - f' = 8 - 24 = -16$  cm.

d) La posición  $A'$  imagen del punto  $A$ , debe verificar:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha'_0 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/24 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d'}{24} & \frac{2}{3}d' \\ -\frac{1}{24} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

Con lo cual, debe ser:

$$0 = \left(1 - \frac{d'}{24}\right)y + \frac{2}{3}d'\alpha$$

Puesto que es  $y = -d\alpha$ , la anterior se expresa:

$$0 = \left(1 - \frac{d'}{24}\right)(-d\alpha) + \frac{2}{3}d'\alpha$$

Lo que permite despejar:

$$d' = \frac{24d}{d + 16}$$

En nuestro caso  $d = -32$ , resulta  $d' = 48$  cm.

Los tamaños del objeto y de la imagen verifican:  $y_0 = -\alpha'_0 f'$

$$y'_0 = (d' - f')\alpha'_0 = -(d' - f')\frac{y_0}{f'} = -(48 - 24)\frac{y_0}{24} = -y_0$$

### EJEMPLO 38.6

Una lente de germanio, situada en el aire, está formada por dos dióptricos esféricos de centros  $C_1$  y  $C_2$ , y radios  $R_1 = 12$  cm y  $R_2 = 9$  cm, respectivamente; siendo su grosor  $O_1O_2 = e = 4$  cm (Figura 38.26). El índice de refracción del germanio para una onda de longitud  $\lambda = 4$   $\mu\text{m}$  es  $n' = 4$ . Un rayo de la citada longitud de onda proveniente de un punto  $A$  del eje óptico situado a la distancia  $AO = d = 4$  cm y formando con él un ángulo  $\alpha = \pi/60$  rad, incide sobre la lente. Determinemos:

- La gráfica de la marcha del rayo hasta formar la imagen  $A'$ .
- La matriz de transferencia del dióptrico esférico de radio  $R_1$ .
- La matriz de desplazamiento  $O_1O_2 = e = 4$  cm.
- La matriz de transferencia del dióptrico esférico de radio  $R_2$ .
- La matriz de transferencia de la lente.
- La distancia  $O_2A' = d'$  a la que se ha formado la imagen del  $A$ .
- La velocidad de propagación de la onda y su longitud de onda dentro de la lente.

**Solución:**

a) En la Figura 38.26 se ha representado la marcha del rayo y la formación de la imagen  $A'$ .

b) La aplicación de la (38.52) al dióptrico de radio  $R_1$  nos da:

$$(DE_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/16 & 1/4 \end{pmatrix}$$

c) La aplicación de (38.4) permite escribir:

$$(e) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) La aplicación al dióptrico esférico de radio  $R_2$  de la (38.52) nos permite escribir:

$$(DE_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 4 \end{pmatrix}$$

e) La matriz de transferencia de la lente será aquella que, aplicada al rayo incidente, nos de el emergente correspondiente. Su cálculo se hace así: (Figura 38.27).

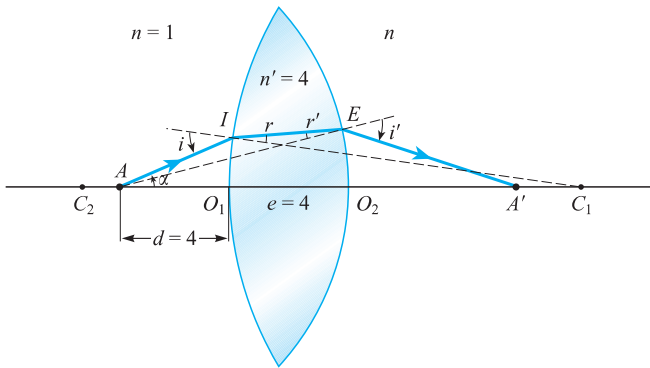


Figura 38.26.

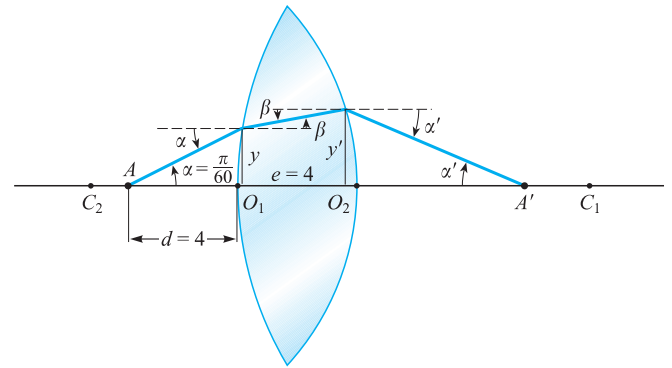


Figura 38.27.

$$\begin{Bmatrix} y' \\ \alpha' \end{Bmatrix} = (DE_2) \begin{Bmatrix} y' \\ \beta \end{Bmatrix} = (DE_2)(e) \begin{Bmatrix} y \\ \beta \end{Bmatrix} = (DE_2)(e)(DE_1) \begin{Bmatrix} y \\ \alpha \end{Bmatrix} = (M) \begin{Bmatrix} y \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

La matriz de transferencia de la lente es:

$$(M) = (DE_2)(e)(DE_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/16 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1 \\ -1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$$

f) La posición de la imagen  $A'$  debe verificar:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha' \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 & 1 \\ -1/2 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \pi/15 \\ \pi/60 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} - \frac{d'}{2} & 1 + \frac{2}{3}d' \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \pi/15 \\ \pi/60 \end{Bmatrix}$$

Por tanto, debe verificarse:

$$0 = \left(\frac{3}{4} - \frac{d'}{2}\right) \frac{\pi}{15} + \left(1 + \frac{2}{3}d'\right) \frac{\pi}{60}$$

De donde se despeja  $d' = 3$  cm.

### 38.11 Espejo plano

Toda superficie capaz de reflejar la totalidad de la luz que le llega se dice que es un espejo perfecto. Si la superficie reflejante es plana, el espejo se denomina plano.

Al estudiar la reflexión de ondas esféricas en superficies planas, ya vimos cómo todos los rayos emitidos por un punto  $O$ , se reflejaban saliendo como procedentes de otro punto  $I$ , que es la imagen del primero por reflexión. El espejo plano es, por tanto, perfectamente estigmático, y la imagen está situada simétricamente del objeto respecto de la superficie del espejo.

La reflexión puede considerarse como un caso particular de la refracción con sólo hacer  $n' = -n$ , con lo cual, la ley de Snell se escribe:

$$n \operatorname{sen} i = -n \operatorname{sen} r$$

Lo que exige que sea  $r = -i$ , que es la ley de la reflexión expresada con el convenio de signos adoptado. Por tanto, las leyes de la refracción serán aplicables en la reflexión con el cambio indicado.

Las fórmulas obtenidas para el dióptrico esférico serán de aplicación al espejo plano con sólo hacer  $n' = -n$  y  $R \rightarrow \infty$ . Con ello, la [38.39] se escribe:

$$nyu = n'y'u'$$

Por tanto,  $d = -d'$ : el objeto y la imagen son simétricas respecto de la superficie del espejo, como ya sabíamos.

En la Figura 38.28 se representa la reflexión sobre un espejo plano y la formación de la imagen en él.

Las distancias focales, dadas por las [38.40] y [38.41] resultan, en este caso, ser:

$$f' \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad f \rightarrow -\infty$$

Tanto el foco objeto como el foco imagen están en el infinito. El rayo que incide normalmente al espejo, proveniente de un punto del infinito del espacio objeto, sale pasando por el foco imagen, que está en el infinito; es decir, normal otra vez al espejo, como así debe ser de acuerdo con las leyes de la reflexión.

La matriz de transferencia del espejo plano la podemos obtener, o bien de la [38.7] haciendo  $n' = -n$ , o bien de la [38.52] haciendo  $n' = -n$  y  $R \rightarrow \infty$ , obteniéndose la denominada matriz de reflexión:

$$(EP) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad [38.53]$$

Matriz reflexión

Si esta matriz se aplica a un rayo incidente  $(y, \alpha)$ , nos da el correspondiente reflejado  $(y', \alpha')$ ,

$$\begin{Bmatrix} y' \\ \alpha' \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

Se comprueba que se verifica  $y' = y$  y  $\alpha' = -\alpha$ .

Estudiamos ahora cómo se desplaza la imagen al desplazarse el espejo en dos casos de particular interés: a) cuando el espejo sufre una traslación y b) cuando el espejo sufre una rotación.

a) Sea el objeto  $A$  del cual el espejo en la posición 1 forma la imagen  $A'$  (Figura 38.29).

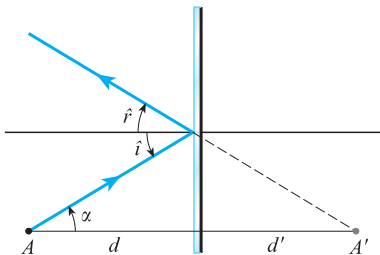


Figura 38.28. Espejo plano.

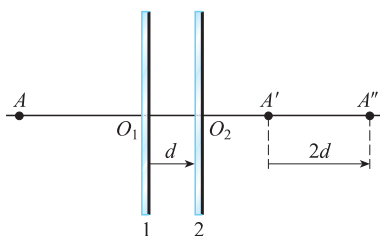


Figura 38.29. Traslación de espejo.



Si el espejo sufre una traslación  $O_1O_2 = d$  y pasa a la posición 2, la imagen ahora formada es  $A''$ . El desplazamiento de la imagen  $A'A''$  vale:

$$A'A'' = AA'' - AA' = 2AO_2 - 2AO_1 = 2d$$

El desplazamiento de la imagen se realiza en el sentido del desplazamiento del espejo y es doble de éste.

b) Consideremos ahora el caso de rotación de un espejo alrededor de un eje contenido en él. En la Figura 38.30 el eje es normal al plano del papel pasando por  $O$ .

En la posición 1, el espejo forma la imagen  $A'$  del objeto  $A$ . Una vez que el espejo ha girado un ángulo  $\varphi$  y ocupa la posición 2, la imagen que forma del objeto  $A$  es  $A''$ .

El ángulo que ha girado la imagen es  $A'OA''$  y vale:

$$A'OA'' = OAA'' + OA''A = 2\varphi$$

Cuando un espejo plano gira un cierto ángulo alrededor de un eje contenido en él, la imagen que forma de un objeto fijo gira en el mismo sentido un ángulo doble, lo cual es la base del método de Pogendorff para la medida de pequeños ángulos de rotación. Al elemento en rotación del cual se quiere medir el ángulo girado se le dota de un pequeño espejo plano. En la posición de equilibrio se sitúa, a una cierta distancia  $H$ , en el plano normal al eje de rotación pasando por el centro del espejo, una escala graduada paralela al espejo (Figura 38.31).

En esta posición, el rayo que incide normalmente al espejo es reflejado en la misma dirección y recogido en el punto  $A$  de la escala. Cuando el espejo gire un cierto ángulo  $\varphi$ , el mismo rayo anterior será reflejado formando un ángulo  $2\varphi$ , e incidirá en un punto  $B$  de la escala, verificando:

$$\tan 2\varphi = \frac{AB}{OA}$$

Puesto que  $OA = H$  es conocido y  $AB$  se mide sobre la escala podemos determinar el ángulo girado:

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \frac{AB}{H}$$

Para pequeños valores de  $\varphi$  podemos aproximar,

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{AB}{H}$$

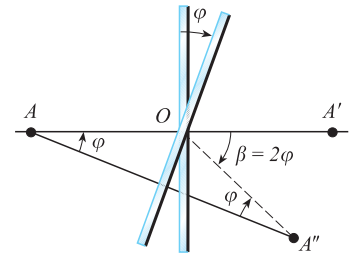


Figura 38.30. Rotación del espejo.

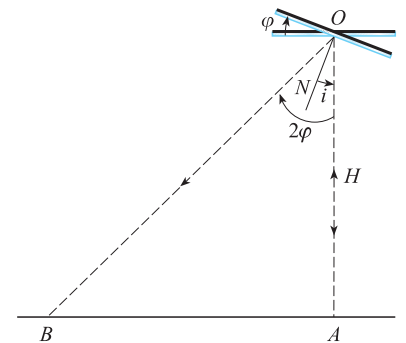


Figura 38.31. Método Pogendorff.

**EJEMPLO 38.7**

Un punto objeto  $A$  está situado a la distancia  $AO = D = 8h$  de un espejo plano. Un haz de luz monocromática que parte de  $A$  incide en un punto  $I$  del espejo formando con la normal un ángulo  $i = 0,05$  rad (Figura 38.32). Calculemos:

- a) El desplazamiento que debe darse al espejo para que el rayo reflejado pase por un punto  $P$  situado a la distancia  $h$  del  $A$ , siendo  $AP$  paralela a la superficie del espejo.
- b) El ángulo que debemos girar el espejo alrededor de un eje normal en  $O$  al plano  $OAP$ , para que al reflejarse el haz de luz pase por  $P$ .

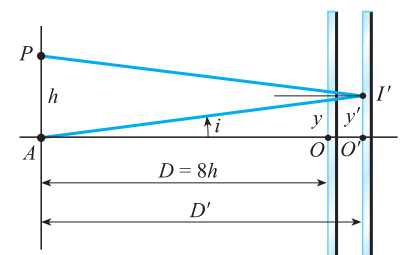


Figura 38.32.

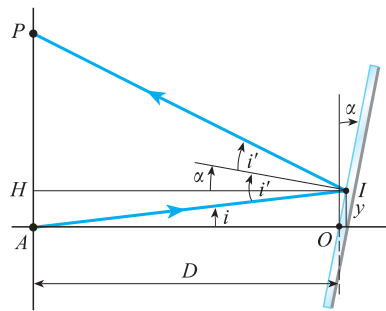


Figura 38.33.

**Solución:**

a) Desplacemos el espejo hasta una distancia  $AO' = D'$  para la cual el rayo reflejado pasa por  $P$ . Puesto que el ángulo  $i$  es muy pequeño, en el triángulo  $AO'I'$  se verifica

$$y' = D'i = 0,05D'$$

Por las leyes de la reflexión debe verificarse  $AP = 2y' = 0,1D' = h$ , de donde  $D' = 10h$ , y por tanto, el desplazamiento del espejo debe ser  $d = D' - D = 2h$ .

b) La altura del punto  $I$  de incidencia es  $y = Di = 8h \cdot 0,05 = 0,4h$ . Giremos el espejo un ángulo  $\alpha$  justo para que el rayo reflejado pase por  $P$  (Figura 38.33).

El ángulo de incidencia sobre el espejo será ahora  $i' = i + \alpha$ . La distancia  $AP = h$  se expresa de la siguiente manera:

$$AP = h = AH + HP = y \cos \alpha + D \tan (2i' - i) = y \cos \alpha + D \tan (2\alpha + i) \approx y + D \tan (2\alpha + i) = 0,4h + 8h \tan (2\alpha + i)$$

De donde,

$$\tan (2\alpha + i) = \frac{0,3}{4} \quad y \quad \alpha = 0,0124299 \text{ rad} = 0^\circ,7121822 = 42'43'',86$$

**38.12 Espejo esférico**

Toda superficie esférica que refleja la totalidad de la luz incidente sobre ella se dice que es un espejo esférico perfecto, denominándose cóncavo o convexo, según que así lo sea la superficie reflejante.

Como ya hemos visto, aquí serán de aplicación todas las fórmulas obtenidas para la refracción en el dióptrico esférico, con sólo hacer en ellas  $n' = -n$ . Así, la ecuación fundamental del dióptrico esférico, la [38.39], ahora se escribe:

$$\frac{-2n}{R} = \frac{-n}{d'} - \frac{n}{d} \quad \text{o} \quad \frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{2}{R} \tag{38.54}$$

y es la ecuación fundamental de los espejos esféricos.

Las distancias focales, deducidas de las [38.40] y [38.41], resultan ser ahora:

Foco  $f' = \frac{R}{2} \quad y \quad f = \frac{R}{2} \tag{38.55}$

Por tanto, hay un solo foco que se encuentra situado en el punto medio de  $OC$ . Si el espejo es cóncavo, de acuerdo con el convenio de signos establecido, es  $R < 0$ , la distancia focal es negativa y el foco es real. Si el espejo es convexo, es  $R > 0$ , la distancia focal positiva y el foco virtual. *En los espejos cóncavos el foco es real y en los convexos, virtual.* (Figura 38.34).



Figura 38.34. Posición de los focos.

La matriz de transferencia del espejo esférico se obtiene de [38.52], haciendo en ella  $n' = -n$ ,

$$(EE) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & -1 \end{pmatrix} \quad [38.56] \text{ Matriz espejo esférico}$$

La aplicación de esta matriz a un rayo incidente  $(y, \alpha)$  permite obtener el rayo reflejado  $(y', \alpha')$ . (Figura 38.35).

$$\begin{Bmatrix} y' \\ \alpha' \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & -1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

La Ecuación [38.44] resulta ahora, teniendo en cuenta que es  $f = f'$ ,

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f} \quad [38.57]$$

Ecuación que relaciona las distancias al objeto y a la imagen con la distancia focal del espejo. La fórmula de Newton se escribe ahora:

$$x \cdot x' = f^2 \quad [38.58]$$

Ecuación que también relaciona las distancias al objeto y a la imagen con la distancia focal del espejo, pero aquí las distancias se toman con origen en el foco, pudiendo también escribirse:

$$x \cdot x' = \frac{R^2}{4} \quad [38.59] \text{ Fórmula de Newton}$$

Esta ecuación pone de manifiesto que las dos distancias deben ser positivas o las dos negativas, es decir, *el objeto y la imagen están siempre del mismo lado del foco*.

Si el objeto está situado en el centro,  $x = -\frac{R}{2}$  en los cóncavos o  $x = \frac{R}{2}$  en los convexos, la imagen debe estar situada, respectivamente, en  $x' = -\frac{R}{2}$  o  $x' = \frac{R}{2}$ , es decir, coincide con el objeto. Si el objeto está situado en el vértice es  $x = \frac{R}{2}$  para los cóncavos y  $x' = \frac{R}{2}$  para los convexos, la imagen debe estar situada respectivamente en  $x' = -\frac{R}{2}$  o  $x = \frac{R}{2}$ , es decir, coincide también con el objeto.

El invariante de Helmholtz se reduce ahora a:

$$yu = y'u'$$

y, con ello, el aumento lateral se expresa:

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{u}{u'}$$

que puede transformarse de la siguiente manera:

$$m = -\frac{d'}{d} = -\frac{\frac{R}{2} + x'}{\frac{R}{2} + x} = -\frac{\frac{R}{2} + \frac{R^2}{4x}}{\frac{R}{2} + x} = -\frac{(2x + R)R}{(R + x)2x}$$

La primera igualdad se escribe teniendo en cuenta la [38.47]; la segunda, teniendo en cuenta las [38.45] y [38.55], y la tercera, teniendo en cuenta la [38.59].

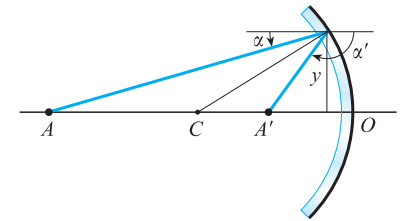


Figura 38.35. Matriz de transferencia.

Invariante de Helmholtz

Aumento lateral

La imagen será mayor, igual o menor que el objeto según que sea, respectivamente,

$$\left| \frac{(2x + R)R}{(R + x)2x} \right| \geq 1$$

Fáciles cálculos llevan al resultado siguiente:

Imagen mayor que el objeto para  $-\frac{R}{\sqrt{2}} < x < \frac{R}{\sqrt{2}}$

Imagen menor que el objeto para  $\frac{R}{\sqrt{2}} < x < -\frac{R}{\sqrt{2}}$

Imagen igual que el objeto para  $x = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}$

La imagen será derecha o invertida respecto del objeto según que se verifique, respectivamente,

$$-\frac{(2x + R)R}{(R + x)2x} \geq 0$$

Un análisis cuidadoso del signo lleva a la conclusión siguiente:

$x$	-	+
Cóncavos	Invertida	Derecha
Convexos	Derecha	Invertida

### Formación de la imagen

La imagen de cualquier punto de un objeto se puede obtener gráficamente utilizando dos cualesquiera de las siguientes propiedades:

- a) Todo rayo que pasa por el centro de curvatura no sufre desviación en la superficie del espejo, ya que incide normalmente a la superficie del espejo, reflejándose según la misma dirección de incidencia y en sentido contrario.
- b) Todo rayo paralelo al eje óptico se refleja en el espejo y sale según la dirección que pasa por el foco.
- c) Todo rayo que incide en el espejo según una dirección que pase por el foco se refleja paralelo al eje óptico.

En la Figura 38.36 se han construido las imágenes de un objeto, en un caso dada por un espejo cóncavo y en el otro por uno convexo. Para ello, hemos utilizado los tres tipos de rayos indicados, aunque, como se comprueba con obvedad, sólo son necesarios dos.

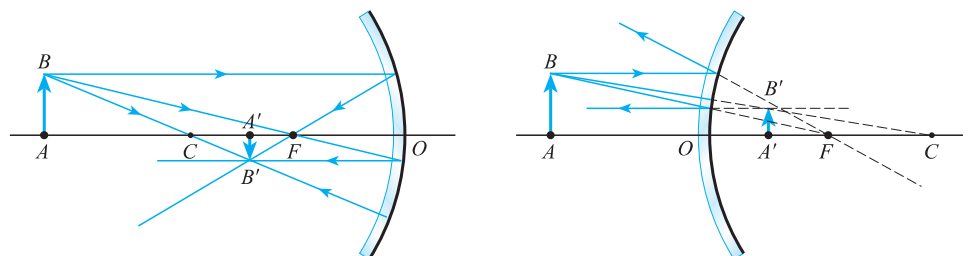


Figura 38.36. Formación de la imagen.

### 39.1 Introducción

Los sistemas ópticos, según ya hemos indicado, se denominan centrados cuando todas las superficies que limitan los medios homogéneos que lo forman, sean transparentes o reflejantes, son de revolución con el eje de revolución común para todas, al cual se denomina eje óptico del sistema.

El primer elemento del sistema forma una imagen del objeto, la cual es objeto para el segundo elemento del sistema, que forma de ella una nueva imagen y así sucesivamente, hasta que el último elemento del sistema forma la imagen final que el sistema da del objeto. Este procedimiento de formación de la imagen, que es el natural, a la hora de construir gráficamente la imagen resuelta complejo y es necesario buscar otras formas más sencillas que a continuación analizaremos. Para ello emplearemos el cálculo matricial, que facilita las operaciones, debiendo hacer notar que el tratamiento matricial que realizamos no queda limitado a la óptica geométrica paraxial, sino que es de aplicación general a cualquier radiación de partículas (electrones, iones, etc.) siempre que cumpla las condiciones de paraxialidad respecto de un cierto eje de referencia.

### 39.2 Matriz de transferencia de un sistema óptico

Para la deducción de la matriz de transferencia de un sistema óptico tendremos en cuenta las matrices de transferencia deducidas para el desplazamiento del origen de referencia ( $d$ ), que es la [38.4] y las deducidas para los dióptricos, que en general las denominaremos ( $D$ ), siendo para el plano la [38.7] y para el esférico la [38.52]. Las matrices de transferencia para los espejos, según ya indicamos, son las mismas que para el correspondiente dióptico con sólo hacer  $n' = -n$ ; siendo para el espejo plano, la matriz de reflexión [38.53] y para el espejo esférico la matriz [38.56].

Un rayo parte de un punto  $A$ , en el cual está definido por:

$$C = \begin{Bmatrix} y \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

- 39.1. Introducción
- 39.2. Matriz de transferencia de un sistema óptico
- 39.3. Puntos conjugados. Aumento lateral. Aumento angular o relación de convergencia
- 39.4. Ecuación de Lagrange-Helmholtz
- 39.5. Puntos y planos principales
- 39.6. Focos, planos y distancias focales
- 39.7. Cambio de origen de referencia de puntos principales a focos
- 39.8. Expresión de las matrices de transferencia (SP) y (SF) en función de las distancias focales
- 39.9. Construcción de las imágenes
- 39.10. Fórmula de Newton
- 39.11. Fórmulas de Gauss
- 39.12. Puntos y planos nodales
- 39.13. Matriz de transferencia con origen en los puntos nodales
- 39.14. Vergencia o potencia de un sistema
- 39.15. Lentes
- 39.16. Lentes delgadas
- 39.17. Clasificación de las lentes
- 39.18. Construcción de las imágenes
- 39.19. Otras relaciones de interés
- 39.20. Asociación de lentes delgadas
- 39.21. Aberraciones de los sistemas ópticos

se propaga en el medio 1 e incide en un punto  $I$  del primer dióptrico del sistema (Figura 39.1). En este queda definido por:

$$C_1 = \begin{Bmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix}$$

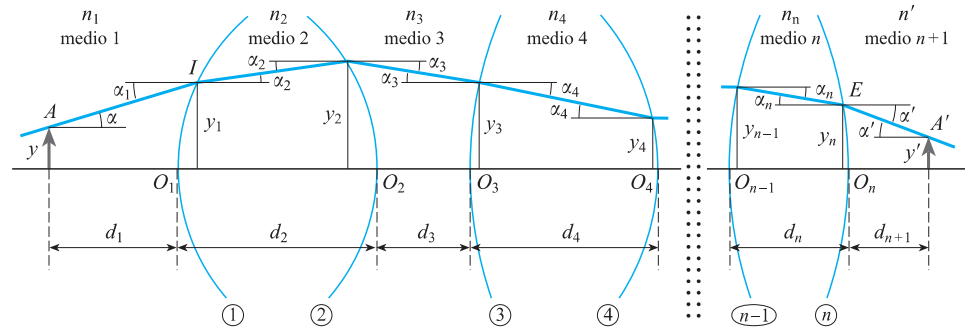


Figura 39.1. Sistema óptico centrado.

Este rayo sufrirá una serie de transformaciones dentro del sistema hasta emerger por un punto  $E$  del último dióptico, en el cual está definido por  $\{C_n\} = \begin{Bmatrix} y_n \\ \alpha' \end{Bmatrix}$ ; desplazándose en el medio  $n + 1$  hasta pasar por el punto  $A'$ , en el cual está definido por  $C' = \begin{Bmatrix} y' \\ \alpha' \end{Bmatrix}$ .

Verificándose:

$$\{C'\} = (S)\{C\} \tag{39.1}$$

La matriz  $(S)$  permite obtener el punto imagen  $A'$  conocido el  $A$  y todos los parámetros que definen al sistema óptico.

El rayo desde  $A$  hasta llegar al punto  $I$  sufre un desplazamiento en el medio 1,  $d_1$ , que está determinado por la matriz desplazamiento  $(d_1)$  verificando:

$$\{C_1\} = (d_1)\{C\}$$

En el punto  $I$  el rayo sufre una primera refracción, definida por la matriz  $(D_1)$ , después de lo cual queda definido en este punto  $I$  por la matriz  $\{C_2\}$ , verificando:

$$\{C_2\} = (D_1)\{C_1\} = (D_1)(d_1)\{C\}$$

En el medio 2 realizará un desplazamiento definido por la matriz  $(d_2)$ , quedando el rayo definido a la entrada del segundo dióptico por:

$$\{C_3\} = (d_2)\{C_2\} = (d_2)(D_1)(d_1)\{C\}$$

En el segundo dióptico sufre una nueva refracción, definida por  $(D_2)$ , verificando:

$$\{C_4\} = (D_2)\{C_3\} = (D_2)(d_2)(D_1)(d_1)\{C\}$$

Así sucesivamente será:

$$\{C'\} = (d_{n+1})(D_n)(d_n) \cdots (D_2)(d_2)(D_1)(d_1)\{C\}$$

Al comparar esta expresión en la [39.1], se deduce que es:

$$(S) = (d_{n+1})(D_n)(d_n) \cdots (D_2)(d_2)(D_1)(d_1) \tag{39.2}$$

La matriz ( $S$ ) será cuadrada de orden 2, puesto que es un producto de matrices cuadradas de orden 2 y la expresión [39.1] se escribe:

$$\begin{Bmatrix} y' \\ \alpha' \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

De donde,

$$\begin{aligned} y' &= S_{11}y + S_{12}\alpha \\ \alpha' &= S_{21}y + S_{22}\alpha \end{aligned} \quad [39.3]$$

La matriz de transferencia de un sistema óptico, ( $T$ ), es la que permite obtener el rayo en el punto de emergencia,  $E$ , conocido el mismo en el punto de incidencia,  $I$ . Por tanto será la matriz anterior sin los desplazamientos en el medio 1 y en el medio  $n + 1$ , resultando:

$$(T) = (D_n)(d_n) \cdots (D_2)(d_2)(D_1) \quad [39.4]$$

*La matriz de transferencia de un sistema óptico es igual al producto a la izquierda de las matrices de transferencia correspondientes a todas y cada una de las transformaciones que sufre el rayo en los diferentes medios y dióptricos que componen el sistema en el orden en que son encontrados por aquél.*

### 39.3 Puntos conjugados. Aumento lateral. Aumento angular o relación de convergencia

Si todos los rayos que salen del punto  $A$  después de atravesar el sistema óptico pasan, también todos, por el punto  $A'$ , este se dice que es la imagen estigmática que del  $A$  da el sistema óptico.

Puesto que, según ya vimos, la trayectoria es independiente del sentido de marcha de la luz, todo rayo luminoso que parta de  $A'$  e incida en el sistema óptico pasará a la salida de éste por  $A$ . En consecuencia,  $A$  es la imagen que del punto  $A'$  da el sistema óptico.

Por todo ello, a los puntos  $A$ ,  $A'$  se les denomina conjugados respecto al referido sistema óptico.

El hecho de que todo rayo que salga de  $A$  pase por  $A'$  quiere decir que para los puntos conjugados,  $y'$  es independiente de  $\alpha$ , lo que exige que sea  $S_{12} = 0$ . En consecuencia, para los puntos conjugados se verifica  $y' = S_{11}y$ . Pues bien, se define el aumento lateral del sistema para el par de puntos conjugados  $A$ ,  $A'$ , como el cociente:

$$l = \frac{y'}{y} = S_{11} \quad [39.5] \quad \text{Aumento lateral}$$

Por tanto, su valor coincide con el elemento  $S_{11}$  de la matriz de transferencia.

Si el punto objeto  $A$  pertenece al eje óptico,  $y = 0$ , su conjugado  $A'$  será tal que verifique  $\alpha' = S_{22}\alpha$ . El aumento angular del sistema o relación de convergencia,  $\gamma$ , que se define por el cociente:

$$\gamma = \frac{\alpha'}{\alpha} = S_{22} \quad [39.6] \quad \text{Aumento angular}$$

resulta coincidir con el coeficiente  $S_{22}$  de la matriz de transferencia.

En consecuencia de ello, para una pareja de puntos conjugados  $A$ ,  $A'$  pertenecientes al eje óptico, la matriz de transferencia se escribe:

$$(S) = \begin{pmatrix} l & 0 \\ S_{21} & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{Matriz de transferencia}$$

El valor de su determinante es:

$$S = l \cdot \gamma = \frac{y'}{y} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} \tag{39.7}$$

### 39.4 Ecuación de Lagrange-Helmholtz

El valor del determinante de la matriz de transferencia puede calcularse a partir de la expresión [39.2]. Las matrices que intervienen en [39.2] son unas del tipo (*d*), cuyo determinante vale la unidad, y otras del tipo (*D*), cuyo determinante vale *n/n'*. Por tanto, teniendo en cuenta que el determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de esas matrices, el valor del determinante de (*S*) es:

$$S = \frac{n_n}{n'} \frac{n_{n-1}}{n_n} \dots \frac{n_3}{n_4} \frac{n_2}{n_3} \frac{n_1}{n_2} \frac{n}{n_1} = \frac{n}{n'} \tag{39.8}$$

En la que hemos llamado *n* y *n'* a los índices absolutos de refracción de los medios en los cuales están, respectivamente, los puntos *A* y *A'*.

Al igualar los valores [39.7] y [39.8] resulta:

$$l\gamma = \frac{y'}{y} \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{n}{n'} \tag{39.9}$$

Lo que pone de manifiesto que *el producto de los aumentos lateral y angular es igual al cociente entre los índice absolutos de refracción de los medios objeto e imagen*, independiente, por tanto, de los índices de refracción de los medios interpuestos.

La segunda igualdad de la [39.9] puede escribirse de la forma:

$$ny\alpha = n'y'\alpha' \tag{39.10}$$

que es la ecuación de Lagrange-Helmholtz, la cual constituye un nuevo invariante.

### 39.5 Puntos y planos principales

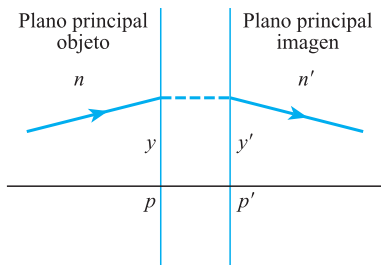


Figura 39.2. Puntos y planos principales.

Existirá un punto objeto y uno imagen, es decir, dos puntos conjugados, para los cuales el aumento lateral sea la unidad, *l* = 1, y por tanto, *y* = *y'*. Los puntos conjugados que verifican esto se denominan *puntos principales* (Figura 39.2). Referida a ellos, la matriz de transferencia se escribe de la forma:

$$(SP) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \tag{39.11}$$

Puesto que el valor del determinante de toda matriz de transferencia es *n/n'*, deberá ser *S*<sub>22</sub> = *n/n'* y la matriz de transferencia con origen en los puntos principales es:

$$(SP) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ S_{21} & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \tag{39.12}$$

A los planos normales al eje óptico trazados por los puntos principales se les denomina *planos principales*. Habrá un plano principal objeto y otro imagen, y todo rayo que incida en el primero emergerá del segundo a la misma distancia del eje



óptico,  $y = y'$ . No es necesario, por tanto, conocer el camino que ha seguido el rayo dentro del sistema óptico.

### 39.6 Focos, planos y distancias focales

Todo haz de rayos paralelos provenientes del punto del infinito del eje óptico en el espacio objeto, al emerger del sistema óptico, convergen en el punto,  $F'$ , imagen de aquél. Este punto,  $F'$ , conjugado del punto del infinito del espacio objeto dirección del eje óptico, es denominado *foco imagen del sistema*. Al plano normal al eje óptico trazado por el foco imagen se le denomina *plano focal imagen*; en él se forman las imágenes de los puntos del infinito del espacio objeto (Figura 39.3).

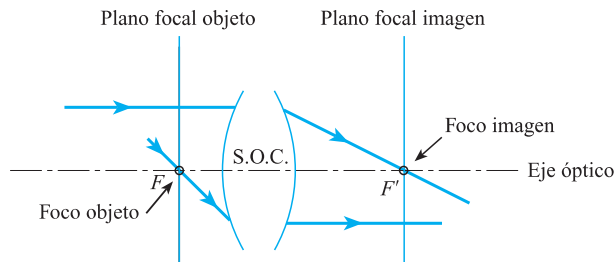


Figura 39.3.

Análogamente, en el espacio objeto existe un punto,  $F$ , que llamaremos *foco objeto*, tal que todos los rayos que saliendo de él inciden sobre el sistema óptico emergen de éste paralelamente al eje óptico. Al plano trazado por  $F$  normal al eje óptico se le denomina *plano focal objeto* y sus puntos tienen por imagen puntos del infinito del espacio imagen.

Estas propiedades de los focos se traducen analíticamente en las siguientes expresiones:

Todo haz de rayos que llega al sistema óptico paralelo al eje,  $\alpha = 0$ , converge en el foco imagen,  $y' = 0$ . Con ello, la primera [40.3] se reduce a  $0 = S_{11}y$ , que debe verificarse para cualquier valor de  $y$ , luego debe ser  $S_{22} = 0$ .

Todo haz de rayos que salga de  $F$ ,  $y = 0$ , e incida en el sistema óptico, emergerá de él paralelamente al eje,  $\alpha' = 0$ . Por tanto, la segunda [39.3] se reduce a  $0 = S_{22}\alpha$ , que debe verificarse para todo  $\alpha$ , luego debe ser  $S_{22} = 0$ .

En consecuencia, tomando como orígenes los focos, cada uno en su espacio, la matriz de transferencia se escribe:

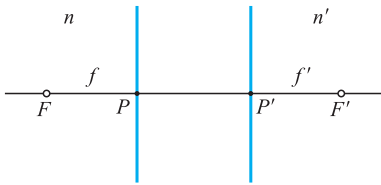
$$(SF) = \begin{pmatrix} 0 & S_{12} \\ S_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

El valor de su determinante,  $-S_{12} \cdot S_{21}$ , deberá ser igual a  $n/n'$  y, por tanto,

$$S_{12} = -\frac{1}{S_{21}} \frac{n}{n'}$$

Lo que permite escribir la matriz de transformación con origen en los focos de la forma:

$$(SF) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{S_{21}} \frac{n}{n'} \\ S_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad [39.13]$$



**Figura 39.4.** Cambio de puntos principales a focos.

### 39.7 Cambio de origen de referencia de puntos principales a focos

Se denomina *distancia focal objeto*,  $f$ , a la que separa el foco objeto del punto principal objeto. Análogamente, la *distancia focal imagen*,  $f'$ , es la que separa el punto principal imagen del foco imagen (Figura 39.4).

De tomar el origen en los puntos principales, en cuyo caso la matriz de transformación es la [39.12], a tomar el origen en los focos, en caso de lo cual la matriz de transferencia es la [39.13], se producen dos desplazamientos: uno es el espacio objeto,  $\Delta x = -f$ , y otro en el espacio imagen,  $\Delta x = f$ , que estarán dados por sendas matrices del tipo [39.4], debiendo verificarse:

$$(SF) = (d_{P'F'}) (SP) (d_{PF})$$

$$(SF) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{S_{21}} \cdot \frac{n}{n'} \\ S_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & f' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ S_{21} & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizando los productos del segundo miembro, es:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{S_{21}} \cdot \frac{n}{n'} \\ S_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + f' S_{21} & -f - S_{21} f f' + \frac{n}{n'} f' \\ S_{21} & -S_{21} f' + \frac{n}{n'} \end{pmatrix}$$

lo que exige que sea  $1 + S_{21} f' = 0$  y  $-S_{21} f + n/n' = 0$ , de lo que se deduce:

$$S_{21} = -\frac{1}{f'} = \frac{1}{f} \cdot \frac{n}{n'} \tag{39.14}$$

Por tanto, es:

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'} \tag{39.15}$$

*Las distancias focales objeto e imagen están en la misma relación que los índices absolutos de refracción de los medios objeto e imagen.*

Si los medios objeto e imagen tienen el mismo índice absoluto de refracción,  $n = n'$  es  $f = -f'$  y las distancias focales son iguales en valor absoluto.

### 39.8 Expresión de las matrices de transferencia (SP) y (SF) en función de las distancias focales

Teniendo en cuenta el valor de  $S_{21}$  dado por la [39.14], la matriz (SP) dada por la [39.12], se expresa:

$$(SP) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f'} & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \tag{39.16}$$

Sustituyendo el valor de  $n/n'$  dado por la [39.15], resulta:

$$(SP) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f'} & -\frac{f}{f'} \end{pmatrix} \tag{39.17}$$

La matriz con origen en los focos ( $SF$ ), dada por la [39.13], teniendo en cuenta las expresiones [39.14], se expresa:

$$(SF) = \begin{pmatrix} 0 & -f' \\ -\frac{1}{f'} & 0 \end{pmatrix} \quad [39.18]$$

### 39.9 Construcción de las imágenes

Conocidos para un sistema óptico centrado, la posición de los puntos principales y de los focos, la determinación de la imagen que el sistema da, de un objeto tal como el  $AB$ , se realiza de la siguiente manera (Figura 39.5): tracemos por  $B$  un rayo paralelo al eje y sea  $I$  el punto en el cual este rayo corta el plano principal objeto. Al llegar al plano principal imagen lo hará por el punto  $I'$  ( $PI = P'I'$ ) y saldrá pasando por el foco imagen. Tracemos ahora por  $B$  el rayo que pasa por el foco objeto,  $F$ , y sea  $J$  el punto en el cual corta al plano principal objeto. Al llegar al plano principal imagen lo hará por  $J'$  ( $PJ = P'J'$ ) y saldrá paralelo al eje, cortando al rayo anterior en el punto  $B'$ , que es el punto imagen de  $B$ . La imagen de  $AB$  será la  $A'B'$ , que en este caso es real, pero invertida.

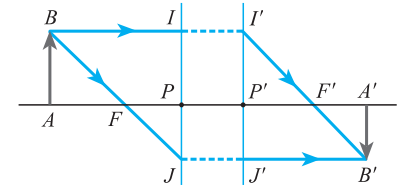


Figura 39.5. Construcción de las imágenes.

### 39.10 Fórmula de Newton

La fórmula de Newton relaciona las distancias focales con las distancias al objeto y a la imagen contadas a partir de sus respectivos focos. Por tanto, utilizaremos la matriz de transferencia con origen en los focos [39.18], verificándose:

$$\begin{Bmatrix} y' \\ \alpha' \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -f' \\ -\frac{1}{f'} & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

De donde se obtiene:

$$y' = -\alpha f \quad y \quad \alpha' d' = -\frac{1}{f} y$$

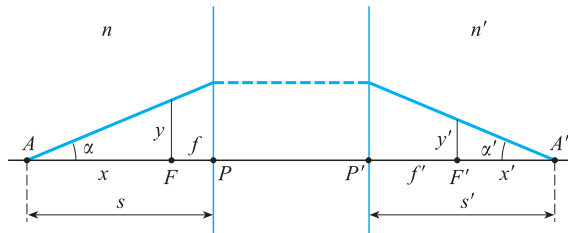


Figura 39.6.

De la Figura 39.6 se deduce que es  $y = \alpha x$  e  $y' = \alpha' x'$ , lo que permite eliminar  $\alpha$  y  $\alpha'$  de las dos relaciones anteriores, escribiéndose:

$$y' = \frac{y}{x} f \quad \text{e} \quad \frac{y'}{x'} = \frac{1}{f'} y$$

Lo que nos permite obtener dos nuevas expresiones para el aumento lateral,

$$l = \frac{y'}{y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'} \quad [39.19]$$

La última ecuación es la llamada de Newton, que suele escribirse:

Fórmula de Newton

$$x \cdot x' = f \cdot f' \quad [39.20]$$

El producto entre las distancias focales es igual al producto entre las distancias al objeto y a la imagen contadas a partir de los focos.

Si los medios objeto e imagen tienen el mismo índice de refracción,  $n = n'$ , de la [39.15] se sigue que debe ser  $f' = -f$  y la ecuación de Newton se expresa:

$$xx' = -f^2 \quad [39.21]$$

### 39.11 Fórmulas de Gauss

Si tomamos como origen los planos principales y denominamos  $s$  y  $s'$ , respectivamente, a las distancias contadas a partir de ellos (Figura 39.6), se verificará:

$$x = s - f \quad \text{y} \quad x' = s' - f'$$

lo que, llevado a la fórmula de Newton [39.20], da:

$$(s - f)(s' - f') = f \cdot f'$$

Simplificando es  $fs' + f's = ss'$  y al dividir por  $ss'$  resulta:

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1 \quad [39.22]$$

fórmula muy importante en el estudio de lentes.

Si los medios objeto e imagen tienen el mismo índice de refracción, es  $f' = -f$  y la anterior expresión se transforma en:

Fórmulas de Gauss

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad \text{o} \quad \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \quad [39.23]$$

que son las llamadas fórmulas de Gauss.

### 39.12 Puntos y planos nodales

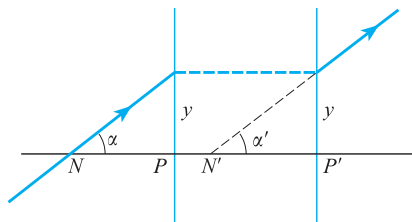


Figura 39.7. Puntos nodales.

El par de puntos conjugados  $N, N'$ , para los cuales el aumento angular es la unidad, se denominan *puntos nodales*. Para ellos se verificará  $\alpha = \alpha'$ , es decir, a todo rayo incidente que pase por  $N$ , le corresponde uno emergente que será paralelo a él y pasará por  $N'$  (Figura 39.7). Los *planos nodales* son los normales al eje del sistema trazados por los puntos nodales.

Por la geometría indicada para los rayos que pasan por los puntos nodales, y que se ha representado en la Figura 39.7, se verificará:

$$PN = P'N' = -\frac{y}{\alpha} \quad [39.24]$$

Lo que nos dice que *cada punto nodal equidista del correspondiente principal*. Es evidente que también se verifica  $PP' = NN'$ , es decir, *los puntos principales y los nodales equidistan entre sí*.

Tomando como origen los puntos principales, los rayos que pasan por los puntos nodales verifican:

$$\begin{Bmatrix} y \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f'} & -\frac{f}{f'} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

De donde se deduce:

$$\alpha = -\frac{y}{f'} - \frac{f}{f'} \alpha$$

o bien,

$$-\frac{y}{\alpha} = f + f'$$

Lo que, teniendo en cuenta la [39.23], permite escribir:

$$PN = P'N' = f + f' \quad [39.25]$$

Esta relación permite situar a los puntos nodales respecto de los principales, así se ha realizado en la Figura 39.8, en la cual  $f$  es negativo y  $f'$  positivo. Si los medios objeto e imagen tienen el mismo índice de refracción,  $n = n'$ , es  $f = -f'$ , y los puntos nodales coinciden con los principales.

Tomando como origen los focos, los rayos que pasan por los puntos nodales verifican:

$$\begin{Bmatrix} y' \\ \alpha' \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -f \\ -\frac{1}{f'} & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

De donde se deduce:

$$y' = -\alpha f \quad \text{y} \quad \alpha = -\frac{y}{f'}$$

De la Figura 39.8 se deduce que son:

$$y' = -\alpha F'N' \quad \text{e} \quad -y = \alpha FN$$

Por tanto, resultan ser:

$$F'N' = f \quad \text{y} \quad FN = f'$$

Es decir, la distancia del foco objeto (imagen) al punto nodal objeto (imagen) es igual a la distancia focal imagen (objeto).

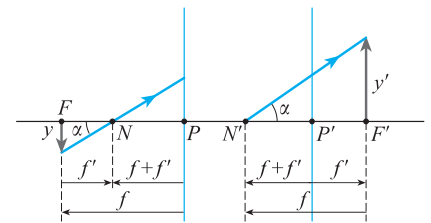


Figura 39.8. Situación de los puntos nodales.

### 39.13 Matriz de transferencia con origen en los puntos nodales

Por ser los puntos nodales conjugados, la matriz de transferencia con origen en ellos tendrá  $S_{12} = 0$ , y por la propia definición de puntos nodales, teniendo en cuenta la [39.6], es  $S_{22} = 1$ . Con ello, la matriz de transferencia con origen en los puntos nodales debe ser de la forma:

$$(SN) = \begin{pmatrix} S_{11} & 0 \\ S_{21} & 1 \end{pmatrix}$$

Como además el valor determinante de toda matriz de transferencia debe ser igual a  $n/n'$ , el elemento  $S_{11}$  debe ser  $S_{11} = n/n' = -f/f'$ , siendo la última igualdad la [39.15], y escribiéndose ahora la matriz:

$$(SN) = \begin{pmatrix} -\frac{f}{f'} & 0 \\ S_{21} & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz que debe verificar  $(SF) = (d_{N'F})(SN)(d_{FN})$ , lo que se escribe:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & -f \\ -\frac{1}{f'} & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{f}{f'} & 0 \\ S_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{f}{f'} - S_{21}f & -2f - ff'S_{21} \\ S_{21} & S_{21}f' + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cualquiera de las cuatro relaciones que pueden establecerse nos determinará el valor de  $S_{21} = -1/f'$ . Con ello, la matriz de transferencia con origen en los puntos nodales es:

$$(SN) = \begin{pmatrix} -\frac{f}{f'} & 0 \\ -\frac{1}{f'} & 1 \end{pmatrix} \tag{39.26}$$

### 39.14 Vergencia o potencia de un sistema

Se define la vergencia o potencia de un sistema óptico mediante la relación

$$v = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} \tag{39.27}$$

Si la vergencia es positiva, el sistema se dice que es convergente, y si es negativa, divergente. La unidad de vergencia o potencia es la *dioptría*, que es la potencia de un sistema cuya distancia focal es de un metro en un medio de índice de refracción unidad.

### 39.15 Lentes

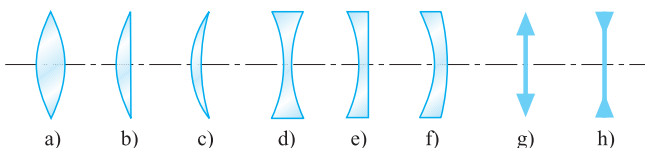


Figura 39.9. Tipos de lentes.

Una lente es un sistema óptico formado por dos dióptricos, uno de los cuales al menos es esférico, con el eje de simetría común, que es el eje de la lente, y el medio comprendido entre ambos homogéneo. Las superficies de los dióptricos pueden cortarse, como en los casos a), b) y c) (Figura 39.9) o no hacerlo, como en los casos d), e) y f), en los cuales hay una superficie cilíndrica cuyo eje coincide con el de la lente, que la limita lateralmente.

Según la forma de las superficies de los dióptricos, las lentes pueden ser: a) bi-convexa, b) plano-convexa, c) cóncavo-convexa, d) bicóncava, e) plano-cóncava y f) cóncavo-convexa. Las tres primeras se simbolizan de la forma indicada en g) y las tres siguientes de la forma h).

La distancia  $O_1O_2$  entre los vértices de los dióptricos que forman la lente es el grosor de ésta. Si este grosor es despreciable frente a los radios de curvatura, la lente se dice que es delgada, y en caso contrario, gruesa.

Consideremos la lente biconvexa de la figura de grosor  $e$ , en la que  $O_1$  y  $C_1$  son, respectivamente, el vértice y el centro del primer dióptrico, cuyo radio es  $R_1$ , y  $O_2$  y  $C_2$  son el vértice y centro del segundo dióptrico, cuyo radio es  $R_2$ . Sea  $A$  un objeto situado a la distancia  $d$  del vértice del primer dióptrico como se indica en la Figura 39.10.

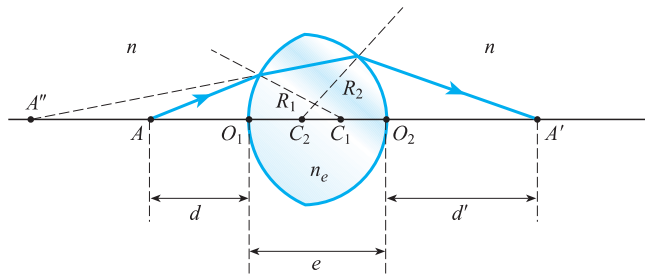


Figura 39.10. Lente biconvexa.

Para obtener la imagen  $A'$ , que de él forma la lente, debemos aplicar sucesivamente a cada uno de los dióptricos la [38.39]. Para ello, supondremos que la lente está inmersa en un medio de índice absoluto de refracción  $n$  y que el índice del material que forma la lente tiene un índice absoluto de refracción  $n_l$ . La aplicación de la [38.39] a cada uno de los dióptricos da, respectivamente:

$$\frac{n_l}{O_1A''} - \frac{n}{d} = \frac{n_l - n}{R_1} \quad \text{y} \quad \frac{n}{d'} - \frac{n_l}{O_2A''} = \frac{n - n_l}{R_2}$$

Sumando ambas expresiones se obtiene:

$$\frac{n_l}{O_1A''} - \frac{n_l}{O_2A''} + \frac{n}{d'} - \frac{n}{d} = \frac{n_l - n}{R_1} - \frac{n_l - n}{R_2}$$

Lo que puede expresarse de la forma:

$$\frac{1}{d'} - \frac{1}{d} = (n_r - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + n_r \left( \frac{1}{O_2A''} - \frac{1}{O_1A''} \right) \quad [39.28]$$

En la que  $n_r = \frac{n_l}{n}$  es el índice de refracción del material que forma la lente relativo al medio que la rodea y  $O_2A'' = O_1A'' - e$ .

Consideremos dos puntos, como los  $B_1$  y  $B_2$ , uno en cada una de las superficies de los dióptricos, y tales que los planos tangentes trazados por ellos a cada una de las superficies sean paralelos (Figura 39.11).

De todos los posibles rayos incidentes en  $B_1$  habrá uno cuyo refractado sea el  $B_1B_2$  y emergerá en  $B_2$  paralelo al incidente. Otro par de puntos que verifican esta propiedad son los  $O_1$  y  $O_2$ . Pues bien, el punto  $C$ , intersección de  $O_1O_2$  con  $B_1B_2$ , que goza de la propiedad de que todo rayo que pasa por él emerge con la misma dirección de incidencia, se llama *centro* de la lente. Veamos cuál es su situación.

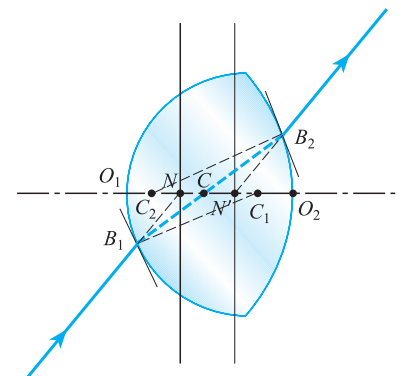


Figura 39.11. Centro de la lente.

Los triángulos  $CC_1B_1$  y  $CC_2B_2$  son semejantes, pues tienen los tres ángulos iguales. Las relaciones de semejanza dan:

$$\frac{CC_1}{CC_2} = \frac{C_1B_1}{C_2B_2} = \frac{CB_1}{CB_2} = \frac{O_1C_1}{O_2C_2} = \frac{CC_1 - O_1C_1}{CC_2 - O_2C_2} = \frac{CO_1}{CO_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Por tanto, el centro,  $O$ , divide al segmento  $O_1O_2$  en una relación fija, en consecuencia él es un punto fijo de ese segmento. De la última relación, teniendo en cuenta el convenio de signos, se escribe:

$$\frac{O_1C}{R_1} = \frac{O_2C}{R_2} = \frac{O_1C - O_2C}{R_1 - R_2} = \frac{O_1C + CO_2}{R_1 - R_2} = \frac{e}{R_1 - R_2}$$

Por tanto, es:

$$O_1C = \frac{eR_1}{R_1 - R_2} \quad \text{y} \quad O_2C = \frac{eR_2}{R_1 - R_2}$$

En el caso representado es  $R_1 > O$  y  $R_2 > O$ , resultando  $O_1C > O$  y  $O_2C < O$ , como debe ser.

Si se prolongan los rayos incidentes en  $B_1$  y emergente en  $B_2$ , cortan al eje de la lente en los puntos  $N$  y  $N'$ , que son los nodales del sistema por la propia definición de éstos.

Al tener igual índice de refracción el espacio objeto del sistema que el espacio imagen, es  $f = -f'$  y los puntos nodales coinciden con los principales.

Veamos cómo se determina la posición de los puntos nodales. Según se deduce de la Figura [39.11], el centro  $C$  es la imagen que del punto nodal  $N$  da el primer dióptrico. Aplicando a este caso la [38.39], es:

$$\frac{n_l}{O_1C} - \frac{n}{O_1N} = \frac{n_l - n}{R_1}$$

Sustituyendo en ésta el valor hallado para  $O_1C$  y despejando  $O_1N$ , resulta:

$$O_1N = \frac{eR_1}{n_r(R_1 - R_2) - e(n_r - 1)} \quad [39.29]$$

Análogamente, el punto nodal  $N'$  es la imagen que del centro  $C$  da el segundo dióptrico, y la [38.39] se escribe:

$$\frac{n}{O_2N'} - \frac{n_l}{O_2C} = \frac{n - n_l}{R_2}$$

Teniendo en cuenta el valor hallado para  $O_2C$  y despejando  $O_2N'$ , resulta:

$$O_2N' = \frac{eR_2}{n_r(R_1 - R_2) - e(n_r - 1)} \quad [39.30]$$

La distancia que separa los puntos nodales es:

$$NN' = e - O_1N + O_2N' = e + \frac{e(R_2 - R_1)}{n_r(R_1 - R_2) - e(n_r - 1)} = \frac{e(n_r - 1)(R_1 - R_2 - e)}{n_r(R_1 - R_2) - e(n_r - 1)}$$

[39.31]



El foco imagen del sistema,  $F'$ , será la imagen que da el segundo dióptrico del foco,  $F'_1$ , del primero (Figura 39.12).

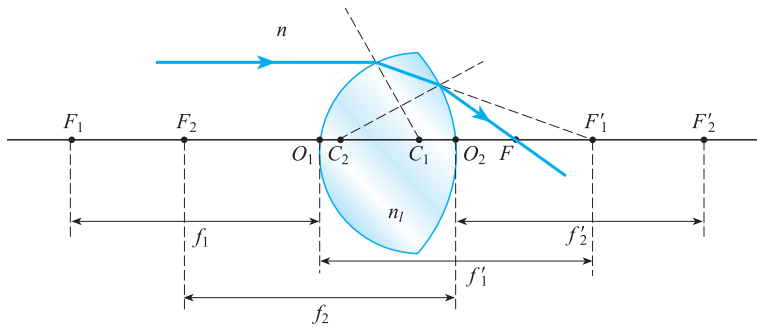


Figura 39.12. Foco imagen de la lente.

Los focos de los dióptricos están dados por las [38.40] y [38.41], siendo las distancias focales:

$$f'_1 = \frac{n_l}{n_l - n} R_1 \quad ; \quad f_1 = -\frac{n}{n_l - n} R_1 \quad ; \quad f'_2 = \frac{n}{n - n_l} R_2 \quad \text{y} \quad f_2 = \frac{n_l}{n - n_l} R_2$$

Las posiciones de los focos imagen y objeto del primer dióptico,  $F'_1$  y  $F_1$ ; así como las correspondientes al segundo,  $F'_2$  y  $F_2$ , se han representado en la Figura 39.12.

La fórmula de Newton [38.46] aplicada al segundo dióptico, tomando como objeto a  $F'_1$  nos da la posición de  $F'$ , foco imagen del sistema:

$$F_2 F'_1 \cdot F'_2 F' = f_2 \cdot f'_2 \quad ; \quad F'_2 F' = \frac{f_2 \cdot f'_2}{F_2 F'_1}$$

Puesto que es  $F_2 F'_1 = F_2 O_2 + O_1 F'_1 - O_1 O_2 = -f_2 + f'_1 - e$ , resulta:

$$F'_2 F' = \frac{f_2 \cdot f'_2}{f'_1 - f_2 - e} \tag{39.32}$$

Expresión que determina la posición del foco imagen de la lente, respecto al foco imagen del segundo dióptico.

También puede obtenerse la posición del foco  $F'$  del sistema por aplicación de la [38.39], ya que éste es la imagen que del punto  $F'_1$  da el segundo dióptico, escribiéndose:

$$\frac{n}{O_2 F'} - \frac{n_l}{O_2 F'_1} = \frac{n - n_l}{R_2}$$

Puesto que es:

$$O_2 F'_1 = f'_1 - e = \frac{n_l}{n_l - n} R_1 - e = \frac{n_l R_1 - e(n_l - n)}{n_l - n}$$

se obtiene para  $O_2 F'$  el valor:

$$O_2 F' = \frac{R_2 [n_l R_1 - e(n_l - n)]}{(n_l - n) [n_l (R_2 - R_1) + e(n_l - n)]} \tag{39.33}$$

La distancia focal del sistema se mide desde los puntos principales, que en este caso coinciden con los nodales, siendo:

$$N'F' = N'O_2 + O_2F' = \frac{n_r R_1 R_2}{(n_r - 1)[n_r(R_2 - R_1) + e(n_r - 1)]} \quad [39.34]$$

### 39.16 Lentes delgadas

Cuando el grosor de la lente,  $e$ , es despreciable frente a los radios de los dióptricos que la forman, se dice que la lente es delgada. El medir las distancias desde los vértices de los dióptricos o desde los planos principales y nodales o desde el centro de la lente, supondrá un error despreciable y, en consecuencia, mediremos las distancias desde el centro de la lente.

La Ecuación [39.28] se reduce, en este caso, a:

Ecuación de la lente delgada

$$\frac{1}{d'} - \frac{1}{d} = (n_r - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad [39.35]$$

Los medios objeto e imagen tienen el mismo índice de refracción y serán de aplicación las fórmulas de Gauss [39.20], que nos dan al compararlas con la [39.35], para la distancia focal imagen el valor:

$$\frac{1}{f'} = (n_r - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

de donde,

Foco imagen

$$f' = \frac{R_1 R_2}{(n_r - 1)(R_2 - R_1)} \quad [39.36]$$

Expresión que se deduce de la [39.34] con sólo hacer en ella  $e = 0$ .

### 39.17 Clasificación de las lentes

Se dice que una lente es convergente cuando su distancia focal imagen,  $f'$ , es positiva, llamándose divergente cuando es negativa. Todos los casos posibles se recogen en la Tabla 39.1.

Tabla 39.1. Clasificación de las lentes.

Tipo de lente	Radios de sus dióptricos	$f'$	Convergencia
Biconvexa	$R_1 > 0, R_2 < 0$	$> 0$	Convergente
Bicóncava	$R_1 < 0, R_2 > 0$	$< 0$	Divergente
Cóncavo-convexas	$R_1 > 0, R_2 > 0, R_1 > R_2$	$< 0$	Divergente
	$R_1 > 0, R_2 > 0, R_1 < R_2$	$> 0$	Convergente
	$R_1 < 0, R_2 < 0, R_1 > R_2$	$> 0$	Convergente
	$R_1 < 0, R_2 < 0, R_1 < R_2$	$< 0$	Divergente
Plano-convexas	$R_1 > 0, R_2 \rightarrow \infty$	$> 0$	Convergente
	$R_1 \rightarrow \infty, R_2 < 0$	$> 0$	Convergente
Plano-cóncavas	$R_1 < 0, R_2 \rightarrow \infty$	$< 0$	Divergente
	$R_1 \rightarrow \infty, R_2 > 0$	$< 0$	Divergente

En las lentes convergentes el foco imagen,  $F'$ , es real, en él se cortan los rayos emergentes que han incidido en la lente paralelos al eje. En las lentes divergentes el foco imagen,  $F'$ , es virtual, en él se cortan las prolongaciones de los rayos emergentes que han incidido en la lente paralelos al eje.

### 39.18 Construcción de las imágenes

Para obtener la imagen,  $A'B'$ , que una lente delgada da de un cierto objeto  $AB$ , pueden utilizarse dos cualquiera de las siguientes propiedades:

- a) Todo rayo que incide en la lente según una dirección paralela al eje óptico emerge según una dirección que pasa por el foco imagen.
- b) Todo rayo que pasa por el centro de la lente no sufre desviación.
- c) Todo rayo que incide sobre la lente pasando previamente por el foco objeto emerge de ella según una dirección paralela a su eje.

En la Figura 39.13 se ha realizado la construcción de la imagen utilizando los tres tipos de rayos.

La Figura 39.13 a) corresponde a una lente convergente, que da una imagen real e invertida, mientras que la Figura 39.13 b) corresponde a una lente divergente, que da una imagen virtual y derecha, todo ello para la posición del objeto que se ha utilizado.

Consideremos un haz de rayos paralelos, incidentes sobre una lente, provenientes de un punto objeto del infinito  $A_\infty$ . La imagen de éste estará situada sobre el rayo que pasa por  $O$ , ya que este rayo proviene de  $A_\infty$  y no sufre desviación. Además debe estar sobre el plano focal imagen, ya que éste es el lugar geométrico de las imágenes de los puntos de infinito del espacio objeto. Ello nos da un método fácil para determinar la imagen de puntos del infinito del espacio objeto, lo que se ha realizado en la Figura 39.14.

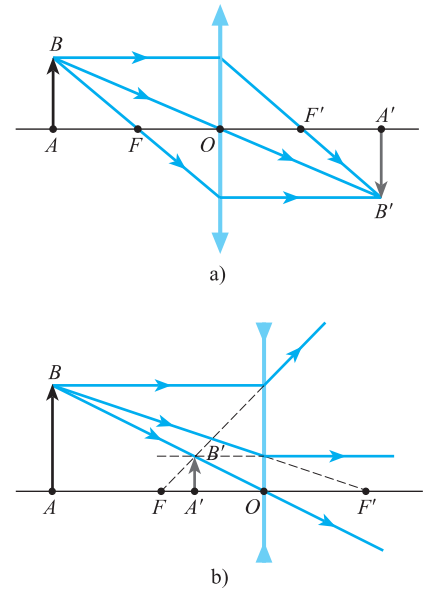


Figura 39.13. Construcción de las imágenes.

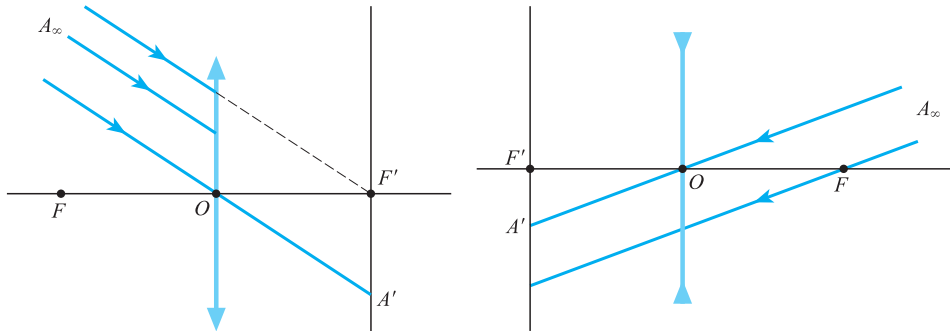


Figura 39.14. Imágenes de puntos del infinito.

Diferenciando la Ecuación [39.35], se obtiene:

$$-\frac{dd'}{d'^2} + \frac{dd}{d^2} = 0 \quad \text{o} \quad \frac{dd}{d^2} = \frac{dd'}{d'^2}$$

Lo que nos indica que las distancias del objeto y la imagen a la lente varían en el mismo sentido, ambas se acercan a la lente o ambas se alejan, independientemente del tipo de aquella.

### 39.19 Otras relaciones de interés

De la semejanza de los triángulos  $OAB$  y  $OA'B'$  (Figura 39.13 a), que tienen todos los ángulos iguales, se deduce para el aumento lateral la expresión:

$$l = \frac{y'}{y} = \frac{d'}{d} \tag{39.37}$$

La Ecuación [39.19] da, para el aumento lateral de la lente, los valores:

$$l = \frac{f}{x} = -\frac{x'}{f} \tag{39.38}$$

La fórmula de Newton, que no es otra que la última igualdad, se escribe:

$$x \cdot x' = -f^2 \tag{39.39}$$

Lo que nos indica que las distancias del foco objeto al objeto y del foco imagen a la imagen son de distinto sentido.

La ecuación de Lagrange-Helmholtz en este caso, en el que es  $n = n'$ , se reduce a  $\alpha y = \alpha' y'$ , y el aumento angular es la inversa del aumento lateral,

$$\gamma \cdot l = 1 \tag{39.40}$$

que es la misma [39.9] particularizada para  $n = n'$ .

### 39.20 Asociación de lentes delgadas

Consideremos las dos lentes delgadas 1-1 y 2-2, (Figura 39.15) cuyos ejes ópticos coinciden y cuyos centros  $O_1$  y  $O_2$  están separados una distancia  $l$ , siendo sus distancias focales, respectivamente:

$$O_1F'_1 = -O_1F_1 = f'_1 \quad \text{y} \quad O_2F'_2 = -O_2F_2 = f'_2$$

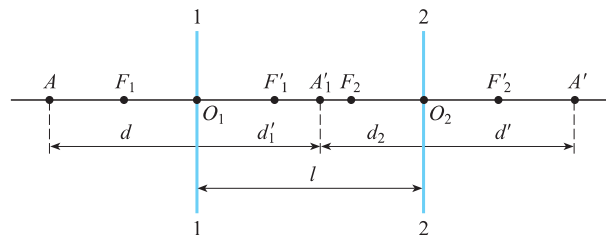


Figura 39.15.

Veamos qué imagen forma este sistema de un punto objeto  $A$  situado sobre el eje como se indica en la Figura 39.15. La lente 1-1 forma del punto  $A$  la imagen  $A'_1$ , y la Ecuación [39.35] se escribe:

$$\frac{1}{d'_1} - \frac{1}{d} = \frac{1}{f'_1} \tag{39.41}$$

La lente 2-2, tomando al punto  $A'_1$ , como objeto, forma la imagen  $A'$ , que es en definitiva la imagen del punto  $A$  que da el sistema, verificando:

$$\frac{1}{d'} - \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f'_2} \tag{39.42}$$

Despejando de la [39.41] el valor de  $d'_1$  resulta:  $d'_1 = \frac{df'_1}{f'_1 + d}$ , y puesto que es  $d'_1 - d_2 = l$ , se obtiene para  $d_2$  el valor:

$$d_2 = \frac{df'_1 - l(f'_1 + d)}{f'_1 + d}$$

Llevando este valor a la [39.42], esta se escribe:

$$\frac{1}{d'} - \frac{f'_1 + d}{df'_1 - l(f'_1 + d)} = \frac{1}{f'_2} \quad [39.43]$$

Expresión que relaciona las distancias  $d$ , de la primera lente al objeto, y  $d'$ , de la segunda lente a la imagen, con las distancias focales de las lentes y la separación entre ambas.

Si las lentes están muy próximas y la distancia  $l$  es despreciable, la [39.43] se escribe

$$\frac{1}{d'} - \frac{1}{d} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} \quad [39.44]$$

En este caso, el sistema se comporta como si fuese una sola lente delgada de distancia focal  $F$ , que verifica:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} \quad [39.45]$$

*Un sistema óptico formado por la asociación de dos lentes delgadas es equivalente a una lente única cuya potencia es la suma de las potencias de las asociadas.*

## 39.21 Aberraciones de los sistemas ópticos

Debido a que los rayos que intervienen en la formación de las imágenes en los sistemas reales no son todos paraxiales, a que ese haz de rayos tampoco es suficientemente estrecho y a la forma y tamaño de las lentes, las imágenes que realmente forman los sistemas ópticos no son geoméricamente semejantes a los correspondientes objetos. Estos defectos de la imagen debidos a la geometría del haz de rayos y de las lentes, se denominan *aberraciones geométricas*. Las principales aberraciones geométricas son: aberración esférica, coma, astigmatismo, curvatura del campo y distorsión.

Por otra parte, si la luz que interviene no es monocromática, los rayos de diferente longitud de onda se refractarán según ángulos diferentes y aunque el haz que parte de un punto objeto sea muy estrecho y perfectamente paraxial, después de la refracción no convergerá en un punto, debido a lo cual la imagen presentará defectos que se denominan *aberraciones cromáticas*.

### Aberración esférica

Los rayos procedentes del punto del infinito del eje óptico en el espacio objeto, una vez refractados por la lente, debido a la extensión del haz y a la geometría de ésta, no se cortan todos rigurosamente en un punto, que sería el foco imagen de la lente. Los rayos extremos del haz simétrico incidente se cortan sobre el eje en el punto  $F'_e$  y los rayos más próximos al eje lo hacen sobre el punto  $F'_c$ , dando lugar a una línea de focos  $F'_e F'_c$  en lugar de un foco puntual (Figura 39.16).

Si el punto objeto es un punto real, por ejemplo el  $A$  del eje, la imagen tampoco será puntual, los rayos extremos del haz incidente dan la imagen  $A'_e$  y los más próximos al eje, la imagen  $A'_c$ . Cada pareja de rayos simétricos dará una imagen situada en el segmento  $A'_e A'_c$ , y la imagen del punto  $A$  será el segmento citado (Figura 39.17).

Si es  $A'$  la imagen que de  $A$  forman unos rayos perfectamente paraxiales sobre una lente estrictamente delgada, se define la *aberración esférica longitudinal* como la distancia de  $A'$  a  $A'_e$ .

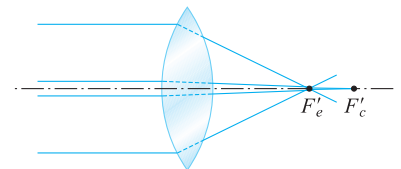


Figura 39.16.

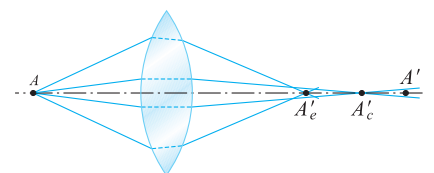


Figura 39.17. Aberración esférica.

Recogiendo el haz emergente sobre una pantalla normal al eje óptico se obtiene un círculo iluminado, denominándose al radio de éste *aberración esférica transversal*. Habrá una posición de la pantalla para la cual la aberración esférica transversal será mínima, posición que se denomina de *máxima nitidez* o mejor foco.

### Coma

En un sistema óptico, libre de aberración de esfericidad, se produce la aberración de coma debido a que los planos principales sólo pueden considerarse así en la zona paraxial, pero fuera de ella son superficies curvas que en general no son esféricas, por tanto, los aumentos transversales son diferentes para cada rayo considerado. Los rayos que pasan por el borde de la lente dan la imagen más próxima al eje óptico que aquellos otros que pasan próximos al este eje (Figura 39.18). La imagen que se forma tiene aspecto de coma, aumentando la intensidad luminosa en su punta.

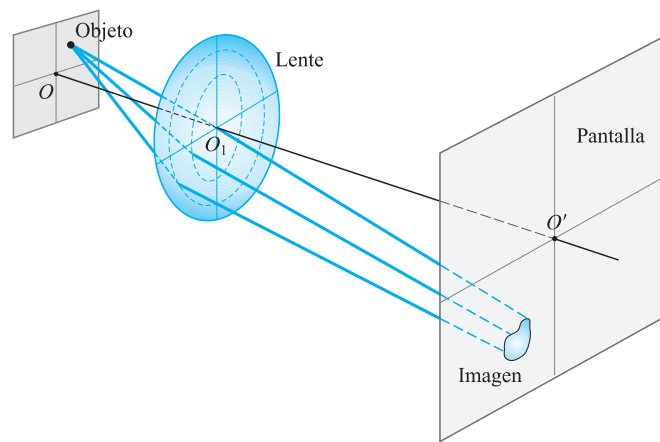


Figura 39.18. Coma.

Para que no se presente esta aberración de coma, el aumento lateral debe permanecer constante, lo que se cumple en rayos paraxiales; siendo la condición necesaria y suficiente para que se verifique de forma general, que se cumpla la ley de los senos  $n y \sin \alpha = n' y' \sin \alpha'$ , lo que en general no sucede.

### Astigmatismo y curvatura de campo

Consideremos un sistema óptico que carece de otro tipo de aberración y que para los puntos axiales verifica las condiciones de Gauss. Tomemos como objeto un plano normal al eje óptico. El punto  $A$  del eje tendrá su imagen paraxial  $A'$ , perfectamente definida; pero los puntos  $B$  separados del eje darán imágenes no puntuales y tanto más defectuosas cuanto más alejado esté aquél del eje. El haz luminoso procedente de  $B$ , a pesar de estar fuertemente diafragmado, no forma, a la salida del sistema óptico una imagen puntual. El elemento de superficie de onda en torno al rayo emergente, no será en general de revolución, presentando diferentes curvaturas para las distintas curvas resultantes de la intersección de aquella con los distintos planos que contienen al eje óptico y al rayo emergente. A la distancia entre los centros de máxima y mínima curvatura,  $C_1$  y  $C_2$ , se la denomina *astigmatismo* del haz luminoso correspondiente a  $B$  y a la dirección de entrada considerada (Figura 39.19).

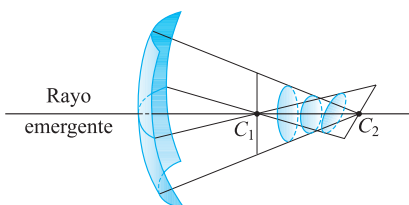


Figura 39.19. Astigmatismo.

La sección transversal del haz de rayos que sale de la lente es inicialmente de forma circular, pasando a formas elípticas y degenerando en sendas rectas para las

posiciones  $C_1$  y  $C_2$ , a las que se denomina imágenes primaria y secundaria de  $B$ , existiendo una posición intermedia de máxima nitidez. Para el punto  $A$  del eje, la imagen es puntual,  $A'$ , pero al separarse el punto  $B$  del  $A$ , las imágenes primaria y secundaria describen sendas curvas, así como la de máxima nitidez, siendo todas ellas tangentes en  $A'$  (Figura 39.20).

La imagen formada del plano objeto normal al eje óptico, solamente será otro plano en la región paraxial, pero, en general, tendrá una imagen primaria y otra secundaria que serán sendas superficies de revolución alrededor del eje óptico, así como la imagen de máxima nitidez. La imagen de un plano, por tanto, no resulta plana y a este fenómeno se le conoce como *curvatura del campo*.

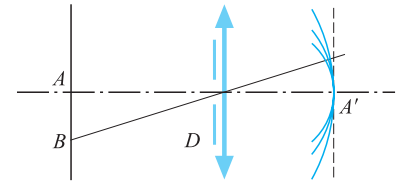


Figura 39.20. Curvatura del campo.

### Distorsión

Consideremos un sistema que no presente ninguno de los tipos de aberración vistos, no habrá problemas de nitidez en la imagen, pero ésta, en general, no será semejante al objeto, aberración que se conoce con el nombre de distorsión. En esencia se trata de que cada punto imagen se separa del eje en sentido radial proporcionalmente a la distancia al eje del punto objeto, alejándose, en cuyo caso se dice que la distorsión es positiva, o acercándose, en cuyo caso se dice que es negativa (Figura 39.21).

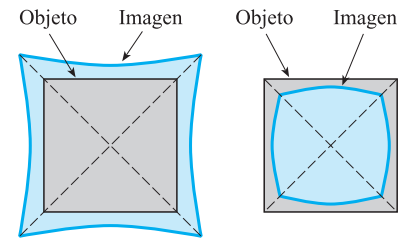


Figura 39.21. Distorsión.

Consideremos para una lente, fuertemente diafragmada en su eje óptico, tres posiciones del diafragma: pegado a la lente, separado de ella por delante y separado de ella por detrás. En el primer caso, el haz de rayos procedente de cualquier punto del objeto  $AC$  pasa por el centro de la lente y no es desviado, formando una imagen  $A'C'$  semejante al objeto, con un cierto aumento lateral  $l$  (Figura 39.22).

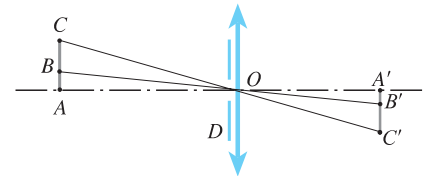


Figura 39.22. Diafragma sobre la lente.

En el segundo caso, los rayos que salen del punto  $B$  próximo al eje siguen pasando por  $O$  y forman una imagen con aumento lateral  $l$ ; pero los rayos que salen de los puntos  $C$  alejados del eje incidirán en los bordes de la lente y formarán una imagen  $C''$ , tal que  $A'C'' < A'C'$ , es decir, el aumento lateral es menor que  $l$ . Ello es debido a la mayor convergencia de la lente en sus bordes y hace que la imagen deje de ser semejante, reduciéndose en su periferia (Figura 39.23).

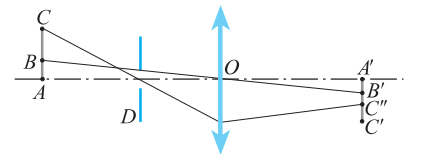


Figura 39.23. Diafragma delante de la lente.

En el tercer caso, los puntos próximos a  $A$  siguen formando una imagen semejante al objeto, pero para los puntos alejados del eje, los rayos que inciden en los bordes, por la mayor convergencia de la lente en ellos, dan una imagen  $C'''$  tal que  $A'C''' > A'C'$ , es decir, el aumento lateral es mayor que  $l$ . La imagen deja de ser semejante, apareciendo estirada en sus bordes, tanto más cuanto más alejados están los puntos de su centro (Figura 39.24).

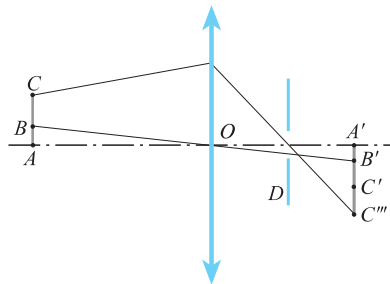


Figura 39.24. Diafragma detrás de la lente.

### Aberración cromática

La distancia focal de una lente, según se vio, es función del índice de refracción de la sustancia que la forma, siendo éste a su vez distinto para las diferentes longitudes

de onda. Por tanto, la distancia focal de una lente es distinta para los diferentes colores. En consecuencia, una lente formará tantas imágenes de un mismo objeto como longitudes de onda visibles existan en la luz incidente. Además, como el aumento lateral es función de la distancia focal, las imágenes tendrán tamaño diferente para las distintas longitudes de onda. En la Figura 39.25 se han construido las imágenes para las longitudes de onda violeta y roja. Las imágenes para las demás longitudes de onda visibles serán intermedias.

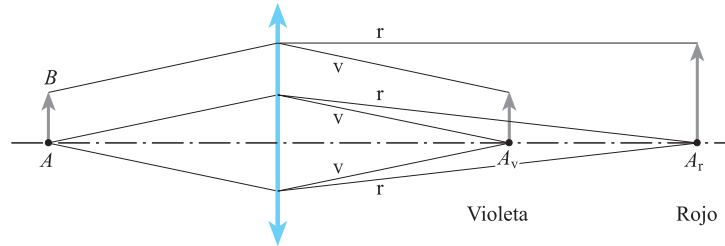


Figura 39.25. Aberración cromática.

La variación de la distancia imagen con el índice de refracción se denomina *aberración cromática longitudinal* y la variación del tamaño de la imagen *aberración cromática transversal*.

La distancia focal dada por la expresión [39.33] será distinta para cada longitud de onda al serlo el índice de refracción, por lo cual el foco imagen es una línea que va desde el foco imagen que da el azul, más próximo a la lente, hasta el foco imagen que da el rojo, más alejado de la lente (Figura 39.26).

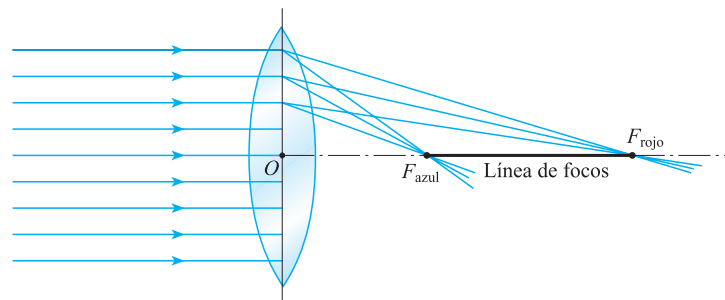


Figura 39.26. Aberración cromática longitudinal.



### 40.1 Interferencias

Lo estudiado en el Capítulo 27 sobre interferencias de ondas en general, es válido para las ondas electromagnéticas con la singularidad, que debe ser tenida en cuenta, de ser magnitudes vectoriales las que intervienen en estas. Sin embargo, la experiencia cotidiana nos enseña que los haces luminosos que se interfieren naturalmente, no presentan los fenómenos de interferencias estudiados. Al incidir sobre un objeto haces luminosos provenientes de dos focos diferentes, el objeto es iluminado más intensamente de forma homogénea, sin aparecer las típicas zonas de interferencia ya estudiadas.

Para poder observar los fenómenos de interferencia tal y como se describieron es necesario que las fuentes emitan ondas monocromáticas de la misma frecuencia y cuya diferencia de fases de emisión se mantenga constante, en cuyo caso se dice que ambas emisiones son coherentes, siendo precisamente la condición de coherencia la constancia del desfase.

En efecto: sean dos focos emisores puntuales, cuyas emisiones están dadas, respectivamente, por las expresiones:

$$E_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \quad \text{y} \quad E_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2),$$

si el medio es homogéneo y no absorbente, en un punto  $P$ , cuya distancia al primer foco sea  $r_1$  y al segundo  $r_2$  (Figura 40.1), la onda que llega de cada uno de los focos emisores es, respectivamente:

$$E_1 = A_1 \sin(\omega t - kr_1 + \varphi_1) \quad \text{y} \quad E_2 = A_2 \sin(\omega t - kr_2 + \varphi_2)$$

El estado provocado en  $P$  por la superposición de las ondas que llegan de cada uno de los focos se obtiene sumando ambas. En este caso las magnitudes son vectoriales, cuya suma geométrica se ha representado en la Figura 40.2

La amplitud del campo  $\mathbf{E}$  en  $P$  se obtiene por aplicación del teorema del coseno en el triángulo formado por  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$  y  $\mathbf{E}$ , Figura 40.2, resultando:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\Phi_1 - \Phi_2) \quad [40.1]$$

- 40.1. Interferencias
- 40.2. Dispositivos clásicos para obtener focos coherentes
- 40.3. Interferencias con doble rendija. Experiencia de Young
- 40.4. Interferencias producidas por varias rendijas
- 40.5. Interferencias en la reflexión y transmisión en láminas delgadas
- 40.6. Anillos de Newton
- 40.7. Interferómetro de Michelson
- 40.8. Difracción
- 40.9. Difracción de Fraunhofer por una rendija
- 40.10. Límite de resolución o poder separador de una rendija
- 40.11. Difracción de Fraunhofer por una abertura circular
- 40.12. Difracción de Fraunhofer por dos rendijas paralelas e iguales
- 40.13. Redes de difracción
- 40.14. Dispersión y poder de resolución de una red

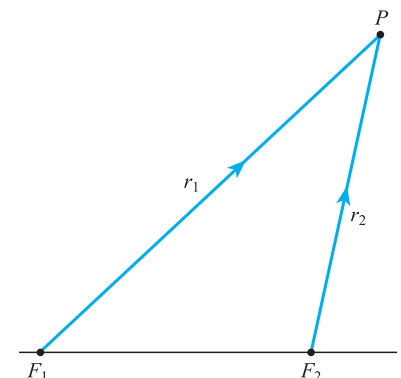


Figura 40.1.

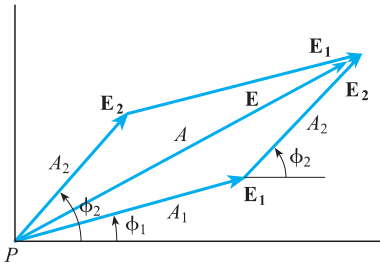


Figura 40.2. Interferencia en P.

Siendo:

$$\Phi_1 = \omega t - kr_1 + \varphi_1 \quad \text{y} \quad \Phi_2 = \omega t - kr_2 + \varphi_2$$

De donde,

$$\Phi_1 - \Phi_2 = k(r_2 - r_1) + \varphi_1 - \varphi_2$$

Con lo que la [40.1] se escribe:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos [k(r_2 - r_1) + \varphi_1 - \varphi_2] \quad [40.2]$$

Y puesto que las intensidades son proporcionales a los cuadrados de las amplitudes, podemos expresar aquellas de la forma:

$$I_P = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos (\Phi_1 - \Phi_2) \quad [40.3]$$

o bien,

$$I_P = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos [k(r_2 - r_1) + \varphi_1 - \varphi_2] \quad [40.4]$$

### Intensidad

Si la diferencia de fases con las que emiten los focos permanece constante,  $\varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi = \text{cte}$ , los focos emisores son coherentes; la intensidad en cada punto P dependerá de las distancias  $r_1$  y  $r_2$  de éste a cada uno de los focos emisores, respectivamente, y se producirán fenómenos de interferencias.

Los máximos de intensidad se presentan en los puntos para los cuales el coseno de la expresión [40.4] vale la unidad, es decir, cuando se verifica:

$$k(r_2 - r_1) + \Delta\varphi = 2m\pi$$

Puesto que es  $k = 2\pi/\lambda$ , la anterior nos da para la condición de máximo de intensidad la expresión:

### Posición en máximos

$$r_2 - r_1 = \left(m + \frac{\Delta\varphi}{2\pi}\right)\lambda \quad [40.5]$$

Los mínimos de intensidad se presentarán en los puntos para los cuales el coseno toma el valor menos uno, es decir cuando se verifica:

$$k(r_2 - r_1) + \Delta\varphi = (2m + 1)\pi$$

Con lo que la condición de mínimo de intensidad se expresa:

$$r_2 - r_1 = \left(m + \frac{1}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2\pi}\right)\lambda \quad [40.6]$$

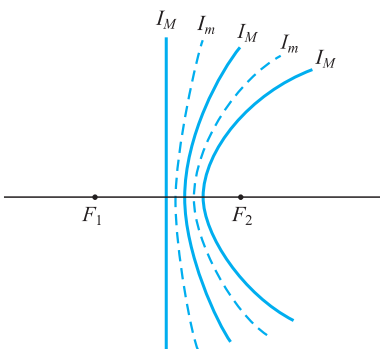


Figura 40.3. Máximos y mínimos de intensidad.

Las superficies definidas por las Ecuaciones [40.5] y [40.6] son hiperboloides de revolución, cuyos focos coinciden con los focos luminosos emisores, alternándose los hiperboloides de máxima intensidad con los de mínima, y estando todos ellos igualmente espaciados entre sí la distancia  $r_2 - r_1 = \lambda/2$  (Figura 40.3).

Si la diferencia de fases en la emisión de los focos,  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ , no se mantiene constante, sino que toma valores aleatorios, no se observan los fenómenos de interferencias, ya que las posiciones de máximos y mínimos de intensidad, dadas por las Ecuaciones [40.5] y [40.6] varían también aleatoriamente.

El proceso natural de emisión de luz es debido a excitaciones atómicas que se producen millones de veces por segundo, emitiendo los correspondientes trenes de ondas con cambios al azar de la fase y con un período, en la región visible,

de  $10^{-15}$  s. En la unidad de tiempo,  $\Delta\varphi$  tomará todos los valores posibles y el ojo observará el valor medio, que deducido de la [40.4] es:

$$\langle I_P \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle$$

Valor que es constante para todos los puntos y, por tanto, no se producen fenómenos de interferencias.

## 40.2 Dispositivos clásicos para obtener focos coherentes

Un dispositivo muy sencillo es el que empleó Young (1773-1829), en 1801, para la comprobación de la naturaleza ondulatoria de la luz. Utilizó dos pantallas opacas dispuestas paralelamente, en una practicó una rendija  $O$ , y en la otra dos,  $O_1$  y  $O_2$ , situadas simétricamente respecto a la normal trazada por el centro  $O$  y todas ellas paralelas (Figura 40.4).

La onda emitida en el foco  $O$  es:

$$E = A \sin(\omega t + \varphi)$$

A las rendijas de la segunda pantalla, por estar ambas a la misma distancia,  $r$ , de la rendija emisora y ser el medio homogéneo, les llegará la onda en el mismo estado, que se expresa:

$$E_1 = E_2 = A \sin(\omega t - kr + \varphi)$$

Por tanto, ambas serán nuevos focos emisores que siempre estarán en fase y emitirán de forma coherente.

Otro dispositivo sencillo es el de los espejos de Fresnel (1788-1827). Está formado por dos espejos planos con una arista común y cuyos planos forman entre sí un ángulo muy pequeño (Figura 40.5).

De la fuente puntual,  $F$ , los espejos forman sendas imágenes,  $F_1$  y  $F_2$ , y los rayos reflejados parecen tener como focos estas imágenes virtuales. Los rayos reflejados son coherentes siempre que el ángulo entre los espejos sea muy pequeño y producirán interferencias en la región en la que se superponen (Figura 40.5).

Otro dispositivo ingenioso, debido a Fresnel, es el formado por un biprisma como se indica en la Figura 40.6. Del foco  $F$  el biprisma forma dos imágenes virtuales  $F_1$  y  $F_2$ , que pueden ser consideradas como fuentes secundarias y en la zona común producen interferencias.

Dos antenas conectadas al mismo oscilador de baja frecuencia también serán focos emisores coherentes de ondas electromagnéticas, si bien en este caso no visibles. El descubrimiento del *láser*, ha proporcionado fuentes de luz coherente que han posibilitado el desarrollo y las aplicaciones de la óptica en numerosos campos, fundamentalmente en las telecomunicaciones.

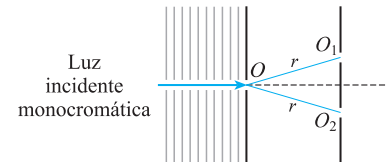


Figura 40.4. Dispositivo de Young.

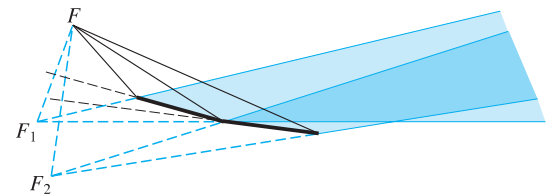


Figura 40.5. Dispositivo de Fresnel.

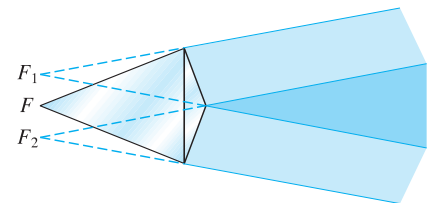


Figura 40.6. Biprisma de Fresnel.

## 40.3 Interferencias con doble rendija. Experiencia de Young

El dispositivo de Young para producir haces luminosos coherentes, nos va a permitir analizar las interferencias que se producen entre las ondas emitidas por cada una de las rendijas. La rendija  $O$  emite, de acuerdo con el Principio de Huygens, ondas cilíndricas (Figura 40.7).

Supuesto el medio homogéneo, en todo momento llega a las rendijas  $O_1$  y  $O_2$  el mismo frente de onda y ambas emitirán ondas cilíndricas coherentes, cuyas

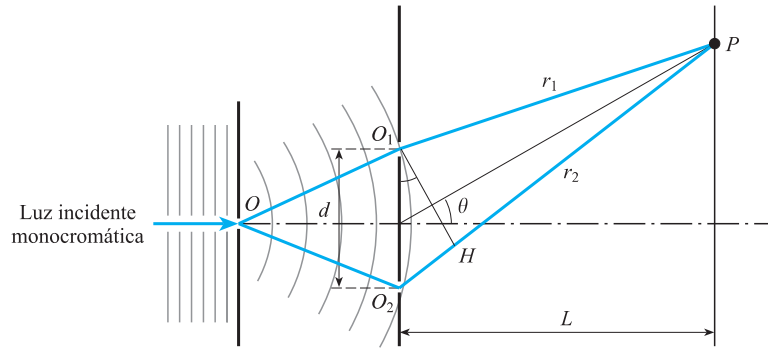


Figura 40.7. Interferencias con doble rendija.

interferencias pueden hacerse visibles sobre una pantalla, resultando líneas de distinta intensidad luminosa paralelas a las rendijas.

La onda emitida por ambas rendijas  $O_1$  y  $O_2$  es la misma y está representada por:

$$E_1 = E_2 = A \text{ sen } (\omega t + \varphi_1)$$

La onda que llega a  $P$  procedente de la rendija  $O_1$ , es  $E_1 = A \text{ sen } (\omega t - kr_1 + \varphi_1)$ .

La onda que llega a  $P$  procedente de  $O_2$  es  $E_2 = A \text{ sen } (\omega t - kr_2 + \varphi_1)$ .

La superposición de ambas dará figuras de interferencia, cuyos máximos y mínimos están dados por las Ecuaciones generales [41.5] y [41.6], que en este caso particular, por ser  $\Delta\varphi = 0$ , se escriben, respectivamente:

$$\text{Condición de máximos de intensidad} \quad r_2 - r_1 = m\lambda \quad [40.7]$$

$$\text{Condición de mínimos de intensidad} \quad r_2 - r_1 = (m + 1/2)\lambda \quad [40.8]$$

Para calcular la diferencia de camino de las dos ondas al llegar a  $P$ ,  $r_2 - r_1$ , tracemos con centro en  $P$  y radio  $r_1$  una circunferencia, la cual pasará por  $O_1$  y cortará a  $O_2P$  en  $H$  (Figura 40.7), siendo  $O_2H = r_2 - r_1$ . El ángulo  $O_2O_1H$  es aproximadamente igual a  $\theta$  y se aproximará tanto más cuanto mayor sea  $L$ . Por tanto, es:

$$O_2H = r_2 - r_1 = d \text{ sen } \theta \quad [40.9]$$

Con ello la situación de los máximos está dada por:

$$d \text{ sen } \theta = m\lambda \quad ; \quad \text{sen } \theta = m \frac{\lambda}{d} \quad \text{y} \quad \theta = \text{arcsen } m \frac{\lambda}{d} \quad [40.10]$$

La posición de los mínimos está dada por:

$$d \text{ sen } \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad ; \quad \text{sen } \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d} \quad \text{y} \quad \theta = \text{arcsen} \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d} \quad [40.11]$$

El valor de la intensidad, dado por la Ecuación general [40.4], en este caso, al ser  $\varphi_1 = \varphi_2$  e  $I_1 = I_2 = I_O$ , se escribe:

$$\text{Intensidad} \quad I_P = 2I_O \left[ 1 + \cos 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} \right] = 4I_O \cos^2 \pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} \quad [40.12]$$

El valor de la intensidad en los puntos de máximo se obtiene sustituyendo  $r_2 - r_1$  por  $k\lambda$ , resultando  $I_{PM} = 4I_O$ . Análogamente, el valor de la intensidad en los puntos de mínimo se obtiene sustituyendo  $r_2 - r_1$  por  $(m + 1/2)\lambda$ , resultando  $I_{Pm} = 0$ .

La Ecuación [40.12] en función del ángulo  $\theta$  se escribe:

$$I_P = 4I_O \cos^2 \frac{\pi d \operatorname{sen} \theta}{\lambda} \quad [40.13]$$

La representación de la intensidad como función del ángulo  $\theta$  se ha realizado en la Figura 40.8.

Hay que hacer notar, que en las expresiones [40.10] y [40.11], el valor del  $\operatorname{sen} \theta$  debe mantenerse inferior a la unidad, por lo cual,  $m$  sólo puede tomar una serie de valores para los cuales se mantenga  $\operatorname{sen} \theta \leq 1$ . Para que esto se verifique, en el caso de la posición de los máximos, deberá ser  $m \leq d/\lambda$  y en el caso de los mínimos  $m \leq d/\lambda - 1/2$ .

Para  $m = 0$  hay un primer máximo, que corresponde a  $\theta = 0$ , es decir, coincide con el punto de la pantalla donde incide la perpendicular desde el punto medio entre las dos rendijas. A partir de esta posición, los mínimos y máximos de intensidad se alternan, pero ni su posición angular, ni la espacial, mantienen una separación constante. En la Ecuación [40.10] vemos cómo los senos son proporcionales a los distintos valores de  $m$ , por lo cual no lo serán los correspondientes ángulos, salvo para valores muy pequeños de  $\theta$ . La posición espacial de la posición de los máximos está dada por  $y = L \tan \theta$  y la separación espacial entre máximos es  $\Delta y = L(\tan \theta_{m+1} - \tan \theta_m)$ . Sólo para pequeños valores de  $\theta$  resultará el espaciamiento constante, ya que será:

$$y \cong L \operatorname{sen} \theta = Lm \frac{\lambda}{d} \quad \text{y} \quad \Delta y = L \frac{\lambda}{d}$$

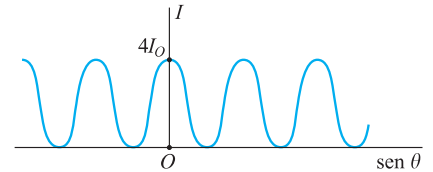


Figura 40.8. Variación de la intensidad.

### EJEMPLO 40.1

Dos rendijas paralelas e iguales, separadas la distancia  $d$  emiten en fase ondas de la misma longitud  $\lambda = 2/7 d$  (Figura 40.9). En una pantalla situada a la distancia  $L = 70 d$  se observan interferencias. Calculemos:

- Las direcciones de emisión para las cuales se presentan máximos de intensidad.
- El valor de la intensidad máxima.
- Las direcciones de emisión para las cuales se presentan los mínimos de intensidad.
- El valor de la intensidad mínima.
- La separación espacial de los máximos.
- La separación espacial de los mínimos.

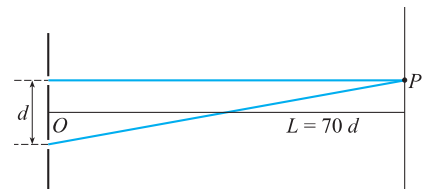


Figura 40.9.

### Solución:

- Las direcciones de máxima intensidad están dadas por la [40.10]:

$$\operatorname{sen} \theta = m \frac{\lambda}{d} = m \frac{2}{7} = 0, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}$$

Únicamente hay cuatro posiciones de máxima intensidad, para las cuales son:

$$\theta_1 = 0^\circ \quad \theta_2 = 16^\circ 36' 05'', 5 \quad \theta_3 = 34^\circ 50' 59'', 7 \quad \theta_4 = 58^\circ 59' 50'', 2$$

- El valor de la intensidad máxima está dado por la [40.13]:

$$I_P = 4I_O \cos^2 \left[ \frac{\pi d}{\lambda} m \frac{\lambda}{d} \right] = 4I_O \cos^2 (m\pi) = 4I_O$$

- c) Las direcciones para las cuales se presenta la intensidad mínima, están dadas por la [40.11]:

$$\operatorname{sen} \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{d} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{2}{7} = \frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}, \frac{7}{7}$$

Las cuatro posiciones de intensidad mínima se presentan para los valores

$$\theta_1 = 8^{\circ}12'47'',6 \quad \theta_2 = 25^{\circ}22'37'' \quad \theta_3 = 45^{\circ}35'4'',9 \quad \theta_4 = 90^{\circ}$$

- d) El mínimo de intensidad se obtiene de la [40.13],

$$I_P = 4I_O \cos^2 \left[ \frac{\pi d}{\lambda} \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{d} \right] = 4I_O \cos^2 \left[ \pi \left(m + \frac{1}{2}\right) \right] = 0$$

- e) La posición espacial de los máximos es:

$$y = L \tan \theta \cong L \operatorname{sen} \theta = Lm \frac{\lambda}{d} = 70 \, dm \frac{2d}{7d} = 20 \, md$$

La separación espacial entre máximos contiguos es:

$$\Delta y = y_{m+1} - y_m = 20 \, d$$

- f) La posición espacial de los mínimos es:

$$y \cong L \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{d} = 70 \, d \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{2}{7} = 20 \, d \left(m + \frac{1}{2}\right)$$

La separación entre dos mínimos consecutivos es:

$$\Delta y = y_{m+1} - y_m = 20 \, d(m + 3/2) - 20 \, d(m + 1/2) = 20 \, d$$

#### 40.4 Interferencias producidas por varias rendijas

La rendija  $O$  es iluminada con luz monocromática (Figura 40.10). A los frentes luminosos, cilíndricos, que va emitiendo, se les interpone una lente cuyo plano focal objeto contiene a la rendija  $O$ . Los frentes de onda que salen de la lente serán planos. Una segunda pantalla, que se sitúa normal al eje de la lente y, por tanto, paralela a los frentes de onda, lleva  $N$  rendijas iguales e igualmente espaciadas. A todas éstas llega el mismo frente simultáneamente y, por tanto, emitirán ondas coherentes que producirán interferencias.

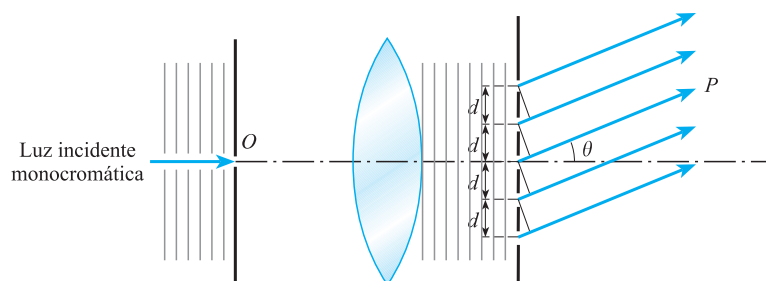


Figura 40.10. Interferencias por varias rendijas.

Para mayor sencillez supondremos que observamos las interferencias en puntos suficientemente alejados como para poder admitir que los rayos que se interfieren son paralelos.

La onda que llega a cada una de las  $N$  rendijas es la misma y se expresa de la forma:

$$E = A_O \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

El estado de la perturbación producida en el punto  $P$ , por la onda que sale de la rendija  $i$  (Figura 40.11), está dado por:

$$E_i = A_O \text{sen}(\omega t - kr_i + \varphi)$$

El producido por la onda que sale de la rendija  $i + 1$ , es:

$$E_{i+1} = A_O \text{sen}(\omega t - kr_{i+1} + \varphi)$$

El desfase en  $P$  entre estas dos perturbaciones es:

$$\Delta\varphi = k(r_{i+1} - r_i) = kd \text{sen} \theta$$

Por tanto, el desfase resulta ser constante para cada punto  $P$ . La perturbación resultante en el citado punto será la suma de  $N$  perturbaciones, todas de igual amplitud  $A_O$  y cuyo desfase entre cada dos consecutivas es  $\Delta\varphi$ . En la Figura 40.12 se han dispuesto los  $N$  vectores, igual al número de rendijas, para su suma vectorial geométrica.

La amplitud de la perturbación resultante en  $P$  se deduce del triángulo  $BCD$  y puede expresarse de la forma:

$$A_p = 2R \text{sen} \frac{N\Delta\varphi}{2}$$

Del triángulo  $BCG$  se deduce la relación:

$$A_O = 2R \text{sen} \frac{\Delta\varphi}{2}$$

Con lo cual, la amplitud de la perturbación en  $P$  se escribe:

$$A_p = A_O \frac{\text{sen} N \frac{\Delta\varphi}{2}}{\text{sen} \frac{\Delta\varphi}{2}}$$

Puesto que las intensidades son proporcionales a los cuadrados de las amplitudes, resulta:

$$I_p = I_O \frac{\text{sen}^2 N \frac{\Delta\varphi}{2}}{\text{sen}^2 \frac{\Delta\varphi}{2}} = I_O \frac{\text{sen}^2 \left( \frac{N\pi d}{\lambda} \text{sen} \theta \right)}{\text{sen}^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda} \text{sen} \theta \right)} \quad [40.14] \quad \text{Intensidad}$$

La intensidad presentará un máximo cuando los vectores representativos de las perturbaciones producidas en  $P$ , por cada una de las ondas procedentes de cada una de las  $N$  rendijas, tengan la misma dirección y sentido, ya que entonces es

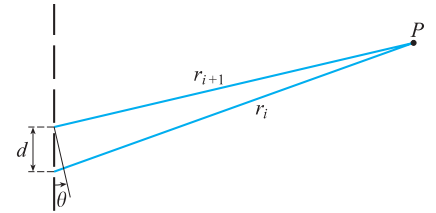


Figura 40.11.

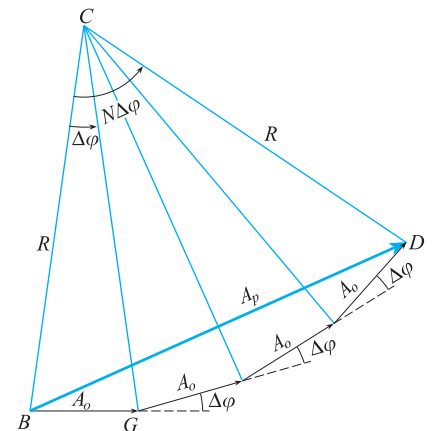


Figura 40.12. Amplitud resultante en  $P$ .

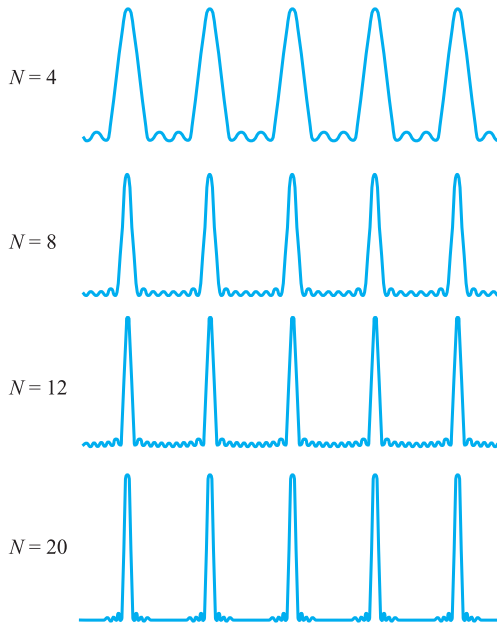


Figura 40.13. Intensidad en las interferencias por varias rendijas.

$A_P = NA_O$  y el valor máximo de la intensidad es  $I_P = N^2 I_O$ . Para ello es necesario que se verifique  $\Delta\varphi = 2m\pi$ ,  $kd \sin \theta = 2m\pi$ . De donde,

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{d} \quad \text{y} \quad \theta = \arcsen \left( m \frac{\lambda}{d} \right) \quad [40.15]$$

Si se sustituye este valor del seno en la [40.14] aparece una indeterminación  $I_P = 0/0$ , que se elimina aplicando la regla de L'Hôpital y se obtiene:

$$I_P = N^2 I_O \frac{\cos(Nkd \sin \theta)}{\cos(kd \sin \theta)}$$

En la cual, al sustituir el seno por el valor [40.15] se obtiene  $I_P = N^2 I_O$ .

Los valores que puede tomar  $m$  en la [40.15] deben hacer  $\sin \theta \leq 1$ , es decir, deben ser,  $m \leq d/\lambda$ .

La intensidad se anula para  $N \frac{\Delta\varphi}{2} = m_1\pi$ , o bien,

$$\sin \theta = m_1 \frac{\lambda}{Nd} \quad \text{o} \quad \theta = \arcsen \left( m_1 \frac{\lambda}{Nd} \right) \quad [40.16]$$

Aquí  $m_1$  no puede tomar los valores  $0, N, 2N, \dots, hN, \dots$ , pues el valor de  $\theta$  correspondería a un máximo. Además debe mantenerse  $\sin \theta \leq 1$ , por lo que debe ser  $m_1 \leq Nd/\lambda$ . Entre cada dos máximos hay  $N - 1$  mínimos y, por tanto  $N - 2$  máximos secundarios.

En la Figura 40.13 se han representado los casos  $N = 4, 8, 12$  y  $20$ .

### 40.5 Interferencias en la reflexión y transmisión en láminas delgadas

Consideremos una lámina delgada, transparente a la longitud de onda utilizada, de espesor  $e$ , y unas ondas luminosas planas incidentes sobre ella con un ángulo de incidencia  $i$  (Figura 40.14).

En la cara superior de la lámina, parte del rayo incidente  $AB$  se reflejará según  $BC$  y parte se refractará según  $BD$ . A su vez, este rayo  $BD$ , en la cara inferior de la lámina, se refleja en parte según  $DE$  y en parte se refracta transmitiéndose según  $DF$ . El rayo  $DE$ , al llegar a la cara superior de la lámina se refracta en parte, dando el  $EG$ , que se superpone con el reflejado del incidente  $HE$ , y en parte se refleja, dando el  $EI$ , que se refracta en la cara inferior según el  $IJ$ , superponiéndose con el transmitido procedente del  $HE$ . Por tanto, existirán interferencias entre los rayos reflejados y también entre los transmitidos.

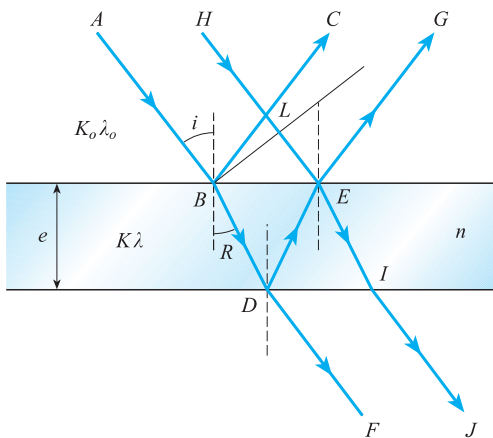


Figura 40.14. Interferencias en láminas delgadas.

#### Interferencias en la reflexión

Analicemos, en primer lugar, las interferencias entre rayos reflejados. Para ello, veamos cuál es el desfase entre el rayo  $EG$  proveniente de la reflexión del  $HE$  y el rayo que sale en la misma dirección como proveniente del  $ABDE$ . El desfase es debido al diferente camino recorrido. Trazando el frente de onda que pasa por  $B$ , se observa que, mientras un rayo recorre el camino  $LE$ , el otro recorre el camino  $BDE$ . Puesto que los recorridos se hacen en medios distintos, el desfase se escribe:

$$\Delta\varphi = kr_2 - k_0 r_1 = kBDE - k_0 LE$$



De la geometría de la marcha de los rayos se obtiene:

$$BDE = 2BD = \frac{2e}{\cos R} \quad \text{y} \quad LE = BE \operatorname{sen} i = 2e \operatorname{tg} R \cdot \operatorname{sen} i$$

Utilizando la ley de Snell, esta última se escribe  $LE = 2en \frac{\operatorname{sen}^2 R}{\cos R}$ . Con todo ello el defasaje se puede poner de la forma:

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi e}{\cos R} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{n}{\lambda_0} \operatorname{sen}^2 R \right)$$

Puesto que es  $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ , puede expresarse:

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi ne}{\lambda_0} \cos R \quad [40.17]$$

Además, de acuerdo con lo visto en el Capítulo 27, al reflejarse en  $E$ , el rayo  $LE$  sufre un cambio de fase de valor  $\pi$ , mientras que al reflejarse en  $D$ , el rayo  $BD$  no sufre cambio en su fase. De todo ello resulta que la diferencia de fase está dada por:

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi ne}{\lambda_0} \cos R - \pi \quad [40.18]$$

Los máximos de intensidad aparecen cuando es  $\cos \Delta\varphi = 1$ , es decir, para  $\Delta\varphi = 2m\pi$ . Con lo cual es:

$$e = \frac{2m+1}{4} \frac{\lambda_0}{n \cos R} = \frac{2m+1}{4} \frac{\lambda}{\cos R} \quad [40.19] \quad \text{Condición de máximo}$$

Los mínimos de intensidad se presentarán para  $\cos \Delta\varphi = -1$ , es decir,  $\Delta\varphi = (2m-1)\pi$ , obteniéndose:

$$e = \frac{m\lambda_0}{2n \cos R} = \frac{m\lambda}{2 \cos R} \quad [40.20] \quad \text{Condición de mínimo}$$

En el caso frecuente de ser  $R$  muy pequeño, las Ecuaciones [40.19] y [40.20] se transforman, respectivamente, en:

$$e = \frac{2m+1}{4} \frac{\lambda_0}{n} = (2m+1) \frac{\lambda}{4} \quad [40.21]$$

$$e = \frac{m\lambda_0}{2n} = m \frac{\lambda}{2} \quad [40.22]$$

Si el espesor  $e$  es constante, toda la lámina se verá por reflexión igualmente iluminada; si el espesor es variable, los puntos en los cuales el espesor verifique la [40.19] o [40.21] aparecen intensamente iluminados y los puntos en los cuales el espesor verifique la [40.20] o [40.22] aparecen sin iluminar.

La expresión [40.3] nos da los valores de  $I_{\text{máx}}$  e  $I_{\text{mín}}$  simplemente tras sustituir en ella  $\cos \Delta\varphi$  por  $+1$  ó  $-1$ , respectivamente, obteniéndose:

$$I_{\text{máx}} = 4I_0 \quad \text{e} \quad I_{\text{mín}} = 0 \quad [40.23]$$

### Interferencias por transmisión

Analicemos ahora las interferencias producidas por los rayos transmitidos. La diferencia de fase entre el rayo  $IJ$ , como transmitido del  $HE$  y el rayo que sale en la misma dirección o como proveniente del  $AB$ , es debida a que uno recorre el camino  $LEI$ , mientras el otro recorre el  $BDEI$ . Por tanto, la diferencia de fase es la misma dada por [40.17] y, puesto que ahora la reflexión no provoca diferencia de fase, el defasaje es:

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi ne}{\lambda_0} \cos \hat{R} \quad [40.24]$$

Los máximos de intensidad se presentan para  $\Delta\varphi = 2m\pi$ , lo que da:

Condición de máximo

$$e = m \frac{\lambda_0}{2n \cos R} = \frac{m\lambda}{2 \cos R} \quad [40.25]$$

Por tanto, coinciden posicionalmente con los mínimos de interferencia en la reflexión. Los mínimos en la transmisión se presentan para  $\Delta\varphi = (2m - 1)\pi$ , lo que da:

Condición de mínimo

$$e = \frac{2m - 1}{4} \frac{\lambda_0}{n \cos R} = \frac{2m - 1}{4} \frac{\lambda}{\cos R} \quad [40.26]$$

que coinciden con los máximos de las interferencias por reflexión.

Es evidente que ello debía ser así, ya que la intensidad luminosa incidente debe ser igual a la suma de la reflejada más la transmitida, diciéndose que ambos fenómenos son complementarios. Obviamente, los valores de las intensidades máxima y mínima son los mismos expresados en [40.23].

#### EJEMPLO 40.2

Una lámina de caras planas y paralelas de espesor  $e$ , cuyo material tiene un índice de refracción  $n_2$  para la longitud de onda utilizada, está colocada en un medio de índice de refracción  $n_1$ ,  $n_1 < n_2$ , para la citada longitud de onda (Figura 40.15). Calculemos:

- Las condiciones de los máximos y mínimos de intensidad en las interferencias entre los rayos transmitidos, cuando los rayos incidentes lo hacen con  $i$  muy pequeño.
- La variación del espesor de la lámina necesario para pasar de un máximo al mínimo contiguo, cuando la onda incidente es de longitud  $\lambda_1$ .
- Aplicación al caso de  $\lambda_1 = 0,4 \mu\text{m}$ ,  $n_1 = 1$  y  $n_2 = 1,25$ .

#### Solución:

- En la dirección  $IJ$  emergen dos rayos, uno proveniente del  $AB$  y otro del  $HE$ , en consecuencia se producirán interferencias entre ambos. Su diferencia de fase se debe a que el primero hace el recorrido  $BDE$  dentro de la lámina, mientras el segundo hace el recorrido  $CE$  en el medio 1, es decir:

$$\Delta\varphi = k_2 BDE - k_1 CE$$

El recorrido  $BDE$  se expresa:

$$BDE = 2BD = \frac{2e}{\cos R} \approx 2e$$

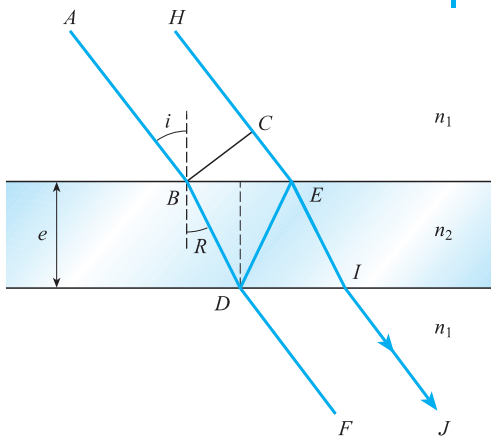


Figura 40.15.

El recorrido CE se expresa:

$$CE = BE \operatorname{sen} i = 2e \tan R \operatorname{sen} i \approx 2e Ri = 2e \frac{n_1}{n_2} i^2$$

Con lo cual, el desfase es:

$$\Delta\varphi = k_2 2e - k_1 2e \frac{n_1}{n_2} i^2 \approx 2ek_2$$

Puesto que son  $\frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1}$ , el desfase también puede expresarse de la forma:

$$\Delta\varphi = 2ek_1 \frac{n_2}{n_1} = 4\pi \frac{n_2}{n_1} \frac{e}{\lambda_1}$$

Los máximos se presentarán para  $\Delta\varphi = 4\pi \frac{n_2}{n_1} \frac{e}{\lambda_1} = 2m\pi$ , de donde:

$$e_{\text{máx}} = m \frac{n_1 \lambda_1}{n_2 2} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Los mínimos se presentarán para  $\Delta\varphi = 4\pi \frac{n_2}{n_1} \frac{e}{\lambda_1} = (2m + 1)\pi$ , de donde:

$$e_{\text{mín}} = (2m + 1) \frac{n_1 \lambda_1}{n_2 4} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

b) Para mayor comodidad podemos llamar  $A = \frac{n_1 \lambda_1}{n_2 2}$ .

Los máximos se presentan para  $e = A, 2A, 3A, \dots$

Los mínimos se presentan para los valores  $e = A/2, 3A/2, 5A/2, \dots$

Por tanto, se pasa de un máximo al mínimo contigua cuando el espesor de la lámina cambia en:

$$\delta = \frac{A}{2} = \frac{n_1 \lambda_1}{n_2 4}$$

c) Para los valores del enunciado es:

$$\delta = \frac{1}{1,25} \frac{0,4}{4} = 0,08 \mu\text{m} = 8 \times 10^{-8} \text{ m}$$

### EJEMPLO 40.3

Se desea hacer un recubrimiento superficial para eliminar las pérdidas por reflexión de una radiación luminosa de  $\lambda = 0,52 \mu\text{m}$ , utilizando un material cuyo índice de refracción para esa longitud de onda es  $n_1 = 1,35$ . Calculemos el espesor que debe tener la capa de recubrimiento.

#### Solución:

La capa de recubrimiento actúa como una lámina de caras planas paralelas (Figura 40.17).

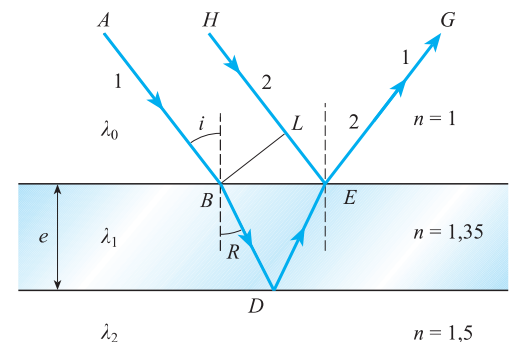


Figura 40.16.

Ahora los rayos incidentes 1 y 2, salen superpuestos y producirán interferencias. La diferencia de fase entre ambos se debe únicamente a la diferencia de camino recorrido, ya que el rayo 1 sufrirá un cambio de fase al reflejarse en  $D$  y el rayo 2 el mismo al reflejarse en  $E$ . Por tanto, la diferencia de fase entre ambos está dada por la [40.17]:

$$\Delta\varphi = 4\pi e \frac{n_1}{\lambda_0} \cos R \cong 4\pi e \frac{n_1}{\lambda_0}$$

Para que se dé un mínimo en la reflexión debe ser  $\cos \Delta\varphi = -1$ . Por tanto, debe ser:

$$\Delta\varphi \cong 4\pi e \frac{n_1}{\lambda_0} = (2m - 1)\pi$$

De donde:

$$e = (2m - 1) \frac{\lambda_0}{4n_1} \quad ; \quad e = \frac{\lambda_0}{4n_1} = \frac{0,54}{4 \times 1,35} = 0,1 \mu\text{m}$$

### 40.6 Anillos de Newton

Consideremos una lámina plana de vidrio, y colocada sobre ella, como se indica en la Figura 40.16, una lente plano-convexa de gran radio de curvatura,  $R$ .

El espacio de aire que queda entre la placa y la lente se comporta como una lámina de espesor  $e$  variable. Al ser iluminada por un haz monocromático extenso normal a la placa, aparecerán figuras de interferencia, que serán círculos concéntricos, cuyo centro está en el eje óptico de la lente. Este fenómeno de interferencia fue estudiado por vez primera por Newton, de ahí que lleve su nombre.

Entre el espesor  $e$  de la capa de aire en un punto  $P$ , el radio  $r$  del círculo menor correspondiente y el radio  $R$  de la superficie esférica que forma la lente se verifica la relación:

$$r^2 = (2R - e)e$$

Puesto que  $e$  es mucho menor que  $R$ , puede escribirse con suficiente aproximación:

$$r^2 = 2Re \tag{40.27}$$

Los puntos de máxima intensidad deberán verificar la [40.21] y los radios correspondientes están dados por:

$$r^2 = (2m + 1) R \frac{\lambda}{2} \tag{40.28}$$

Los puntos de intensidad nula verificarán la [41.22] y los correspondientes radios cumplirán:

$$r^2 = mR\lambda \tag{40.29}$$

El punto de contacto entre la placa y la lente,  $r = 0$ , es un punto de oscuridad. A partir de este, alternativamente se irán sucediendo círculos brillantes y oscuros.

Si en lugar de utilizar luz monocromática se utiliza luz blanca, aparecen anillos coloreados, ya que el máximo de cada color,  $\lambda$ , estará en una posición determinada.

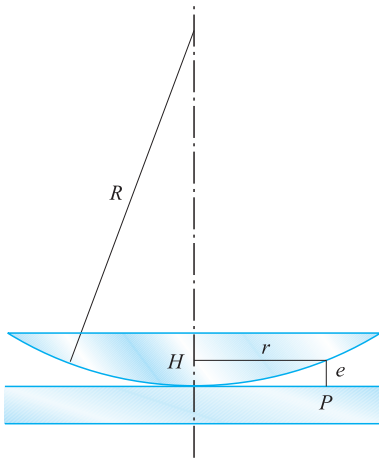


Figura 40.17. Anillos de Newton.

Condición de máximo

Condición de mínimo

## 40.7 Interferómetro de Michelson

Los interferómetros son instrumentos basados en los fenómenos de interferencias, que se utilizan para medir pequeñas longitudes con una gran precisión. Michelson (1852-1931) ideó el interferómetro que lleva su nombre, estando constituido esencialmente por dos espejos,  $E_1$  y  $E_2$ , cuyos planos son perpendiculares entre sí, uno de los cuales, el  $E_1$ , es fijo, siendo el  $E_2$  desplazable paralelamente a sí mismo mediante un tornillo micrométrico de gran precisión (Figura 40.18). Lleva también dos láminas,  $L_1$  y  $L_2$ , iguales, paralelas, formando ángulo de  $45^\circ$  con los espejos y con la cara de una de ellas, la de  $L_1$  más próxima a  $L_2$ , semiplataada, de forma que deja pasar la mitad de la luz incidente, reflejando la otra mitad.

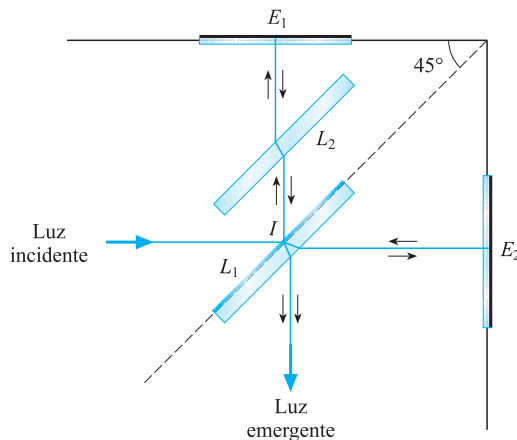


Figura 40.18. Interferómetro de Michelson.

La luz incide sobre la cara semiplataada de la lámina  $L_1$ , formándose dos rayos: uno reflejado, que sale en dirección normal al espejo  $E_1$ , y otro transmitido, que sale en dirección normal al espejo  $E_2$ . Ambos rayos son de igual intensidad, cuyo valor es la mitad de la del incidente. Al primero de ellos se le interpone la lámina  $L_2$ , con el fin que luego indicaremos. Una vez que los rayos llegan a los espejos son reflejados en la misma dirección normal de incidencia, volviendo ambos a incidir sobre la cara semiplataada de la lámina  $L_1$ . La mitad del rayo procedente de  $E_1$ , que es transmitida sale en la misma dirección que la mitad del proveniente de  $E_2$ , que es reflejada. Ambos rayos emergentes presentarán la misma intensidad, que será la cuarta parte de la correspondiente al rayo incidente.

Veamos cuál ha sido el camino seguido por cada uno de ellos a partir de  $I$ : uno es reflejado saliendo en dirección de  $E_1$ , atraviesa la lámina  $L_2$ , se refleja en  $E_1$ , vuelve a atravesar la lámina  $L_2$ , llega a  $I$ , se transmite a través de  $L_1$  y emerge; el otro atraviesa la lámina  $L_1$ , se refleja en  $E_2$ , vuelve a atravesar la lámina  $L_1$ , se refleja en  $I$  volviendo a atravesar la lámina  $L_1$  y emergiendo. En consecuencia, ambos rayos han seguido el mismo camino, para lo cual se introdujo la lámina  $L_2$ , su diferencia de marcha es nula y no habrá figuras de interferencia. Además, uno de los rayos ha sufrido una reflexión aire-vidrio y el otro una reflexión vidrio-aire, habrá, por tanto, entre ellos una diferencia de fase igual a  $\pi$ , y por tener ambos la misma intensidad se anulará la intensidad del rayo emergente, apareciendo oscuro el campo de visión.

Si el espejo  $E_2$  se desplaza paralelamente a sí mismo, la diferencia de marcha de los dos rayos emergentes es la misma que la creada por reflexión en la lámina de aire comprendida entre  $E_2$  y  $E_2'$ . Por ello, al utilizar luz monocromática, aparecerán anillos de interferencias. Al desplazar el espejo  $E_2$ , se observa que el centro va

volviéndose alternativamente claro y oscuro. Para pasar de una situación de oscuro o claro a la siguiente oscura o clara, respectivamente, hace falta que la trayectoria del rayo reflejado en  $E_2$  varíe en una longitud de onda, por tanto, el espejo debe moverse una distancia igual a media longitud de onda. Para medir distancias habrá que contar el número de mínimos o máximos de intensidad que se presentan en el recorrido de  $E_2$ .

Empleando la raya roja del cadmio, cuya longitud de onda es de  $6438 \text{ \AA}$ , Michelson, en 1893, estableció la comparación de esta longitud de onda con el metro patrón, y obtuvo la siguiente equivalencia.

$$1 \text{ m} = 1\,553\,164,13 \text{ longitudes de onda } \lambda_c$$

o bien,

$$\lambda_c = 6\,438\,469,6 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Ello permitió reemplazar el artificioso metro patrón, por un patrón natural más preciso y reproducible en todos los laboratorios.

El análisis de la raya roja del cadmio puso de manifiesto que no es lo simple que cabía pensar, ya que presenta una estructura hiperfina. Por ello, el Comité Internacional de Pesas y Medidas, en su reunión de 1957, recomendó adoptar para medidas de longitudes la raya roja-anaranjada del isótopo 86 del kriptón, cuya longitud de onda en el vacío es  $\lambda_k = 6\,057\,802,1 \text{ \AA}$ . Por convenio internacional, en el año 1961, se adoptó este nuevo patrón de longitud cuya relación con el metro es:

$$1 \text{ m} = 1\,650\,763,73 \text{ longitudes de onda } \lambda_{k86}$$

Actualmente, se ha definido la velocidad de la luz como valor exacto

Velocidad de la luz

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

## 40.8 Difracción

El fenómeno de la difracción de la luz fue descubierto por Grimaldi en 1665, al encontrar que la luz bordea los elementos opacos y aparece en zonas prohibidas por la teoría de la propagación rectilínea, y además, lo hace en bandas de distinta intensidad, por lo que el fenómeno, que Grimaldi denominó *difraccio*, presentaba gran similitud con las interferencias. El fenómeno de la difracción de la luz fue conocido por Huygens y Newton, pero no fue correctamente explicado hasta principios del siglo XIX por Fresnel.

La difracción es una propiedad común a todo movimiento ondulatorio y como tal fue definida en el Capítulo 27, habiéndose, así mismo, establecido allí los dos modos de difracción: de Fraunhofer y de Fresnel. La difracción de la luz se presenta siempre que iluminamos bordes de objetos opacos con fuentes puntuales monocromáticas, denominados de Fraunhofer o de campo lejano cuando la figura de difracción se observa desde puntos muy alejados, de forma que los rayos pueden considerarse paralelos. Si la figura de difracción se observa desde puntos próximos se llama de Fresnel o de campo cercano, en este caso los rayos no pueden considerarse paralelos, por lo que su estudio conlleva una mayor dificultad. Las figuras de difracción de Fraunhofer pueden también verse interponiendo una lente y situando una pantalla en el plano focal imagen de la lente.

Los instrumentos ópticos utilizan para la formación de las imágenes haces luminosos diafragmados, y como estos diafragmas suelen ser muy pequeños, pueden dar lugar a fenómenos de difracción que perjudicarán la calidad de la imagen. De aquí la importancia que tiene en óptica el estudio de la difracción.

Los fenómenos de difracción de la luz no se observan habitualmente de un modo natural, porque las fuentes naturales de luz ni son puntuales ni monocromáticas y las diversas longitudes de onda que componen la luz natural se superponen en los posibles fenómenos de difracción y los hacen menos perceptibles.

## 40.9 Difracción de Fraunhofer por una rendija

Consideremos una rendija de ancho  $d$ , a la cual llegan ondas planas monocromáticas, que en ella se expresan de la forma:

$$E = A \sin \omega t \quad [40.30]$$

Supongamos a la rendija dividida en infinito número de franjas de espesor  $dx$ . Todas ellas emitirán la misma onda de amplitud elemental, cuya expresión es:

$$dE = \frac{A}{d} dx \sin \omega t \quad [40.31]$$

Consideremos los rayos que salen según una cierta dirección, definida por su ángulo  $\theta$  con la normal a la rendija. La onda al llegar al punto  $P$  se expresa:

$$dE = \frac{A}{d} dx \sin(\omega t - kr)$$

En la cual  $r$  es la distancia desde la franja elemental de emisión hasta el punto  $P$ , que puede expresarse en función de la distancia  $R$  desde el centro de la rendija al punto  $P$  de la forma:

$$r = R - x \sin \theta$$

Con ello, la anterior se expresa:

$$dE = \frac{A}{d} \sin(\omega t - kR + kx \sin \theta) dx$$

El estado luminoso que provoca en  $P$ , puesto que el punto está muy alejado y los vectores pueden considerarse de la misma dirección, será la suma de sus módulos,

$$\begin{aligned} E &= \frac{A}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \sin(\omega t - kR + kx \sin \theta) dx = \frac{A}{d} \left[ -\frac{\cos(\omega t - kR + kx \sin \theta)}{k \sin \theta} \right]_{-d/2}^{d/2} = \\ &= \frac{A}{dk \sin \theta} \left[ \cos\left(\omega t - kR - \frac{kd}{2} \sin \theta\right) - \cos\left(\omega t - kR + \frac{kd}{2} \sin \theta\right) \right] = \\ &= \frac{2A}{dk \sin \theta} \sin\left(\frac{kd}{2} \sin \theta\right) \sin(\omega t - kR) \quad [40.32] \end{aligned}$$

Por tanto, la amplitud en  $P$  es:

$$A_P = \frac{2A}{dk \sin \theta} \sin\left(\frac{kd}{2} \sin \theta\right) = \frac{A\lambda}{\pi d \sin \theta} \sin\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta\right) \quad [40.33]$$

Si hacemos:

$$\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta = z \quad [40.34]$$

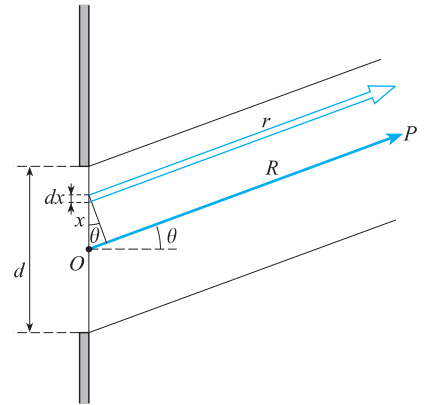


Figura 40.19. Difracción de Fraunhofer por una rendija.

la amplitud en  $P$  se escribe:

$$A_P = A \frac{\text{sen } z}{z} \tag{40.35}$$

Puesto que la intensidad es proporcional al cuadrado de las amplitudes, la intensidad en  $P$  será:

Intensidad

$$I_P = I_0 \left( \frac{\text{sen } z}{z} \right)^2 = I_0 \left[ \frac{\text{sen} \left( \frac{\pi d}{\lambda} \text{sen } \theta \right)}{\frac{\pi d}{\lambda} \text{sen } \theta} \right]^2 \tag{40.36}$$

Veamos ahora cuáles son las posiciones de los máximos y mínimos de intensidad y el valor de esta en esos puntos. Para ello, derivemos la [40.36] respecto a  $z$ :

$$\frac{dI}{dz} = 2I_0 \frac{\text{sen } z}{z} \cdot \frac{z \cos z - \text{sen } z}{z^2} \tag{40.37}$$

Por una parte, está derivada se anula cuando sea  $\text{sen } z = 0$ , siendo  $z \neq 0$ , lo que se verifica para:

$$z = m\pi \quad , \quad m = 1, 2, 3, \dots \tag{40.38}$$

En estos puntos la intensidad es nula,  $I_P = 0$ , son, por tanto, mínimos. Teniendo en cuenta la [40.34], la condición de mínimo se escribe:

$$\text{sen } \theta = m \frac{\lambda}{d} \quad \text{o} \quad \theta = \text{arcsen } m \frac{\lambda}{d} \quad , \quad m = 1, 2, 3, \dots \tag{41.39}$$

Por otra parte, la [41.37] se anula cuando sea  $z \cos z - \text{sen } z = 0$ . Es decir, cuando se verifique  $\text{sen } z = z \cos z$ , lo que puede resolverse gráficamente, representando, como se ha hecho en la Figura 40.20, las curvas  $y_1 = \text{sen } z$  e  $y_2 = z \cos z$ .

En la figura podemos observar que los valores solución son muy próximos a los dados por:

$$z = (2m + 1) \frac{\pi}{2} \quad , \quad m = 1, 2, 3, \dots \tag{40.40}$$

aproximándose cada vez más al aumentar  $m$ . En estos puntos, la intensidad es máxima, ya que al hallar la derivada segunda de  $I$  respecto de  $z$  y particularizar para ellos, resulta siempre negativa,

$$\frac{d^2 I}{dz^2} = -2I_0 \frac{\text{sen}^2 z}{z^2} < 0$$

El valor de la intensidad en estos máximos está dada por:

$$I_P = \frac{4I_0}{(2m + 1)^2 \pi^2} \quad , \quad m = 1, 2, 3, \dots \tag{40.41}$$

El valor  $z = 0$ , que excluimos en la [40.38], es un caso singular de máximo, ya que es:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\text{sen } z}{z} \rightarrow 1$$

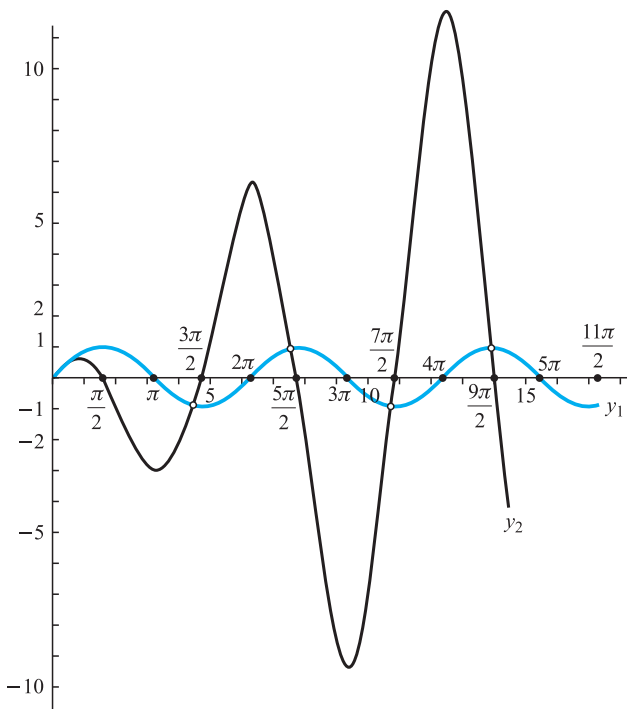


Figura 40.20.



y de [40.36] se deduce que la intensidad en  $P$  será máxima,  $I_P = I_O$ . De [40.34] se obtiene que este punto es el que corresponde a la dirección normal a la rendija,  $\theta = 0$ . La dirección de los restantes máximos está dada por:

$$\text{sen } \theta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2d} \quad \text{o} \quad \theta = \arcsen \left[ (2m + 1) \frac{\lambda}{2d} \right], \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad [40.42]$$

La variación de la intensidad, dada por [40.36] se ha representado en la Figura 40.21.

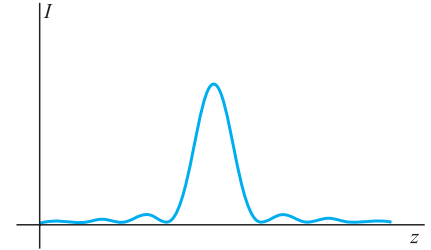


Figura 40.21. Intensidad función de  $z$ .

### 40.10 Límite de resolución o poder separador de una rendija

El concepto de *poder separador*, *poder de resolución* o *límite de resolución* fue introducido por Lord Rayleigh (1842-1919), como el *ángulo mínimo que debe existir entre dos ondas incidentes para que puedan distinguirse sus diagramas de difracción*. La distinción puede hacerse con toda seguridad cuando el máximo central de una de ellas se superpone al primer nulo de la otra, como se indica en la Figura 40.22.

Puesto que el primer mínimo de intensidad se presenta para el ángulo  $\theta$ , dado por la [41.39], en la que debe hacerse  $m = 1$  resulta:

$$\text{sen } \theta = \frac{\lambda}{d}$$

La cual, para pequeños ángulos puede escribirse,

$$\theta = \frac{\lambda}{d}$$

Este debe ser el menor ángulo que pueden formar las direcciones de dos ondas incidentes en la rendija, para que se distingan sus diagramas de difracción, y por tanto, es la expresión del límite de poder de reparador de la rendija.

Los puntos que se observen a través de una rendija se distinguirán como distintos, cuando los rayos provenientes de ellos incidan sobre la rendija formando entre sí un ángulo  $\theta = \frac{\lambda}{d}$  o mayor. En ello nada influye que se observen a simple vista o por medio de un microscopio de más o menos aumento. *El poder separador de una rendija es directamente proporcional a  $\lambda$  e inversamente proporcional a su anchura  $d$ .*

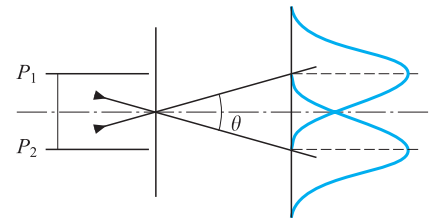


Figura 40.22. Límite de resolución.

### 40.11 Difracción de Fraunhofer por una abertura circular

Al incidir luz monocromática sobre una pantalla opaca, en la cual se ha practicado un pequeño orificio circular de radio  $R$  se producen fenómenos de difracción. Omitimos el tratamiento matemático, excesivamente complejo y por ello fuera de los objetivos de este texto, habiendo sido resuelto por vez primera por Airy, en 1834. Por la simetría del problema, las figuras de difracción serán anillos concéntricos, deduciéndose que la intensidad de iluminación de estos viene dada por la expresión:

$$I = I_O \left[ \frac{J_1(z)}{z} \right]^2 \quad [40.43]$$

En la que  $J_1(z)$  es la función de Bessel de primera especie de orden uno, siendo:

$$z = \frac{2\pi R \operatorname{sen} \theta}{\lambda}$$

Los mínimos de intensidad se presentan en los puntos donde se anula  $J_1(z)$ , el primero de los cuales está en  $z = 1,22\pi$ , de donde resulta:

$$\operatorname{sen} \theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad [40.44]$$

en la que  $D$  es el diámetro de la abertura.

La intensidad de los anillos luminosos disminuye muy rápidamente, encontrándose en el círculo central primero el 35 por ciento de la energía luminosa transmitida por la abertura.

De acuerdo con la definición de poder de resolución, la expresión [40.44] da el poder de resolución de la abertura circular, ya que los diagramas de difracción dados por ésta, de dos ondas planas provenientes de dos puntos diferentes se distinguen como distintos, cuando el centro del disco central de una de ellas cae sobre el primer nulo del otro.

Es evidente que, al disminuir la longitud de onda de la radiación utilizada, aumenta el poder de resolución, de aquí que en muchas ocasiones se utilice luz ultravioleta. Asimismo, el aumento del diámetro de la abertura aumenta el poder de resolución, de aquí los grandes radios de los espejos de los telescopios. Así el de Monte Palomar es de 5 m de diámetro, el cual, para una longitud media de la luz visible de 5000 Å, es capaz de distinguir dos estrellas como tales, cuando la luz proveniente de ellas forme un ángulo mínimo de:

$$\theta = 1,22 \frac{5000 \times 10^{-10}}{5} = 1,22 \times 10^{-7} \text{ rad}$$

## 40.12 Difracción de Fraunhofer por dos rendijas paralelas e iguales

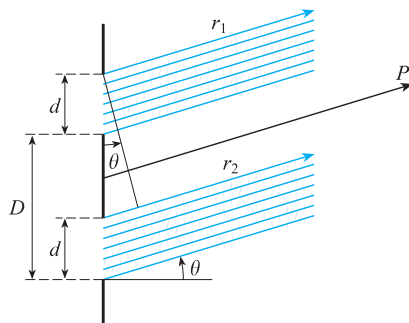


Figura 40.23. Difracción por dos rendijas.

Consideremos dos rendijas estrechas, de anchura  $d$ , paralelas con una separación  $D$  entre ellas (Figura 40.23). Al iluminarlas con luz coherente y producirse en ambas rendijas fenómenos de difracción, la luz difractada que sale de cada rendija interferirá con la de la otra. Estudiemos el fenómeno resultante para cada dirección definida por  $\theta$ .

La amplitud de la perturbación luminosa provocada por la luz difractada por cada rendija es la misma y está dada por la [40.35]:

$$A_p = A \frac{\operatorname{sen} z}{z} \quad [40.45]$$

Por otra parte, el defasaje entre cada dos rayos homólogos de una y otra rendija es:

$$\Delta\varphi = k(r_2 - r_1) = kD \operatorname{sen} \theta = \frac{2\pi}{\lambda} D \operatorname{sen} \theta \quad [40.46]$$

En consecuencia, la amplitud del estado luminoso será el módulo de la suma de dos vectores, cuyo módulo es igual, e igual al [40.45.] y que forman entre sí un ángulo  $\Delta\varphi$ .

En la Figura 40.24 se han representado los vectores y su suma geométrica, deduciéndose de ella que el valor de la amplitud verifica:

$$A^2 = 2A_p^2 + 2A_p^2 \cos \Delta\varphi = 4A_p^2 \cos^2 \left( \frac{kD}{2} \sin \theta \right)$$

Puesto que las intensidades son proporcionales a los cuadrados de las amplitudes, es:

$$I = 4I_p \cos^2 \left( \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta \right) = 4I_o \left[ \frac{\text{sen} \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}{\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta} \right]^2 \cos^2 \left( \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta \right) \quad [40.47]$$

Si en esta ecuación se hace  $d = 0$ , se reduce a la [40.13], que da las interferencias producidas por dos estrechas rendijas. Si se hace  $D = 0$ , el problema se reduce a una sola abertura de ancho  $d$  y la ecuación se reduce a la [40.36], que da la difracción por una rendija. En la Figura 40.25 se ha representado la Ecuación [40.47].

Los máximos de intensidad se presentarán para  $\Delta\varphi = m2\pi$ , ya que todos los vectores, al ser situados para la suma geométrica, tendrán la misma dirección y sentido, y utilizando el valor de la [40.46], es  $\frac{2\pi D}{\lambda} \sin \theta = m2\pi$ , de donde resulta para la posición de los máximos:

$$\text{sen } \theta = m \frac{\lambda}{D} = 0, \frac{\lambda}{D}, \frac{2\lambda}{D}, \frac{3\lambda}{D}, \dots \leq 1 \quad [40.48]$$

Los mínimos, de intensidad nula,  $I_p = 0$ , se presentarán para,

$$\frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta = (2m + 1) \frac{\pi}{2}, \quad \text{sen } \theta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2D} < 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad [40.49]$$

y

$$\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta = m\pi, \quad \text{sen } \theta = m \frac{\lambda}{d} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad [40.50]$$

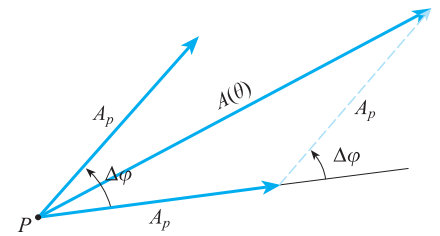


Figura 40.24. Superposición en P.

Intensidad

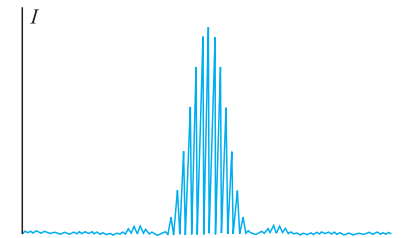


Figura 40.25. Intensidad función de la dirección

### 40.13 Redes de difracción

Consideremos ahora una pantalla opaca con  $N$  rendijas iguales de ancho  $d$ , paralelas entre sí, con una separación  $D$ , e iluminadas con luz monocromática plana (Figura 40.26). Todas las rendijas difractarán la onda que les llega y la amplitud de la onda en un punto  $P$  muy lejano, en una cierta dirección  $\theta$ , que está dada por la [40.35].

$$A_i = A_o \frac{\text{sen } z}{z}$$

El desfase entre las ondas emitidas por dos rendijas contiguas es constante,

$$\Delta\varphi = k(r_{i+1} - r_i) = kD \text{sen } \theta = \frac{2\pi}{\lambda} D \text{sen } \theta \quad [40.51]$$

Por tanto, se trata de sumar  $N$  vectores de igual módulo,  $A_i$ , y defasados cada uno del siguiente en  $\Delta\varphi$ . En la Figura 40.27 se han dispuesto los vectores para realizar su suma geométrica.

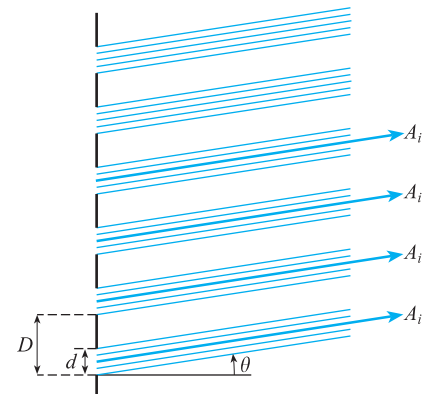


Figura 40.26. Red de difracción.

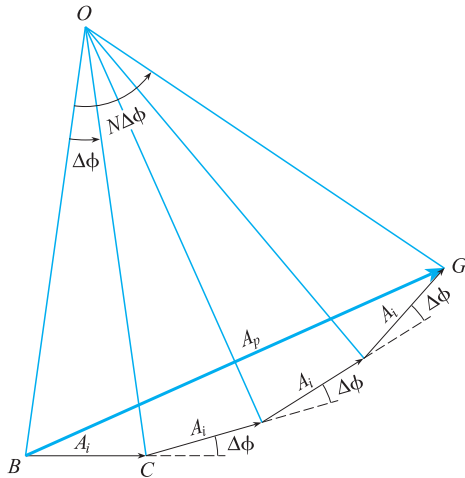


Figura 40.27. Amplitud resultante en P.

El ángulo  $BOG$  es  $N\Delta\varphi$  y la amplitud resultante  $A_p$ , se calcula fácilmente en el triángulo  $BOG$ ,

$$A_p = 2R \operatorname{sen} \frac{N\Delta\varphi}{2}$$

El valor del módulo de los vectores se obtiene en el triángulo  $BOC$ , cuyo ángulo en  $O$  es  $\Delta\varphi$ ,

$$A_i = 2R \operatorname{sen} \frac{\Delta\varphi}{2}$$

Eliminando  $2R$  entre las dos últimas ecuaciones, resulta:

$$A_p = A_i \frac{\operatorname{sen} \frac{N\Delta\varphi}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\Delta\varphi}{2}} = A_o \frac{\operatorname{sen} z}{z} \frac{\operatorname{sen} \frac{N\Delta\varphi}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\Delta\varphi}{2}}$$

Puesto que las intensidades son proporcionales a los cuadrados de las amplitudes, la intensidad de la figura de difracción en  $P$  creada por las  $N$  rendijas se expresa:

Intensidad  $I_P = I_o \left(\frac{\operatorname{sen} z}{z}\right)^2 \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{N\Delta\varphi}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\Delta\varphi}{2}}\right)^2 = I_o \left[\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta\right)}{\frac{\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta}\right]^2 \left[\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{N\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta\right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi D}{\lambda} \operatorname{sen} \theta\right)}\right]^2$  [40.52]

Hay máximos de intensidad, al igual que en el caso de interferencias por varias rendijas, cuando todos los vectores tienen la misma dirección y sentido, es decir, cuando el desfase, dado por la [40.51] es igual a  $2m\pi$

Máximos principales

$$\frac{2\pi}{\lambda} D \operatorname{sen} \theta = 2m\pi, \quad \operatorname{sen} \theta = m \frac{\lambda}{D}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$
 [40.53]

A estos máximos se les denomina principales. La amplitud de la onda resultante en  $P$  será la suma de las amplitudes de las ondas que llegan de cada rendija,

$$A_p = NA = NA_o \frac{\operatorname{sen} z}{z}$$

Por tanto, la intensidad de los máximos en  $P$  será:

$$I_M = N^2 I_o \frac{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta\right)}{\left(\frac{\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta\right)^2} = N^2 I_o \frac{\operatorname{sen}^2 \left(m\pi \frac{d}{D}\right)}{\left(m\pi \frac{d}{D}\right)^2}, \quad md \neq hD$$
 [40.54]

La intensidad presenta mínimos, es decir, se anula cuando se verifica:

Mínimos

$$\frac{N\pi D}{\lambda} \operatorname{sen} \theta = m\pi, \quad \operatorname{sen} \theta = m \frac{\lambda}{ND} < 1, \quad m \neq hN$$
 [40.55]

Por tanto, entre el máximo principal de orden cero y el máximo principal de orden uno, hay  $N - 1$  mínimos de intensidad nula, y en consecuencia, habrá  $N - 2$

máximos, que se denominan secundarios y cuya intensidad es muy pequeña comparada con la de los principales. Lo mismo sucederá entre dos máximos consecutivos cualesquiera, así entre el máximo de orden  $k$  y el de orden  $k + 1$ , los mínimos están dados por la expresión:

$$\text{sen } \theta = k \frac{\lambda}{D} + k_1 \frac{\lambda}{ND} \quad [40.56]$$

En la Figura 40.28 se ha representado para  $N = 6$  y  $\frac{D}{d} = 8$ , la intensidad [40.52].

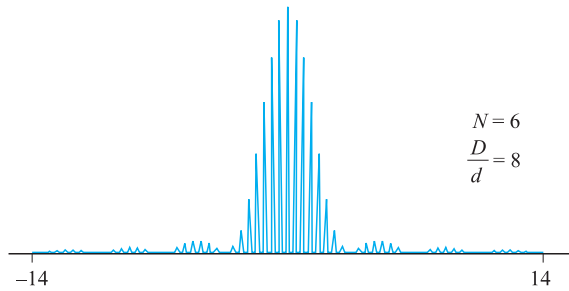


Figura 40.28. Intensidad función de la dirección.

El dispositivo descrito, y cuya difracción a través de él hemos estudiado, se denomina *red de difracción por transmisión*. Estas redes se construyen grabando líneas sobre un vidrio mediante una punta de diamante, los espacios entre líneas dejan pasar la luz, pero no aquellos rayados por la punta. Otras redes se consiguen grabando de igual forma líneas, pero sobre una superficie reflectora denominándose a éstas *redes de reflexión*, en las que los espacios entre líneas reflejan la luz, pero no los rayados.

#### 40.14 Dispersión y poder de resolución de una red

Supongamos ahora que la red no es iluminada con luz monocromática, sino con luz compuesta de varias longitudes de onda. Los máximos de intensidad, dados por la [40.52], salvo para  $m = 0$ , que es para cualquier longitud de onda, aparecen separados según las diferentes longitudes de onda incidentes. Así, para cada valor de  $m$  aparecerán tantos máximos como longitudes de onda diferentes existan en la luz incidente, constituyendo el espectro de  $m$ -ésimo orden. De [40.52] se deduce que, dentro de un mismo orden espectral, las mayores longitudes de onda son más desviadas, definiéndose la dispersión de una red como la variación de ángulo de desviación con la longitud de onda  $\frac{d\theta}{d\lambda}$ , cuya expresión se deduce sin más que diferenciar la [40.52], dando:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{\lambda}{D \cos \theta} \quad [40.57]$$



### 41.1

## Estado de polarización de una onda electromagnética

Definiremos el estado de polarización de una onda electromagnética de acuerdo con la proyección de su campo eléctrico sobre un plano perpendicular a la dirección de su propagación. Los estados más frecuentes de polarización son: *polarización lineal*, en la cual la proyección del extremo del vector campo eléctrico sobre un plano perpendicular a la dirección de propagación se mantiene sobre una recta fija; *polarización circular*, en la cual la proyección del extremo del vector campo eléctrico sobre el citado plano describe una circunferencia, y *polarización elíptica*, cuando la proyección del extremo del referido vector sobre el plano perpendicular a la dirección de propagación describe una elipse. Los dos primeros casos son situaciones particulares de este último.

Tomaremos el eje  $OZ$  según la dirección de propagación de la onda y el plano  $XY$  será normal a esa dirección. En el caso de una *onda polarizada linealmente* que se propaga según el eje  $OZ$ , las componentes del campo eléctrico están en fase (Figura 41.1).

$$E_x = E_1 \sin(kx - \omega t) \quad \text{y} \quad E_y = E_2 \sin(kx - \omega t)$$

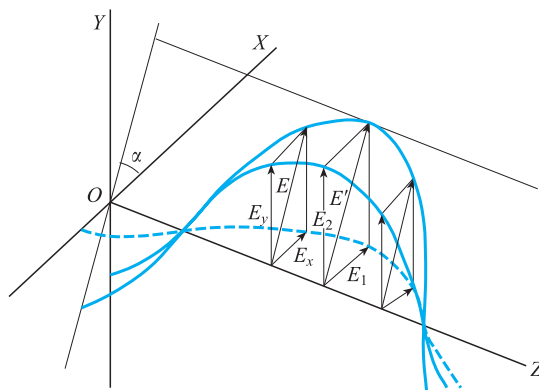


Figura 41.1. Onda polarizada linealmente.

- 41.1. Estado de polarización de una onda electromagnética
- 41.2. Reflexión y refracción de la luz polarizada linealmente. Relaciones de Fresnel
- 41.3. Cambio de fase en la reflexión
- 41.4. Factores de reflectancia y transmitancia
- 41.5. Polarización por reflexión. Ley de Brewster
- 41.6. Propagación de ondas electromagnéticas en un medio anisótropo. Birrefringencia
- 41.7. Transmisión de ondas electromagnéticas en láminas de caras planas y paralelas de cristales uniáxicos. Doble refracción
- 41.8. Polarización por absorción. Dicroísmo
- 41.9. Cristal analizador. Ley de Malus
- 41.10. Cambio del estado de polarización, láminas de cuarto de onda y de media onda
- 41.11. Dispersión
- 41.12. Polarización cromática. Fotoelasticidad
- 41.13. Actividad óptica

Por tanto, se verifica  $\frac{E_y}{E_x} = \frac{E_2}{E_1} = \text{cte} = \tan \alpha$  y el vector campo eléctrico está siempre contenido en el plano de polarización, cuya ecuación es  $y = \frac{E_2}{E_1} x = \tan \alpha \cdot x$ .

El vector campo eléctrico tendrá su extremo sobre la recta  $y = \frac{E_2}{E_1} x = \tan \alpha \cdot x$ , contenida en el plano  $z = 0$ .

**Polarización circular**

En el caso de una *onda polarizada circularmente*, cuya dirección de propagación es el eje  $OZ$  (Figura 41.2), las componentes del campo eléctrico deben ser:

$$E_x = E \sin(kz - wt) \quad , \quad E_y = E \sin\left(kz - wt + \frac{\pi}{2}\right) = E \cos(kz - wt)$$

De esta forma es  $E_x^2 + E_y^2 = E^2$  y la dirección del extremo del vector campo eléctrico sobre el plano  $XY$ , normal a la dirección de propagación, describe una circunferencia. Por tanto, la onda polarizada circularmente puede interpretarse como la superposición de dos ondas polarizadas linealmente, cuyos planos de polarización son perpendiculares entre sí, que están defasadas en ángulo  $\pi/2$ .

**Polarización elíptica**

Una *onda polarizada elípticamente*, en el sistema de referencia en que venimos trabajando, que se ha representado en la Figura 41.3, debe tener por componentes del campo eléctrico:

$$E_x = E_1 \sin(kz - wt) = E_1 \sin \beta$$

$$E_y = E_2 \sin(kz - wt + \varphi) = E_2 \sin(\beta + \varphi)$$

De esa forma, al eliminar  $\beta$  resulta:

$$\frac{E_x^2}{E_1^2} + \frac{E_y^2}{E_2^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_1 E_2} \cos \varphi - \sin^2 \varphi = 0 \tag{41.1}$$

Ecuación que corresponde a una elipse en el plano  $z = 0$ . Por ello, una onda polarizada elípticamente puede interpretarse como la superposición de dos ondas polarizadas linealmente, cuyos planos de polarización son perpendiculares entre sí y están defasadas un ángulo  $\varphi$ .

Dentro de este caso general quedan incluidos los dos vistos anteriormente. Así, para  $\varphi = 0$ , la Ecuación [41.1] se reduce a:

$$\frac{E_x^2}{E_1^2} + \frac{E_y^2}{E_2^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_1 E_2} = 0$$

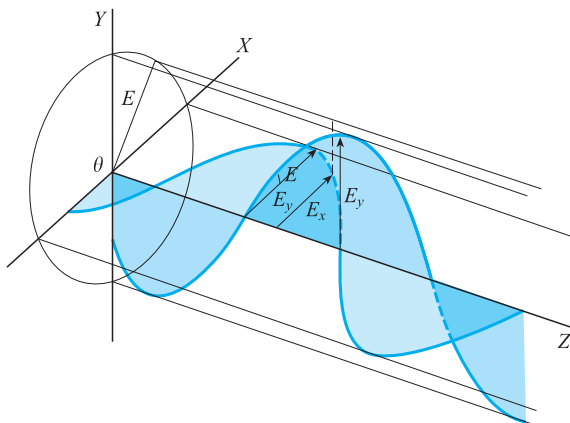


Figura 41.2. Onda polarizada circularmente.

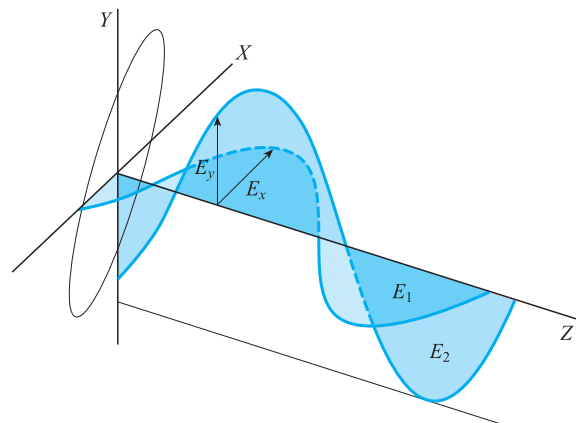


Figura 41.3. Onda polarizada elípticamente.



Al multiplicarla por  $\frac{E_1 E_2}{E_x E_y}$ , resulta:

$$\frac{E_x}{E_y} \cdot \frac{E_2}{E_1} + \frac{E_y}{E_x} \cdot \frac{E_1}{E_2} = 2$$

La única solución es  $\frac{E_x}{E_y} \cdot \frac{E_2}{E_1} = 1$ , que es la condición de la onda polarizada linealmente.

En el caso particular de ser  $E_1 = E_2 = E$  y  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , la Ecuación [41.1] se reduce a:

$$\frac{E_x^2}{E^2} + \frac{E_y^2}{E^2} - 1 = 0,$$

que es la ecuación de una onda polarizada circularmente.

En la luz natural, que procedente de un manantial luminoso se propaga en una cierta dirección, la proyección sobre el plano normal a esta dirección del vector  $\mathbf{E}$ , presenta como igualmente probables todas las posiciones posibles, diciéndose que es luz no *polarizada*, si bien es más adecuado llamarla simplemente *luz natural*, ya que esta está compuesta por numerosos estados de luz polarizada que cambian muy rápidamente.

La polarización de ondas electromagnéticas puede producirse mediante cuatro fenómenos físicos: reflexión, birrefringencia, absorción y dispersión, cada uno de los cuales analizaremos a continuación.

## 41.2 Reflexión y refracción de la luz polarizada linealmente. Relaciones de Fresnel

Sean dos medios transparentes, de índices de refracción  $n_1$  y  $n_2$ ,  $n_2 > n_1$ , separados por una superficie plana sobre la que incide luz polarizada linealmente (Figura 41.4). Consideremos el rayo que incide en el punto  $O$  con un ángulo de incidencia  $i$ . Cualquier caso posible de onda incidente polarizada linealmente puede reducirse a dos: que el campo eléctrico esté contenido en el plano de incidencia y el campo, magnético normal, o bien, que éste sea el contenido en el plano de incidencia y el campo eléctrico sea normal a él.

### Campo eléctrico incidente contenido en el plano de incidencia

En las Figuras 41.4 y 41.5 se han representado los campos eléctrico y magnético de los rayos incidente, reflejado y refractado, respectivamente.

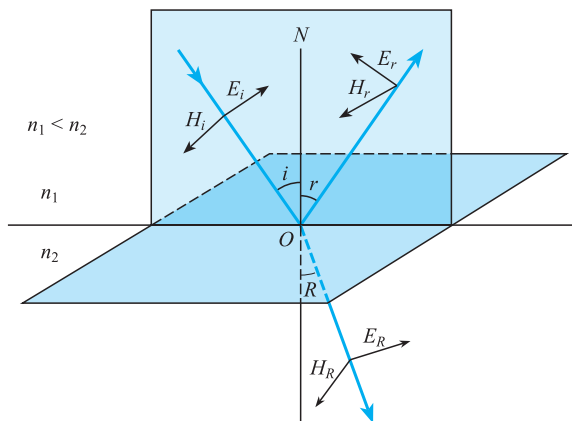


Figura 41.4. Onda incidente, reflejada y refractada.

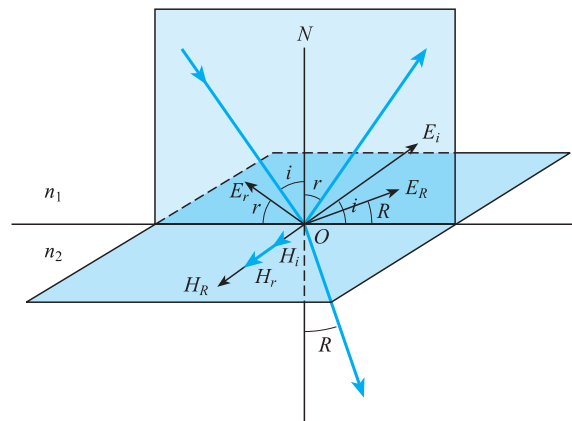


Figura 41.5. Campos eléctrico y magnético en  $O$  de las tres ondas.

En el punto  $O$  deberán verificarse las condiciones en los límites, que para las componentes sobre la superficie de separación son:

$$E_i \cos i - E_r \cos r = E_R \cos R$$

$$H_i + H_r = H_R$$

Teniendo en cuenta la ley de la reflexión,  $i = r$ , la primera se escribe:

$$(E_i - E_r) \cos i = E_R \cos R \quad [41.2]$$

Teniendo en cuenta la [36.39],  $\sqrt{\varepsilon} E = \sqrt{\mu} H$ , la segunda se escribe:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (E_i + E_r) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_R \quad [41.3]$$

Multiplicando la anterior por  $\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ , resulta:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\mu_{r1}}} (E_i + E_r) = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\mu_{r2}}} E_R \quad [41.4]$$

El índice de refracción dado por la [37.4],  $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$ , puesto que para todo dieléctrico no ferromagnético es  $\mu \approx \mu_0$ ,  $\mu_r = 1$ , se podrá escribir  $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ . Lo que permite escribir la [41.4] de la forma:

$$n_1(E_i + E_r) = n_2 E_R$$

Teniendo en cuenta la ley de la refracción,  $n_1 \sin i = n_2 \sin R$ , es:

$$(E_i + E_r) \sin R = E_R \sin i \quad [41.5]$$

Las Ecuaciones [41.2] y [41.5] nos permiten expresar  $E_r$  y  $E_R$  en función de  $i$ ,  $R$  y  $E_i$  obteniéndose:

Campo eléctrico reflejado  $E_r = \frac{\sin i \cdot \cos i - \sin R \cdot \cos R}{\sin i \cdot \cos i + \sin R \cdot \cos R} E_i = \frac{\cos(i+R) \cdot \sin(i-R)}{\sin(i+R) \cdot \cos(i-R)} E_i = \frac{\operatorname{tg}(i-R)}{\operatorname{tg}(i+R)} E_i$  \* [41.6]

Campo eléctrico refractado  $E_R = \frac{2 \sin R \cdot \cos i}{\sin R \cdot \cos R + \sin i \cdot \cos i} E_i = \frac{2 \sin R \cdot \cos i}{\sin(i+R) \cdot \cos(i-R)} E_i$  \* [41.7]

Utilizando la [36.39] y la [41.6] se deduce  $H_r$

Campo magnético reflejado  $H_r = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}} E_r = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}} \frac{\operatorname{tg}(i-R)}{\operatorname{tg}(i+R)} E_i = \frac{\operatorname{tg}(i-R)}{\operatorname{tg}(i+R)} H_i$  [41.8]

\* El paso en la segunda igualdad puede resultar complicado, puede hacerse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \sin i \cdot \cos i (\sin^2 R + \cos^2 R) + \sin R \cdot \cos R (\sin^2 i + \cos^2 i) = \\ & = \sin i \cdot \sin R (\cos i \sin R + \cos R \sin i) + \cos i \cos R (\sin i \cos R + \sin R \cos i) = \sin(i+R) \cos(i-R) \end{aligned}$$

Análogamente, el valor de  $H_R$  se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 H_R &= \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_0}} E_R = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_0}} \frac{2 \operatorname{sen} R \cdot \cos i}{\operatorname{sen}(i+R) \cdot \cos(i-R)} E_i = \\
 &= \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_0}} \frac{2 \operatorname{sen} R \cdot \cos i}{\operatorname{sen}(i+R) \cdot \cos(i-R)} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1}} H_i = \frac{n_2}{n_1} \frac{2 \operatorname{sen} R \cdot \cos i}{\operatorname{sen}(i+R) \cdot \cos(i-R)} H_i = \\
 &= \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} R} \frac{2 \operatorname{sen} R \cdot \cos i}{\operatorname{sen}(i+R) \cdot \cos(i-R)} H_i = \frac{\operatorname{sen} 2i}{\operatorname{sen}(i+R) \cdot \cos(i-R)} H_i \quad [41.9] \quad \text{Campo magnético refractado}
 \end{aligned}$$

### Campo eléctrico incidente normal al plano de incidencia

En la Figura 41.6 se han representado los campos eléctrico y magnético de las ondas incidente, reflejada y refractada cuando el campo eléctrico incidente es normal al plano de incidencia.

Las condiciones límite para las componentes de esos campos sobre la superficie de separación son:

$$E_i + E_r = E_R \quad [41.10]$$

$$H_i \cos i - H_r \cos \hat{r} = H_R \cos R \quad [41.11]$$

Análogamente a como se hizo para el caso anterior, teniendo en cuenta la [36.39] y la [37.4], la [41.10] se transforma en:

$$n_2(H_i + H_r) = n_1 H_R$$

Por la ley de la refracción, se escribe:

$$(H_i + H_r) \operatorname{sen} i = H_R \operatorname{sen} R \quad [41.12]$$

La [41.11], con sólo tener en cuenta la ley de la reflexión, se escribe:

$$(H_i - H_r) \cos i = H_R \cos R \quad [41.13]$$

Las Ecuaciones [41.12] y [41.13] nos permiten expresar  $H_r$  y  $H_R$  en función de  $i$ ,  $R$  y  $H_i$  obteniéndose:

$$H_r = \frac{\operatorname{tg} R - \operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} R + \operatorname{tg} i} H_i = \frac{\operatorname{sen}(R-i)}{\operatorname{sen}(R+i)} H_i \quad [41.14] \quad \text{Campo magnético reflejado}$$

$$H_R = \frac{\operatorname{sen} 2i}{\operatorname{sen}(i+R)} H_i \quad [41.15] \quad \text{Campo magnético refractado}$$

Utilizando la [36.39] y las [41.14] y [41.15] se obtiene  $E_r$  y  $E_R$ :

$$E_r = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} H_r = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \frac{\operatorname{sen}(R-i)}{\operatorname{sen}(R+i)} H_i = \frac{\operatorname{sen}(R-i)}{\operatorname{sen}(R+i)} E_i \quad [41.16] \quad \text{Campo eléctrico reflejado}$$

$$\begin{aligned}
 E_R &= \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} H_R = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \frac{\operatorname{sen} 2i}{\operatorname{sen}(i+R)} H_i = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \frac{\operatorname{sen} 2i}{\operatorname{sen}(i+R)} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_i = \\
 &= \frac{n_1}{n_2} \frac{\operatorname{sen} 2i}{\operatorname{sen}(i+R)} E_i = \frac{\operatorname{sen} R}{\operatorname{sen} i} \frac{\operatorname{sen} 2i}{\operatorname{sen}(i+R)} E_i = \frac{2 \operatorname{sen} R \cdot \cos i}{\operatorname{sen}(i+R)} E_i \quad [41.17] \quad \text{Campo eléctrico refractado}
 \end{aligned}$$

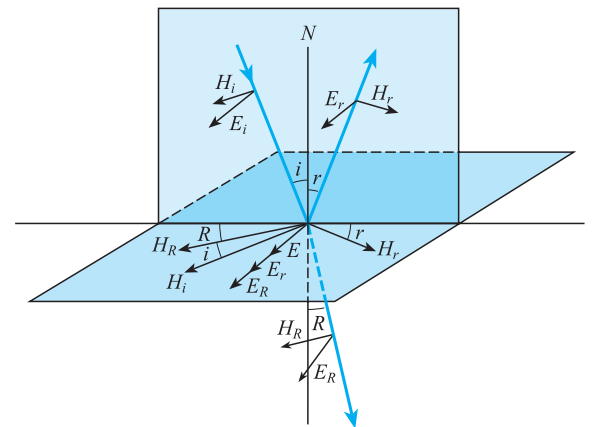


Figura 41.6. Campos eléctrico y magnético de las tres ondas.

En la Tabla 41.1 se presentan ordenadas las expresiones obtenidas, que son conocidas como relaciones de Fresnel.

**Tabla 41.1.** Reflexión y refracción de ondas polarizadas linealmente.

$E_i$ contenido en el plano de incidencia, $E_i = E_{iI}$		$E_i$ normal al plano de incidencia, $E_i = E_{iN}$	
$E_{rI} = \frac{\tan(i - R)}{\tan(i + R)} E_{iI}$	[41.6]	$E_{rN} = \frac{\sen(R - i)}{\sen(R + i)} E_{iN}$	[41.14]
$E_{RI} = \frac{2 \sen R \cos i}{\sen(i + R) \cos(i - R)} E_{iI}$	[41.7]	$E_{RN} = \frac{2 \sen R \cos i}{\sen(i + R)} E_{iN}$	[41.15]
$H_{rN} = \frac{\tan(i - R)}{\tan(i + R)} H_{iN}$	[41.8]	$H_{rI} = \frac{\sen(R - i)}{\sen(R + i)} H_{iI}$	[41.16]
$H_{RN} = \frac{\sen 2i}{\sen(i + R) \cos(i - R)} H_{iN}$	[41.9]	$H_{RI} = \frac{\sen 2i}{\sen(i + R)} H_{iN}$	[41.17]

Cuando la onda incidente polarizada linealmente no tenga a su vector campo eléctrico ni contenido en el plano de incidencia, ni normal a él, podrá descomponerse aquél en dos componentes: una sobre el plano de incidencia  $E_{iI}$ , y otra normal a él,  $E_{iN}$ . A la primera le serán de aplicación las Ecuaciones [41.6], [41.7], [41.8] y [41.9], y a la segunda las [41.14], [41.15], [41.16] y [41.17], obteniéndose las componentes sobre el plano de incidencia y la normal a él de los vectores campo eléctrico y magnético, reflejados y refractados, como suma de las correspondientes.

### 41.3 Cambio de fase en la reflexión

La luz polarizada linealmente, al reflejarse, puede sufrir un cambio de fase igual a  $\pi$ , lo que puede analizarse a partir de las ecuaciones de Fresnel.

Puesto que tanto  $i$  como  $R$  son siempre menores que  $\pi/2$ , las Expresiones (41.7) y (41.15) son siempre positivas y nunca habrá cambio de fase en la luz transmitida.

Para la luz reflejada pueden presentarse cuatro casos distintos, según que el campo  $E$  incidente esté contenido o sea normal al plano de incidencia y, a su vez, que el índice de refracción del primer medio sea mayor o menor que el del segundo.

- a) Luz incidente con  $E$  contenido en el plano de incidencia:
- a.1)  $n' > n$ . En este caso siempre será  $i > R$  y el numerador de la [41.6] siempre positivo. El denominador será positivo siempre que sea  $i + R < \pi/2$  y no habrá cambio de fase en la reflexión. Por el contrario, siempre que sea  $i + R > \pi/2$ , el denominador de la [41.6] se hace negativo y se produce un cambio de fase igual a  $\pi$ .
- a.2)  $n' < n$ . En este caso será  $R > i$  y el numerador de [41.6] siempre negativo. Por tanto, si es  $i + R > \pi/2$ , el denominador también será negativo y no habrá cambio de fase en la reflexión; por el contrario, si en  $i + R < \pi/2$ , el denominador de la [41.6] será positivo y habrá un cambio de fase igual a  $\pi$ .

- b) Luz incidente con  $E$  perpendicular al plano de incidencia.
- b.1)  $n' > n$ . En este caso será  $R < i$ , y el numerador de la [41.14] siempre negativo. Como siempre es  $i + R < \pi$ , habrá cambio de fase igual a  $\pi$  en la luz reflejada.
- b.2)  $n' < n$ . Ahora será  $R > i$  y el numerador de [41.14] positivo, no habiendo cambio de fase en la luz reflejada.

### 41.4 Factores de reflectancia y transmitancia

La intensidad transportada por la onda electromagnética podemos expresarla de la forma  $S = EH = c\epsilon E^2$ . La intensidad transportada por la onda incidente,  $S_i = v_1\epsilon_1 E_i^2$ , puesto que no existe absorción en la superficie de separación, se distribuye entre la onda reflejada,  $S_r = v_1\epsilon_1 E_r^2$ , y la onda refractada,  $S_R = v_2\epsilon_2 E_R^2$ .

Se define el factor de *reflectancia* como el cociente entre la intensidad reflejada y la incidente,  $R = \frac{S_r}{S_i}$ . Por tanto, habrá una reflectancia cuando el campo eléctrico de la onda incidente está contenido en el plano de incidencia,  $R_I$ , y otra en el caso de que sea normal a este plano,  $R_N$ , cuyas expresiones, respectivamente, son:

$$R_I = \frac{S_{rI}}{S_{iI}} = \frac{E_{rI}^2}{E_{iI}^2} = \frac{\tan^2(i - R)}{\tan^2(i + R)} \quad [41.18] \quad \text{Reflectancia incidente}$$

$$R_N = \frac{S_{rN}}{S_{iN}} = \frac{E_{rN}^2}{E_{iN}^2} = \frac{\text{sen}^2(R - i)}{\text{sen}^2(i + R)} \quad [41.19] \quad \text{Reflectancia normal}$$

Al no haber absorción en la superficie de separación de los medios, deben ser:

$$R_I + T_I = 1 \quad \text{y} \quad R_N + T_N = 1$$

por tanto, las *transmitancia* son, respectivamente:

$$T_I = 1 - R_I = 1 - \frac{\tan^2(i - R)}{\tan^2(i + R)} = \frac{\text{sen } 2i \text{ sen } 2R}{\text{sen}^2(i + R) \cos^2(i - R)} \quad [41.20] \quad \text{Transmitancia incidente}$$

$$T_N = 1 - R_N = 1 - \frac{\text{sen}^2(R - i)}{\text{sen}^2(i + R)} = \frac{\text{sen } 2i \text{ sen } 2R}{\text{sen}^2(i + R)} \quad [41.21] \quad \text{Transmitancia normal}$$

En el caso de ser el ángulo de incidencia muy pequeño, los senos y las tangentes serán infinitésimos equivalentes a sus ángulos y, además, la ley de Snell se expresará  $n_1 i = n_2 r$ , con lo cual son:

$$R'_I = \frac{(i - R)^2}{(i + R)^2} = \left( \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad ; \quad R'_N = \frac{(R - i)^2}{(R + i)^2} = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

$$T'_I = \frac{2i \ 2R}{(i + R)^2} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \quad ; \quad T'_N = \frac{2i \ 2R}{(i + R)^2} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

Por tanto, en este caso particular, son:  $R_I = R_N$  y  $T_I = T_N$ .

\* La deducción de la expresión final puede resultar dificultosa, puede hacerse de la siguiente forma:

$$T_I = 1 - \frac{\text{sen}^2(i - R) \cos^2(i + R)}{\cos^2(i - R) \text{sen}^2(i + R)} = \frac{\text{sen}^2(i + R)[1 - \text{sen}^2(i - R)] - \text{sen}^2(i - R)[1 - \text{sen}^2(i + R)]}{\cos^2(i - R) \text{sen}^2(i + R)} =$$

$$= \frac{\text{sen}^2(i + R) - \text{sen}^2(i - R)}{\cos^2(i - R) \text{sen}^2(i + R)} = \frac{[\text{sen}(i + R) + \text{sen}(i - R)][\text{sen}(i + R) - \text{sen}(i - R)]}{\cos^2(i - R) \text{sen}^2(i + R)} =$$

$$= \frac{2 \text{sen } i \cos R \ 2 \cos i \text{ sen } R}{\cos^2(i - R) \text{sen}^2(i + R)} = \frac{\text{sen } 2i \text{ sen } 2R}{\cos^2(i - R) \text{sen}^2(i + R)}$$

**EJEMPLO 41.1**

Sobre una lámina de vidrio ( $n_2 = 1,5$ ), situada en el aire ( $n_1 = 1$ ) incide un haz de luz polarizada, con un ángulo de incidencia  $i = 40^\circ$  y llevando su campo eléctrico contenido en el plano de incidencia. Calculemos los factores de reflectancia y transmitancia.

**Solución:**

Aplicando la ley de Snell:  $1 \sin 40^\circ = 1,5 \sin R$ , de donde  $R = 25^\circ,373994$ .

Con ello son:  $i - R = 14^\circ,626006$  e  $i + R = 65,373994$  y los valores de las tangentes, respectivamente,

$$\tan(i - R) = 0,2609652 \quad \text{y} \quad \tan(i + R) = 2,1815728$$

Con ello la [42.18] nos da  $R_r = 0,0143095$  y la [42.20]  $T_t = 0,9856904$ .

Como comprobación puede establecerse su suma  $R_r + T_t = 0,999$ .

**41.5 Polarización por reflexión. Ley de Brewster**

Cuando la luz natural incide sobre una superficie, la luz reflejada está parcialmente polarizada, dependiendo del ángulo de incidencia y de los índices de refracción de ambos medios. Las componentes del campo eléctrico sobre el plano de incidencia de las ondas electromagnéticas reflejadas, se obtienen por aplicación de la ecuación [41.6]. Para un determinado valor del ángulo de incidencia,  $i_p$ , el campo eléctrico de las ondas reflejadas no tendrá componente sobre el plano de incidencia, resultando ondas reflejadas polarizadas linealmente en el plano de polarización normal al de incidencia (Figura 41.7). Para que ello suceda, se deduce de la [41.6], que deberá verificarse:

$$i_p + R = \frac{\pi}{2}$$

Con ello, la ley de la refracción se escribe:

$$n_1 \sin i_p = n_2 \sin R = n_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_p\right) = n_2 \cos i_p$$

De donde,

$$\operatorname{tg} i_p = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \quad [41.22]$$

Ley de Brewster

Relación que se conoce con el nombre de *ley de Brewster*, en honor a David Brewster (1781 – 1868), que la descubrió experimentalmente en 1812.

No es posible obtener luz reflejada que esté polarizada linealmente siendo su plano de polarización el de incidencia, ya que no es posible anular en las ondas reflejadas la componente normal al plano de incidencia del campo eléctrico. Ésta viene dada por la [41.14], la cual, para anularse debe ser  $R - i_p = 0$ , es decir,  $R = i_p$ . Con ello la ley de Snell se escribe  $n_1 \sin i_p = n_2 \sin i_p$ , es decir,  $n_1 = n_2$ , lo que exigiría que los dos medios fuesen iguales, en cuyo caso no habría reflexión.

Por análogas razones, no pueden anularse ni la [41.7] ni la [41.15], y no es posible obtener una onda refractada, polarizada linealmente con el plano de polarización normal al de incidencia, ni coincidiendo con él.

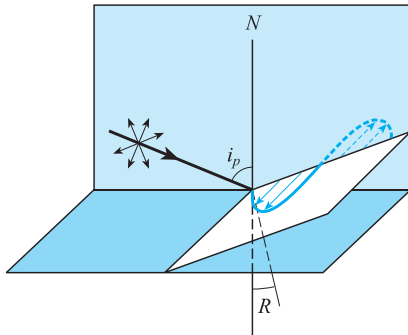


Figura 41.7. Polarización por reflexión.

## 41.6 Propagación de ondas electromagnéticas en un medio anisótropo. Birrefringencia

En los medios anisótropos, el vector desplazamiento  $\mathbf{D}$  no es paralelo al campo eléctrico  $\mathbf{E}$ . La relación  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$  tiene carácter tensorial y  $\epsilon$  es un tensor característico de cada medio. Se demuestra que siempre existen tres direcciones perpendiculares entre sí dos a dos, llamadas direcciones principales, para las cuales  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  son paralelos. Si denominamos  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  y  $\epsilon_3$  a las permitividades del medio en cada una de las tres direcciones principales, respectivamente, y tomamos a éstas como ejes coordenados, se verifica

$$D_x = \epsilon_1 E_x \quad , \quad D_y = \epsilon_2 E_y \quad , \quad D_z = \epsilon_3 E_z \quad [41.23]$$

Lo que matricialmente se expresa:

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

El frente de ondas está definido por los vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{H}$  y la propagación es normal a ambos vectores. El flujo de energía es normal a los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  y al no ser en los cristales anisótropos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  paralelos, resulta que el flujo de energía no se propaga en la dirección de la onda, no es normal al frente de onda (Figura 41.8).

En los medios isotrópicos es  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon = \text{cte}$ , no hay direcciones privilegiadas, los vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  son paralelos en todos los puntos, el flujo de energía es normal al frente de onda y se propaga en la dirección de éste. Así se comportan casi todos los medios no cristalinos y los cristales del sistema cúbico.

Hay cristales en los cuales es  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 = \epsilon_3$ , presentando simetría alrededor del eje en el cual es  $\epsilon = \epsilon_1$ ; a estos cristales se les denomina *uniáxicos*, y su eje de simetría es su *eje óptico*. Este tipo de cristales, que son los utilizados en óptica, pertenecen a los sistemas ortorrómbico, tetragonal y hexagonal, y como ejemplo de ellos citaremos al cuarzo ( $\text{SiO}_2$ ) y la calcita o espato de Islandia ( $\text{CO}_3\text{Ca}$ ).

En muchos medios anisótropos y en todos los uniáxicos, para cada dirección de propagación hay dos ondas polarizadas linealmente, perpendiculares entre sí y que se propagan con diferente velocidad, fenómeno que se denomina *birrefringencia*, y a los cristales que lo presentan, *birrefringentes*. La birrefringencia fue descubierta en 1669 por Bartholinus (1625 – 1692) usando cristales de calcita.

En los cristales uniáxicos una onda es esférica, formando el *rayo* llamado *ordinario*, mientras que la otra onda es un elipsoide de revolución alrededor del eje óptico, formando el *rayo extraordinario*. La velocidad de propagación de las ondas en dirección del eje óptico es la misma, la onda secundaria esférica y la elipsoidal son, en todo momento, tangentes en puntos del eje óptico, no hay, pues, birrefringencia en esta dirección.

Hay otros cristales que presentan dos ejes para los cuales no son birrefringentes, denominándoseles *biáxicos*, perteneciendo a los sistemas monoclinico, triclínico y romboédrico, como ejemplo citaremos la mica.

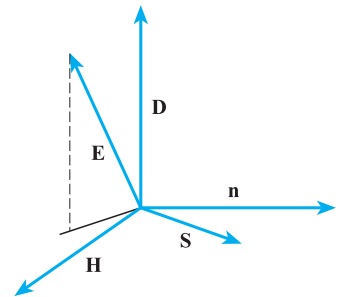


Figura 41.8. Direcciones de propagación del frente de onda y de la energía.

## 41.7 Transmisión de ondas electromagnéticas en láminas de caras planas y paralelas de cristales uniáxicos. Doble refracción

Estudiaremos la incidencia normal de una onda plana sobre una lámina de caras planas y paralelas formada por un cristal uniáxico. Según el ángulo que forme el

eje óptico del cristal con las caras de la lámina pueden presentarse tres casos: a) que el eje óptico sea perpendicular a las caras de la lámina y paralelo a la dirección de incidencia; b) que el eje óptico sea paralelo a las caras de la lámina y normal a la dirección de incidencia, y c) que el eje óptico sea oblicuo a las caras de la lámina y a la dirección de incidencia (Figura 41.9).

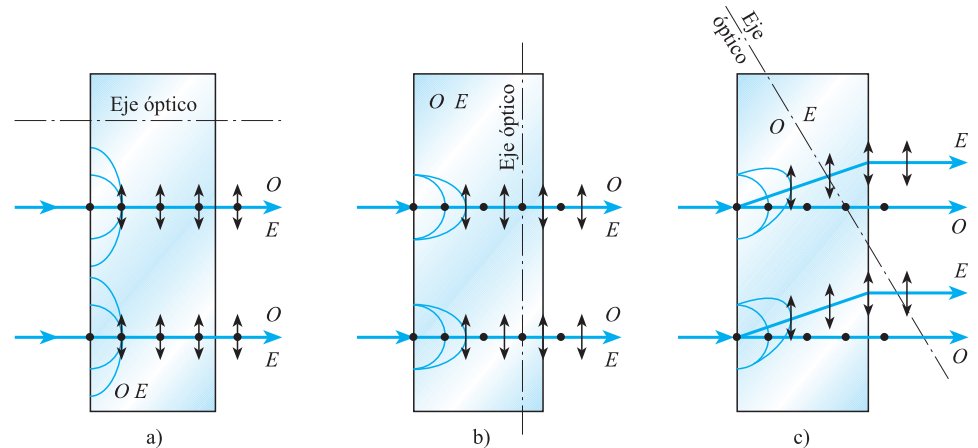


Figura 41.9. Refracción en láminas de cristales uniaxiales.

En los tres casos las ondas secundarias esféricas dan lugar a frentes de onda planos, paralelos a las caras de la lámina y el rayo ordinario no se desvía. Estas ondas están polarizadas en planos normales al de la Figura 41.9.

En el caso a), las ondas elipsoidales secundarias, que son tangentes a las esféricas en puntos del eje óptico, dan lugar a los mismos frentes de onda planos que éstas, el rayo extraordinario tampoco se desvía y coincide con el ordinario.

En el caso b), las ondas elipsoidales secundarias dan lugar a frentes de onda planos y paralelos a las caras de la lámina, pero distintos de los ordinarios. El rayo extraordinario tampoco se desvía, pero se propaga con distinta velocidad que el ordinario. Si los elipsoides son exteriores a las esferas, como en el caso de la figura, la birrefringencia se llama negativa y el rayo extraordinario se propaga con mayor velocidad que el ordinario. Si los elipsoides son interiores a las esferas, la birrefringencia se dice positiva y el rayo extraordinario se propaga a menor velocidad que el ordinario. En ambos casos los dos rayos, ordinario y extraordinario, emergen juntos pero defasados.

En el caso c), las ondas elipsoidales dan también lugar a frentes de onda planos y paralelos a las caras de la lámina, pero el rayo extraordinario es desviado de la normal y emerge de la lámina paralelo al ordinario.

En los tres casos los rayos extraordinarios están polarizados en el plano de la figura, mientras que el ordinario lo está en un plano perpendicular.

A cada rayo incidente le corresponden dos difractados, de aquí que el fenómeno se llame *doble refracción* o *birrefringencia*. El rayo ordinario cumple las leyes de la difracción, de ahí su nombre, pero el extraordinario no, incluso en la incidencia oblicua, no está en el plano de incidencia.

El índice de refracción que para los medios transparentes es  $n = \sqrt{\epsilon_r}$ , será distinto según la dirección dentro del cristal. En la Tabla 42.2 se dan los índices principales de refracción para la luz del sodio,  $\lambda = 5,893 \times 10^{-7}$  m, de los cristales que se indican.

Un dispositivo que permite eliminar el rayo ordinario obteniendo únicamente la luz polarizada linealmente del rayo extraordinario es el *prisma de Nicol*, diseñado por este en 1828 y construido tomando como base un cristal romboédrico de



**Tabla 41.2.** Índices de refracción de algunos cristales.

Sustancias uniaxiales			Sustancias biaxiales				
	$n_1$	$n_2$	$n_3$		$n_1$	$n_2$	$n_3$
Calcita	1,4864	1,6583	1,6583	Mica	1,5692	1,6049	1,6117
Cuarzo	1,5533	1,5442	1,5442	Yeso	1,5206	1,5227	1,5297
Zircón	1,9682	1,9239	1,9239	Topacio	1,6155	1,6181	1,6250

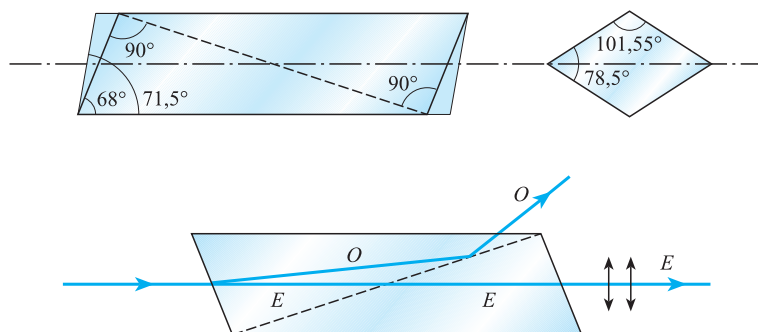
calcita, cuya forma natural es la representada en la Figura 41.10 por líneas finas continuas.

Para la construcción del prisma de Nicol se talla el cristal natural de la forma indicada en la Figura 41.10 mediante líneas gruesas. A continuación se le corta por el plano diagonal que se indica mediante línea de trazos, y se le vuelve a pegar en la misma posición, mediante bálsamo de Canadá\* ( $n = 1,55$ ). La geometría del cristal y el valor del índice de refracción del bálsamo de Canadá hacen que el rayo ordinario sufra la reflexión total, mientras que el extraordinario se transmite, obteniéndose a la salida del prisma luz polarizada linealmente en una sola dirección.

Otro tipo de birrefringencia artificial es el efecto Kerr, fenómeno electro-óptico que consiste en la producción de birrefringencia en medios dieléctricos, naturalmente no birrefringentes, mediante la acción de un campo eléctrico. Ello es debido a la acción del campo eléctrico sobre los dipolos eléctricos del medio, produciendo, al orientarlos, una anisotropía eléctrica y, por tanto, óptica.

La birrefringencia no cambia de sentido al cambiar el sentido del campo eléctrico.

Si la sustancia está comprendida entre las placas de un condensador, se comportará como birrefringente al actuar el campo  $\mathbf{E}$ , perdiendo esta propiedad al anularse aquél. Es, pues, un dispositivo que permite la modulación de la luz.

**Figura 41.10.** Cristal de calcita.**EJEMPLO 41.2**

Sobre un cristal birrefringente incide una onda monocromática plana de longitud de onda  $\lambda = 589$  nm. Siendo los índices de refracción del cristal para los rayos ordinario y extraordinario, respectivamente  $n_o = 1,544$  y  $n_e = 1,552$ , calculemos:

- Las longitudes de onda de los citados rayos dentro del cristal.
- Sus velocidades de propagación.
- Las permitividades relativas y absolutas del cristal para cada uno de los citados rayos.
- La velocidad de propagación a partir de las permitividades.

\* Resina de la especie *Abies balsamea* (Abeto de Canadá), líquido incoloro, viscoso, adhesivo, insoluble en agua y con densidad 0,98.

**Solución:**

a) De la definición de índice de refracción y puesto que la frecuencia no varía, es:

$$n_o = \frac{c}{v_o} = \frac{\lambda}{\lambda_o}$$

De donde es:

$$\lambda_o = \frac{\lambda}{n_o} = \frac{589}{1,544} = 381,477 \text{ nm}$$

Análogamente, para el rayo extraordinario será:

$$\lambda_e = \frac{\lambda}{n_e} = \frac{589}{1,552} = 379,510 \text{ nm}$$

b) Las velocidades de propagación dentro del cristal son:

$$v_o = \frac{c}{n_o} = \frac{3 \times 10^8}{1,544} = 1,943 \times 10^8 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad v_e = \frac{c}{n_e} = \frac{3 \times 10^8}{1,552} = 1,933 \times 10^8 \text{ m/s}$$

c) El índice de refracción absoluto  $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ , para un material no ferromagnético se expresa  $n = \sqrt{\epsilon_r}$ , con lo cual son:

$$\epsilon_{ro} = n_o^2 = 2,384 \quad \text{y} \quad \epsilon_{re} = n_e^2 = 2,409$$

Las permitividades absolutas serán:

$$\epsilon_o = \epsilon_o \epsilon_{ro} = 8,8542 \times 10^{-12} \times 2,384 = 21,1084 \times 10^{-12}$$

y

$$\epsilon_e = \epsilon_o \epsilon_{re} = 8,8542 \times 10^{-12} \times 2,409 = 21,3297 \times 10^{-12}$$

d) La velocidad de propagación de una onda electromagnética, en este caso se expresa  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu_o}}$ , que para el rayo ordinario es:

$$v_o = \frac{1}{\sqrt{21,1084 \times 10^{-12} \times 4\pi \times 10^{-7}}} = 1,942 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Y para el extraordinario:

$$v_e = \frac{1}{\sqrt{21,3297 \times 10^{-12} \times 4\pi \times 10^{-7}}} = 1,932 \times 10^8 \text{ m/s}$$

## 41.8 Polarización por absorción. Dicroísmo

Cualquier dispositivo que permita obtener ondas polarizadas se denomina *polarizador*. Ya hemos descrito un tipo de polarizador, el prisma de Nicol, que permite obtener luz polarizada linealmente.

En la reflexión, puesto que la componente del campo eléctrico incidente, normal al plano de incidencia, se va casi toda con el rayo reflejado, al atravesar una onda electromagnética una serie de láminas planas y paralelas, la citada componente normal del campo eléctrico irá disminuyendo en la onda refractada y prácticamente ésta acabará por estar polarizada linealmente, siendo el plano de polarización el de incidencia. Una serie de láminas planas paralelas de materiales y espesores adecuados constituirá un polarizador.

Algunas sustancias birrefringentes absorben en proporciones muy diferentes las ondas ordinaria y extraordinaria, fenómeno que se conoce con el nombre de *dicroísmo*, llamándose a tales sustancias *dicróicas* (Figura 41.11).

Para cada una de estas sustancias hay un espesor mínimo, a partir del cual, una de las ondas queda totalmente absorbida y únicamente se transmite la otra. Estas sustancias tienen una dirección principal, que se llama eje óptico del cristal, que debemos insistir no se trata de una línea, sino de una dirección. La componente del campo eléctrico normal al eje óptico es absorbida, mientras que permiten el paso de la componente paralela al eje. Por tanto, esas sustancias nos permiten, de forma sencilla, obtener luz polarizada linealmente en una sola dirección.

Que una sustancia se comporte o no como dicróica depende, además de su naturaleza intrínseca, de la frecuencia de las ondas electromagnéticas que inciden sobre ella. En la naturaleza, para la región visible, hay dos sustancias dicróicas especialmente importantes: la *turmalina* (borosilicato de aluminio) y la *herapatita* (sulfato de yodoquinina). Esta última es muy quebradiza y es difícil conseguir cristales de tamaño adecuado. Por ello se utilizan microcristales de ella, que se colocan entre dos láminas de vidrio o celuloide y se orientan todos en una misma y adecuada dirección, constituyéndose así un polaroide. La *lámina polaroide* fue creada por Land, en 1928. Él mismo inventó, en 1938, una nueva lámina polarizadora, tomando como base el alcohol polivinílico, el cual, al ser sometido a una tensión, orienta sus largas moléculas orgánicas hidrocarbonadas en la dirección de la tensión y al ser coloreado con yodo se hace dicróico. La componente del campo eléctrico en la dirección de las cadenas moleculares es fuertemente absorbida, mientras que la componente normal a esa dirección es transmitida.

Las gafas de sol con cristales polarizantes resultan muy eficaces para eliminar los reflejos que pueden deslumbrar. En general, la luz reflejada procede de superficies horizontales y su campo eléctrico será prácticamente horizontal; si el eje de transmisión de las gafas es vertical absorberá el campo horizontal y no llegarán reflejos horizontales al ojo, evitando el deslumbramiento.

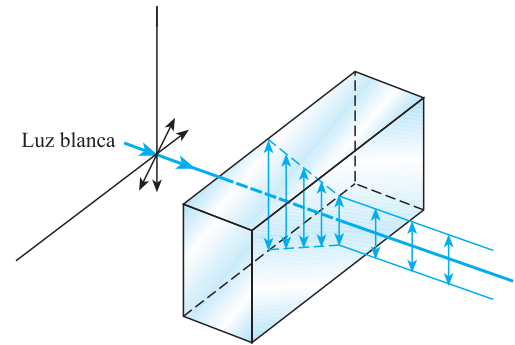


Figura 41.11. Sustancia dicróica.

## 41.9 Cristal analizador. Ley de Malus

Cualquier dispositivo polarizante, como los indicados, cuando se emplea para estudiar el estado de polarización de las ondas electromagnéticas, se denomina *analizador*.

Éste únicamente transmitirá ondas polarizadas en una dirección  $y$ , suponiendo que ésta es la  $AA'$  (Figura 41.12), si la onda incidente sobre él está polarizada linealmente en la dirección  $AA'$ , el analizador la transmite íntegramente, pero si la onda incidente está polarizada linealmente en una dirección que forma con la  $AA'$  un ángulo  $\theta$ , el analizador transmite únicamente la componente  $E_A = E \cos \theta$ .

Puesto que la intensidad luminosa es proporcional al cuadrado del campo eléctrico, la intensidad de la onda transmitida  $I$  y la de la incidente  $I_0$ , están relacionadas por la expresión:

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad [41.24]$$

Resultado que se conoce con el nombre de *ley de Malus*.

Al ir girando el analizador, la intensidad de la onda transmitida variará de acuerdo con la ley de Malus, siendo máxima para  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ , y siendo nula

para  $\theta = \frac{\pi}{2}$  y  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ .

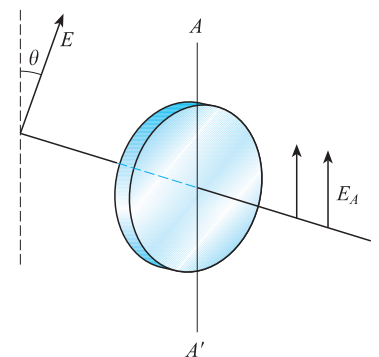


Figura 41.12. Cristal analizador.

Para ondas incidentes no polarizadas o polarizadas circularmente, debido a la simetría que presentan, al girar el analizador no variará la intensidad de la onda transmitida.

Si la onda incidente está polarizada elípticamente, la intensidad de la onda transmitida por el analizador variará entre un mínimo  $I_m$  y un máximo  $I_M$ , que corresponden, respectivamente, a las situaciones de paralelismo del eje  $AA'$  del analizador con los ejes menor y mayor de la elipse, definiéndose el grado de polarización de la onda incidente mediante la expresión:

Grado de polarización

$$P = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} \quad [41.25]$$

Cuando las ondas incidentes están polarizadas linealmente es  $I_m = 0$  y el grado de polarización es la unidad,  $P = 1$ . Si las ondas incidentes no están polarizadas es  $I_M = I_m$  y el grado de polarización es nulo,  $P = 0$ .

### 41.10 Cambio del estado de polarización, láminas de cuarto de onda y de media onda

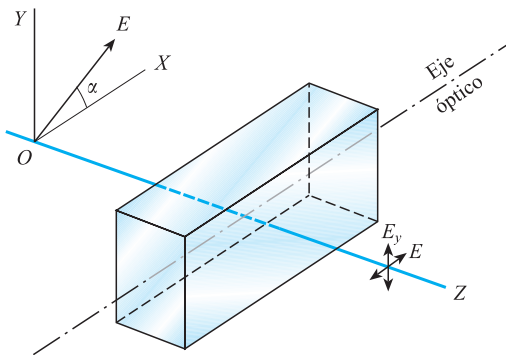


Figura 41.13. Cristal birrefringente uniaxial.

Consideremos una lámina de cristal birrefringente uniaxial cuyo eje óptico es paralelo a sus caras y sobre la cual incide una onda polarizada linealmente, cuya dirección de propagación, que tomaremos como eje  $OZ$ , es perpendicular al eje óptico (Figura 41.13).

El campo eléctrico incidente se expresa  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin(\omega t - kz)$ . Tomando la dirección del eje óptico como eje  $OX$ , las componentes del campo eléctrico incidente son:

$$E_x = E_0 \cos \alpha \sin(\omega t - kz) = E_{OX} \sin(\omega t - kz)$$

$$E_y = E_0 \sin \alpha \sin(\omega t - kz) = E_{OY} \sin(\omega t - kz)$$

Al penetrar la onda en el cristal da lugar a dos, la ordinaria y la extraordinaria, una polarizada según el eje óptico, eje  $OX$ , y otra según el eje  $OY$ .

La velocidad de propagación es distinta para cada una de ellas,  $v_o = \frac{c}{n_o} \neq v_e = \frac{c}{n_e}$ , siendo  $n_o$  y  $n_e$  los índices de refracción para las ondas ordinarias y extraordinarias, respectivamente. Dentro del cristal, las citadas ondas están expresadas por:

$$E_x = E_{OX} \sin(\omega t - k_o z) \quad \text{y} \quad E_y = E_{OY} \sin(\omega t - k_e z)$$

siendo  $k_o = \frac{\omega}{v_o} \neq k_e = \frac{\omega}{v_e}$ . Si el espesor de la lámina es  $d$ , las ondas emergen de la misma con la diferencia de fase:

$$\Delta\varphi = (\omega t - k_e d) - (\omega t - k_o d) = (k_o - k_e)d = \omega d \left( \frac{1}{v_o} - \frac{1}{v_e} \right) = \frac{\omega d}{c} (n_o - n_e) = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e)d \quad [41.26]$$

A la salida de la placa, las dos ondas, con la diferencia de fase indicada, se recompondrán en una sola, que estará polarizada elípticamente y cuya ecuación, de acuerdo con la [41.1] es:

$$\frac{E_x^2}{E_{OX}^2} + \frac{E_y^2}{E_{OY}^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_{OX} E_{OY}} \cos \left[ \frac{2\pi d}{\lambda} (n_o - n_e) \right] = \sin^2 \left[ \frac{2\pi d}{\lambda} (n_o - n_e) \right] \quad [41.27]$$

Si el defasaje, dado por la [41.26] es múltiplo impar de  $\pi/2$ ,

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda} (n_o - n_e) = (2m + 1) \frac{\pi}{2}$$

y, además, son  $E_{OX} = E_{OY} = E_0 \frac{\sqrt{2}}{2}$ , a la salida aparecerá la onda, dada por la [41.27], que en este caso es:

$$E_x^2 + E_y^2 = E_{OX}^2 = \frac{1}{2} E_0^2$$

Ecuación que corresponde a la de una circunferencia. Al ser,

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda} (n_o - n_e) = (2m + 1) \frac{\pi}{2}, \quad \text{es} \quad d(n_o - n_e) = (2m + 1) \frac{\lambda}{4} \quad [41.28]$$

Razón por la cual, a este tipo de láminas, se le denomina de *cuarto de onda*.

Cuando el defasaje dado por la [41.26] sea un múltiplo entero de  $\pi$ ,

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda} (n_o - n_e) = m\pi,$$

la ecuación de la onda emergente, dada por la [41.27] es:

$$\frac{E_x^2}{E_{OX}^2} + \frac{E_y^2}{E_{OY}^2} \mp 2 \frac{E_x E_y}{E_{OX} E_{OY}} = 0 = \left( \frac{E_x}{E_{OX}} \mp \frac{E_y}{E_{OY}} \right)^2$$

De donde resulta:

$$E_y = \pm \frac{E_{OY}}{E_{OX}} E_x = \pm \tan \alpha E_x$$

Ecuación que corresponde a la de una recta; por tanto, la onda emergente está polarizada linealmente, correspondiendo el signo + cuando  $m$  sea número par y el signo - cuando  $m$  sea número impar. En consecuencia, la onda emergente estará polarizada linealmente, en la misma dirección de la incidente si  $m$  es par, y en dirección perpendicular a la incidente si  $m$  es impar. Al ser:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda} (n_o - n_e) = m\pi \quad \text{es} \quad d(n_o - n_e) = m \frac{\lambda}{2} \quad [41.29]$$

Razón por la cual a este tipo de láminas se les denomina de *media onda*.

Inversamente, cuando sobre una lámina de cristal birrefringente uniaxial, cuyo eje es paralelo a sus caras, incide una onda electromagnética polarizada elípticamente, si el espesor de aquella es adecuado, emerge polarizada linealmente.

Existe un dispositivo, conocido con el nombre de compensador de Babinet, que permite conseguir la diferencia de fase deseada entre las ondas ordinaria y extraordinaria. Está formado por dos prismas de un cristal birrefringente uniaxial, cuyos ejes ópticos son perpendiculares entre sí, de forma que las componentes sobre  $OX$  y  $OY$  de una onda luminosa que atraviesa el compensador en la dirección  $OZ$ , serán sucesivamente rayo ordinario y extraordinario o viceversa (Figura 41.14).

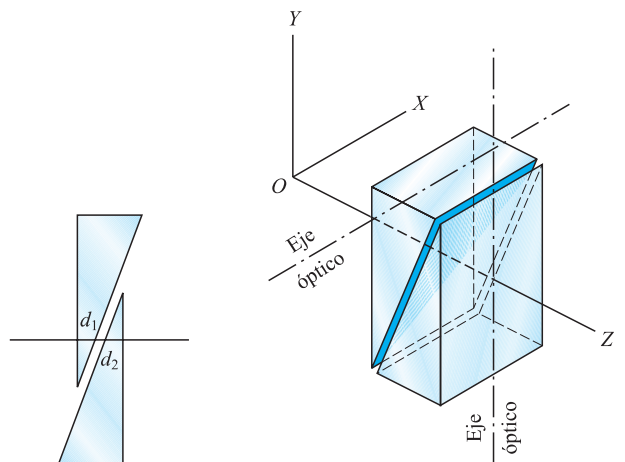


Figura 41.14. Compensador de Babinet.

Si  $d_1$  y  $d_2$  son los espesores que de cada prisma atraviesa la onda, la diferencia producida por el primer cristal es  $\frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) d_1$  y la producida por el segundo  $\frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o) d_2$ , pues lo que era en el primer cristal rayo ordinario es ahora extraordinario y viceversa. La diferencia de fase total producida por el compensador es:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e)(d_1 - d_2) \tag{41.30}$$

Puesto que, al deslizar un prisma sobre otro,  $d_1 - d_2$  puede tomar el valor que se desee, así sucederá con la diferencia de fase.

### EJEMPLO 41.3

Un compensador de Babinet está formado por dos cuñas de cuarzo iguales, de dimensiones  $AB = 40$  mm y  $AC = 4$  mm, con sus ejes ópticos cruzados como se indica en la Figura 41.15. A una distancia  $x$  del centro  $O$  de una de sus caras incide una onda plana monocromática de longitud  $\lambda = 589$  nm, para la cual los índices de refracción del cuarzo son  $n_o = 1,544$  y  $n_e = 1,553$ . Calculemos, en función de  $x$ , el defasaje que se produce entre los rayos ordinario y extraordinario a la salida del compensador.

#### Solución:

El defasaje está dado por la [41.26], que en este caso se expresa:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_o - n_e)(d_1 - d_2) = \frac{2\pi}{589 \times 10^{-9}} (1,544 - 1,553)(d_1 - d_2)$$

Ahora debemos calcular  $d_1$  y  $d_2$  en función de  $x$ , lo que se consigue utilizando una semejanza de triángulos,

$$\frac{d_1}{AC} = \frac{\frac{AB}{2} - x}{AB}, \quad \text{de donde} \quad d_1 = \frac{1}{10} (20 - x) = 2 - \frac{x}{10}$$

Puesto que debe ser  $d_1 + d_2 = 4$ , será  $d_2 = 2 + x/10$ , con lo cual es  $d_1 - d_2 = -x/5$  y con ello la diferencia de fase:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{589 \times 10^{-9}} \times 0,009 \times \frac{x}{5} \times 10^{-3} = 6,11205\pi \text{ rad} = 19,20 \text{ rad}$$

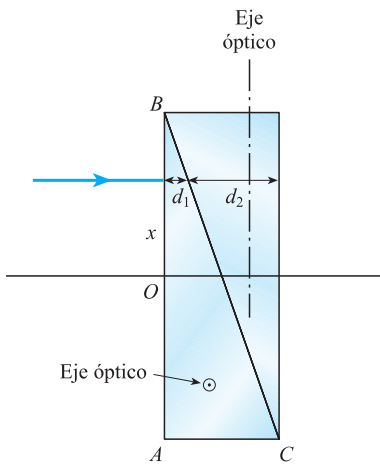


Figura 41.15. Compensador de Babinet.

## 41.11 Dispersión

La dispersión es un fenómeno de absorción de energía de la onda incidente por las moléculas del medio y la emisión de parte de esa energía por las citadas moléculas en una nueva onda. Un ejemplo cotidiano es la dispersión de la luz solar por las moléculas componentes del aire, lo que da al cielo el color azul, ya que las longitudes de onda menores son las más dispersadas. De no haber sido así, el cielo parecería oscuro. Cuando el Sol está muy bajo, las menores longitudes de onda (azul y violeta) son más dispersadas lateral y cenitalmente, llegándonos en línea recta, casi sin dis-

persión las mayores longitudes de onda (rojos, naranjas y amarillos), de aquí el aspecto que presenta el cielo en los ocasos de Sol.

Para que tenga lugar la dispersión es necesario que las partículas dispersantes tengan una dimensión menor que la longitud de onda de la radiación incidente, así sucede con las moléculas del oxígeno y el nitrógeno que componen el aire, cuyas dimensiones son del orden de 0,2 nm. Por el contrario, en las nubes, la niebla, o el aire contaminado de las ciudades, que contienen pequeñas gotitas de agua y partículas de tamaño muy superior a la longitud de onda del espectro visible, no se produce la dispersión y nos llega la luz blanca o blanco-grisacea característica de las citadas nubes, niebla o aire contaminado.

Las vibraciones de las moléculas del medio serán paralelas a la dirección del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  de la onda incidente, es decir, perpendiculares a la dirección de propagación de la onda incidente (Figura 41.16).

Las moléculas, al emitir la luz dispersada, lo hacen comportándose como dipolos, de forma que el campo eléctrico de la onda dispersada,  $\mathbf{E}_d$ , su vector de Poynting y el eje bipolar de la molécula están en el mismo plano. Las moléculas emitirán con máximos en las direcciones normales a la dirección de propagación de la onda incidente y no emitirán en la dirección de su eje bipolar. Las ondas dispersadas estarán polarizadas linealmente con su campo eléctrico perpendicular tanto a la dirección de la onda incidente como a la dirección de la onda dispersada.

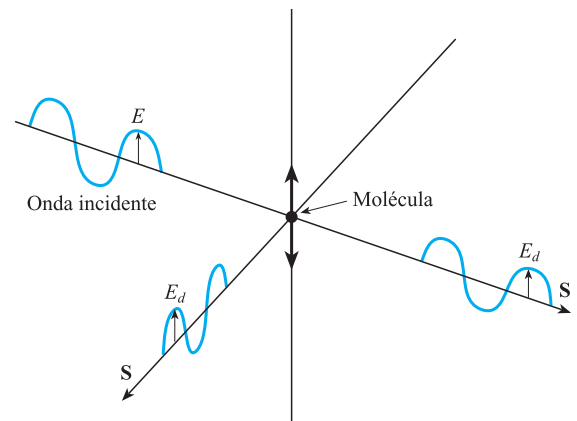


Figura 41.16. Dispersión por una molécula.

## 41.12 Polarización cromática. Fotoelasticidad

Si sobre una lámina de cristal birrefringente uniáxico, de espesor  $d_1$ , cuyo eje óptico es paralelo a sus caras, incide luz blanca polarizada linealmente, las longitudes de onda que verifiquen la [42.25] saldrán polarizadas linealmente: en la dirección de la incidente, la longitud de onda  $\lambda_1$ , para la cual  $h$  es par, y en la dirección perpendicular, la longitud de onda  $\lambda_2$ , para la cual  $h$  es impar. El resto de las longitudes de onda de luz incidente saldrán polarizadas elípticamente. A este fenómeno se le denomina *polarización cromática*.

Si la luz emergente se observa a través de un analizador, veremos diferentes coloraciones, según la posición del eje de éste. Cuando el eje del analizador tiene la dirección en la que está polarizada la luz incidente, todas las ondas de longitud  $\lambda_1$  lo atravesarán y serán predominantes en la luz observada a través de él, en la que estarán excluidas las ondas de longitud  $\lambda_2$ . Cuando el eje del analizador tiene dirección normal a la de polarización de la luz incidente, todas las ondas de longitud  $\lambda_2$  lo atravesarán y serán dominantes en la luz que de él emerge, en la que están excluidas las de longitud  $\lambda_1$ . En cualquier otra posición del analizador, las longitudes de onda predominantes en la luz que lo atraviesa pueden ser otras y, por tanto, otra la tonalidad observada.

Si la lámina de material transparente es isótropa, la luz que incide polarizada linealmente la atravesará y emergerá polarizada linealmente en el mismo plano de polarización.

Brewster, en 1816, descubrió que algunas sustancias transparentes, ópticamente isótropas, al ser sometidas a tensiones mecánicas sufren deformaciones que las hacen anisótropas, por la propia anisotropía de éstas, y se convierten en birrefringentes, presentando un eje óptico en la dirección del esfuerzo aplicado y siendo la birrefringencia proporcional a aquellos. Este fenómeno da nacimiento a una técnica de física aplicada que se denomina *fotoelasticidad* y que consiste en la reproducción a escala en material plástico transparente e isótropo de piezas, que al ser so-

medidas tensiones proporcionales a las que actúan sobre la pieza real, permite analizar el estado de deformaciones y tensiones de ésta. Al iluminar el modelo tensionado con luz blanca, cada región se colorea de forma e intensidad diferentes, según el esfuerzo que esté soportando, lo que nos permite conocer el estado de tensiones de la pieza.

### 41.13 Actividad óptica

Ciertas sustancias, al ser atravesadas por una onda electromagnética polarizada linealmente, tienen la propiedad de girar el plano de polarización de ésta, diciéndose que presentan actividad óptica o que son ópticamente activas. El ángulo girado es proporcional al espesor,  $d$ , de la sustancia atravesada y función de su naturaleza intrínseca, pudiendo expresarse:

$$\alpha = R(\lambda T)d$$

Expresión en la que  $R(\lambda, T)$  es el *poder rotatorio*, específico de cada sustancia ópticamente activa y función de la longitud de onda y la temperatura. El fenómeno fue descubierto por Arago, en 1811, en los cristales de cuarzo.

Las sustancias ópticamente activas se clasifican en dextrogiras y levogiras, según si giran el plano de polarización de la luz a la derecha o a la izquierda, respectivamente, y siempre desde el punto de vista del observador que recibe la luz transmitida.

Hay sustancias que son ópticamente activas sólo en estado sólido cristalino, como el cuarzo, que es ópticamente activo en la dirección de su eje óptico. Es obvio que la actividad óptica de estas sustancias está ligada a la distribución espacial de las moléculas y átomos en el cristal. Otras sustancias son ópticamente activas en todos los estados de agregación y en disolución, lo que pone de manifiesto que en ellas la actividad óptica es una propiedad molecular, independiente de su distribución espacial, este es el caso, por ejemplo, de la sacarosa.

Una explicación general al fenómeno de la actividad óptica puede darse considerando a la onda polarizada linealmente como la superposición de dos ondas polarizadas circularmente en sentido inverso (Figura 41.17).

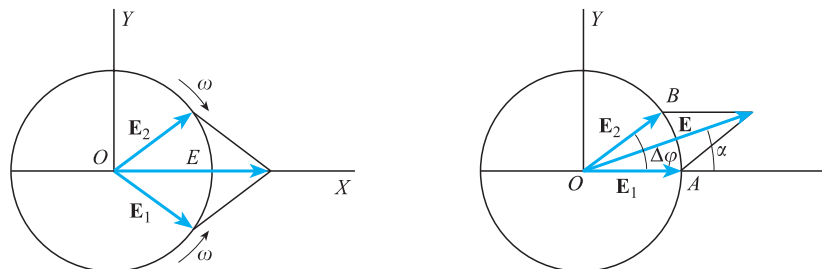


Figura 41.17.

Las ecuaciones de las dos ondas son, respectivamente,

$$\mathbf{E}_1 = E_1(\cos wt \mathbf{i} - \text{sen } wt \mathbf{j})$$

$$\mathbf{E}_2 = E_2(\cos wt \mathbf{i} + \text{sen } wt \mathbf{j})$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = (E_1 + E_2) \cos wt \mathbf{i}$$

Supongamos que, dentro de la sustancia la onda cuyo campo eléctrico es  $\mathbf{E}_1$ , se propaga con mayor velocidad que la onda cuyo campo es  $\mathbf{E}_2$ . Cuando la onda que



propaga a  $\mathbf{E}_1$  emerja, es decir, cuando  $\mathbf{E}_1$  esté en la posición  $OA$ , el  $\mathbf{E}_2$  estará aún en la  $OB$  habiéndose producido el defasaje  $\Delta\varphi$  y el vector  $\mathbf{E}$  habrá girado un ángulo  $\alpha = \frac{\Delta\varphi}{2}$ . El defasaje está dado por la expresión:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_2 - n_1) d$$

En la que  $n_1$  y  $n_2$  son los índices de refracción de la sustancia para cada una de las componentes, lo que es función de la temperatura. Al ser  $v_1 > v_2$ , será  $n_1 < n_2$  y el ángulo girado será:

$$\alpha = \frac{\pi}{\lambda} (n_2 - n_1) d = R(\lambda, T) d$$

Con ello, el poder rotatorio específico se expresa:

$$R(\lambda, T) = \frac{\pi}{\lambda} (n_2 - n_1) = \frac{\alpha}{d}$$

Poder rotatorio

En las sustancias que son ópticamente activas en solución, puesto que ello es una propiedad molecular, el ángulo de giro del plano de polarización será proporcional a la concentración de la solución, escribiéndose para ellas:

$$\alpha = r(\lambda, T) c d$$

En la que  $c$  es la concentración de la solución y  $r(\lambda, T)$  el poder rotatorio molecular. Esta fórmula permite determinar la concentración de soluciones de sustancias ópticamente activas midiendo  $\alpha$  y  $d$ , siempre que  $r(\lambda, T)$  sea independiente de  $c$ .

Algunas sustancias naturalmente no activas, al actuar sobre ellas un campo magnético, se vuelven activas en la dirección de éste, lo que se conoce con el nombre de *efecto Faraday* o *efecto magneto-óptico*.



## 42.1 Introducción

Al hablar de la propagación del calor por radiación, vimos cómo todo cuerpo emite energía electromagnética en función de su temperatura absoluta. La potencia de emisión o energía emitida por unidad de tiempo se mide en vatios, lo cual es un problema estrictamente físico y únicamente hará falta elegir un receptor adecuado, que, en general, se denomina radiómetro. A partir de aquella pueden definirse una serie de magnitudes energéticas y sus unidades para ser medidas, lo que constituye la *radiometría*.

De todo el espectro de ondas electromagnéticas, el ojo humano únicamente es sensible a la banda comprendida entre los 3800 Å (próximo al ultravioleta) y los 7800 Å (próximo al infrarrojo), banda que constituye el espectro visible o luminoso. A los cuerpos que producen este tipo de radiación se les denomina luminosos y a los que la reflejan, iluminados. La *fotometría* estudia las características de la emisión luminosa y de la iluminación que produce.

El ojo humano no es solamente sensible a la cantidad de energía recibida, sino también a la longitud de onda que es portadora de la energía. Así, la sensación experimentada al recibir el mismo número de vatios en diferentes longitudes de onda es distinta. Esta sensación, función de la longitud de onda de la radiación, la llamaremos *color*.

Supondremos en el presente capítulo que las fuentes luminosas emiten en régimen permanente, es decir, la potencia de emisión es una constante.

### Fuente puntual

Una fuente, manantial o foco luminoso, puede considerarse puntual, cuando sus dimensiones geométricas son pequeñas comparadas con la distancia a la que se observa o con la distancia que la separa de la superficie iluminada.

## 42.2 Tubo de radiación

Consideremos una fuente puntual  $O$ , que emite en un medio homogéneo una cierta radiación (Figura 42.1). Se llama *tubo de radiación* al conjunto de rayos contenidos

- 42.1. Introducción
- 42.2. Tubo de radiación
- 42.3. Potencia de radiación. Intensidad radiante
- 42.4. Indicatriz de una fuente. Fuente isótropa
- 42.5. Flujo energético. Flujo energético monocromático
- 42.6. Flujo luminoso. Eficacia luminosa relativa. Efecto Purkinje
- 42.7. Intensidad luminosa
- 42.8. Iluminación
- 42.9. Luminancia o brillo
- 42.10. Iluminación por una fuente extensa
- 42.11. Emitancia o radiancia luminosa
- 42.12. Brillo de una superficie iluminada
- 42.13. Color
- 42.14. Mezcla aditiva de colores
- 42.15. Blanco patrón. Colores complementarios
- 42.16. Sistema clorimétrico,  $X, Y, Z$
- 42.17. Diagramas cromáticos
- 42.18. Longitud de onda dominante o tinte y pureza o saturación

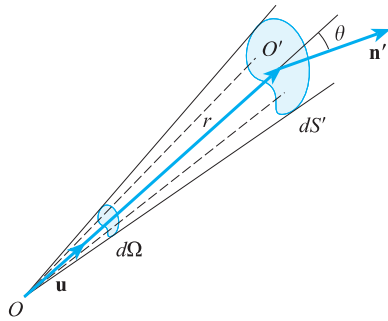


Figura 42.1. Tubo de radiación.

y encerrados por la superficie cónica de vértice  $O$  y directriz el elemento de superficie  $dS'$  en torno a  $O'$ .

El tubo de radiación queda definido por la dirección  $\mathbf{u}$ , vector unitario de la dirección  $OO'$ , y el ángulo sólido  $d\Omega$ , bajo el cual se ve desde  $O$  la superficie  $dS'$ , cuyo valor es:

$$d\Omega = \frac{dS' \cos \theta}{r^2} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}'}{r^2} dS'$$

siendo  $\mathbf{n}'$  la normal unitaria a la superficie  $dS'$  en  $O'$  y  $r$  la distancia  $OO'$ .

### 42.3 Potencia de radiación. Intensidad radiante

La potencia de radiación,  $P$ , es la energía emitida por la fuente, en forma de onda electromagnética, por unidad de tiempo. Su unidad será el vatio.

En una cierta dirección  $\mathbf{u}$  y dentro de un cierto ángulo sólido  $d\Omega$  emitirá la potencia  $dP$ . Pues bien, se define la *intensidad radiante* en la dirección  $\mathbf{u}$ ,  $I_e(\mathbf{u})$ , mediante la expresión:

$$I_e(\mathbf{u}) = \frac{dP}{d\Omega} \tag{42.1}$$

Su unidad será el vatio/estereoradián.

### 42.4 Indicatriz de una fuente. Fuente isótropa

Se llama indicatriz de una fuente puntual al lugar geométrico de los puntos  $M$  tales que verifican  $\mathbf{OM} = I_e(\mathbf{u})\mathbf{u}$  (Figura 42.2).

Una fuente se dice que emite de forma isótropa o simplemente que es isótropa, cuando la intensidad energética con que emite es independiente de la dirección, es decir, es  $I_e(\mathbf{u}) = \text{cte}$ . En este caso, es de fácil integración la Ecuación [42.1], resultando:

$$P = I \int d\Omega = 4\pi I \tag{42.2}$$

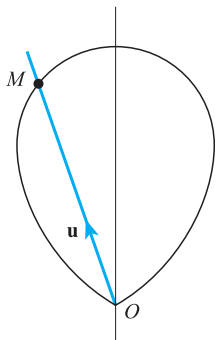


Figura 42.2. Curva indicatriz.

### 42.5 Flujo energético. Flujo energético monocromático

Se define el *flujo energético* a través de una superficie,  $S$ , como la energía que atraviesa la referida superficie en la unidad de tiempo.

Si la superficie  $S$  encierra en su interior a la fuente puntual y el medio propagador es homogéneo, isótropo y no absorbente, toda la energía emitida por ésta en la unidad de tiempo (potencia de emisión), atravesará la superficie  $S$  en la unidad de tiempo (flujo), de aquí que coincida el flujo energético con la potencia de emisión, en este caso.

A través de un elemento de superficie  $dS$ , que se ve desde  $O$  bajo el ángulo sólido  $d\Omega$ , el flujo de energía está dado por la Ecuación [42.1]:

$$d\Phi = I_e(\mathbf{u}) d\Omega \tag{42.3}$$

Obviamente, el flujo energético se expresará en vatios.

Un haz luminoso nunca es rigurosamente monocromático, siempre está compuesto por diferentes longitudes de onda. Al flujo energético transportado por la

radiación de longitudes de onda comprendida entre  $\lambda$  y  $\lambda + d\lambda$ , se le puede expresar de la forma:

$$d\phi = \phi(\lambda) d\lambda$$

Se define el *flujo energético monocromático* mediante la expresión:

$$\phi(\lambda) = \frac{d\phi}{d\lambda}$$

Su unidad será el  $\text{W} \cdot \text{m}^{-1}$ .

El flujo energético total producido por una radiación, cuyas longitudes de onda extremas sean  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , es:

$$\phi = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \phi(\lambda) d\lambda$$

La curva que representa a  $\phi$  como función de  $\lambda$  se denomina curva espectral de flujo energético.

## 42.6 Flujo luminoso. Eficacia luminosa relativa. Efecto Purkinje

Ya hemos indicado cómo el ojo es sensible a las diferentes longitudes de onda, de forma que dos flujos energéticos iguales, pero de diferente longitud de onda, producen en el ojo sensaciones distintas. Así, a cada flujo energético elemental monocromático,  $d\phi(\lambda)$ , le corresponde un flujo luminoso elemental,  $dF(\lambda)$ , que están relacionados por la expresión:

$$dF(\lambda) = k_\lambda d\phi(\lambda)$$

En esta  $k_\lambda$  es la eficacia luminosa o factor de visibilidad. Este factor es cero fuera del espectro visible, y para un observador medio normal, con el ojo adaptado a la luz del día (visión fotópica) presenta un valor máximo,  $k_m$  en la longitud de onda de 5500 Å, que corresponde a la zona de amarillo verdoso.

Para cada radiación monocromática de longitud de onda  $\lambda$ , se define su eficacia luminosa relativa  $V_\lambda$  o factor de visibilidad relativa, mediante la relación:

$$V_\lambda = \frac{k_\lambda}{k_m} \leq 1$$

Por tanto, será un número sin dimensiones. La función que representa la eficacia luminosa relativa en función de la longitud de onda se denomina curva de sensibilidad espectral fotópica, que para un observador medio normal es de la forma representada en la Figura 42.3.

En la visión nocturna, la curva de sensibilidad se desplaza hacia la izquierda, teniendo su máximo sobre los 5000 Å, de forma que dejan de verse los rojos y amarillos, apareciendo una mayor sensibilidad para azules y ultravioletas (efecto Purkinje).

El flujo luminoso elemental puede expresarse de la forma:

$$dF(\lambda) = k_m V_\lambda d\phi(\lambda) \quad [42.4]$$

El valor de  $k_m$  es arbitrario y podría haberse adoptado un valor por convenio, quedando así fijada la unidad de flujo luminoso. Sin embargo, en fotometría, como veremos enseguida, se adopta como magnitud fundamental la intensidad luminosa, de cuya unidad y la ley física correspondiente se deduce la unidad de flujo luminoso, y de ésta y la Ecuación [42.4] se deduce el valor de  $k_m$ .

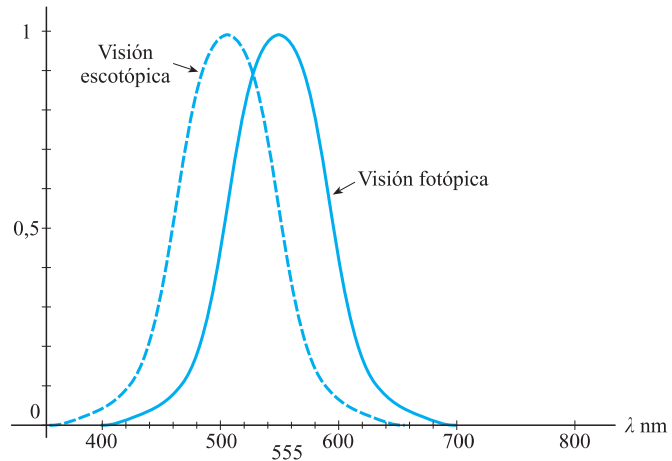


Figura 42.3. Curvas de sensibilidad del ojo humano.

### 42.7 Intensidad luminosa

Se define la intensidad luminosa de una fuente puntual en una dirección  $\mathbf{u}$ , de forma análoga a como se definió la intensidad energética, es decir, mediante la relación:

$$I = \frac{dF}{d\Omega} \tag{42.5}$$

El Sistema Internacional de Unidades ha tomado como magnitud fundamental la intensidad luminosa, y como unidad para ella, la *candela*, que fue definida, en la Conferencia General de Pesas y Medidas de 1979, de la siguiente forma: *la candela es la intensidad luminosa, en una dirección, de una fuente que emite radiación monocromática de frecuencia  $540 \cdot 10^{12}$  hercios y que tiene una intensidad radiante en esa dirección de 1/683 vatios por estereoradián*. Su símbolo es *cd*.

De la propia definición, Ecuación [42.5], una vez tomada la candela como unidad fundamental, se deduce que el flujo luminoso, en el S.I., ha de medirse en candelas por estereoradián, unidad a la que se denomina *lumen*.

Ahora, de la Ecuación [42.4], puesto que en ella se expresa el flujo luminoso en lúmenes y el flujo energético en vatios, se deduce, para que así sea, el valor de  $k_m$ .

$$k_m = 683 \text{ lúmenes/vatio}$$

### 42.8 Iluminación

Consideremos una superficie  $S'$  y entorno a uno de sus puntos  $O'$ , tomemos el elemento de superficie  $dS'$  (Figura 42.4).

Si éste recibe un flujo luminoso  $dF$ , se define la iluminación  $E$  mediante la expresión:

$$E = \frac{dF}{dS'} \tag{42.6}$$

La unidad en el S.I. será el lumen por metro cuadrado ( $\text{lm} \cdot \text{m}^{-2}$ ), que se denomina *lux*. A veces se utiliza como unidad al lumen por centímetro cuadrado, a la que se denomina *phot* y cuya equivalencia con el lux es:

$$1 \text{ phot} = 1 \text{ lumen/cm}^2 = 1 \text{ lumen}/10^{-4} \text{ m}^2 = 10^4 \text{ lux}$$

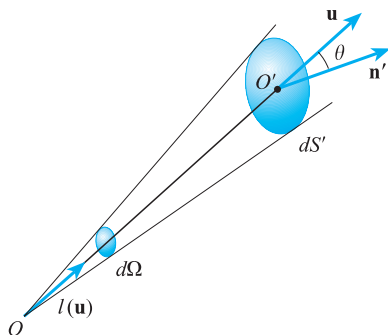


Figura 42.4. Iluminación.

Si la iluminación  $E$  sobre un elemento de superficie  $dS'$  es debida únicamente a un foco puntual y el medio interpuesto es homogéneo, isótropo y no absorbente, el flujo emitido en el ángulo sólido  $d\Omega$  será el recibido en el elemento de superficie iluminada, verificándose:

$$I(\mathbf{u}) d\Omega = E dS'$$

Al sustituir el ángulo sólido elemental por su valor, es:

$$I(\mathbf{u}) \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}'}{r^2} dS' = E dS'$$

De donde resulta:

$$E = I(\mathbf{u}) \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}'}{r^2} = I(\mathbf{u}) \frac{\cos \theta}{r^2} \quad [42.7] \quad \text{Ley de Lambert}$$

Que es la denominada ley de Lambert: *la iluminación de una superficie por una fuente puntual depende de la orientación de aquélla, siendo proporcional a la intensidad e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente.*

La Expresión [42.7] permite definir el lux como la iluminación que produce una intensidad luminosa de una candela incidiendo normalmente sobre una superficie situada a un metro.

## Fuente extensa

En gran parte de los casos reales, los focos luminosos no pueden ser considerados como puntuales, ya que sus dimensiones no son despreciables frente a la distancia a la que se observan o a la distancia que les separa de la superficie que iluminan. En estos casos, se dice que la fuente es extensa.

## 42.9 Luminancia o brillo

Se define la *luminancia* de una superficie en un punto  $O$  de la misma y en una dirección  $\mathbf{u}$ , como la *intensidad luminosa emitida por el elemento  $dS$  de superficie entorno de  $O$ , en la dirección  $\mathbf{u}$ , dividida por la superficie  $d\sigma$ , proyección de  $dS$  sobre el plano normal a  $\mathbf{u}$*  (Figura 42.5). Su expresión es:

$$L(O, \mathbf{u}) = \frac{dI(\mathbf{u})}{d\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}} = \frac{dI(\mathbf{u})}{dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}} = \frac{dI(\mathbf{u})}{\cos \theta dS} = \frac{dI(\mathbf{u})}{d\sigma} \quad [42.8]$$

En el sistema internacional de unidades, la unidad de luminancia será la candela por metro cuadrado, que en el citado sistema no tiene nombre especial, pero que se le suele dar el nombre de nit.

La diferencial de la Ecuación [43.5] nos da el flujo energético en el tubo de ángulo sólido  $d\Omega$  y dirección  $\mathbf{u}$ , debido a la intensidad luminosa  $dI(\mathbf{u})$ , con lo cual la luminancia se expresa:

$$L(O, \mathbf{u}) = \frac{d^2F}{\cos \theta dS d\Omega} = \frac{d^2F}{d\Omega d\sigma} \quad [42.9]$$

Sea el elemento de superficie  $dS'$ , que se ve desde  $O$  en la dirección  $\mathbf{u}$  bajo el ángulo sólido  $d\Omega$  y sea  $\mathbf{n}'$  la normal al mismo (Figura 42.6).

El ángulo sólido  $d\Omega$  puede expresarse de la forma:

$$d\Omega = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}' dS'}{r^2} = \frac{dS' \cos \theta'}{r^2} = \frac{d\sigma'}{r^2}$$

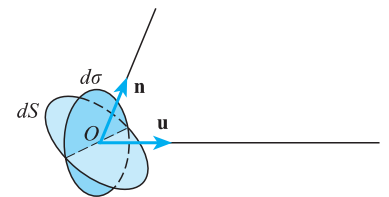


Figura 42.5.

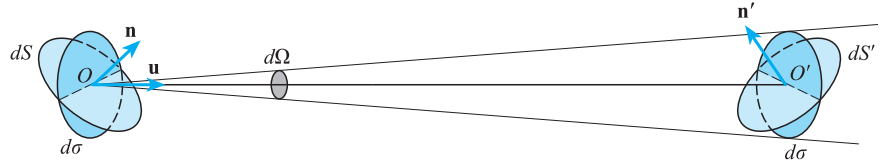


Figura 42.6. Iluminación e intensidad luminosa.

Con lo cual, la Ecuación [42.9] se escribe

Fórmula de Lambert 
$$L(O, \mathbf{u}) d\Omega \cdot d\sigma = L(O, \mathbf{u}) \frac{d\sigma \cdot d\sigma'}{r^2} = L(O, \mathbf{u}) \frac{\cos \theta \cdot \cos \theta' \cdot dS \cdot dS'}{r^2} \quad [42.10]$$

Fórmula que se denomina *de Lambert*.

La Ecuación [42.8] puede expresarse de la forma:

$$dI(\mathbf{u}) = L(O, \mathbf{u}) \cos \theta dS$$

La cual para la dirección normal a la superficie emisora,  $\mathbf{u} = \mathbf{n}$ , se escribe:

$$dI(\mathbf{n}) = L(O, \mathbf{n}) dS$$

Si la luminancia es constante, será  $L(O, \mathbf{n}) = L(O, \mathbf{u})$ , y al sustituir en la anterior, queda:

Segunda Ley de Lambert

$$dI(\mathbf{u}) = dI(\mathbf{n}) \cos \theta \quad [42.11]$$

Que es la denominada segunda ley de Lambert: *la intensidad emitida por un elemento de superficie es máxima en la dirección normal a aquél y disminuye con el coseno del ángulo de emisión*. Esta ley será únicamente verificada por aquellos cuerpos para los cuales la luminancia sea constante en toda su superficie y para todas las direcciones  $L(O, \mathbf{u}) = \text{cte}$ .

### 42.10 Iluminación por una fuente extensa

Veamos qué iluminación produce sobre un elemento de superficie  $dS'$ , entorno de un punto  $O'$ , una fuente extensa. Sea  $dS$  un elemento de superficie de la fuente emisora. Suponiendo que el medio no es absorbente, la energía emitida por  $dS$  producirá sobre  $dS'$  una iluminación elemental  $dE(O')$ , verificando, de acuerdo con la [42.6]:

$$d^2F = dE(O') dS'$$

Para que se verifique la fórmula de Lambert, Ecuación [42.10], debe ser:

$$dE(O') = L(O, \mathbf{u}) \frac{\cos \theta \cos \theta'}{r^2} dS$$

Con lo cual, la iluminación producida por toda la fuente  $S$  en el punto  $O'$ , es:

$$E(O') = \iint_S L(O, \mathbf{u}) \frac{\cos \theta \cos \theta'}{r^2} dS$$



## 42.11 Emitancia o radiancia luminosa

Se define la *emitancia* o *radiancia*, en un punto de una superficie, como el *flujo luminoso que emite por unidad de superficie en todas las direcciones del semiespacio exterior*.

$$M(O) = \frac{dF}{dS} \quad [42.12]$$

Su unidad en el S.I. es el lumen · m<sup>-2</sup>.

Veamos qué relación existe entre el brillo y la emitancia en cada punto  $O$  de una fuente extensa. Para ello, consideremos en el entorno de un punto  $O$  de una fuente emisora, el elemento  $dS$ , que emite según la segunda ley de Lambert, es decir, es  $L(O, \mathbf{u}) = \text{cte}$ , y calculemos la energía que emite en todas las direcciones hacia un semiespacio exterior. El problema presenta simetría axial alrededor de la normal  $\mathbf{n}$ , lo que nos permite tomar como elemento de ángulo sólido al comprendido entre dos superficies cónicas de revolución de eje  $\mathbf{u}$  y semiángulo comprendido entre  $\theta$  y  $\theta + d\theta$  (Figura 42.7). El ángulo sólido interceptado por una superficie cónica de vértice  $O$  y semiángulo  $\theta$ , es el área de un casquete esférico de radio unidad y semiángulo en el centro  $\theta$ , es decir,

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta)$$

Por tanto, es:

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$$

Lo que, llevado a la [43.9], permite escribir:

$$d^2F = L2\pi \sin \theta d\theta \cos \theta dS$$

Integrando para la variable  $\theta$  desde 0 hasta  $\frac{\pi}{2}$  resulta:

$$dF = \pi L dS \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta = \pi L dS \left[ -\frac{\cos 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} = \pi L dS \quad [42.13]$$

Comparando este resultado con la Ecuación [42.12], se deduce que en un punto  $O$  de una fuente extensa, el brillo y la emitancia están relacionados de la forma:

$$M = \pi L \quad [42.14]$$

## 42.12 Brillo de una superficie iluminada

Consideremos una superficie elemental  $dS'$ , que recibe una iluminación  $E$ , es decir, recibe un flujo  $dF$ , verificando:

$$dF = E dS'$$

Esta superficie devolverá al semiespacio exterior a ella un flujo energético,

$$dF' = r dF = rE dS' \quad [42.15]$$

en la que  $r$  es el factor de reflexión. Por tanto, la superficie  $dS'$  se comporta como una fuente y como tal tendrá un brillo  $L'$ , que supondremos independiente de la dirección. El flujo energético emitido al semiespacio exterior será, de acuerdo con la [42.12],

$$dF' = M dS'$$

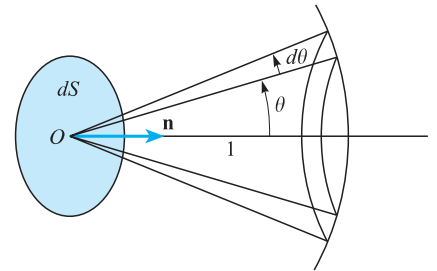


Figura 42.7. Emitancia y brillo.

Teniendo en cuenta las Ecuaciones [42.14] y [42.15], se escribe:

$$rE dS' = L' dS'$$

es decir,

$$L' = \frac{rE}{\pi} \quad [42.16]$$

Por tanto, *el brillo de una superficie iluminada es proporcional a la iluminación que recibe*. En el coeficiente de proporcionalidad interviene el factor  $r$ , que es característico de cada superficie, y que puede variar de unos puntos a otros de ésta según su estado de pulimentación, por tanto, una superficie iluminada homogéneamente puede dar distinto brillo de unos puntos a otros. Este es un aspecto importante porque lo que apreciamos son brillos y no iluminaciones.

### 42.13 Color

Podemos definir el color como la sensación que percibimos cuando nuestro sentido de la vista es estimulado por una radiación luminosa no blanca. El color tiene, por tanto, una componente subjetiva importante y además es un fenómeno ideal, en el sentido de que únicamente tiene existencia en nuestra mente y no en la realidad material.

La «luz blanca» o luz solar no produce en nuestra retina sensación de color, porque el ojo es incapaz de hacer un análisis espectral de aquélla. Si la luz solar se dispersa, por ejemplo mediante un prisma, en sus diferentes longitudes de onda componentes, aparece el espectro coloreado de aquélla. Young, con su dispositivo de doble rendija sobre el cual hizo incidir luz blanca, encontró que, si bien en el centro de la pantalla aparecía un máximo de luz blanca, luego aparecían todos los colores del arco iris y fue el primero en determinar la longitud de onda de cada uno de ellos. La denominación de los colores de este espectro, en función de la longitud de onda de la luz que los producen, es la siguiente:

#### Espectro visible

Violeta	380 a 450 nm
Azul	450 a 500 nm
Verde	500 a 560 nm
Amarillo	560 a 590 nm
Naranja	590 a 620 nm
Rojo	620 a 780 nm

Desde el punto de vista físico, podemos definir como color puro, aquel que es producido por una luz que sólo contiene una única longitud de onda, es decir, por una luz monocromática.

Un color se llama complejo cuando la radiación que lo produce presenta un cierto espectro de longitudes de onda, diciéndose que la radiación es heterocromática, y denominándose habitualmente al color producido con el nombre del color puro más próximo y un calificativo característico, por ejemplo, azul pálido, verde limón, etc.

Cuando dos radiaciones luminosas heterocromáticas producen igual sensación de color, se dice que son cromáticamente equivalentes. Su composición espectral es distinta, pero ya hemos indicado cómo el ojo no es capaz de hacer un análisis espectral de la radiación que le llega, detecta simplemente una sensación global de color. A los colores que teniendo distinta composición espectral parecen iguales al ojo, se les denomina *metámeros*.

El tipo de sensación coloreada depende de tres características de la luz recibida, que son: el *flujo luminoso*, el *matiz* o longitud de onda dominante y la *pureza*, que es la posición respecto al color puro más próximo. La primera ya ha sido estudiada y las otras dos, que en conjunto constituyen la *cromaticidad* de la radiación luminosa, serán ahora estudiadas.

El color de una radiación luminosa depende de las características indicadas, mientras que el color de un cuerpo iluminado dependerá de la composición espectral de la luz que le ilumina y de las propiedades de aquél para reflejar, transmitir o difundir la luz que le llega.

Se hace necesario poder medir de una forma objetiva y cuantitativamente el color; la ciencia que a ello se dedica, así como a su reproducción, se denomina *colorimetría*.

#### 42.14 Mezcla aditiva de colores

Hagamos incidir, sobre una pantalla blanca, tres haces luminosos monocromáticos,  $A$ ,  $B$  y  $C$ , de la forma que se indica en la Figura 42.8.

Al reflejarse, veremos los colores puros correspondientes a las radiaciones monocromáticas en las zonas iluminadas únicamente por cada uno de ellos. Pero además, en las zonas iluminadas por más de una de esas radiaciones, aparecen nuevos colores complejos, mezcla de los anteriores, así veremos el  $A + B$ , el  $A + C$ , el  $B + C$  y el  $A + B + C$ . A los colores  $A$ ,  $B$  y  $C$  se les denomina *primarios*.

En la región de la pantalla común a los tres haces luminosos podemos obtener diferentes colores, con solo modificar el flujo luminoso de alguno o algunos de los haces incidentes. Si las luminancias que da la pantalla para cada uno de los haces incidentes son:  $L_a$ ,  $L_b$  y  $L_c$ , obtendremos un color  $x$  de luminancia  $L_x$  tal que:

$$L_x = L_a + L_b + L_c \quad [42.17]$$

Este nuevo color  $x$  ha sido obtenido por mezcla aditiva de tres:  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

Todos los colores no pueden ser obtenidos de esta manera, pero un color  $x$  que no pueda ser obtenido por mezcla aditiva de tres, verifica que su mezcla con uno de éstos da igual color que la mezcla de los otros dos, es decir:

$$L_x + L_a = L_b + L_c$$

A veces será necesario mezclar el color  $x$  con dos de los primarios para que nos dé el tercero, es decir,

$$L_x + L_a + L_b = L_c$$

Esto únicamente nos indica que las luminancias de algunos de los colores primarios hay que considerarlas negativas.

Por tanto, cualquier color puede obtenerse por mezcla adecuada de tres colores primarios, con la única condición de que éstos sean independientes entre sí, es decir, uno de ellos no puede ser obtenido por mezcla aditiva de los otros dos. En la figura 42.9 se representan las proporciones en que han de tomarse los colores primarios  $A$  ( $\lambda = 450$  nm, violeta-azul),  $B$  ( $\lambda = 550$  nm, verde) y  $C$  ( $\lambda = 620$  nm, naranja-rojo) para obtener todos y cada uno de los colores del espectro.

En general, se suelen tomar como colores primarios el rojo, el verde y el azul, debido a que con ellos puede obtenerse una mayor gama de colores sin necesidad de emplear luminancias negativas. En televisión se toman:  $\lambda_B = 470$  nm, azul;  $\lambda_G = 535$  nm, verde, y  $\lambda_R = 610$  nm, naranja, con las intensidades de los haces luminosos adecuadas para que el blanco tricromático que aparece en el centro sea un blanco azulado, que es el más agradable a la visión.

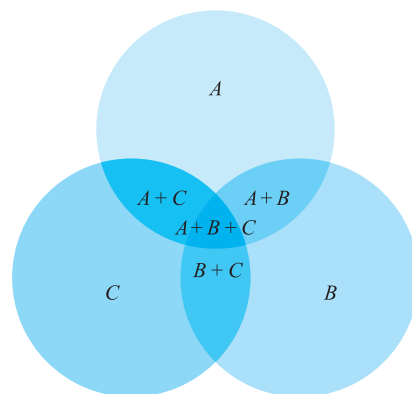


Figura 42.8. Mezcla aditiva de colores.

Colores primarios

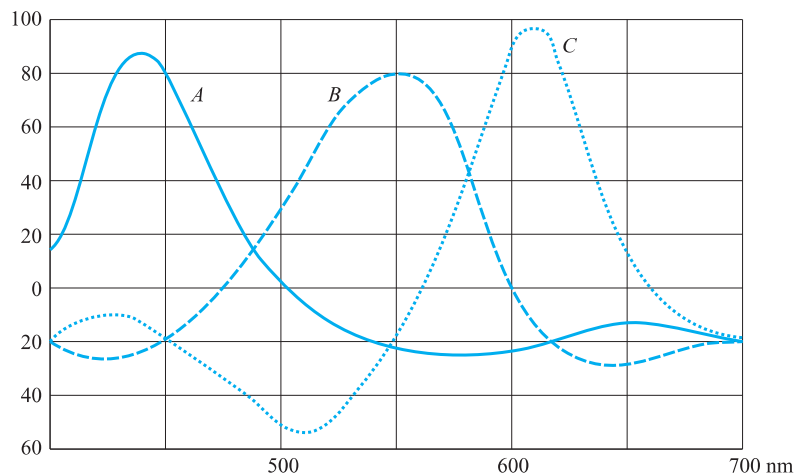


Figura 42.9. Obtención de cada color por mezcla aditiva de tres primarios.

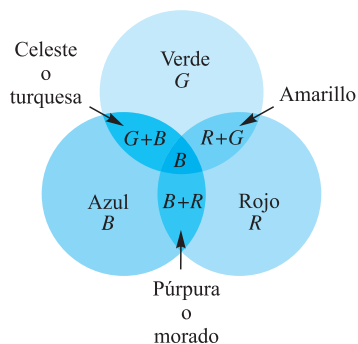


Figura 42.10. Colores mezcla de dos primarios.

En las zonas iluminadas por dos de los tres colores aparecen nuevos colores, como se indica en la Figura 42.10: el amarillo, como mezcla de rojo y verde; el morado o púrpura, como mezcla de rojo y azul, y el turquesa o celeste, como mezcla de azul y verde.

El morado no es un color real correspondiente a una determinada longitud de onda, su existencia es debida al estímulo producido en nuestra retina simultáneamente por las radiaciones roja y azul. Esto demuestra que la mezcla aditiva de colores no es un fenómeno físico, en el sentido de que interfieran los haces luminosos para dar otro con una nueva longitud de onda.

A los colores primarios citados, azul, verde y rojo, se les denomina *colores primarios aditivos*, cuya mezcla, como hemos indicado, da color blanco; pero hay algunas aplicaciones que necesitan utilizar colores primarios cuya mezcla dé negro, tal es el caso de pantallas de ordenador e impresoras, en estos casos se usan como primarios el amarillo, el morado o púrpura y el turquesa o celeste, cuya mezcla adecuada da negro, a estos se les denomina *colores primarios sustractivos*.

## 42.15 Blanco patrón. Colores complementarios

Dos colores se dice que son complementarios cuando actuando sobre el ojo humano simultáneamente y en proporciones adecuadas producen la sensación de color blanco. Para establecer si dos *colores* son *complementarios* es necesario tomar un blanco patrón de referencia. A continuación citamos una serie de diferentes tipos de color blanco indicando sus características y su forma de obtención:

- «Blanco E»: es el producido por una radiación que lleva todas las longitudes de onda del espectro visible con igual intensidad, su espectro es una constante. Es, pues, un blanco teórico, difícilmente reproducible en la realidad, pero útil como referencia en aproximaciones teóricas. Al ojo humano este «blanco E» le parece ligeramente púrpura.
- «Blanco A»: es el producido por la radiación procedente de un cuerpo negro a la temperatura  $T = 2850$  K. Es fácilmente reproducible y sirve como referencia en medidas reales. Una lámpara de filamento de tungsteno a 2850 K en atmósfera gaseosa es una buena fuente de este tipo de blanco.
- «Blanco B»: es el correspondiente a la luz solar directa y, aproximadamente, se corresponde con el producido por un radiador negro perfecto a la temperatura de

4800 K. También el blanco B puede obtenerse filtrando adecuadamente el A. Es éste un blanco cálido, es decir, con bastante proporción de amarillos y rojos en su espectro.

d) «Blanco C»: es el producido por la luz solar difusa y aproximadamente se corresponde con el producido por la radiación emitida por el cuerpo negro a  $T = 6770$  K, pudiendo obtenerse del A mediante filtrado adecuado. Este es un blanco suave, con gran proporción de azules en su espectro.

e) «Blanco D 6500»: es el producido por la radiación del cuerpo negro a  $T = 6500$  K y es intermedio entre el B y el C; habiendo sido adoptado como blanco patrón para la televisión en color de Europa. Es muy parecido al blanco «C».

## 42.16 Sistema colorimétrico X, Y, Z

La Comisión Internacional de Iluminación, en 1931, al objeto de evitar la utilización de luminancias negativas, decidió tomar como colores primarios los X, Y, Z definidos respecto de los R, G, B; por las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} X &= 2,7689 R + 1,7519 G + 1,1302 B \\ Y &= R + 4,5909 G + 0,06012 B \\ Z &= 0,0565 G + 5,5944 B \end{aligned} \quad [42.18]$$

Estos colores no son reales y, además, el valor de Y se hace coincidir con el valor de la luminancia L.

Una luz cuya luminancia espectral sea  $L(\lambda)$  tiene por componentes X, Y, Z, dadas por las expresiones:

$$X = \int_{EV} L(\lambda) \bar{X}(\lambda) d\lambda, \quad Y = \int_{EV} L(\lambda) \bar{Y}(\lambda) d\lambda, \quad A = \int_{EV} L(\lambda) \bar{Z}(\lambda) d\lambda \quad [42.19]$$

en las cuales la integral está extendida a todo el espectro visible. Los valores  $\bar{X}(\lambda)$ ,  $\bar{Y}(\lambda)$  y  $\bar{Z}(\lambda)$  fueron establecidos por la Comisión Internacional de Iluminación para cada una de las luces monocromáticas de igual luminancia, habiéndose tomado como unidad para ésta la correspondiente a  $\lambda = 555$  nm,  $\bar{Y}(555) = 1$ . En la Figura 42.11 se han representado los valores de X, Y y Z.

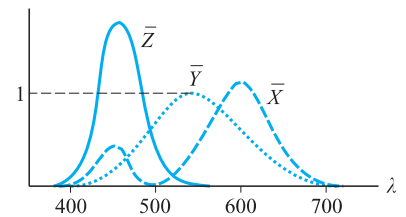


Figura 42.11. Valores  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\bar{Z}$  establecidos por la Comisión Internacional de Iluminación.

## 42.17 Diagramas cromáticos

En un espacio trirrectangular de referencia, los valores X, Y, Z, son las componentes de un vector denominado *vector de color*  $C(X, Y, Z)$ , el cual cortará al plano  $\pi$  de ecuación:

$$x + y + z = 1 \quad [42.20]$$

en un punto  $P(x, y, z)$  cuyas coordenadas, por pertenecer al plano  $\pi$ , verifican siempre la Ecuación [42.20].

En la Figura 42.12 puede verse geoméricamente que se verifican las relaciones,

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} = \frac{1}{X + Y + Z} \quad [42.21]$$

De donde se expresan:

$$x = \frac{X}{X + Y + Z}, \quad y = \frac{Y}{X + Y + Z}, \quad z = \frac{Z}{X + Y + Z} \quad [42.22]$$

Los valores  $x, y, z$  son los *coeficientes tricromáticos* y carecen de dimensiones.

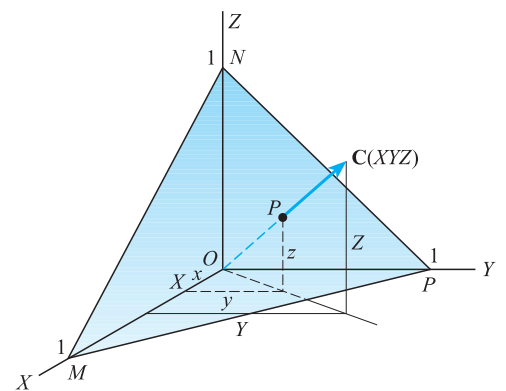


Figura 42.12. Coeficientes tricromáticos.

Cada color está representado por un punto del plano  $\pi$ , dentro del triángulo equilátero  $MNP$ ; la representación de los colores del espectro sobre este triángulo da lugar al *diagrama de cromaticidad* o *curva lugar del espectro*. Los coeficientes de [42.18] se han calculado de forma que el blanco queda representado por el punto  $x = y = z = 1/3$ .

Los coeficientes  $x, y, z$  no son independientes entre sí, ya que verifican [43.20]. El problema puede reducirse a uno bidimensional si en lugar de trabajar dentro del triángulo equilátero  $MNP$ , lo hacemos sobre un triángulo rectángulo e isósceles, proyección del  $MNP$  sobre uno de los planos coordenados, por ejemplo el  $XOY$ . La curva lugar del espectro o diagrama cromático que así resulta se ha representado en la Figura 42.13. La línea que une los extremos de la curva lugar del espectro se denomina línea de los púrpura. En la misma Figura 42.13 se ha representado el lugar del espectro de los radiadores planckianos para diferentes temperaturas, sobre el cual se han situado los diferentes blancos.

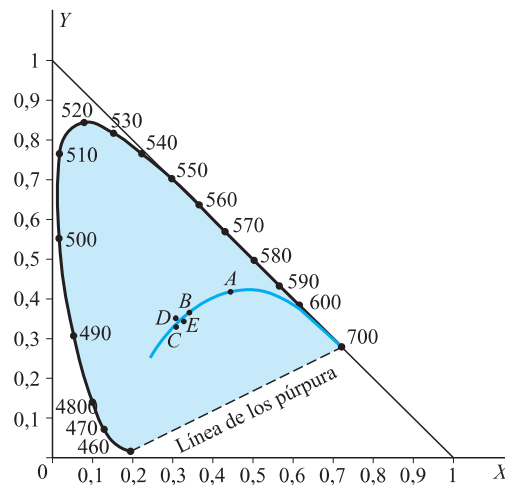


Figura 42.13. Diagrama de cromaticidad.

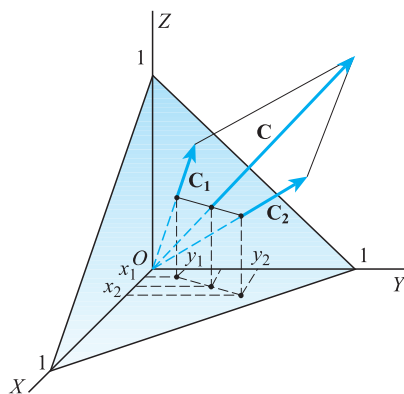


Figura 42.14. Coeficientes de un color suma de dos.

Un color  $C(X, Y, Z)$ , que es suma de los colores  $C_1(X_1, Y_1, Z_1)$  y  $C_2(X_2, Y_2, Z_2)$ , está situado en el plano definido por los colores componentes, y sus coeficientes tricromáticos  $(x, y, z)$  deben pertenecer a este plano y al  $x + y + z = 1$ , luego están en la intersección de ambos, es decir, en la línea que une los puntos representativos de los coeficientes tricromáticos de los colores componentes  $(x_1, y_1, z_1)$  y  $(x_2, y_2, z_2)$  (Figura 42.14). Por tanto, un color mezcla de otros dos tiene su punto de representación  $(x, y)$  en la línea que une los puntos de representación de sus componentes  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ . De aquí se deduce que únicamente en la región limitada por la curva lugar del espectro y la línea de los púrpura pueden existir colores reales.

### 42.18 Longitud de onda dominante o tinte y pureza o saturación

Si a un haz blanco le superponemos otro monocromático de longitud de onda  $\lambda$ , obtenemos un haz coloreado cuyo punto representativo está en la línea que une el representativo del blanco  $E$  (centro del diagrama cromático) y el representativo del monocromático (punto de la curva lugar del espectro). En el haz coloreado resultante, a la longitud de onda  $\lambda$  se la denomina *longitud de onda dominante o tinte*. Por tanto, si el punto representativo da un color  $P(x, y)$  se une con el centro del

diagrama cromático  $E(1/3, 1/3)$  la recta cortará a la curva lugar del espectro en un punto  $P'$ , cuya longitud de onda correspondiente  $\lambda$  es el tinte del color. (Figura 14.15).

La *pureza o saturación* del color queda medida por el cociente:

$$P = \frac{PE}{P'E}$$

El cual es un número sin dimensiones y su valor varía de 0, para el color blanco, a 1, para el color puro del espectro.

También puede expresarse la pureza o saturación en función de las luminancias. Sean  $L_w$  la luminancia del haz blanco y  $L_{p'}$  la luminancia del haz monocromático de longitud  $\lambda$ , si el haz coloreado resultante tiene por luminancia  $L_p$ , evidentemente se verificará:

$$L_p = L_w + L_{p'}$$

Con lo cual, la pureza del haz coloreado se expresa:

$$p = \frac{L_{p'}}{L_p} = \frac{L_p - L_w}{L_p} = 1 - \frac{L_w}{L_p}$$

Para un haz monocromático puro será  $L_w = 0$  y  $p = 1$ , y para un haz blanco será  $L_{p'} = 0$  y  $p = 0$ .

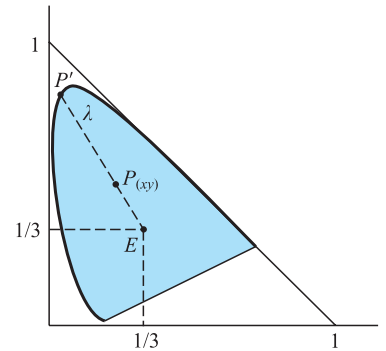


Figura 42.15. Tinte y pureza de un color.





### 43.1 Introducción

A finales del siglo XIX coexistían dos sólidas teorías: la Mecánica de Newton (1643-1727), antigua, promulgada en el siglo XVII, confirmada por muchos años de experiencia, y el Electromagnetismo de Maxwell (1831-1879), joven, cuyas famosas ecuaciones, que explicaban con plena satisfacción todos los fenómenos electromagnéticos conocidos, fueron publicadas en 1865. Sin embargo, ambas teorías eran incompatibles entre sí, como puso de manifiesto Poincare (1854-1912).

Las leyes de la Mecánica Clásica son covariantes en una transformación de Galileo. Es decir, los dos miembros de la igualdad que expresa la ley, al cambiar de sistema inercial de referencia, lo hacen de la misma manera, subsistiendo la igualdad. *Todas las leyes de la Mecánica Clásica son las mismas en cualquier sistema inercial de referencia.* Lo que constituye el principio de relatividad de Galileo y establece la imposibilidad de conocer si el sistema en el cual se realiza la experiencia es fijo o se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme respecto a otro.

Las ecuaciones de Maxwell no son covariantes en una transformación de Galileo. Es decir, su expresión varía según el sistema inercial elegido, lo que conduce a la situación inadmisibles de que dos fuerzas, una de origen mecánico y otra de origen eléctrico, iguales en un sistema de referencia, no lo sean al pasar a otro sistema inercial.

Otra incompatibilidad que presentan las dos citadas teorías dimana de la ley de composición de velocidades. En Mecánica Clásica, la velocidad respecto de un sistema de referencia  $S$  es igual a la velocidad respecto a otro sistema  $S'$  más la producida por el movimiento de éste respecto al primero.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$$

En contradicción con esto, la teoría electromagnética establece la velocidad de la luz en el vacío como una constante independiente del sistema inercial de referencia.

En 1887, Michelson y Morley realizaron su famosa experiencia tratando de determinar la velocidad de la luz respecto a un sistema ligado a la Tierra, el cual, por ir ligado a esta, se mueve respecto al hipotético éter tomado como sistema de

- 43.1. Introducción
- 43.2. Relatividad del tiempo
- 43.3. Principio de relatividad especial
- 43.4. Transformaciones de Lorentz
- 43.5. Contracción de longitudes. Velocidad límite
- 43.6. Dilatación de intervalos de tiempo
- 43.7. Relatividad de la simultaneidad
- 43.8. Relatividad especial y principio de causalidad
- 43.9. Efecto Doppler relativista
- 43.10. Problemas de los mellizos
- 43.11. Invariante fundamental. Espacio-tiempo cuadrimensional
- 43.12. Cuadrivector velocidad
- 43.13. Transformación de velocidades
- 43.14. Principio de correspondencia

referencia absoluto. El resultado fue que la velocidad de la luz es la misma en ambos sistemas y no se verifica para ella la ley de composición de velocidades. Asimismo, el astrónomo De Sitter (1872-1934), haciendo observaciones sobre estrellas dobles, comprobó que la velocidad de la luz es independiente de la velocidad de la fuente luminosa.

## 43.2 Relatividad del tiempo

Einstein (1879-1955) puso de manifiesto el fallo de la Mecánica Clásica debido a que en ella se utiliza un concepto absoluto del tiempo. Así, Newton, en sus *Principia*, escribe: *El tiempo absoluto, verdadero y matemático, de suyo y por su propia naturaleza, fluye uniformemente sin relación a nada externo...* Einstein, por el contrario, pensó que el tiempo era un concepto relativo, el cual depende del movimiento del observador que trate de medirlo. Analicemos de forma sencilla este hecho.

Se definen dos intervalos de tiempo como iguales cuando en el transcurso de los mismos se realizan dos fenómenos iguales. Para la medición de tiempos deben considerarse fenómenos que se repitan de forma periódica, así se consideró inicialmente la rotación de la Tierra alrededor de su eje imaginario, en el siglo XIII aparecen los primeros relojes mecánicos, posteriormente, Galileo utilizó los movimientos pendulares y, en los últimos tiempos, la frecuencia de emisión atómica.

Diremos que dos sucesos son simultáneos cuando se producen en el mismo instante, es decir, al cabo de un mismo número de repeticiones del fenómeno periódico elegido para medir tiempos. Para determinar si dos sucesos alejados se han producido simultáneamente será necesario disponer de una experiencia que lo pueda comprobar. Einstein proponía el siguiente ejemplo: supongamos que un rayo ha caído sobre la vía del tren en dos puntos alejados,  $A$  y  $B$ ; para verificar la simultaneidad de estos impactos es necesario colocar un observador en el punto medio  $M$  entre los dos, provisto de dos espejos formando ángulo adecuado que le permita observar en el mismo instante los dos puntos. Supongamos un tren que se desplaza sobre la vía con una cierta velocidad de  $B$  hacia  $A$  y sea  $M'$  el punto del tren coincidente con el  $M$  en el momento de producirse los impactos. Si éstos son simultáneos los destellos llegarán a  $M$  en el mismo instante, pero  $M'$  se habrá desplazado por ser un punto del tren y le llegará antes el destello de  $A$ . Por tanto, los sucesos que son simultáneas para un observador situado en Tierra dejan de serlo para el observador situado sobre el tren. Vemos así cómo el concepto de simultaneidad es relativo y depende del sistema de referencia elegido. En consecuencia, la medida del tiempo es relativa y no tiene sentido si no se indica el sistema de referencia en el cual se ha medido.

Un suceso quedará determinado en un cierto sistema de referencia, cuando se den, además de las tres coordenadas espaciales correspondientes al punto en el que ha tenido lugar el suceso:  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , el tiempo  $t$  correspondiente al instante en el cual se ha producido, medido en este sistema de referencia.

## 43.3 Principio de relatividad especial

Las leyes físicas, como leyes de la naturaleza que son, deben ser generales a toda ella y no privativas de ciertos campos. Así, Einstein, generalizó el Principio de Relatividad galileano a todos los campos de la Física, emitiendo, en 1905, su Principio de Relatividad Especial:

*La Ciencia Física es la misma en cualquiera de los sistemas de referencia inerciales entre sí.*

Por tanto, las leyes de la naturaleza no dependen de nuestro particular sistema de observación; si distintos observadores realizan la misma experiencia en diferentes sistemas inerciales deben llegar a los mismos resultados.

Asimismo, admitió como postulado la constancia de la velocidad de la luz:

*La luz se propaga en el vacío con velocidad constante  $c$ , cualquiera que sea la velocidad relativa del observador y la fuente emisora.*

Esto significa que la velocidad de la luz es una constante fundamental de la naturaleza, como hemos visto en la Ecuación (36.31).

En consecuencia, se trata de buscar las transformaciones, que permitan pasar de un sistema de referencia a otro inercial con él, y para las cuales las leyes del Electromagnetismo sean covariantes, como en general, cualquier ley física. Las transformaciones que cumplen esa condición son debidas a Lorentz (1853-1928), motivo por el cual llevan su nombre. Una vez encontradas estas transformaciones será necesario modificar las ecuaciones fundamentales de la Mecánica Clásica de forma que resulten covariantes para las mismas.

## 43.4 Transformaciones de Lorentz

Para deducir las transformaciones de Lorentz seguiremos un método muy sencillo debido al propio Einstein.

Consideremos un sistema de referencia  $S$ , respecto al cual se mueve, con movimiento de traslación uniforme de velocidad  $V$ , otro sistema de referencia  $S'$ . La disposición relativa entre ambos sistemas es la indicada en la Figura 43.1, los ejes equis coinciden permanentemente y los otros dos se conservan paralelos a sí mismos.

Cualquier suceso que se produzca sobre el eje  $X - X'$ , estará definido en el sistema  $S$  por la abscisa  $x$  y el tiempo  $t$ , y en el sistema  $S'$ , por la abscisa  $x'$  y el tiempo  $t'$ .

Supongamos que una señal luminosa que es emitida en el instante  $t = t' = 0$  en  $O \equiv O'$ . Al propagarse en el sistema  $S$  a lo largo del eje  $X$ , verificará:

$$x = ct \quad \text{o} \quad x - ct = 0 \quad [43.1]$$

Puesto que la misma señal luminosa se propaga también respecto al sistema  $S'$  con velocidad  $c$ , en este sistema verificará:

$$x' = ct' \quad \text{o} \quad x' - ct' = 0 \quad [43.2]$$

Los puntos del espacio-temporal que satisfacen la Ecuación [43.1] también satisfacen la [43.2], lo que evidentemente sucederá si se verifica la relación:

$$(x' - ct') = \lambda(x - ct) \quad [43.3]$$

En la que  $\lambda$  es una constante y la nulidad de  $x - ct$  implica la de  $x' - ct'$  y viceversa.

Consideraciones completamente análogas aplicadas a una señal que se propaga a lo largo del eje  $X$  en el sentido negativo, llevan a que debe verificarse la relación:

$$(x' + ct') = \mu(x + ct) \quad [43.4]$$

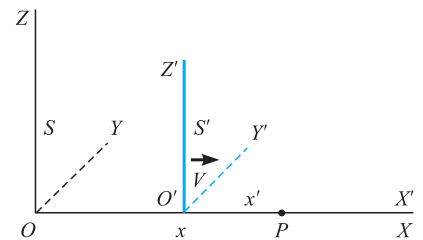


Figura 43.1.

Sumando y restando las Ecuaciones [43.3] y [43.4] se obtiene, respectivamente:

$$x' = \frac{\lambda + \mu}{2} x - \frac{\lambda - \mu}{2} ct$$

$$ct' = \frac{\lambda + \mu}{2} ct - \frac{\lambda - \mu}{2} x$$

Las cuales, cambiando las constantes, pueden expresarse de forma más sencilla

$$\left. \begin{aligned} x' &= ax - bct \\ ct' &= act - bc \end{aligned} \right\} \quad [43.5]$$

El problema estará resuelto si calculamos el valor de las constantes  $a$  y  $b$ , lo cual puede hacerse utilizando las consideraciones siguientes:

Para el origen  $O'$  de  $S'$ , constantemente se verifica  $x' = 0$  y la primera Ecuación [43.5] da:

$$x = \frac{bc}{a} t$$

Puesto que el origen de  $S'$  se mueve respecto a  $S$  con la velocidad  $V$ , deberá ser:

$$V = \frac{bc}{a} \quad [43.6]$$

Por otra parte, después del Principio de Relatividad, la longitud en el sistema  $S$ , de una cierta regla que está en reposo en el sistema  $S'$ , debe ser exactamente la misma que la que tiene en el sistema  $S'$  la misma regla situada en reposo en el sistema  $S$ . Para ver cómo se presentan en el sistema  $S$  los puntos del eje  $X'$  debemos tomar una instantánea de  $S'$  en un cierto instante  $t$  de  $S$ ; por ejemplo,  $t = 0$ . Entonces, de la primera Ecuación [43.5] obtenemos:

$$x' = ax$$

Si la regla considerada tiene longitud unidad, dos puntos del eje  $X'$  separados por la distancia unidad en el sistema  $S'$ ,  $\Delta x' = 1$ , en nuestra instantánea en el sistema  $S$ , están separados por la distancia:

$$\Delta x = \frac{1}{a} \quad [43.7]$$

Considerando ahora la regla situada en el sistema  $S$ , al tomar desde el sistema  $S'$  una instantánea en  $t' = 0$ , de la segunda [43.5] se obtiene:

$$0 = act - bx$$

Eliminando el tiempo  $t$  entre ésta y la primera [43.5], y teniendo en cuenta la [43.6], resulta:

$$x' = ax \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right)$$

Por tanto, dos puntos separados en el sistema  $S$  por la longitud unidad  $\Delta x = 1$ , en el sistema  $S'$  están separados por la distancia:

$$\Delta x' = a \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right)$$

Como después de lo dicho las dos mediciones deben ser idénticas,  $\Delta x = \Delta x'$ , resulta:

$$\frac{1}{a} = a \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Con lo cual, de [43.6] se deduce:

$$b = \frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Finalmente, llevando los valores de estas constantes a las Ecuaciones [43.5] se obtiene:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad y \quad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad [43.8]$$

Estas son las transformaciones de Lorentz para sucesos sobre el eje de las equis. Para sucesos situados fuera del eje de las equis, se generaliza el resultado con sólo añadir a las Ecuaciones [43.8] las:

$$y' = y; \quad z' = z$$

Si hacemos los cambios,

$$\frac{V}{c} = \beta \quad y \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma$$

las transformaciones de Lorentz se expresan:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma \left( t - \frac{\beta}{c} x \right) \end{aligned} \right\} \quad [43.9] \quad \text{Transformación de Lorentz}$$

Las cuales, matricialmente, toman la forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta c\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma/c & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Hallando la inversa de la matriz cuadrada, puede escribirse:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta c\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma/c & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$$

De donde se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} x &= \gamma(x' + Vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2} x'\right) \end{aligned} \right\} \quad [43.10]$$

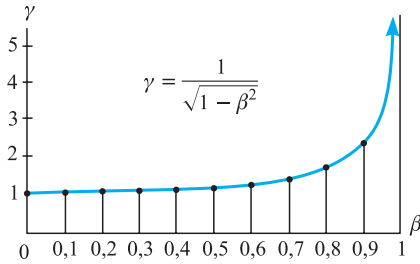


Figura 43.2. Gamma función de beta.

Ecuaciones que son las mismas Ecuaciones [43.9] sin más que suponer al sistema  $S'$  como fijo y que el  $S$  se mueve respecto a él con velocidad  $-V$ , cosa que según la mecánica clásica era previsible.

Si en las transformaciones de Lorentz se hace tender  $V/c$  a cero se obtienen las de Galileo. Éstas son una aproximación de aquéllas para valores de  $V$  muy pequeños frente a  $c$ . En la Figura 43.2 se representa  $\gamma$  en función de  $\beta$ .

### 43.5 Contracción de longitudes. Velocidad límite

Consideremos un segmento  $AB$  fijo en el sistema  $S'$ , situado en dirección del movimiento relativo de los dos sistemas de referencia, y cuya longitud en este sistema sea  $l'$ :

$$l' = x'(B) - x'(A)$$

Para determinar la longitud de este segmento en el sistema  $S$  necesitamos conocer, en un cierto instante de este sistema, la posición que en él ocupan los extremos del segmento. La primera Ecuación de Lorentz [43.9] da:

$$x'(A) = \gamma[x(A) - \beta ct] \quad \text{y} \quad x'(B) = \gamma[x(B) - \beta ct]$$

Restando ambas resulta:

$$l' = x'(B) - x'(A) = \gamma[x(B) - x(A)] = \gamma l \quad [43.11]$$

#### Contracción de longitudes

Puesto que siempre es  $\gamma > 1$ , siempre será  $l < l'$ . Al observador situado en  $S$  le parece que la regla se ha contraído, contracción que se denomina de Fitzgerald, ya que fue una hipótesis emitida por éste para evitar la hipótesis del éter inmóvil. La contracción es tanto mayor cuanto mayor es  $V$ ; al tender  $V$  a  $c$ , tiende  $\gamma$  a  $\infty$  y la longitud, medida en el sistema respecto al cual el segmento se mueve, tiende a cero. Por tanto, la velocidad  $c$  aparece como una *velocidad límite*, que no puede ser alcanzada por cuerpo real alguno sin desaparecer.

Análogamente, un segmento de longitud  $l$  fijo en el sistema  $S$ , paralelo a la dirección del movimiento relativo entre los dos sistemas de referencia, para un observador fijo en el sistema móvil  $S'$  le parecerá más corto, verificando  $l = \gamma l'$ .

En conclusión: *la longitud de un segmento, orientado según la dirección del movimiento relativo de los referenciales, es máxima en el sistema de referencia en el cual el segmento está fijo.* Por ello suele denominarse a esta longitud, *longitud propia*.

La longitud de un segmento, orientado en dirección normal a la del movimiento relativo de los sistemas de referencia no varía al ser medida en uno u otro de éstos, ya que siempre es  $y' = y$  y  $z' = z$ .

#### EJEMPLO 43.1

Dos cápsulas espaciales se mueven siguiendo trayectorias paralelas muy próximas, siendo sus velocidades de distinto sentido y su velocidad relativa  $V = 0,8 c$ .

Sobre la cápsula  $S$  se ha escrito su nombre con letras de longitud 25 cm en la dirección del movimiento y altura también de 25 cm. Calculemos el tamaño de las letras que ven los astronautas de la cápsula  $S'$  en el instante de cruzarse.

### Solución:

La relación (43.11) permite despejar  $l'$ , anchura de las letras en el sistema  $S'$

$$l' = \frac{l}{\gamma} l \sqrt{1 - \beta^2} = 25 \sqrt{1 - 0,8^2} = 15 \text{ cm}$$

La altura de las letras no se modifica, ya que no existe movimiento en dirección transversal, seguirá siendo de 25 cm.

## 43.6 Dilatación de intervalos de tiempo

Consideremos un observador fijo en un punto  $A$  del sistema  $S$ , provisto de su correspondiente reloj. En un instante  $t_1$  de éste comienza ante él un cierto fenómeno, que se produce en el sistema  $S$ . El observador del sistema  $S'$  que pase en ese momento por el citado punto leerá en su reloj el tiempo  $t'_1$  y, de acuerdo con la cuarta Ecuación de Lorentz [43.9], se verificará:

$$t'_1 = \gamma \left( t_1 - \frac{\beta}{c} x_1 \right)$$

siendo  $x_1$  la coordenada correspondiente al punto  $A$ .

En el instante  $t_2$  del reloj del observador del sistema  $S$  situado en  $A$ , acaba el fenómeno. El observador del sistema  $S'$  que pase por  $A$  en ese momento leerá en su reloj el tiempo  $t'_2$ :

$$t'_2 = \gamma \left( t_2 - \frac{\beta}{c} x_1 \right)$$

Restando ambas expresiones, resulta:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1) = \gamma \Delta t \quad [43.12] \quad \text{Dilatación del tiempo}$$

Por tanto, al ser  $\gamma > 1$  debe ser  $\Delta t < \Delta t'$ , es decir, *el intervalo de tiempo que dura un fenómeno medido en el sistema en el cual se produce éste en reposo, es menor que el medido por los relojes del sistema móvil respecto a él.*

Análogamente, midiendo el intervalo de tiempo que dura un cierto fenómeno en el sistema  $S'$  con un reloj de él, se medirá un tiempo menor que el medido por los relojes del sistema  $S$ .

Se denomina *tiempo propio* de un suceso al medido por un reloj inmóvil en el sistema en el cual se produce el suceso. El tiempo propio es el menor que puede ser medido para ese suceso, ya que cualquier otro medido por relojes de sistemas móviles será mayor. Por tanto, expresando al tiempo propio con  $\tau$ , siempre se verificará:

$$dt = \gamma d\tau \quad \text{o} \quad dt' = \gamma d\tau \quad [43.13]$$

según sí el suceso se produce en el sistema  $S'$  o en el  $S$ , respectivamente.

### Tiempo propio

**EJEMPLO 43.2**

Un muón ha sido producido en la atmósfera por los rayos cósmicos, a una altura de 10 km. El muón se dirige en línea recta normal a la superficie de la Tierra a la velocidad  $V = 0,998 c$ . Se sabe que los muones producidos en el laboratorio tienen una vida de  $2,2 \cdot 10^{-6}$  s. Calculemos para un observador situado sobre la Tierra:

- La vida del muón producido por los rayos cósmicos.
- Si el citado muón llegará a la superficie de la Tierra o desaparecerá antes.
- A partir de qué altura los muones producidos no llegarán a la superficie terrestre.

**Solución:**

a) El tiempo propio de vida del muón es el medido en un sistema de referencia ligado a él, es decir, es  $2,2 \cdot 10^{-6}$  s. La vida del muón, para un observador ligado a Tierra, será más larga y está dada por la (43.13):

$$\Delta t' = \gamma \Delta \tau = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{2,2 \times 10^{-6}}{\sqrt{1 - \left(\frac{0,998c}{c}\right)^2}} = 34,80246 \times 10^{-6} \text{ s}$$

b) El tiempo que necesita el muón para llegar a tierra es:

$$t' = \frac{10\,000}{0,998c} = \frac{10^4}{0,998 \times 3 \times 10^8} = 33,400 \times 10^{-6}$$

Por tanto, el muón llega a la superficie terrestre antes de desintegrarse.

c) La distancia recorrida por el muón en el sistema  $S'$  ligado a la superficie de la Tierra es igual a su velocidad por el tiempo medido en este sistema:

$$x' = 0,998c\Delta t' = 0,998 \times 3 \times 10^8 \times 34,80246 \times 10^{-6} = 10\,419,86 \text{ m}$$

Esta es la altura máxima desde la cual los muones pueden llegar a tierra.

El hecho de que nos llegen a la superficie terrestre muones es una confirmación de la teoría de la Relatividad especial, ya que si consideráramos el tiempo de vida del muón medido en los producidos en el laboratorio, su recorrido sería únicamente de:

$$x' = 0,998c \times 2,2 \times 10^{-6} = 6,5868 \times 10^2 = 658,68 \text{ m}$$

En consecuencia, puesto que los muones se producen a unos 10 km de altura, sería imposible que pudieran llegar a tierra.

Otra confirmación de la teoría de la Relatividad se llevó a cabo en 1972, instalando en un avión comercial cuatro relojes atómicos y contrastando sus medidas, después de circunvolar la Tierra, con otros relojes iguales que habían quedado fijos en tierra, en el Observatorio de la Marina, comprobándose la dilatación de los intervalos de tiempo. El mismo fenómeno se produce en los satélites del sistema GPS, los cuales llevan una velocidad orbital de unos 14 000 km/h y sus relojes atrasan respecto a los de la Tierra unos 7,5  $\mu\text{s}$ /día, sin considerar el efecto gravitacional del que hablaremos posteriormente.



### 43.7 Relatividad de la simultaneidad

Consideremos dos sucesos que se producen en sendos puntos del sistema  $S$ ,  $(x, y, z, t)$  y  $(x + \Delta x, y, z, t)$ . Ellos, evidentemente, son simultáneos en el sistema  $S$ , ya que es  $\Delta t = 0$ .

Veamos si para los observadores del sistema  $S'$  siguen siendo o no simultáneos ambos sucesos. La cuarta ecuación de Lorentz [43.9] para el primero de los sucesos, es:

$$t' = \gamma \left( t - \frac{\beta}{c} x \right)$$

y para el segundo:

$$t' + \Delta t' = \gamma \left[ t - \frac{\beta}{c} (x + \Delta x) \right]$$

Restando ambas, resulta:

$$\Delta t' = -\gamma \frac{\beta}{c} \Delta x \neq 0$$

En consecuencia, en el sistema  $S'$  no son simultáneos los sucesos que lo eran en el sistema  $S$ .

### 43.8 Relatividad especial y principio de causalidad

Un cierto suceso ocurre en el origen del sistema  $S$  en el instante  $t = t' = 0$ , en el cual coinciden los orígenes de los dos sistemas de referencia. Este suceso se propaga en el sistema  $S$  con una velocidad  $V$  y produce un efecto en el punto  $x_1$ , en el instante  $t_1 = x_1/V$ .

Asimismo, al propagarse el suceso en el sistema  $S'$ , produce un efecto en el punto  $x'_1$ , coincidente con el  $x_1$ , en el instante

$$t'_1 = \gamma \left( t_1 - \frac{\beta}{c} x_1 \right)$$

En el sistema  $S$  es evidente el cumplimiento del principio de causalidad, pero para que se verifique en el sistema  $S'$ , hace falta que sea  $t'_1 > 0$ , ya que de lo contrario el efecto sería anterior a la causa. Para que el tiempo  $t'_1$  sea mayor que cero:

$$t'_1 = \gamma \left( t_1 - \frac{V}{c^2} x_1 \right) = \gamma \left( t_1 - \frac{V}{c^2} v_1 t_1 \right) = \gamma t_1 \left( 1 - \frac{V v_1}{c^2} \right) > 0$$

puesto que lo es  $t_1$ ,  $\gamma$  es mayor que uno y  $V$ , a lo sumo, puede valer  $c$ , debe ser  $v_1 < c$ . Por tanto, puesto que según se ha visto, una causa no puede propagarse a mayor velocidad de la luz, siempre es mayor que cero y el principio de causalidad se verifica en todo sistema  $S'$  de referencia. *Todo efecto tiene siempre una causa anterior a él.*

### 43.9 Efecto Doppler relativista

El efecto Doppler, que es característico de todo movimiento ondulatorio, ya fue estudiado para el sonido; ahora lo estudiaremos para las ondas electromagnéticas, en

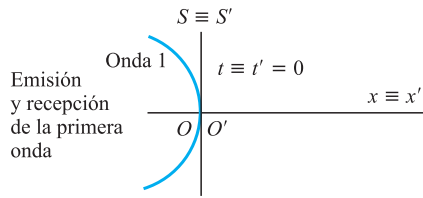


Figura 43.3. Emisión y recepción de la primera onda.

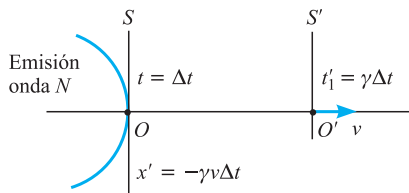


Figura 43.4. Emisión de onda N.

cuyo caso, debido a la gran velocidad de éstas, habrá que tener en cuenta los efectos relativistas.

Consideremos una fuente emisora de ondas electromagnéticas, fija en el origen  $O$  del sistema  $S$  y que en un tiempo  $\Delta t$  emite periódicamente  $N$  ondas. Su frecuencia de emisión es:

$$v_E = \frac{N}{\Delta t}$$

Veamos cuál es la frecuencia que recibe un observador situado en el origen  $O'$  del sistema  $S'$ , el cual se mueve respecto a  $S$  con velocidad constante  $V$ . Para ello, supongamos que la primera onda es emitida y recibida en el instante  $t = t' = 0$ , en el cual emisor y receptor coinciden (Figura 43.3).

En el instante  $t = \Delta t$  se emite la onda  $N$  (Figura 43.4).

En este instante, el punto del sistema  $S'$  que coincide con  $O$ , es:

$$x' = \gamma(x - V\Delta t) = -\gamma V\Delta t$$

Lo cual sucede en el tiempo del sistema  $S'$ ,  $t'_1 = \Delta t$ . Esta onda tiene que viajar en el sistema  $S'$  la distancia  $x'$ , hasta llegar al receptor, y en ello emplea el tiempo:

$$t'_2 = \frac{x'}{c} = \gamma V \frac{\Delta t}{c}$$

Por ello, la onda  $N$  es recibida en el instante  $t'$  (Figura 43.5):

$$t' = t'_1 + t'_2 = \gamma\Delta t + \frac{\gamma V\Delta t}{c} = \gamma\left(1 + \frac{V}{c}\right)\Delta t$$

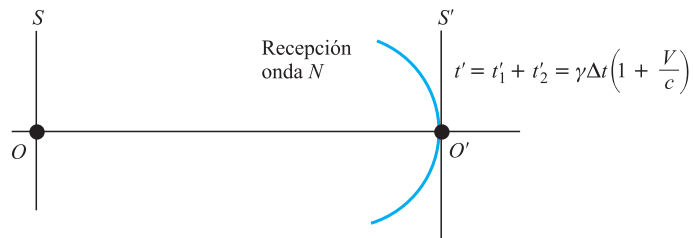


Figura 43.5. Recepción de la onda N.

En consecuencia, la frecuencia de recepción es:

$$v_R = \frac{N}{t'} = \frac{N}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c}\right)\Delta t} = \frac{v_E}{1 + \frac{V}{c}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = v_E \frac{\sqrt{1 - \frac{V}{c}}}{\sqrt{1 + \frac{V}{c}}}$$

$$v_R = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} v_E \tag{43.14}$$

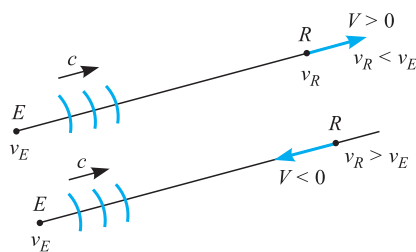


Figura 43.6.

Tal y como se ha deducido,  $V$  es la velocidad relativa del receptor respecto de la fuente emisora; si receptor y emisor se separan, que es el caso considerado en nuestro razonamiento, es  $V > 0$  y la frecuencia de recepción es menor que la de emisión. Por el contrario, si receptor y emisor se aproximan, es  $V < 0$ , y la frecuencia de recepción es mayor que la de emisión (Figura 43.6).

Además del efecto Doppler estudiado, que se produce en la dirección emisor-receptor, existe un efecto Doppler transversal, es decir, cuando emisor o receptor se desplazan transversalmente. Puesto que las longitudes transversales se conservan, las frecuencias deben ser inversamente proporcionales a los tiempos:

$$\frac{v_R}{v_E} = \frac{t}{t'} = \frac{1}{\gamma}$$

Por tanto, la frecuencia de recepción para el efecto Doppler transversal está dada por:

$$v_R = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} v_E \quad [43.15]$$

Así como el efecto Doppler en ondas acústicas se observa corrientemente, en las ondas electromagnéticas es de difícil observación por la alta velocidad de éstas. Únicamente en cuerpos astronómicos o partículas atómicas puede ser observado. En los cuerpos astronómicos, el efecto se traduce en una variación de la longitud de onda en los espectros que de ciertos elementos nos llegan, respecto a las longitudes de onda de esos mismos espectros emitidos en reposo sobre la Tierra. Cuando la longitud de onda es mayor en los espectros que provienen del exterior que en los emitidos en la Tierra por esos mismos elementos, se dice que hay un corrimiento hacia el rojo, lo que significaría que el cuerpo emisor se aleja de la Tierra; mientras que si es menor se dice que hay un corrimiento hacia el azul, indicando que el cuerpo emisor se acerca a la Tierra. Todo ello permite determinar la velocidad relativa entre distintas partes del Universo. Así, parece ser que el sistema solar se mueve, dentro de nuestra galaxia, hacia la nebulosa Andrómeda. En 1929, Hubble (1889-1953) encontró que de algunas galaxias nos llegaban espectros de elementos con corrimiento hacia el rojo, lo que le permitió establecer, que esas galaxias se alejan de nosotros a enormes velocidades, hecho en el que se basa la teoría de un Universo en expansión. Hubble estableció una ley según la cual la velocidad de separación es proporcional a la distancia a la que se encuentra la galaxia, denominándose a la constante de proporcionalidad *constante de Hubble*, cuyo valor es  $H \approx 2,5 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$ ,

$$V = HD \quad [43.16]$$

### EJEMPLO 43.3

Dos cápsulas espaciales,  $S$  y  $S'$  se mueven siguiendo trayectorias paralelas muy próximas, siendo sus velocidades de distinto sentido y su velocidad relativa  $V = 0,8c$ . La cápsula  $S'$  emite señales a razón de 20 palabras por minuto. Determinemos la frecuencia (palabras/minuto) de recepción por la cápsula  $S$  en el instante del cruce de ambas.

#### Solución:

El efecto Doppler relativista está dado por la (43.14), en la cual, puesto que en este caso las cápsulas se acercan, debemos poner  $V = -0,8c$ , es decir,  $\beta = -0,8$ , con lo cual resulta para la frecuencia de recepción:

$$v_R = v_E \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = 20 \sqrt{\frac{1 + 0,8}{1 - 0,8}} = 20 \sqrt{\frac{1,8}{0,2}} = 60 \text{ palabras/minuto}$$

**EJEMPLO 43.4**

De una región del espacio se recibe el espectro de un cierto elemento y se mide la longitud de una de sus rayas espectrales  $\lambda_R = 0,36 \mu\text{m}$ . En el laboratorio, en reposo sobre la Tierra, esa raya espectral tiene una longitud de onda  $\lambda_E = 0,12 \mu\text{m}$ . Calculemos:

- La velocidad del emisor respecto a la Tierra.
- La distancia a la que se encuentra expresada en años-luz.

**Solución:**

a) Al ser  $\lambda_R > \lambda_E$  el emisor se está alejando de la Tierra y la inversa de la (43.14) es:

$$\lambda_R = \sqrt{\frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}} \lambda_E$$

Lo que permite despejar  $V$ :

$$\left(\frac{\lambda_R}{\lambda_E}\right)^2 \left(1 - \frac{V}{c}\right) = \left(1 + \frac{V}{c}\right), \quad \frac{V}{c} \left[1 + \left(\frac{\lambda_R}{\lambda_E}\right)^2\right] = \left(\frac{\lambda_R}{\lambda_E}\right)^2 - 1$$

$$V = \frac{\left(\frac{\lambda_R}{\lambda_E}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\lambda_R}{\lambda_E}\right)^2 + 1} c = \frac{\left(\frac{0,36}{0,12}\right)^2 - 1}{\left(\frac{0,36}{0,12}\right)^2 + 1} c = 0,8c = 0,8 \times 3 \times 10^8 =$$

$$= 2,4 \times 10^8 \text{ m/s} = 2,4 \times 10^5 \text{ km/s}$$

b) La aplicación de [43.16] nos da la distancia aproximada a la que se encuentra el emisor:

$$D = VH^{-1} = 2,4 \times 10^5 \times 4 \times 10^{17} = 9,6 \times 10^{22} \text{ km}$$

Puesto que es:

$$\text{un año-luz} = 3,156 \times 10^7 \text{ s} \times 3 \times 10^8 \text{ m} = 9,468 \times 10^{15} \text{ m} = 9,468 \times 10^{12} \text{ km}$$

la distancia expresada en años-luz es:

$$D = \frac{9,6 \times 10^{22}}{9,468 \times 10^{12}} \cong 10^{10} \text{ años luz}$$

**43.10 Problema de los mellizos**

Consideremos dos mellizos exactamente iguales. Uno de ellos, José, se queda en Tierra, mientras que el otro, Pedro, viaja a un planeta muy lejano a elevada velocidad y vuelve a Tierra. Se plantea el problema de saber cuál de los dos mellizos es más viejo al volverse a encontrar después del viaje de Pedro. La solución correcta, como vamos a ver, es que José, que quedó en Tierra, es más viejo.

Para una mayor sencillez, vamos a considerar que tanto la Tierra como el planeta están fijos dentro del sistema de referencia  $S$ , siendo la separación entre ellos

$L = 4$  años-luz. El sistema de referencia móvil,  $S'$ , irá ligado al cohete que transporta a Pedro y se moverá respecto a  $S$  con velocidad  $V = 0,8c$  (Figura 43.7).

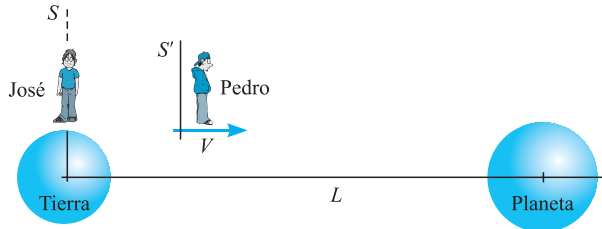


Figura 43.7.

El sistema  $S'$  sufre aceleraciones al salir y llegar a la Tierra, y al llegar al planeta y volver de él. Por tanto, no será de aplicación la teoría de la Relatividad especial, debiendo usarse para la solución correcta la teoría de la Relatividad generalizada. Sin embargo, considerando que los tiempos de aceleración son muy pequeños frente a la duración del viaje, o bien que el sistema móvil  $S'$  se mueve constantemente a velocidad  $V$  y Pedro salta a él al pasar por la Tierra, y al llegar al planeta salta a otro sistema  $S''$ , que también se mueve a velocidad constante  $-V$ , ahora hacia la Tierra, la teoría de la Relatividad especial nos da la solución siguiente:

Para José, fijo en el sistema  $S$ , el viaje de ida de Pedro debe durar  $L/V = 4/0,8 = 5$  años y el viaje total durará 10 años, por lo cual, él tendrá 10 años más que Pedro.

Por otra parte, el tiempo de duración del viaje de ida no es un tiempo propio para José, puesto que no está presente en la llegada al planeta ni en la salida de aquél. El tiempo propio es el medido en el sistema  $S'$  y de acuerdo con la teoría relativista, el tiempo de duración para Pedro del viaje de ida, ha debido ser de:

$$t' = \frac{1}{\gamma} t = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} t = \frac{3}{5} \cdot 5 = 3 \text{ años}$$

y el viaje total de 6 años.

En consecuencia, José piensa que, al encontrarse en el momento de la vuelta de Pedro, él será 4 años más viejo.

Veamos ahora las cosas desde el punto de vista de Pedro. La distancia de la Tierra al planeta no será  $L$ , sino que estará contraída, siendo:

$$L' = \frac{1}{\gamma} L = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} L = \frac{3}{5} \cdot 4 = 2,4 \text{ años-luz}$$

Por tanto, el tiempo que tarda en el viaje de ida es  $t' = 2,4/0,8 = 3$  años y en el viaje total 6 años. Además, piensa que su tiempo es el tiempo propio, ya que él está presente en la llegada y salida del planeta, por tanto el tiempo del viaje para José debe ser mayor, y valer:

$$t = \gamma t' = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = 6 \cdot \frac{5}{3} = 10 \text{ años}$$

En consecuencia, Pedro también piensa que a su vuelta va a encontrar a José 4 años más viejo que él.

Con frecuencia se hace un mal planteamiento de este problema, al pensar que por la simetría relativista puede suponerse al sistema  $S'$  como inmóvil y al  $S$  moviéndose respecto a él con velocidad  $-V$ . Ello es falso, porque no hay tal simetría, ya que el sistema  $S$  no está sometido a aceleración alguna, mientras que el  $S'$  sí, pues tiene que volver al planeta.

Es curioso e instructivo suponer que tanto José como Pedro están dotados de emisores y receptores de ondas electromagnéticas, y que cada vez que transcurre un año se lo comunican uno al otro enviándose una señal. Debido al efecto Doppler, las frecuencias de emisión y recepción no coincidirán. Cuando están alejándose se verificará:

$$v_R = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} v_E = \frac{1}{3} v_E$$

y, cuando están acercándose

$$v_R = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} v_E = 3v_E$$

Veamos qué sucede desde el punto de vista de Pedro. Durante los tres años de su viaje de ida recibe una sola señal de José, pero durante los tres años del viaje de vuelta recibe  $3 \times 3 = 9$  señales, luego sabe que para José han transcurrido 10 años, mientras que para él solamente 6.

Desde el punto de vista de José, puesto que estará recibiendo señales a razón de  $1/3$  por año, no solamente durante los 5 años que según él debe durar el viaje de ida, sino también durante 4 años más que tarda en llegar a él la última señal enviada por Pedro, es decir, durante 9 años recibe  $9 \cdot 1/3 = 3$  señales. En el último año recibe otras 3 y a la llegada de Pedro sabe que para éste el viaje ha durado 6 años, mientras que para él ha durado 10.

No hay, pues, paradoja alguna, ambos mellizos están plenamente de acuerdo que José, que quedó en Tierra, es 4 años más viejo que Pedro.

### 43.11 Invariante fundamental. Espacio-tiempo cuadrimensional

En el sistema  $S$ , un desplazamiento elemental de una onda luminosa en el vacío se expresa:

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Puesto que es  $d\sigma = c dt$ , se puede escribir:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = 0$$

Análogamente, en el sistema  $S'$ , el desplazamiento elemental de una onda luminosa en el vacío es:

$$d\sigma'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$$

Por la invarianza de la velocidad de la luz debe ser  $d\sigma' = c dt'$ , con lo cual se escribe:

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2 = 0$$

Los dos invariantes de la Mecánica clásica:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \quad \text{y} \quad dt = dt'$$

son reemplazados en Mecánica relativista por un único invariante:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2 \quad \text{Invariante fundamental}$$

al que se denomina *invariante fundamental*. No se puede, por tanto, en Mecánica relativista, considerar por separado el espacio del tiempo, hay que considerar un espacio-tiempo de cuatro dimensiones. Para cada una de las cuales tomaremos las coordenadas:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z \quad \text{y} \quad x_4 = ct \quad [43.17]$$

En este espacio-tiempo, las ecuaciones de Lorentz se escriben:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \gamma(x_1 - \beta x_4) \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \\ x'_4 &= \gamma(x_4 - \beta x_1) \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad [43.18]$$

y sus inversas:

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma(x'_1 + \beta x'_4) \\ x_2 &= x'_2 \\ x_3 &= x'_3 \\ x_4 &= \gamma(x'_4 + \beta x'_1) \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} \quad [43.19]$$

Lo cual, más condensadamente se puede expresar de la forma:

$$\{x\} = (M)\{x'\} \quad \text{y} \quad \{x'\} = (M)^{-1}\{x\} \quad [43.20]$$

siendo,

$$(M) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad [43.21]$$

y  $(M)^{-1}$  su inversa.

Podemos comprobar cómo el intervalo espacio-temporal es un invariante. Su valor en el sistema  $S$  es:

$$I = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

En el sistema de referencia  $S'$  el intervalo espacio-temporal es:

$$\begin{aligned} I' &= x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_4'^2 = \gamma^2(x_1 - \beta x_4)^2 + x_2^2 + x_3^2 - \gamma^2(x_4 - \beta x_1)^2 = \\ &= \gamma^2(x_1^2 - x_4^2 + \beta^2 x_4^2 - \beta^2 x_1^2) + x_2^2 + x_3^2 = \\ &= \frac{1}{1 - \beta^2} [x_1^2(1 - \beta^2) - x_4^2(1 - \beta^2)] + x_2^2 + x_3^2 = \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \end{aligned}$$

Luego, el intervalo espacio-temporal es un invariante en el cambio de sistema de referencia.

### 43.12 Cuadrivector velocidad

A los vectores de los espacios de cuatro dimensiones se les denomina cuadrivectores. En el espacio tridimensional  $S$ , la velocidad se definió como la derivada del espacio respecto al tiempo, midiéndose ambas magnitudes en el sistema  $S$ ,

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} \quad i = 1, 2, 3$$

En el espacio cuadrimensional  $S$ , definiremos el cuadrivector velocidad de forma análoga, es decir:

$$u_i = \frac{dx_i}{d\tau} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Pero ahora  $\tau$  es el tiempo propio, es decir, es el tiempo medido en el sistema ligado a la partícula móvil.

Evidentemente se verificará:

$$u_i = \frac{dx_i}{d\tau} = \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dx_i}{dt} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Lo que se puede escribir,

$$u_i = \gamma v_i \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{y} \quad u_4 = \gamma \frac{dx_4}{dt} = \gamma c$$

Matricialmente puede expresarse de la forma:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \gamma \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ c \end{Bmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ c \end{Bmatrix} = \frac{1}{\gamma} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad [43.22]$$

El cuadrivector velocidad así definido, tiene la propiedad de ser covariante en una transformación de Lorentz. Su norma deberá ser una constante, en efecto:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \gamma^2 (v^2 - c^2) = \frac{v^2 - c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -c^2$$

### 43.13 Transformación de velocidades

La matriz ( $M$ ), dada por la Ecuación [43.21], que transforma el cuadrivector posición del espacio  $S'$  en el correspondiente del espacio  $S$ , es la matriz de transformación para cualquier tipo de cuadrivector. Concretamente, para el cuadrivector velocidad será:

$$\{u\} = (M)\{u'\}$$

Teniendo esto en cuenta, la segunda [43.22] se escribe:

$$\{v\} = \frac{1}{\gamma} \{u\} = \frac{1}{\gamma} (M)\{u'\}$$



Puesto que en el sistema  $S'$  se verificará una relación análoga a la primera [43.22],  $\{u'\} = \gamma'\{v'\}$ , resulta:

$$\{v\} = \frac{\gamma'}{\gamma} (M) \{v'\}$$

Lo que puede escribirse de la forma:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' & 0 & 0 & \beta\gamma' \\ 0 & \frac{\gamma'}{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma'}{\gamma} & 0 \\ \beta\gamma' & 0 & 0 & \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \\ c \end{pmatrix} \quad [43.23]$$

De ésta, se deducen las cuatro relaciones siguientes:

$$v_1 = \gamma'(v'_1 + \beta c) = \gamma'(v'_1 + V)$$

$$v_2 = \frac{\gamma'}{\gamma} v'_2$$

$$v_3 = \frac{\gamma'}{\gamma} v'_3$$

$$c = \gamma'(\beta v'_1 + c) = \gamma' \left( \frac{Vv'_1}{c} + c \right)$$

La última permite despejar el valor de  $\gamma'$ :

$$\gamma' = \frac{1}{1 + \frac{Vv'_1}{c^2}}$$

Al sustituir este valor en las otras tres ecuaciones se expresan:

$$v_1 = \frac{v'_1 + V}{1 + \frac{Vv'_1}{c^2}}, \quad v_2 = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{Vv'_1}{c^2}} v'_2, \quad v_3 = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{Vv'_1}{c^2}} v'_3 \quad [43.24]$$

Ecuaciones que permiten transformar el vector  $v'$  del sistema  $S'$  en el correspondiente  $v$  del sistema  $S$ .

Multiplicando la [43.23] por  $\gamma/\gamma'(M)^{-1}$ , resulta:

$$v'_1 = \frac{v_1 - V}{1 - \frac{Vv_1}{c^2}}, \quad v'_2 = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{Vv_1}{c^2}} v_2, \quad v'_3 = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{Vv_1}{c^2}} v_3 \quad [43.25]$$

Ecuaciones que permiten transformar el vector  $v$  del sistema  $S$  en el correspondiente  $v'$  del sistema  $S'$ .

Si el sistema  $S'$  se mueve respecto al  $S$  con velocidad  $V = c$  y dentro de él un fotón se mueve con velocidad  $v'_1 = c$ , la velocidad de éste en el sistema  $S$  está dada por la ecuación primera de [43.24], resultando:

$$v_1 = \frac{c + c}{1 + \frac{c \cdot c}{c^2}} = c$$

Lo que confirma que la velocidad de la luz es un límite superior de velocidades.

Si un fotón se mueve en un sistema de referencia, por ejemplo el  $S$ , con velocidad  $v_1 = c$ , veamos cómo no existe sistema alguno, en movimiento relativo de translación uniforme respecto al  $S$ , en el cual el fotón esté en reposo. La velocidad de éste en el sistema  $S'$  está dada por la primera [43.25], resultando:

$$v'_1 = \frac{c - V}{1 - \frac{V}{c}}$$

Para que se anule hace falta que sea  $c = V$ , pero ello anula también al denominador y resulta una indeterminación irresoluble, no siendo posible encontrar al fotón en reposo en sistema alguno.

### EJEMPLO 43.5

Deducción de las ecuaciones de transformación de las velocidades [43.25] por derivación a partir de las ecuaciones de transformación de vectores [43.9].

#### Solución:

La velocidad en el sistema  $S$  tiene por componentes:

$$v_1 = \frac{dx}{dt}, \quad v_2 = \frac{dy}{dt} \quad \text{y} \quad v_3 = \frac{dz}{dt}$$

Las componentes de la velocidad en el sistema  $S'$  serán, análogamente,

$$v'_1 = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_2 = \frac{dy'}{dt'} \quad \text{y} \quad v'_3 = \frac{dz'}{dt'}$$

Diferenciando las Ecuaciones (43.9), se obtiene:

$$dx' = \gamma(dx - \beta c dt) \quad , \quad dy' = dy \quad , \quad dz' = dz \quad , \quad dt' = \gamma\left(dt - \frac{\beta}{c} dx\right)$$

Al dividir cada una de las tres primeras por la cuarta, resulta:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - \beta c dt}{dt - \frac{\beta}{c} dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - \beta c}{1 - \frac{\beta}{c} \frac{dx}{dt}} \quad , \quad v'_1 = \frac{v_1 - \beta c}{1 - \frac{\beta}{c} v_1} = \frac{v_1 - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_1}$$

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{\beta}{c} dx\right)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{\beta}{c} \frac{dx}{dt}\right)} \quad , \quad v'_2 = \frac{v_2}{\gamma\left(1 - \frac{\beta}{c} v_1\right)} = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c^2} v_1} v_2$$

Y, por analogía,

$$v'_3 = \frac{v_3}{\gamma \left(1 - \frac{\beta}{c} v_1\right)} = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c^2} v_1} v_3$$

### EJEMPLO 43.6

Una nave espacial viaja alejándose de la Tierra en línea recta normal a la superficie terrestre a la velocidad  $V = 0,6c$ . De su morro lanza una partícula en la misma dirección y sentido de su marcha con velocidad respecto a ella  $v' = 0,5c$  (Figura 43.8). Determinemos la velocidad de la partícula respecto a la Tierra.

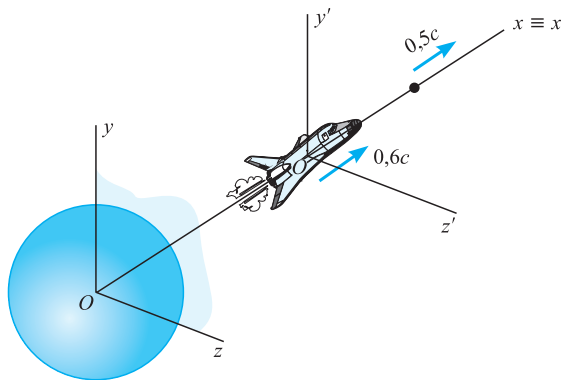


Figura 43.8.

#### Solución:

La aplicación de la primera Ecuación (43.24) nos permite escribir:

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{Vv'}{c^2}} = \frac{0,5c + 0,6c}{1 + \frac{0,5c \cdot 0,6c}{c^2}} = \frac{1,1c}{1,3} = 0,846c$$

### EJEMPLO 43.7

Un núcleo se mueve en un sistema de referencia  $S$  a la velocidad  $v = 0,5c$ . En un cierto instante se divide en dos fragmentos iguales que se mueven respecto al sistema  $S'$  ligado a su centro de masas con las velocidades  $\mathbf{u}'_A = 0,6 \mathbf{v}/v$  y  $\mathbf{u}'_B = -\mathbf{u}'_A$ . Calculemos las velocidades de cada uno de los fragmentos para un observador del sistema  $S$  (Figura 43.9).

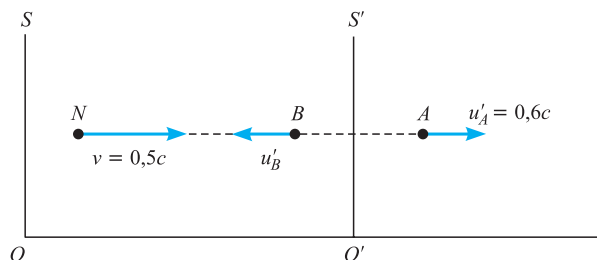


Figura 43.9.

**Solución:**

En el sistema de referencia  $S'$  son conocidas las de cada fragmento. Para obtener sus velocidades respecto al sistema  $S$ , aplicaremos las ecuaciones de transformación [43.24],

$$u_A = \frac{v + u}{1 + \frac{uv}{c^2}} = \frac{0,5c + 0,6c}{1 + \frac{0,5c \times 0,6c}{c^2}} = \frac{1,1}{1,3}c \cong 0,846c$$

$$u_B = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}} = \frac{0,5c - 0,6c}{1 + \frac{0,5c \times 0,6c}{c^2}} = -\frac{1}{7}c \cong -0,143c$$

**43.14 Principio de correspondencia**

Si la velocidad  $V$  es muy pequeña frente a  $c$ ,  $V/c$  es despreciable frente a la unidad y con mucha más razón  $V^2/c^2$  y  $Vv/c^2$ , reduciéndose las Ecuaciones [43.23] y [43.24] a las de la Mecánica clásica. Por tanto, la Mecánica clásica no es una teoría errónea, sino que es una teoría de aplicación restringida, válida para pequeñas velocidades comparadas con la velocidad de la luz, como son las que habitualmente manejamos en la vida diaria.

**EJEMPLO 43.8**

Un automóvil circula a la velocidad de 120 km/h y recorre una cierta distancia en 60 segundos del reloj del piloto. Calculemos el tiempo empleado en recorrer esa distancia según los relojes de los observadores fijos en tierra.

**Solución:**

El tiempo medido en el reloj del piloto es el tiempo propio, ya que en el sistema ligado al coche el observador está fijo y presente a la salida y a la llegada. El tiempo para los observadores ligados a tierra está dado por la [43.13],

$$\Delta t' = \gamma \Delta \tau = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \Delta \tau (1 - \beta^2)^{-1/2} \cong \Delta \tau \left( 1 + \frac{1}{2} \beta^2 \right)$$

La diferencia entre el tiempo medido por los observadores ligados al suelo y el medido por el piloto es:

$$\Delta t' - \Delta \tau = \Delta \tau \frac{1}{2} \beta^2 = 60 \times \frac{1}{2} \times \frac{\left(\frac{100}{3}\right)^2}{9 \times 10^{16}} = 3,704 \times 10^{-13} \text{ s}$$

Absolutamente imposible de diferenciar en los relojes habituales.

**EJEMPLO 43.9**

Si el coche del ejemplo anterior tiene una longitud de 4 metros medida en reposo respecto a él, veamos cuál será su longitud medida desde el sistema fijo en tierra, cuando el coche se mueve con la velocidad indicada.

**Solución:**

La longitud propia es la medida en el sistema ligado al coche,  $l' = 4$  m; para observadores en movimiento relativo respecto a este, la longitud será menor. Los observadores ligados al suelo observaran la longitud  $l$ , que verificará:

$$l = \frac{l'}{\gamma} = l'(1 - \beta^2)^{1/2} \cong l' \left( 1 - \frac{1}{2} \beta^2 \right)$$

El valor de la contracción es:

$$l' - l = l' \frac{1}{2} \beta^2 = 4 \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{100}{3}\right)^2}{9 \times 10^{16}} = 2,469 \times 10^{-14} \text{ m} = 2,469 \times 10^{-11} \text{ mm}$$

Absolutamente imperceptible, por ello la aplicación de la Mecánica clásica en la vida habitual es de una enorme exactitud.

La teoría de la Relatividad especial no invalida a la Mecánica clásica, por el contrario la confirma y la acoge como caso particular, válido para velocidades pequeñas comparadas con la de la luz. Esta situación constituye el llamado *Principio de correspondencia*, lo que significa que la Mecánica clásica se corresponde con la relativista al hacer tender en esta  $V/c$  a cero.

Lo más importante de la teoría de la Relatividad especial es la introducción de nuevos planteamientos en cuanto a los conceptos de espacio y tiempo, de la necesidad de considerar a estos interrelacionados, de la consideración de  $c$  como constante de la naturaleza, de la invarianza de la Física en los sistemas de referencia inerciales, de la interrelación, que analizaremos en el capítulo siguiente, entre masa y energía, todo lo cual ha permitido un desarrollo espectacular de muchos campos de la Física.



- 44.1. Cuadrivector cantidad de movimiento. Masa relativista
- 44.2. Transformación de la masa
- 44.3. Cuadrivector fuerza
- 44.4. Energía relativista
- 44.5. Transformación de la cantidad de movimiento y de la energía
- 44.6. Sistemas de partículas
- 44.7. Transformación de las fuerzas

## 44.1 Cuadrivector cantidad de movimiento. Masa relativista

Definimos el cuadrivector cantidad de movimiento o momento lineal como el producto de la masa  $m_0$  por el cuadrivector velocidad,

$$P_i = m_0 u_i \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4$$

siendo  $m_0$  la masa medida en el sistema en el cual la partícula está en reposo y  $u_i$  el cuadrivector velocidad en ese espacio. Teniendo en cuenta las Ecuaciones [43.22], el cuadrivector cantidad de movimiento, en el sistema móvil respecto a la partícula o en el sistema respecto al cual consideramos que la partícula se mueve,  $S$ , se expresa:

$$P_i = m_0 \gamma v_i \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad [44.1]$$

Para que se siga verificando la definición de cantidad de movimiento o momento lineal en el sistema tridimensional  $S$ , deben ser:

$$p_i = m v_i \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad [44.2]$$

Comparando las Ecuaciones [44.1] y [44.2], para que las tres primeras componentes del cuadrivector cantidad de movimiento coincidan con las del vector en el sistema  $S$ ,

$$P_i = p_i = m v_i \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{y} \quad P_4 = m c \quad [44.3]$$

Cantidad de movimiento

es necesario que se verifique:

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad [44.4]$$

Masa móvil

Ecuación que nos relaciona la masa  $m_0$  medida en el sistema ligado a la partícula, con la masa  $m$  medida en un sistema  $S$  respecto al cual la partícula se mueve con

velocidad  $v$ . Resulta ser, por tanto, la masa función de la velocidad, lo que ha sido representado en la Figura 44.1 en función de  $v/c$ .

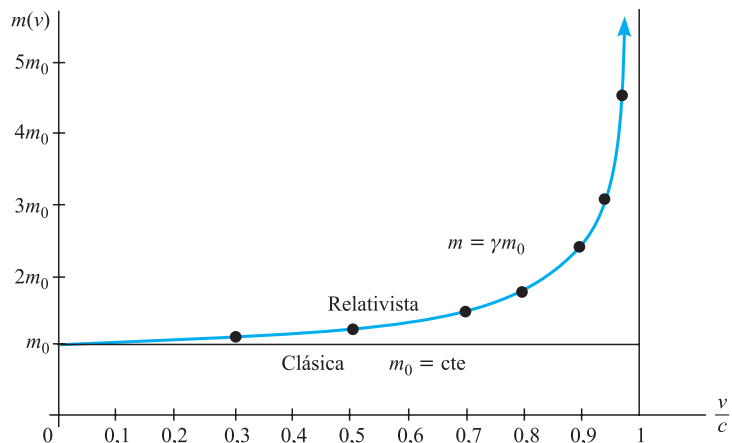


Figura 44.1. Variación de la masa con la velocidad.

Cuando  $v$  tiende a  $c$  o  $v/c$  a la unidad, la masa tiende a infinito, lo que es una razón más para considerar a  $c$  como límite superior de velocidades.

Otra consecuencia de la variación de la masa con la velocidad es el aumento de masa de un gas al aumentar su temperatura; ya que, según la Teoría Cinética de los Gases, la velocidad de las moléculas del gas aumenta proporcionalmente a la raíz cuadrada de la temperatura, y de acuerdo con [44.4] aumentará la masa de éstas. El aumento relativista de la masa es indetectable para las velocidades de la vida diaria, obviamente de la Ecuación [44.4] se comprueba que para  $V \ll c$  es  $m = m_0$ , lo que pone de manifiesto que se cumple el Principio de correspondencia.

#### EJEMPLO 44.1

Un coche de masa 2000 kg circula a la velocidad de 180 km/h. Determinemos su aumento de masa en el sistema de referencia ligado al suelo.

#### Solución:

El incremento de masa, de acuerdo con la [44.4] es:

$$\Delta m = m - m_0 = m_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \cong \left( 1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \dots - 1 \right) = \frac{m_0}{2} \beta^2 = \frac{m_0}{2} \frac{V^2}{c^2}$$

Sustituyendo valores resulta:

$$\Delta m = \frac{2000 \text{ kg}}{2} \left[ \frac{180 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{10^3 \text{ m}}{3600 \text{ s}} \frac{\text{h}}{\text{km}}}{3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \right]^2 = 2,78 \times 10^{-11} \text{ kg} = 2,78 \times 10^{-8} \text{ g}$$

El aumento relativista de la masa establecido por la ecuación [44.4] solamente es apreciable para partículas de muy alta velocidad y ha sido comprobado experimentalmente en los aceleradores de partículas y, concretamente, en la desviación sufrida por los electrones en el sincrotrón.



**EJEMPLO 44.2**

Calculemos la relación entre la masa relativista y la masa en reposo de un muón que se mueva a la velocidad  $v = 0,998c$ .

**Solución:**

La Ecuación [44.4] nos permite escribir:

$$\frac{m}{m_0} = (1 - \beta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \dots \cong 1 + \frac{1}{2} \beta^2 = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

Sustituyendo los valores, resulta:

$$\frac{m}{m_0} = 1 + \frac{1}{2} \frac{0,998^2 c^2}{c^2} = 1,498 \quad , \quad m \approx 1,5m_0$$

**EJEMPLO 44.3**

¿Qué masa adquiere un protón, que es acelerado hasta la velocidad  $v = 0,9999c$ ? La masa del protón en reposo es  $m_p = 1,6726 \times 10^{-27}$  kg.

**Solución:**

La masa relativista y la masa en reposo se relacionan por  $m = \gamma m_0$ . Para la velocidad dada es  $\beta = v/c = 0,9999$  y su cuadrado  $\beta^2 = 0,99980001$ . Con lo cual resulta  $\gamma = 70,71244628$  y la masa del protón acelerado es:

$$m = 70,71 \dots m_0 = 70,71 \dots \times 1,6726 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1,18273637 \times 10^{-25} \text{ kg}$$

El cuadrivector cantidad de movimiento, tal y como se ha definido, debe ser covariante en una transformación de Lorentz y su norma será un invariante. En efecto,

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \frac{m_0^2}{v^2} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - c^2) = \frac{m_0^2(v^2 - c^2)}{c^2 - v^2} \cdot c^2 = -m_0^2 c^2 \quad [44.5]$$

En el espacio tridimensional  $S$ , el módulo del vector cantidad de movimiento es:

$$p^2 = \frac{m_0^2}{v^2} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) = \frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \gamma v = mv \quad [44.6]$$

y, vectorialmente,

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

En la Figura 44.2 se ha representado la variación de la cantidad de movimiento relativista y clásica en función de  $v/c$ .

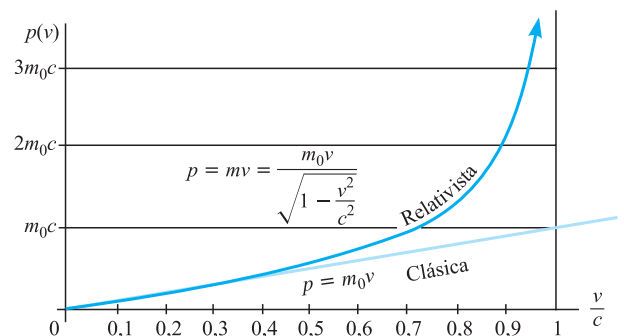


Figura 44.2. Cantidad de movimiento relativista y clásica.

## 44.2 Transformación de la masa

Consideremos, en el sistema  $S$ , una partícula, cuya masa en reposo es  $m_0$ , que se mueve con velocidad  $v(v_1, v_2, v_3)$ . Su masa en este sistema es:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Para un observador del sistema  $S'$ , en el cual la masa en reposo también es  $m_0$ , la partícula se moverá con una velocidad  $v'(v'_1, v'_2, v'_3)$  y la masa será:

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}$$

Transformemos,  $v'^2$ , utilizando las Expresiones [43.25],

$$\begin{aligned} v'^2 &= v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2 = \frac{(v_1 - V)^2}{\left(1 - \frac{Vv_1}{c^2}\right)^2} + \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{Vv_1}{c^2}\right)^2} v_2^2 + \\ &+ \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{Vv_1}{c^2}\right)^2} v_3^2 = \frac{v^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) + V^2 - 2v_1V + \frac{V^2}{c^2} v_1^2}{\left(1 - \frac{Vv_1}{c^2}\right)^2} \\ 1 - \frac{v'^2}{c^2} &= \frac{c^2 - v^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) - V^2}{c^2 \left(1 - \frac{Vv_1}{c^2}\right)^2} = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{Vv_1}{c^2}\right)^2} = \\ &= \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m \left(1 - \frac{Vv_1}{c^2}\right) \end{aligned}$$

Con ello,  $m'$  se escribe:

$$m' = \frac{m_0 \gamma \left(1 - \frac{Vv_1}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} = \gamma m \left(1 - \frac{Vv_1}{c^2}\right) \quad [44.7]$$

Transformación de la masa

Expresión que nos permite calcular la masa  $m'$  en el sistema  $S'$ , que se mueve respecto al  $S$  con velocidad de traslación uniforme  $V(V, 0, 0)$ , de una partícula que se mueve respecto al sistema  $S$  con velocidad  $v(v_1, v_2, v_3)$  y en cual su masa es  $m$ .

La transformación inversa es:

$$m = \gamma \left(1 + \frac{Vv'_1}{c^2}\right) m' \quad [44.8]$$

### 44.3 Cuadrivector fuerza

Definimos el cuadrivector fuerza de acuerdo con el teorema de la cantidad de movimiento o momento lineal, que en el espacio ligado a la partícula, en el cual el tiempo es el tiempo propio, se expresa:

$$\mathcal{F}_i = \frac{dP_i}{d\tau} \quad ; \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Haciendo intervenir el tiempo del sistema de referencia  $S$ , la anterior se transforma en:

$$\mathcal{F}_i = \frac{dP_i}{d\tau} = \frac{dP_i}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dP_i}{dt} \quad ; \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Puesto que en el sistema  $S$  el teorema de la cantidad de movimiento se expresa:

$$F_i = \frac{dP_i}{dt} \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad [44.9]$$

resulta que las tres primeras componentes del cuadrivector fuerza y la fuerza medida en el sistema  $S$  están relacionadas por:

$$\mathcal{F}_i = \gamma F_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad [44.10]$$

Las Ecuaciones [44.9] se condensan en la ecuación vectorial:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad [44.11] \quad \text{Dinámica relativista}$$

que es la ecuación fundamental de la dinámica relativista.

Tanto en mecánica clásica como en relativista, al actuar una fuerza sobre una masa produce un aumento de la cantidad de movimiento de ésta,  $mv$ . En mecánica clásica, por ser  $m$  constante, todo el aumento se debe a que aumenta la velocidad de la partícula, y para conseguir que ésta supere a  $c$  sólo es necesario que la fuerza actúe durante un tiempo suficiente. En mecánica relativista no sucede esto, ya que el aumento de la cantidad de movimiento se debe a que, además de aumentar la velocidad aumenta la masa, de forma que al tender aquélla a  $c$ , ésta tiende a infinito, y hace falta un tiempo infinito para que actuando una fuerza finita sobre una masa llegue la velocidad de ésta a tender a  $c$ .

En dinámica relativista no es de aplicación la segunda ley de Newton expresada de la forma  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , ya que la masa no es una constante. Debe aplicarse la [44.11], con lo cual se obtiene:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} + \frac{dm}{dt} \mathbf{v}$$

Expresión que pone de manifiesto que, en general, en Mecánica relativista la fuerza y la aceleración no son vectores de la misma dirección. Solamente cuando  $m$  sea independiente del tiempo, o lo que es equivalente, cuando sea  $V \ll c$ , es decir, en Dinámica newtoniana, la fuerza sobre una partícula y la aceleración de esta son colineales.

**EJEMPLO 44.4**

Estudiemos el movimiento producido sobre una partícula de masa en reposo  $m_0$ , por una fuerza,  $\mathbf{F}$ , que actúa sobre ella de forma constante.

**Solución:**

La ecuación del movimiento es:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$$

Suponiendo que la partícula parte del reposo, y puesto que  $\mathbf{F}$  es constante, el movimiento será rectilíneo, y podremos escribir la anterior ecuación en módulos,

$$F = \frac{d(mv)}{dt}$$

o,

$$F dt = d(mv)$$

que integrada es:

$$F \cdot t = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \text{cte}$$

Si para  $t = 0$  es  $v = 0$ , la constante de integración es nula y la anterior ecuación se escribe:

$$F \cdot t = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

de la cual despejamos  $v$  en función del tiempo, de la siguiente forma:

$$F^2 t^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c^2 m_0^2 v^2}{c^2 - v^2}$$

$$F^2 t^2 c^2 = (F^2 t^2 + c^2 m_0^2) v^2$$

$$v = \frac{F \cdot t \cdot c}{\sqrt{c^2 m_0^2 + F^2 t^2}} = \frac{\frac{F \cdot t}{m_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2}} \quad [44.12]$$

Ecuación que nos da, en función del tiempo, la velocidad alcanzada por una partícula, cuya masa en reposo es  $m_0$ , sobre la que actúa una fuerza constante  $F$ . Puede comprobarse que al tender  $t$  a infinito la velocidad tiende a  $c$ .

En dinámica clásica, la ecuación del movimiento es:

$$F = m_0 \frac{dv}{dt}$$

cuya integración da:

$$F \cdot t = m_0 v$$

y

$$v = \frac{F}{m_0} t \quad [44.13]$$

En ésta, al tender  $t$  a infinito,  $v$  también tiende a infinito. En la Figura 44.3 se representan ambas soluciones, la clásica y la relativista. Ellas son tangentes en el origen de coordenadas. En efecto, calculemos la pendiente de [44.12]:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{F \cdot t}{m_0 c}\right)^2} \cdot \frac{F}{m_0} - \frac{F \cdot t}{m_0} \cdot \frac{\frac{F \cdot t}{m_0 c} \cdot \frac{F}{m_0 c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{F \cdot t}{m_0 c}\right)^2}}}{1 + \left(\frac{F \cdot t}{m_0 c}\right)^2} = \frac{\frac{F}{m_0}}{\left[1 + \left(\frac{F \cdot t}{m_0 c}\right)^2\right]^{3/2}}$$

cuyo valor en el origen es:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_0 = \frac{F}{m_0}$$

valor que coincide con la pendiente de la recta [44.13].

En consecuencia, para valores pequeños de  $t$ , no solamente coinciden las velocidades, sino también sus derivadas, es decir, las aceleraciones.

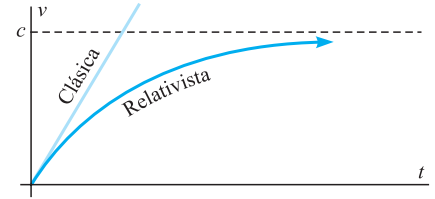


Figura 44.3.

## 44.4 Energía relativista

La variación de la energía con el tiempo puede expresarse de la forma:

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

Utilizando la Ecuación [44.11], se escribe:

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$$

Multiplicando por  $dt$  y realizando la diferencial, resulta:

$$dE = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} dm + m d\mathbf{v}) = v^2 dm + m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = v^2 dm + \frac{m}{2} d(v^2) \quad [44.14]$$

Despejemos  $v^2$  de la Ecuación [44.4],

$$v^2 = c^2 \left(1 - \frac{m_0^2}{m^2}\right)$$

Calculemos su diferencial,

$$d(v^2) = 2c^2 m_0^2 \frac{dm}{m^3}$$

Con ello la [44.14] se escribe de la forma:

$$dE = v^2 dm + c^2 \frac{m_0^2}{m^2} dm = c^2 dm$$

Su integración es inmediata y nos da:

$$E = c^2 m + \text{cte}$$

Puesto que el origen de energías es arbitrario, podemos considerar que en el reposo, es decir, para  $v = 0$ , la constante de integración es nula. Con ello, la energía en reposo vale:

$$E_0 = m_0 c^2 \quad [44.15]$$

y, en general, la energía se expresa:

Energía-masa

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad [44.16]$$

Esta expresión pone de manifiesto que la masa y la energía son interconvertibles, que la masa es una forma de almacenar energía transformable en otras formas de energía. En consecuencia, los dos principios de conservación: de la masa y de la energía, en dinámica relativista se reducen a un solo principio, el de conservación de la masa-energía: *en un sistema aislado la cantidad total de masa-energía permanece constante.*

La Expresión [44.16] permite expresar la masa en unidades de energía y viceversa, la energía en unidades de masa.

#### EJEMPLO 44.5

La masa de un electrón en reposo es de  $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$  kg. Expresemos su energía en reposo en julios y en electrón-voltios.

#### Solución:

Usando la Expresión [44.15], la energía en reposo del electrón es:

$$E = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} \times (3 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 8,199 \times 10^{-14} \text{ J}$$

La equivalencia entre el electrón-voltio (eV) y el julio quedó establecida en el Capítulo 29, apartado 13:  $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$ , con ello la energía de electrón en reposo expresada en eV es:

$$E = \frac{8,199 \times 10^{-14}}{1,602 \times 10^{-19}} = 5,118 \times 10^5 \text{ eV}$$

Las Expresiones [44.15] y [44.16] ponen de manifiesto que una pequeña pérdida de masa debe llevar asociada la aparición de una enorme cantidad de energía, ya que la constante de transformación es  $c^2 = (3 \times 10^8)^2 = 9 \times 10^{16}$ . Así, la transformación de un gramo de masa produce la energía:

$$E = 10^{-3} \text{ kg} \times 9 \times 10^{16} (\text{m/s})^2 = 9 \times 10^{13} \text{ J} = 5,614 \times 10^{26} \text{ MeV}$$

**EJEMPLO 44.6 Producción de energía en el Sol**

El Sol es la fuente de energía de nuestro planeta y la producción de ésta se realiza mediante las reacciones que se esquetimizan en la Figura 44.4. Calculemos la energía liberada por átomo de Helio producido.

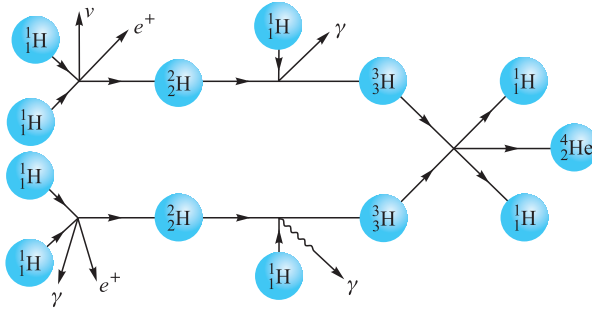


Figura 44.4.

**Solución:**

Puesto que tanto el neutrino como la radiación  $\gamma$  están desprovistos de masa, el déficit de masa en estas reacciones es:

$$\begin{aligned} \Delta m &= 4m_p + 2m_e - m_{\text{He}} = \\ &= 4 \times 1,6725 \times 10^{-24} + 2 \times 0,911 \times 10^{-27} - 6,647 \times 10^{-24} = \\ &= 0,045 \times 10^{-24} \text{ g} \end{aligned}$$

La energía liberada por átomo de helio formado, de acuerdo con la [44.15], es:

$$\Delta E = \Delta mc^2 = 45 \times 10^{-30} \text{ kg} \times 9 \times 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2 = 405 \times 10^{-14} \text{ J} = 25,2809 \text{ MeV}$$

Además, deberá tenerse en cuenta, como posteriormente se verá, la energía liberada en la aniquilación de los dos positrones emitidos, así como la energía que se llevan los neutrinos.

La cuarta componente del cuádrivector cantidad de movimiento, dado por la última [44.3], en función de la energía, se escribe:

$$P_4 = m_0 \gamma c = mc = \frac{E}{c} \quad [44.17]$$

Por tanto, la conservación de la energía no es más que una consecuencia de la conservación de la cantidad de movimiento. La energía total se conservará siempre que se conserve la cantidad de movimiento.

La norma del cuádrivector  $p$ , cuyo valor está dado por la Ecuación [44.5], teniendo en cuenta la [44.17], puede escribirse de la siguiente forma:

$$P^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0 c^2$$

Puesto que en el espacio tridimensional  $S$ , la norma del vector cantidad de movimiento es  $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ , resulta:

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0 c^2$$

La cual puede transformarse en:

$$E^2 - c^2p^2 = m_0^2c^4 = E_0^2 \tag{46.18}$$

Expresión sumamente importante y en la cual aparece un nuevo invariante para las transformaciones de Lorentz,

$$E^2 - c^2p^2 = E'^2 - c^2p'^2 = m_0^2c^4$$

De la Ecuación [44.18] se deduce para la energía la expresión:

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2} \tag{44.19}$$

La *energía cinética* de la partícula será igual a la *energía total* menos la que *tiene en reposo*:

Energía cinética

$$E_c = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2(\gamma - 1) \tag{44.20}$$

Para pequeños valores de  $v$  se puede desarrollar en serie  $\gamma$ ,

$$\gamma = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \dots$$

con lo cual resulta:

$$E_c = m_0c^2 \left[ \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \dots \right] = \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2} + \dots \simeq \frac{1}{2}m_0v^2$$

y la energía cinética para  $v$  muy pequeño coincide con la energía cinética clásica, lo cual es una nueva confirmación del principio de correspondencia. En la Figura 44.5 se han representado las energías cinéticas clásica y relativista y la energía total relativista, en función de  $v/c$ .

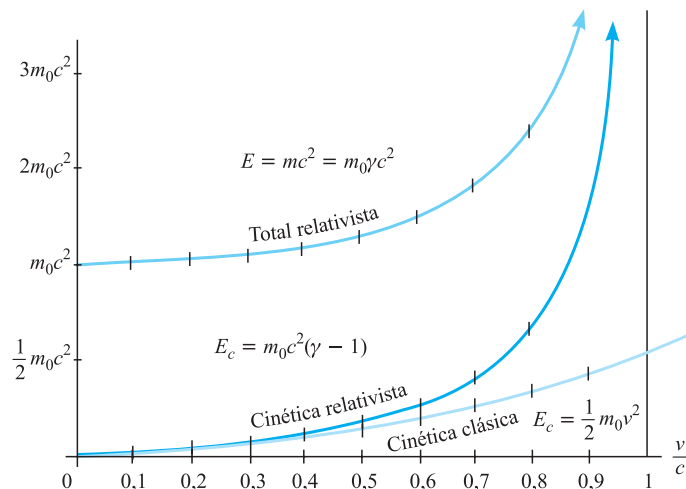


Figura 44.5. Energías cinética y total relativistas y cinética clásica.

En mecánica clásica, el aumento de energía cinética se hace exclusivamente por aumento de velocidad y aquella tiende a infinito cuando la velocidad tiende a infinito. En mecánica relativista, el aumento de energía cinética es debido no sólo a que  $v$  aumenta, sino también a que la masa aumenta con  $v$ , tendiendo la energía cinética a infinito cuando  $v$  tiende a  $c$ .



De la Ecuación [44.4] se deduce, que toda partícula cuya masa en reposo sea nula,  $m_0 = 0$ , debe moverse a la velocidad de la luz, este es el caso de los fotones. Su energía deducida de la Ecuación [44.18] es:

$$E = pc \quad [44.21]$$

y su cantidad de movimiento:

$$p = \frac{E}{c}$$

Teniendo en cuenta las Expresiones [44.6],  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ , y [44.16],  $E = mc^2$ , al eliminar entre ellas la masa, resulta:

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{v} \quad [44.22]$$

### EJEMPLO 44.7

La masa de un muón en reposo es  $m_\mu = 0,1067 \text{ GeV}$  y está moviéndose a la velocidad  $v = 0,998c$ . Calculemos:

- La masa del muón en reposo expresada en kilogramos.
- Su energía cinética relativista expresada en julios y en electrón-voltios.
- Su energía cinética newtoniana.

#### Solución:

- La masa en julios se obtiene multiplicando la masa en kilogramos por  $c^2$ :

$$m_0 (\text{kg}) \times 9 \times 10^{16} (\text{m/s})^2 = 9 \times 10^{16} m_0 \text{ J}$$

Para expresarla en electrón-voltios debemos dividir por  $1,602 \times 10^{-19} \text{ J/eV}$ :

$$\frac{9 \times 10^{16} m_0}{1,602 \times 10^{-19}} \text{ eV} = 0,1067 \times 10^9 \text{ eV}$$

De donde despejamos:

$$m_0 = \frac{0,1067 \times 10^9 \times 1,602 \times 10^{-19}}{9 \times 10^{16}} = 1,899 \times 10^{-28} \text{ kg}$$

- La energía cinética relativista se obtiene por aplicación de la [44.20],  $E_c = m_0 c^2 (\gamma - 1)$ .

Puesto que son:  $\beta = v/c = 0,998$  y  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = 15,8193$ , resulta:

$$\begin{aligned} E_c &= 1,89926 \times 10^{-28} (\text{kg}) \times 9 \times 10^{16} (\text{m/s})^2 \times 14,8193 = \\ &= 253,3113 \times 10^{-12} \text{ J} = 158,1219 \times 10^7 \text{ eV} = 1,5812 \text{ GeV} \end{aligned}$$

- La energía cinética newtoniana es:

$$E_c = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{1}{2} 1,89926 \times 10^{-28} \times 0,998^2 \times 9 \times 10^{16} \text{ J} = 8,5125 \times 10^{-12} \text{ J.}$$

**EJEMPLO 44.8** Movimiento de una partícula en un campo de fuerzas constantes

Estudiemos el movimiento de una partícula que inicialmente tiene una energía total de  $E_0$  y una cantidad de movimiento  $\mathbf{p}_0$ , sobre la que actúa una fuerza constante  $\mathbf{F}$ .

**Solución:**

Este es el caso de atracción gravitacional en puntos próximos a la superficie terrestre, que ya fue resuelto en mecánica clásica. Como allí, tomaremos el eje  $OY$  en dirección y sentido de la fuerza constante (Figura 44.6).

En mecánica relativista, la ecuación del movimiento es:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

que se desdobra en las correspondientes a cada uno de los ejes coordenados,

$$F_x = \frac{dp_x}{dt} = 0 \quad \text{y} \quad F_y = \frac{dp_y}{dt} = F$$

De la primera se deduce que la proyección del vector cantidad de movimiento sobre el eje  $OX$  es constante. Si el origen lo hemos tomado en el punto, en el cual es:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 = p_0 \mathbf{i} \quad , \quad \text{será } p_x = p_0$$

La integración de la segunda ecuación, puesto que para  $t = 0$  es  $p_y = 0$ , nos da:

$$p_y = F \cdot t$$

Por tanto, siempre se verificará:

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{p_0^2 + F^2 \cdot t^2}$$

Llevado este valor a la [44.19] permite expresar la energía de la forma:

$$E = c \sqrt{p_0^2 + F^2 t^2 + m_0^2 c^2} = \sqrt{E_0^2 + c^2 F^2 t^2}$$

La velocidad de la partícula se determina teniendo en cuenta la [44.22], de la que puede despejarse  $\mathbf{v}$ :

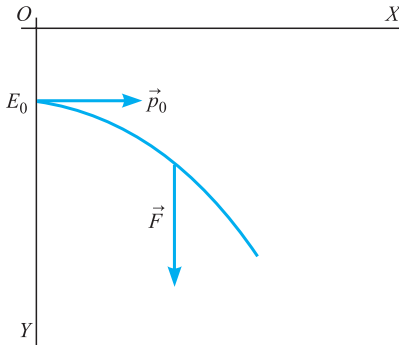
$$\mathbf{v} = \frac{c^2}{E} \mathbf{p} = \frac{c^2 p_0}{\sqrt{E_0^2 + c^2 F^2 t^2}} (p_0 \mathbf{i} + Ft \mathbf{i})$$

Para hallar la posición, integraremos las componentes del vector velocidad, las cuales son:

$$v_x = \frac{c^2 p_0}{\sqrt{E_0^2 + c^2 F^2 t^2}} \quad \text{y} \quad v_y = \frac{c^2 Ft}{\sqrt{E_0^2 + c^2 F^2 t^2}}$$

Para integrar la primera debemos escribirla de la siguiente forma:

$$dx = \frac{c^2 p_0 dt}{E_0 \sqrt{1 + \left(\frac{cFt}{E_0}\right)^2}} = \frac{cp_0}{F} \frac{d\left(\frac{cFt}{E_0}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{cFt}{E_0}\right)^2}}$$



**Figura 44.6.** Movimiento en un campo de fuerzas constantes.

cuya integral es:

$$x = \frac{cp_0}{F} \operatorname{arcsenh} \frac{cFt}{E_0} \quad [44.23]$$

Para integrar la segunda debemos escribirla de la forma:

$$dy = \frac{c^2 F t dt}{\sqrt{E_0^2 + c^2 E^2 t^2}} = \frac{1}{F} \frac{d(c^2 F^2 t^2)}{\sqrt{E_0^2 + c^2 F^2 t^2}}$$

cuya integral es:

$$y = \frac{1}{F} \sqrt{E_0^2 + c^2 F^2 t^2} + \text{cte}$$

Si elegimos la posición del eje  $OX$  de forma que sea  $y_0 = E_0/F$ , la constante de integración será nula y quedará:

$$y = \frac{1}{F} \sqrt{E_0^2 + c^2 F^2 t^2} \quad [44.24]$$

Las Ecuaciones [44.23] y [44.24] son las ecuaciones paramétricas de la trayectoria con parámetro el tiempo. Para hallar la ecuación cartesiana de la trayectoria será necesario eliminar entre ellas el tiempo, lo que se consigue de la siguiente forma:

De la Ecuación [44.23] se deduce que es:

$$\operatorname{senh} \frac{Fx}{cp_0} = \frac{cFt}{E_0}$$

Con lo cual, llevado a la [44.24] obtenemos la ecuación cartesiana de la trayectoria:

$$y = \frac{E_0}{F} \sqrt{1 + \frac{c^2 F^2}{E_0^2} t^2} = \frac{E_0}{F} \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 \frac{Fx}{cp_0}} = \frac{E_0}{F} \operatorname{cosh} \frac{Fx}{cp_0}$$

En consecuencia, la trayectoria es una función hiperbólica y no una parábola, como se dedujo en mecánica clásica. Evidentemente, si se desarrolla en serie la función coseno hiperbólico:

$$y = \frac{E_0}{F} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{Fx}{cp_0} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left( \frac{Fx}{cp_0} \right)^4 + \dots \right]$$

y nos quedamos con los dos primeros términos, el resultado coincide con el de la mecánica clásica. Esta es una aproximación válida para un entorno del estado inicial.

## 44.5 Transformación de la cantidad de movimiento y de la energía

Todas las transformaciones de vectores entre los espacios cuatrimensionales que venimos utilizando están definidas por la matriz ( $M$ ), dada por la Ecuación [43.21]. Concretamente para el vector cantidad de movimiento se verifica:

$$\{P\} = (M)\{P'\}$$

Puesto que las componentes del vector cantidad de movimiento en el espacio tridimensional  $S$  coinciden con las tres primeras del cuadrivector y la cuarta de éste está dada por la Ecuación [44.17], se puede escribir:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \frac{E}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \\ \frac{E'}{c} \end{pmatrix} \quad [46.25]$$

De donde obtenemos,

$$\begin{aligned} p_1 &= \gamma p'_1 + \beta\gamma \frac{E'}{c} \\ p_2 &= p'_2 \\ p_3 &= p'_3 \\ \frac{E}{c} &= \beta\gamma p'_1 + \gamma \frac{E'}{c} \end{aligned}$$

Por tanto, para la transformación de la cantidad de movimiento y de la energía resultan las expresiones:

$$\begin{aligned} p_1 &= \gamma \left( p'_1 - \frac{V}{c^2} E' \right) \\ p_2 &= p'_2 \\ p_3 &= p'_3 \\ E &= \gamma (E' + V p'_1) \end{aligned} \quad [46.26]$$

Las relaciones inversas, para el paso del sistema de referencia  $S$  al  $S'$ , se obtienen multiplicando la [44.25] por  $(M)^{-1}$ , o bien, de las Ecuaciones [44.26], cambiando en ellas  $V$  por  $-V$ , quitando la prima de las magnitudes que la llevan y poniéndosela a las que no la llevan. Con lo cual se expresan:

$$\begin{aligned} p'_1 &= \gamma \left( p_1 - \frac{V}{c^2} E \right) \\ p'_2 &= p_2 \\ p'_3 &= p_3 \\ E' &= \gamma (E + V p_1) \end{aligned} \quad [46.27]$$

De forma general, utilizando las componentes de la cantidad de movimiento paralela y perpendicular a la dirección de  $\mathbf{V}$ , podemos expresar las anteriores [44.26] y [44.27], respectivamente, de la forma:

$$p_{\parallel} = \gamma \left( p'_{\parallel} + \frac{V}{c^2} E' \right) \quad , \quad p_{\perp} = p'_{\perp} \quad , \quad E = \gamma (E' + V p'_{\parallel}) \quad [44.28]$$

$$p'_{\parallel} = \gamma \left( p_{\parallel} - \frac{V}{c^2} E \right) \quad , \quad p'_{\perp} = p_{\perp} \quad , \quad E' = \gamma (E + V p_{\parallel}) \quad [44.29]$$

## 44.6 Sistemas de partículas

Seguiremos definiendo la cantidad de movimiento de un sistema como la suma de las cantidades de movimiento de las partículas que lo componen,

$$\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i \quad [44.30]$$

Asimismo, definimos la energía total de un sistema de partículas como la suma de las energías totales de cada una de éstas,

$$E = \sum_i E_i \quad [44.31]$$

Lo que puede escribirse de la forma:

$$E = \sum m_i c^2 = c^2 \sum m_i = c^2 M \quad [44.32]$$

en la que  $M$  es la masa total del sistema, que será función de las masas en reposo de cada una de las partículas y de las velocidades de éstas.

El c.d.m. del sistema, punto privilegiado de éstos en la mecánica clásica, deja de tener sentido en la mecánica relativista. En aquélla, conocidas las masas de las partículas que componen el sistema y su posición en un instante, quedaba perfectamente determinado el c.d.m. del sistema para ese instante. No sucede así en mecánica relativista, ya que para conocer la masa en un cierto instante hace falta conocer la velocidad de cada una de las partículas en ese instante.

Definiremos la velocidad del centro del sistema como aquella que verifica,

$$\mathbf{p} = M \mathbf{v}_c \quad [44.33]$$

Expresión completamente análoga a la de la mecánica clásica, con la salvedad de que ahora tanto  $M$  como  $\mathbf{v}_c$  dependen de la velocidad de cada una de las partículas del sistema.

Teniendo en cuenta la Expresión [44.32], la [44.33] puede expresarse de la forma:

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{v}_c \quad [44.34]$$

Expresión completamente análoga a la [44.22] encontrada para la partícula.

Puesto que tanto la Expresión [44.30] como la [44.31] son lineales, a la cantidad de movimiento y a la energía del sistema le serán de aplicación transformaciones análogas a las encontradas para la cantidad de movimiento y energía de la partícula. Por tanto, si  $\mathbf{p}$  y  $E$  se conservan en un sistema de referencia  $S$ , también se conservarán en un sistema  $S'$ . Por la estructura de las ecuaciones de transformación para la cantidad de movimiento y la energía, la conservación de una y otra no son independientes, si se conserva aquélla debe conservarse ésta.

Si la cantidad de movimiento de un sistema tiene la dirección de la velocidad relativa de los observadores (eje  $XX'$ ), la ecuación de transformación de la cantidad de movimiento es:

$$p' = \frac{p - v \frac{E}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

El sistema de referencia en el cual la cantidad de movimiento es nula, será aquel que verifique:

$$p - v \frac{E}{c^2} = 0$$

Es decir, debe moverse respecto al sistema  $S$  con la velocidad:

$$v = p \frac{c^2}{E}$$

Luego, resulta ser aquel que lleva la velocidad del centro del sistema, al cual denominaremos sistema de referencia  $C$ .

### EJEMPLO 44.9

Consideremos dos partículas cuyas masas en reposo sean  $m_1$  y  $m_2$ . Supongamos que en el referencial  $S$  la partícula 2 está en reposo,  $p_2 = 0$ , y que la 1 se mueve hacia la 2 con la cantidad de movimiento  $\mathbf{p}_1$ , chocando con ella y produciendo dos partículas nuevas, cuyas masas en reposo son  $m_3$  y  $m_4$ . Estudiemos la posibilidad de tal reacción en función de las masas y energías.

#### Solución:

Antes del choque, la cantidad de movimiento y la energía del sistema son, respectivamente:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1$$

y

$$E = E_1 + E_2 = c\sqrt{m_1^2 c^2 + p_1^2} + m_2 c^2$$

Después del choque, si utilizamos el sistema de referencia  $C$ , será  $\mathbf{p}' = 0$ , con lo cual el invariante  $m_0 c^2$  se escribe:

$$m_0 c^2 = p^2 - \frac{E^2}{c^2} = - \frac{E'^2}{c^2}$$

Por tanto, la energía del sistema después del choque es:

$$\begin{aligned} E' &= \sqrt{E^2 - c^2 p^2} = \sqrt{(E_1 + m_2 c^2)^2 - c^2 p_1^2} = \\ &= \sqrt{E_1^2 + m_2^2 c^4 + 2m_2 c^2 E_1 - c^2 p_1^2} = \\ &= c\sqrt{(m_1^2 + m_2^2)c^2 + 2m_2 E_1} \end{aligned}$$

Puesto que siempre se verifica  $E_1 = E_{c1} + m_1 c^2$ , siendo  $E_{c1}$  la energía cinética de la partícula 1 en el referencial  $S$ , se escribe:

$$E' = c\sqrt{(m_1^2 + m_2^2)c^2 + 2m_2(E_{c1} + m_1 c^2)} = c\sqrt{(m_1 + m_2)^2 c^2 + 2m_2 E_{c1}}$$

La energía mínima después del choque es aquella que tiene el sistema cuando las partículas 3 y 4 están en reposo en el referencial  $C$ , es decir:

$$E' = E'_3 + E'_4 = m_3 c^2 + m_4 c^2 = (m_3 + m_4) c^2$$

En consecuencia, la energía cinética mínima que debe tener la partícula 1 para que se produzca la reacción se despeja de

$$c\sqrt{(m_1 + m_2)^2 c^2 + 2m_2 E_{c1}} = (m_3 + m_4) c^2$$

Obteniéndose,

$$E_{c1} = \frac{c^2}{2m_2} [(m_3 + m_4)^2 - (m_1 + m_2)^2]$$

Lo cual, utilizando el factor  $Q = [(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)]c^2$ , se escribe:

$$E_{c1} = -\frac{Q}{2m_2}(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)$$

Si es  $Q > 0$ , será  $E_{c1} < 0$ , lo cual significa que la reacción ocurre siempre, sin importar la energía cinética de la partícula incidente. Si es  $Q < 0$ , será  $E_{c1} = E_u > 0$  y hace falta que la energía cinética supere el valor  $E_u$  para que la reacción tenga lugar, denominándose a ese valor energía cinética umbral para la partícula 1.

## 44.7 Transformación de las fuerzas

La transformación del cuadrivector fuerza estará definida por la matriz ( $M$ ), de la forma:

$$\{\mathcal{F}\} = (M)\{F'\}$$

La Expresión [44.10] nos relaciona las componentes del vector fuerza en la referencia tridimensional  $S$  con las del cuadrivector fuerza,

$$\{\mathcal{F}\} = \gamma\{F'\}$$

Análogamente, en el sistema  $S'$ , las componentes de la fuerza están relacionadas con las del correspondiente cuadrivector, por:

$$\{\mathcal{F}'\} = \gamma'\{F'\}$$

Por ello, la transformación de las fuerzas debe obedecer a la expresión general:

$$\{F\} = \frac{1}{\gamma}\{\mathcal{F}\} = \frac{1}{\gamma}(M)\{\mathcal{F}'\} = \frac{\gamma'}{\gamma}(M)\{F'\}$$

Lo que matricialmente se escribe:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' & 0 & 0 & \beta\gamma' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma' & 0 & 0 & \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ F'_3 \\ F'_4 \end{pmatrix}$$

De aquí se obtienen para las componentes de  $\mathbf{F}$  las expresiones:

$$F_1 = \gamma'F'_1 + \beta\gamma'F'_4$$

$$F_2 = \frac{\gamma'}{\gamma}F'_2$$

$$F_3 = \frac{\gamma'}{\gamma}F'_3$$

$$F_4 = \beta\gamma'F'_1 + \gamma'F'_4$$

La cuarta componente de la fuerza en el sistema  $S'$  podemos escribirla de la siguiente manera:

$$F'_4 = \frac{dp'_4}{dt'} = \frac{1}{c} \frac{dE'}{dt'} = \frac{1}{c} \mathbf{F}' \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{c} (F'_1v'_1 + F'_2v'_2 + F'_3v'_3)$$

Con ello, la componente  $F_1$  se transforma como sigue:

$$\begin{aligned} F_1 &= \gamma' F'_1 + \beta \gamma' \frac{1}{c} (F'_1 v'_1 + F'_2 v'_2 + F'_3 v'_3) = \\ &= F'_1 \left( \gamma' + \frac{\beta \gamma'}{c} v'_1 \right) + \frac{\beta \gamma'}{c} (F'_2 v'_2 + F'_3 v'_3) = \\ &= F'_1 + \frac{V}{c^2 + V v'_1} (F'_2 v'_2 + F'_3 v'_3) \end{aligned}$$

Resultando para la transformación de fuerzas las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= F'_1 + \frac{v}{c^2 + V v'_1} (F'_2 v'_2 + F'_3 v'_3) \\ F_2 &= \frac{F'_2}{\gamma \left( 1 + \frac{V v'_1}{c^2} \right)} \\ F_3 &= \frac{F'_3}{\gamma \left( 1 + \frac{V v'_1}{c^2} \right)} \end{aligned} \right\} \quad [44.35]$$

que nos permiten pasar del sistema tridimensional  $S'$  al  $S$ .

Las inversas, que establecen el paso del  $S$  al  $S'$ , son:

$$\left. \begin{aligned} F'_1 &= F_1 - \frac{V}{c^2 - V v_1} (F_2 v_2 + F_3 v_3) \\ F'_2 &= \frac{F_2}{\gamma \left( 1 - \frac{V v_1}{c^2} \right)} \\ F'_3 &= \frac{F_3}{\gamma \left( 1 - \frac{V v_1}{c^2} \right)} \end{aligned} \right\} \quad [44.36]$$





## EINSTEIN

Albert Einstein nació en Ulm (Alemania), en 1879, en el seno de una familia judía, que, cuando Einstein aún no contaba dos años, se vio obligada a trasladarse a Munich, donde su padre trabajó en una pequeña empresa. Su madre Pauline Koch era una buena pianista y mujer de esmerada educación. Desde joven parece que Einstein mostró dificultades para expresarse, lo que condicionó su carácter retraído y algo tímido. En 1894, dificultades económicas en la empresa donde trabajaba su padre hicieron que la familia se trasladara a Pavía (Italia), quedándose Albert en Munich para acabar sus estudios, pero éste los abandonó, cuando le faltaban tres años para acabar la enseñanza media y se reunió con sus padres en Pavía. Sus calificaciones en Matemáticas y Física eran buenas, pero al resto de las materias no les prestaba atención. Su padre le obligó a seguir sus estudios, para lo cual se trasladó a Zurich (Suiza) con la intención de ingresar en el Politécnico, pero al no tener el bachillerato tuvo que presentarse al examen de ingreso, prueba que no superó. El director del Politécnico, a la vista de los buenos ejercicios que había realizado en Matemáticas y Física, le animó a acabar el bachillerato, lo que le permitiría el acceso directo. Einstein finalizó sus estudios de Bachillerato en Aarau (Alemania), a la edad de dieciséis años, ingresando a continuación en el Politécnico de Zurich, donde estudió Física y Matemáticas con profesores tan eminentes como Weber y Minkowski y entabló gran amistad con su compañero de estudios Marcel Grossmann. Finalizó sus estudios en el año 1900 y en el 1901 obtuvo la nacionalidad Suiza. También discípula suya fue la matemática de origen croata Mileva Maric, de la que se enamoró y con la que se casaría en 1903.

Tuvo grandes dificultades para encontrar trabajo y, al principio, se vio obligado a dar clases particulares de matemáticas. Gracias a Grossmann consiguió, en 1902, un puesto de técnico en la Oficina de Patentes de Berna (Suiza), en la cual, durante los momentos libres de trabajo, se dedicó a estudiar las propiedades físicas de la luz.

En 1904 obtuvo el grado de doctor con la tesis: *Una nueva determinación de las dimensiones moleculares*. Pero su gran año fue 1905, conocido como *Anus Mirabilis*, en el cual publicó, en la revista *Annalen der Physik*, cuatro trabajos científicos trascendentales:

1. *Sobre el movimiento requerido por la teoría cinética molecular del calor de pequeñas partículas suspendidas en un líquido estacionario*, en el cual explicaba el movimiento browniano y se ponía de manifiesto la existencia real de los átomos como individualidades componentes del fluido.

2. *Sobre un punto de vista heurístico acerca de la producción y transformación de la luz*, en el cual explicaba el efecto fotoeléctrico y establecía el *quanto de luz*, el *fotón*, lo que hacía volver a la naturaleza corpuscular de la luz y fue la base del enunciado por De Broglie de la dualidad onda-corpúsculo.

3. *Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento*, en el cual desarrolla la teoría de la relatividad especial y establece sus dos principios:

- a) *Las leyes físicas son las mismas en cualquiera de los sistemas de referencia inerciales*, por tanto, las leyes de la naturaleza no dependen de nuestro particular sistema inercial de observación.

- b) *La luz se propaga en el vacío a velocidad constante  $c$ , cualquiera que sea la velocidad relativa del observador y la fuente emisora*, con lo cual, la velocidad de la luz en el vacío es una constante fundamental de la naturaleza.

4. *¿Depende la inercia de un cuerpo de su contenido de energía?*, en el cual desarrolla su famoso principio de equivalencia entre la masa y la energía,  $E = mc^2$ , y establece la variación de masa de un objeto cuando este emite energía.

En 1907, Einstein dijo haber tenido el día más feliz de su vida, al haber intuido el Principio de Equivalencia, según el cual *en un recinto cerrado, no se puede establecer experimento alguno que permita distinguir entre un campo gravitacional homogéneo y un sistema de referencia uniformemente acelerado, con aceleración igual y opuesta a la del campo gravitacional*, lo que constituye la base de la teoría de la Relatividad general, que amplía la relatividad al campo de la gravitación. Al desarrollo de la teoría de la Relatividad general contribuyeron eminentes matemáticos, como Riemann, Ricci, Christoffel, Levi-Civita, Klein y Hilbert. El 25 de Noviembre de 1915, Einstein presentó, en la Academia Prusiana de Berlín, sus *Ecuaciones del campo de la gravitación*.

En 1908 había sido contratado como profesor en la Universidad de Berna, en 1910 ocupó una plaza de *Professor* en la Universidad Alemana de Praga y en 1914 se estableció en Berlín, donde fue nombrado miembro de la Academia Prusiana de Ciencias y posteriormente director del Instituto de Física Kaiser Wilhelm.

En 1919 se divorció de Mileva, después de haber tenido con ella tres hijos (Liserl, Albert y Eduard); ese mismo año se casó con su prima Elsa Einstein, separada de Max Loewenthal, con dos hijas y tres años mayor que él, con la cual no tuvo hijos.

A Albert Einstein se le concedió el Premio Nobel de Física del año 1921, «*por sus servicios a la Física teórica y especialmente por su descubrimiento de la ley del efecto fotoeléctrico*».

En 1924, un joven físico indio, Bose, le envió, para su consideración y posible publicación, un trabajo en el que describía la luz como un gas de fotones. Einstein se dio cuenta de la importancia del trabajo y de que las estadísticas en él desarrolladas podían tener su aplicación a cualquier grupo de partículas indistinguibles entre sí (*bosones*), y lo publicó en alemán conjuntamente con Bose; en él aparecen las conocidas estadísticas de Bose-Einstein.

Fue cofundador del Partido Liberal Democrático Alemán y con la llegada del nacionalsocialismo, Einstein se sintió incómodo y abandonó Alemania en 1933, trasladándose al Instituto de Estudios Avanzados de Princeton (Estados Unidos). En esta ciudad, en 1936, falleció su segunda esposa. Einstein, en 1940, consiguió la nacionalidad estadounidense.

El 2 de agosto de 1939, Einstein envió una carta al presidente Roosevelt advirtiéndole de la posibilidad de que Alemania estuviera desarrollando una bomba atómica, lo que reiteró en una nueva carta en 1940. El presidente Roosevelt creó el conocido Proyecto Manhatann, cuyo objetivo era la creación de la bomba atómica norteamericana. El proyecto se desarrolló en Los Alamos, bajo la dirección de Robert Oppenheimer, y culminó con la primera prueba nuclear de la historia, el 16 de julio de 1945, en el desierto de Alamogordo (Nuevo México).

El estado de Israel, a la muerte de su primer presidente y amigo de Einstein, Chaim Weizmann, en 1952, le ofreció la presidencia, pero Einstein declinó el ofrecimiento.

Los últimos años de su vida los dedicó a la unificación de todas las fuerzas: gravitacionales, electromagnéticas y nucleares, en lo que debiera llamarse la Teoría del campo unificado, pero murió en Abril de 1955 sin haberlo conseguido.

# Electromagnetismo y relatividad

CAPÍTULO

45

## 45.1 Introducción

La incompatibilidad, que se puso de manifiesto a finales del siglo XIX, entre la mecánica clásica y el electromagnetismo, fue resuelta en favor de éste por la teoría de la relatividad restringida. Según hemos visto, ésta postula la invarianza de la velocidad de la luz, a partir de la cual, y del principio de relatividad restringida, determina las transformaciones para el paso de un sistema de referencia espacio-temporal a otro inercial con él. En consecuencia, las ecuaciones de Maxwell serán invariantes en una transformación de Lorentz, mientras que la mecánica clásica ha tenido que ser modificada, de la forma ya vista, para conseguir su covarianza.

Apoyados en la covarianza de las ecuaciones de Maxwell en una transformación de Lorentz, vamos a determinar cómo se transforman las componentes del campo electromagnético y las densidades de carga y de corriente. Ello va a permitirnos poner de manifiesto la relatividad del campo electromagnético y explicar algunos resultados ya conocidos.

## 45.2 Transformación del campo electromagnético

Consideremos un sistema de referencia  $S$  en el cual existe un campo electromagnético. Las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial se escribirán:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \left( \mathbf{i} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)\end{aligned}\tag{45.1}$$

Las ecuaciones segunda y tercera son independientes del medio, ya que no contienen ni a las constantes del medio,  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$ , ni a las densidades de carga o corriente,  $\rho$  e  $\mathbf{i}$ , su transformación al sistema  $S'$  nos permitiría conocer cómo se transforman

- 45.1. Introducción
- 45.2. Transformación del campo electromagnético
- 45.3. Relatividad del campo electromagnético
- 45.4. Invarianza de la carga eléctrica
- 45.5. Campo electromagnético creado por una partícula cargada en movimiento rectilíneo uniforme
- 45.6. Fuerza sobre una partícula cargada que se mueve dentro de un campo magnético
- 45.7. Relatividad general

los campos electromagnéticos, pero si buscamos encontrar simultáneamente, aunque ello resulte algo más complicado, además de las transformaciones de los campos, las correspondientes a las densidades de carga y de corriente, debemos utilizar la primera y la cuarta de las ecuaciones de Maxwell [45.1]; las cuales, en función de sus componentes en el sistema de referencia  $S$ , se expresan:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad [45.2]$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 i_y + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad [45.3]$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 i_z + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad [45.4]$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 i_x + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad [45.5]$$

Estas ecuaciones, en una transformación de Lorentz, deben pasar al sistema  $S'$  conservando su forma. Es decir, en el sistema de referencia  $S'$  deben escribirse:

$$\frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} = \frac{\rho'}{\epsilon_0} \quad [45.6]$$

$$\frac{\partial B'_x}{\partial z'} - \frac{\partial B'_z}{\partial x'} = \mu_0 i'_y + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_y}{\partial t'} \quad [45.7]$$

$$\frac{\partial B'_y}{\partial x'} - \frac{\partial B'_x}{\partial y'} = \mu_0 i'_z + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_z}{\partial t'} \quad [45.8]$$

$$\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} = \mu_0 i'_x + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} \quad [45.9]$$

Apliquemos a las Ecuaciones [45.2] a [45.5] las transformaciones de Lorentz que pasan del sistema  $S(x, y, z, t)$  al  $S'(x', y', z', t')$ ,

$$x' = \gamma(x - Vt) \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z \quad ; \quad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)$$

La derivada parcial respecto de  $x$ , puesto que  $x'$  y  $t'$  son función de  $x$ , se expresará:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \gamma \frac{V}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma \left( \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{V}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} \right) \quad [45.10]$$

Asimismo, se verificarán:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma \left( \frac{\partial}{\partial t'} - V \frac{\partial}{\partial x'} \right) \quad [45.11]$$

Comencemos aplicando las relaciones [45.10] y [45.11] a la Ecuación [45.3]:

$$\frac{\partial B_x}{\partial z'} - \gamma \left( \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{V}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) B_z = \mu_0 i_y + \frac{\gamma}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t'} - V \frac{\partial}{\partial x'} \right) E_y$$

La cual puede ser escrita de la forma:

$$\frac{\partial B_x}{\partial z'} - \frac{\partial}{\partial x'} \left[ \gamma \left( B_z - \frac{V}{c^2} E_y \right) \right] = \mu_0 i_y + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} [\gamma (E_y - V B_z)]$$

Ecuación que, al compararla con la [45.15], exige que sean:

$$B'_x = B_x \quad , \quad B'_z = \gamma \left( B_z - \frac{V}{c^2} E_y \right) \quad , \quad i'_y = i_y \quad , \quad E'_y = \gamma (E_y - V B_z) \quad [45.12]$$

Análogamente transformamos la Ecuación [45.4], y tras compararla con la [45.8], obtenemos:

$$B'_y = \gamma \left( B_y + \frac{V}{c^2} E_z \right) \quad , \quad E'_z = \gamma (E_z + V B_y) \quad i'_z = i_z \quad [45.13]$$

La transformación de la Ecuación [45.5] presenta la dificultad de que sólo puede sustituirse en ella la [45.11], con lo cual se expresa:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y'} - \frac{\partial B_y}{\partial z'} = \mu_0 i_x + \frac{\gamma}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t'} - V \frac{\partial}{\partial x'} \right) E_x \quad [45.14]$$

Transformemos la [45.2], por aplicación de la [45.10]:

$$\gamma \left( \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{V}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y'} + \frac{\partial E_z}{\partial z'} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad [45.15]$$

De esta vamos a despejar:

$$\gamma \frac{\partial E_x}{\partial x'} = \frac{\rho}{\epsilon_0} + \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t'} - \frac{\partial E_y}{\partial y'} - \frac{\partial E_z}{\partial z'}$$

Sustituyendo este valor en la [45.14], se escribe:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y'} - \frac{\partial B_y}{\partial z'} = \mu_0 i_x + \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t'} - \frac{V}{c^2} \left( \frac{\rho}{\epsilon_0} + \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t'} - \frac{\partial E_y}{\partial y'} - \frac{\partial E_z}{\partial z'} \right)$$

Expresión que podemos poner de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y'} \left( B_z - \frac{V}{c^2} E_y \right) - \frac{\partial}{\partial z'} \left( B_y + \frac{V}{c^2} E_z \right) &= \mu_0 i_x - \frac{V}{c^2} \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{1}{c^2} \left( \gamma - \gamma \frac{V^2}{c^2} \right) \frac{\partial E_x}{\partial t'} = \\ &= \mu_0 (i_x - V \rho) + \frac{1}{\gamma c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t'} \end{aligned}$$

Multiplicando esta expresión por  $\gamma$ , se escribe:

$$\frac{\partial}{\partial y'} \left[ \gamma \left( B_z - \frac{V}{c^2} E_y \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z'} \left[ \gamma \left( B_y + \frac{V}{c^2} E_z \right) \right] = \mu_0 \gamma (i_x - V \rho) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t'}$$

La cual, al compararla con la [45.9] nos da:

$$E'_x = E_x \quad , \quad i'_x = \gamma (i_x - V \rho) \quad [45.16]$$

Despejando de [45.14]:

$$\frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t'} = \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial x'} - \mu_0 i_x + \frac{\partial B_z}{\partial y'} - \frac{\partial B_y}{\partial z'}$$

Llevando este valor a la [45.15], se expresa:

$$\gamma \frac{\partial E_x}{\partial x'} - V \left( \gamma \frac{V}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial x'} - \mu_0 i_x + \frac{\partial B_z}{\partial y'} - \frac{\partial B_y}{\partial z'} \right) + \frac{\partial E_y}{\partial y'} + \frac{\partial E_z}{\partial z'} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

La cual puede agruparse de la siguiente forma:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x'} \left( \gamma - \gamma \frac{V^2}{c^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y'} (E_y - VB_z) + \frac{\partial}{\partial z'} (E_z + VB_y) = -\mu_0 V i_x + \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Expresión que multiplicada por  $\gamma$  se escribe:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'} \gamma (E_y - VB_z) + \frac{\partial}{\partial z'} \gamma (E_z + VB_y) = \gamma \left( \frac{\rho}{\epsilon_0} - \mu_0 V i_x \right)$$

Comparando está con la [45.6], debe verificarse:

$$\gamma \left( \frac{\rho}{\epsilon_0} - \mu_0 V i_x \right) = \frac{\rho'}{\epsilon_0}$$

Resultando:

$$\rho' = \gamma \left( \rho - \frac{V}{c^2} i_x \right) \tag{45.17}$$

En consecuencia, de los resultados obtenidos en las Expresiones [45.12], [45.13], [45.16] y [45.17], presentamos en la Tabla 45.1 las transformaciones de los campos electromagnéticos y en la Tabla 45.2 las transformaciones correspondientes a densidades de carga y de corriente.

**Tabla 45.1.** Transformaciones de los campos electromagnéticos.

Transformación de los campos electromagnéticos

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - VB_z) & B'_y &= \gamma \left( B_y + \frac{V}{c^2} E_z \right) \\ E'_z &= \gamma(E_z + VB_y) & B'_z &= \gamma \left( B_z - \frac{V}{c^2} E_y \right) \end{aligned} \tag{45.18}$$

Las inversas,

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x & B_x &= B'_x \\ E_y &= \gamma(E'_y + VB'_z) & B_y &= \gamma \left( B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z \right) \\ E_z &= \gamma(E'_z - VB'_y) & B_z &= \gamma \left( B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y \right) \end{aligned} \tag{45.19}$$

**Tabla 45.2.** Transformaciones de las densidades de carga y de corriente.

$$\begin{aligned}
 i'_x &= \gamma(i_x - V\rho) & i_x &= \gamma(i'_x + V\rho') \\
 i'_y &= i_y & i_y &= i'_y \\
 i'_z &= i_z & i_z &= i'_z \\
 \rho' &= \gamma\left(\rho - \frac{V}{c^2}i_x\right) & \rho &= \gamma\left(\rho' + \frac{V}{c^2}i'_x\right)
 \end{aligned}
 \tag{45.20}$$

Transformación de las densidades de carga y corriente

Las Ecuaciones [45.18], [45.19] y [45.20] son válidas cuando el movimiento relativo de traslación uniforme, del sistema  $S'$  respecto del  $S$ , se hace a lo largo del eje  $XX'$ . Ello puede generalizarse considerando las componentes de los campos en dirección de la velocidad relativa  $\mathbf{V}$  y perpendicular a ella, con lo cual las referidas transformaciones, se escriben:

**Tabla 45.3.** Transformaciones de los campos electromagnéticos.

$$\begin{aligned}
 E'_{\parallel} &= E_{\parallel} & E'_{\perp} &= \gamma[E_{\perp} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp}] \\
 B'_{\parallel} &= B_{\parallel} & B'_{\perp} &= \gamma\left[B_{\perp} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{v} \times \mathbf{E})_{\perp}\right] \\
 E_{\parallel} &= E'_{\parallel} & E_{\perp} &= \gamma[E'_{\perp} - (\mathbf{v} \times \mathbf{B}')_{\perp}] \\
 B_{\parallel} &= B'_{\parallel} & B_{\perp} &= \gamma\left[B'_{\perp} + \frac{1}{c^2}(\mathbf{v} \times \mathbf{E}')_{\perp}\right]
 \end{aligned}
 \tag{45.21}$$

**Tabla 45.4.** Transformaciones de las densidades de carga y de corriente.

$$\begin{aligned}
 i'_{\parallel} &= \gamma(i_{\parallel} - V\rho) & i_{\parallel} &= \gamma(i'_{\parallel} + V\rho') \\
 i'_{\perp} &= i_{\perp} & i_{\perp} &= i'_{\perp} \\
 \rho' &= \gamma\left(\rho - \frac{V}{c^2}i_{\parallel}\right) & \rho &= \gamma\left(\rho' + \frac{V}{c^2}i'_{\parallel}\right)
 \end{aligned}
 \tag{45.22}$$

### 45.3 Relatividad del campo electromagnético

De las fórmulas de transformación se deduce la relatividad del campo electromagnético, ya que éste variará según el sistema inercial en el que se estudie. Concretamente, en el sistema  $S$ , el campo electromagnético puede ser exclusivamente eléctrico  $\mathbf{E} \neq 0$  y  $\mathbf{B} = 0$ , mientras que en el sistema  $S'$  el campo electromagnético tendrá campo eléctrico  $\mathbf{E}' \neq 0$  y campo magnético  $\mathbf{B}' \neq 0$ . En efecto, aplicando las Ecuaciones [45.8], resulta:

$$\begin{aligned}
 E'_{\parallel} &= E_{\parallel} & E'_{\perp} &= \gamma E_{\perp} \\
 B'_{\parallel} &= 0 & B'_{\perp} &= -\frac{\gamma}{c^2}(\mathbf{v} \times \mathbf{E})_{\perp}
 \end{aligned}$$

Análogamente, si en el sistema  $S$  únicamente hay campo magnético,  $\mathbf{E} = 0$  y  $\mathbf{B} \neq 0$ , en el sistema  $S'$  existirán campo eléctrico y magnético. Basta aplicar las Ecuaciones [45.8] para encontrar:

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= 0 & E'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp} \\ E'_{\perp} &= B_{\parallel} & B'_{\perp} &= \gamma\mathbf{B}_{\perp} \end{aligned}$$

El campo eléctrico  $\mathbf{E}'$  puede expresarse de la siguiente forma:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp} = \gamma(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp}) = \mathbf{v} \times \mathbf{B}'_{\perp} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}'$$

Por ello, la fuerza de Lorentz sobre una partícula cargada que se mueve dentro de un campo magnético, no es más que la debida a un campo eléctrico.

La relatividad del campo electromagnético nos permite elegir un sistema inercial de referencia para el estudio de los problemas, de forma que éstos se simplifiquen lo máximo posible. Una vez resuelto, debemos pasar la solución al sistema del laboratorio.

#### 45.4 Invarianza de la carga eléctrica

Consideremos en el sistema de referencia  $S'$  un elemento de volumen  $(dx', dy', dz')$ , con una densidad espacial de carga  $\rho'$ , el cual almacenará una pequeñísima carga  $dq'$ ,

$$dq' = \rho' dx' dy' dz'$$

Análogamente, en el sistema  $S$ , el elemento de volumen  $dx dy dz$  con densidad espacial de carga  $\rho$ , almacena la carga  $dq$ ,

$$dq = \rho dx dy dz$$

Puesto que, de acuerdo con las transformaciones de Lorentz, es  $dx = \gamma dx'$ ,  $dy = dy'$  y  $dz = dz'$ , el elemento de volumen del sistema  $S$ , se verá desde el  $S'$ :

$$dq = \rho \gamma dx' dy' dz'$$

Dado que, en ausencia de corrientes, la ecuación tercera de [45.20] se reduce a  $\rho' = \gamma\rho$ , resulta:

$$dq = \rho' dx' dy' dz' = dq'$$

Es decir, la carga se conserva, es un invariante en la transformación mediante las ecuaciones de Lorentz. Un cuerpo cargado tiene la misma carga en todos los sistemas de referencia. Esto, que ha sido demostrado para una carga estática en el sistema  $S'$ , puede también demostrarse para una carga móvil dentro de él.

#### 45.5 Campo electromagnético creado por una partícula cargada en movimiento rectilíneo uniforme

Consideremos una carga  $q$  situada fija en el origen  $O'$  del sistema de referencia  $S'$ . Para un observador ligado a este sistema existirá en él únicamente el campo electrostático  $\mathbf{E}'$ ,

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^3} \mathbf{r}'$$

siendo  $r' = (x^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}$ .



Para un observador situado en el sistema  $S$  existirá un campo electromagnético que se obtiene al utilizar las ecuaciones de transformación [45.19]. Si además tenemos en cuenta las ecuaciones de Lorentz para la transformación de coordenadas, los campos eléctrico y de inducción magnética en el sistema  $S$  se expresan:

$$E_x = E'_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx'}{r'^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma(x-vt)}{[\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$E_y = \gamma E'_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma qy'}{r'^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma qy}{[\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$E_z = \gamma E'_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma qz'}{r'^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma qz}{[\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$B_x = B'_x = 0$$

$$B_y = -\gamma \frac{V}{c^2} E'_z = -\frac{V}{c^2} E_z$$

$$B_z = \gamma \frac{V}{c^2} E'_y = \frac{V}{c^2} E_y$$

Por tanto, en el sistema  $S$ , además de un campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , existe un campo magnético  $\mathbf{B}$ .

## 45.6 Fuerza sobre una partícula cargada que se mueve dentro de un campo magnético

Consideremos que en el sistema de referencia  $S$  existe únicamente un campo magnético  $\mathbf{B}$ , y que una partícula de carga  $q$  está ligada al origen  $O'$  del sistema  $S'$ ; es decir, se mueve con velocidad constante  $V$  respecto a  $S$ .

En el sistema  $S'$  existirá un campo electromagnético que vendrá dado por las Ecuaciones [45.18]. Es decir, será:

$$E'_x = 0 \quad E'_y = -\gamma V B_z \quad E'_z = \gamma V B_y$$

$$B'_x = B_x \quad B'_y = \gamma B_y \quad B'_z = \gamma B_z$$

En el sistema  $S'$ , puesto que la partícula está en reposo, la única fuerza que sobre ella actúa es la debida al campo eléctrico,

$$F'_x = qE'_x = 0 \quad , \quad F'_y = qE'_y = -q\gamma V B_z \quad , \quad F'_z = qE'_z = q\gamma V B_y$$

Utilizando las ecuaciones de transformación de las fuerzas, expresamos la anterior en el sistema  $S$ , obteniendo:

$$F_x = \frac{1}{\gamma} F'_x = 0 \quad , \quad F_y = \frac{1}{\gamma} F'_y = -qV B_z \quad , \quad F_z = \frac{1}{\gamma} F'_z = qV B_y$$

Lo cual vectorialmente, teniendo en cuenta que es  $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$ , se escribe:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Expresión ya conocida de la fuerza que ejerce un campo magnético de inducción  $\mathbf{B}$  sobre una partícula de carga  $q$ , que se mueve dentro de él con velocidad  $\mathbf{v}$ .

## 45.7 Relatividad general

La teoría de la gravitación de Newton asume que las acciones que se ejercen los cuerpos se transmiten de forma instantánea, lo que va en contra de la teoría de la relatividad, que considera la velocidad de la luz tope máximo para las velocidades.

El electromagnetismo de Maxwell establece que las acciones electromagnéticas son transmitidas mediante ondas, que son solución de las ecuaciones de los campos y que se propagan en el vacío a la velocidad  $c$ , lo que fue asumido por la teoría de la relatividad especial.

La relatividad general es una teoría que trata de unificar la gravitación y la teoría de la relatividad, para lo cual las acciones gravitacionales deben tener una cierta velocidad de propagación con tope  $c$  y transmitirse mediante ondas, *ondas gravitacionales*. Ya en 1900 Lorentz lanzó esta hipótesis. Por otra parte, Poincaré, en 1905 manifestó por carta a Einstein la necesidad de que también la ley de la gravitación de Newton debía ser transformada para que fuera covariante con las transformaciones de Lorentz.

La relatividad especial, tal y como que hemos estudiado, sólo es aplicable a sistemas de referencia inerciales, de ahí su nombre de *especial o restringida*. En ella se asume el Principio de relatividad de Galileo y se generaliza para todos los campos, estableciéndose que no es posible realizar experimento alguno que permita establecer si un sistema está en reposo o se mueve con movimiento rectilíneo uniforme. En 1907, Einstein dijo haber tenido el día más feliz de su vida, cuando intuyó su *Principio de equivalencia*, que le permitía aplicar la relatividad a sistemas acelerados y que es la base del desarrollo de la Relatividad general:

### Principio de equivalencia

*En un recinto cerrado, no se puede establecer experimento alguno que permita distinguir entre un campo gravitacional homogéneo y un sistema de referencia uniformemente acelerado, con aceleración igual y opuesta a la del campo gravitacional.*

Dicho de otro modo: *desde el punto de vista físico son completamente equivalentes un campo gravitacional homogéneo y un sistema de referencia con la correspondiente aceleración.*

El clásico ejemplo de una nave espacial puede aclarar esto: una nave espacial está en reposo sobre la superficie de la Tierra y dentro de ella un astronauta suelta una masa; esta caerá bajo la acción gravitacional con aceleración  $\mathbf{g}$ . Si la nave se encontrase en el espacio lejano, en un hipotético lugar sin campo gravitacional, y la nave adquiriera una aceleración  $-\mathbf{g}$ , al soltar el astronauta la masa, esta caería respecto a la nave igual que lo hizo cuando estaba inmóvil sobre la superficie terrestre, es decir, con aceleración  $\mathbf{g}$  respecto a la nave. El astronauta no tiene posibilidad de distinguir ambas situaciones. Si la nave estuviera próxima a la superficie terrestre, apaga sus motores y cae libremente, al soltar la masa esta no cae respecto a la nave y queda flotando (véase Ejemplo 10.2 del tomo I); igual situación se produciría si la nave estuviera inmóvil en un lugar sin campo gravitacional, el astronauta no tiene posibilidad de distinguir ambas situaciones. Hay que hacer notar que el Principio de equivalencia solo es aplicable a campos gravitacionales homogéneos o a regiones de dimensiones tales que en ellas pueda considerarse homogéneo sin error apreciable. Una exageración que permite aclarar esto es considerar nuestra nave espacial de grandes dimensiones de forma que al dejar caer la masa dentro de ella no lo hace normal a su suelo, ya que debe ir dirigida hacia el centro de la Tierra y la aceleración de la gravedad sobre la masa no tiene la dirección de la aceleración de la nave (Figura 45.1).

La masa que figura en la ley de la dinámica newtoniana,  $\mathbf{F} = m_i \mathbf{a}$ , *masa inercial*, y la masa que figura en la ley de la gravitación,  $\mathbf{F} = m_g \mathbf{g}$ , *masa gravitacional*,

se relacionan al considerar una masa que cae bajo la única fuerza de la gravedad, en cuyo caso la ley de la dinámica se expresa  $\mathbf{F} = m_g \mathbf{g} = m_i \mathbf{a}$ ; con lo cual podemos escribir:

$$\frac{m_i}{m_g} = \frac{g}{a}$$

Puesto que en el campo de la gravedad todos los cuerpos caen con la misma aceleración,  $a = g$ , resulta que ambas masas, inercial y gravitacional, deben ser iguales. Newton ya estableció experimentalmente dicha igualdad con un error inferior al 1% y en la actualidad se ha comprobado que la diferencia debe ser menor de 1 en  $10^{12}$ . El Principio de equivalencia establece la citada igualdad como principio, ya que no será posible distinguir entre fuerzas inerciales, debidas al movimiento acelerado del sistema de referencia y fuerzas gravitacionales, debidas al campo de la gravedad.

En 1911, Einstein propone que las ondas electromagnéticas también deben verificar la ley de la gravitación, ya que al llevar energía tienen su masa equivalente y, por tanto, serán desviadas al pasar cercanas a cuerpos de gran masa. Recordemos que Maxwell había establecido que las ondas electromagnéticas tienen cantidad de movimiento, por lo cual deben tener una masa equivalente. También planteó que las ondas gravitacionales, al propagarse a velocidad constante y tener que cambiar su energía por acción de campos gravitatorios, sólo pueden hacerlo cambiando su frecuencia.

En 1912 llegó a la conclusión de que las transformaciones de Lorentz no eran aplicables al campo de la gravitación. Para establecer la teoría que diera explicación correcta a todo, buscó colaboración en los más grandes matemáticos de la época, como Riemann, Ricci, Christoffel y Levi-Civita, y usó importantes desarrollos llevados a cabo por ellos.

En el verano de 1915, Einstein realizó en Göttingen una exposición de su teoría general de la relatividad, entonces aún incompleta en su propósito de establecer que los campos gravitacionales son equivalentes a una curvatura del espacio-tiempo que obedece a una métrica de Riemann. A las sesiones asistieron los eminentes matemáticos Hilbert y Klein, los cuales intercambiaron con aquel, opiniones, ideas y nuevas posibilidades sobre su teoría. El 25 de Noviembre, en la Prussian Academy de Berlín, Einstein presentó sus *Ecuaciones del campo de la gravitación*. Hilbert, cinco días antes, había enviado su trabajo *Los fundamentos de la Física*, en el cual también obtiene las ecuaciones del campo de la gravitación, con importantes aportaciones novedosas. En 1916, Schwarzschild obtuvo la solución de las ecuaciones del campo gravitacional para el caso del campo gravitacional de una distribución de masa con simetría esférica.

Diversas verificaciones experimentales han permitido comprobar la bondad de las predicciones de la teoría general de la relatividad, citaremos las siguientes: precesión del perihelio de Mercurio, desviación de la luz por campos gravitacionales, corrimiento gravitacional hacia el rojo, radiación de ondas gravitacionales y existencia de agujeros negros.

### Precesión del perihelio de Mercurio

Según las observaciones de Kepler y la teoría newtoniana, los planetas describen elipses alrededor del Sol, que está en uno de los focos, denominándose perihelio a la distancia mínima al Sol. Si además de la acción gravitacional del Sol tenemos en cuenta las perturbaciones debidas a otros planetas, la posición del perihelio de Mercurio no es fija y precesa, habiéndose medido experimentalmente que se desplaza  $574''$  de arco cada siglo (Figura 45.2).

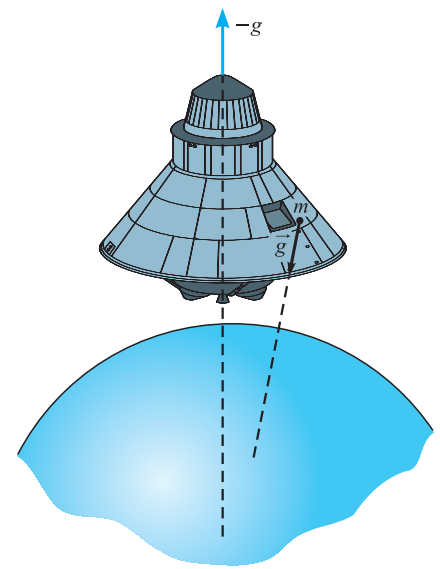


Figura 45.1.

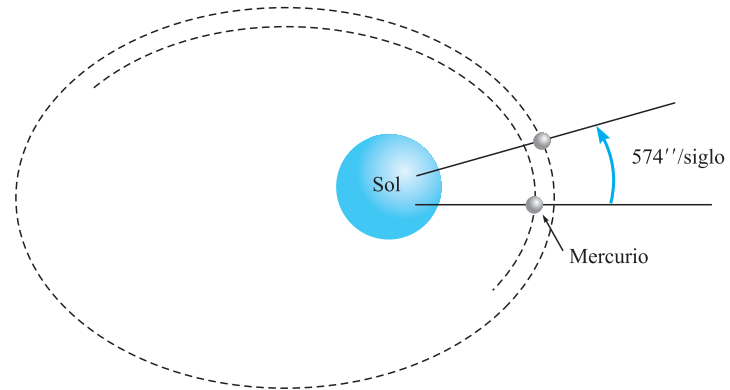


Figura 45.2. Precesión del perihelio de Mercurio.

Los cálculos más precisos, basados en la mecánica clásica, dan como resultado una precesión de  $532''$  por siglo. La teoría de la relatividad especial mejoraba los resultados, pero tampoco llegaba a explicar la diferencia de  $42''$ . A finales de 1915, Einstein, aplicando su teoría de la gravitación, calculó con toda exactitud el valor de la precesión del perihelio de Mercurio, concordancia entre la experiencia y su teoría que le provocó una de las mayores satisfacciones.

### Desviación de la luz por campos gravitacionales

La teoría de la relatividad general, en sus hipótesis iniciales, establecía que las ondas electromagnéticas deben ser desviadas por los campos gravitacionales, pues no en vano tienen energía y cantidad de movimiento, lo que indica que tienen una correspondiente masa. Este efecto debía ser muy débil y, por tanto, únicamente apreciable al pasar la luz muy cerca de un cuerpo de gran masa.

En 1911, Einstein presentó un trabajo en el cual calculaba la desviación de un rayo de luz al pasar por las inmediaciones del Sol, en él calculaba que la citada desviación debía ser de  $0'',85$  de arco. Una vez establecida su teoría completa de la relatividad general, volvió a realizar los cálculos obteniendo que la desviación debía ser de  $1'',75$  de arco (Figura 45.3).

Para poder ver la luz que nos llega de una estrella lejana y que pasa muy próxima al Sol, es necesario que tenga lugar un eclipse de Sol, de forma que este permita ver la luz que nos llega tangente a él desde estrellas lejanas. Tal situación se daba el 29 de Mayo de 1919, y la Royal Astronomical Society y la Royal Physical Society organizaron dos expediciones con el objeto de medir la referida desviación. Una trabajaría en Sobral (Brasil) y la otra en la isla Príncipe (Golfo de Guinea), dirigida por Arthur Eddington. Los resultados se presentaron el 6 de noviembre, en una reunión conjunta de las dos citadas sociedades; la expedición de Brasil había obtenido una desviación de  $1'',98$  y la de isla Príncipe,  $1'',61$ ; era otra prueba muy firme de la validez de la teoría de la relatividad general.

La observación de objetos muy distantes puede ser distorsionada al pasar la luz que viene de ellos cerca de grandes masas; estas pueden hacer un efecto de lente, aumentando o disminuyendo el tamaño; otras veces duplican la imagen, como es el caso de la imagen del *quasar* (0957 + 561), descubierto en 1979, y en otros casos forman imágenes anulares, denominadas *anillos de Einstein*, como las obtenidas con el telescopio espacial Hubble.

### Corrimiento gravitacional hacia el rojo

Consideremos una fuente emisora de ondas electromagnéticas de frecuencia  $\nu$ , medida en reposo respecto a ella, situada a una altura  $h$  y sobre el suelo. En la vertical

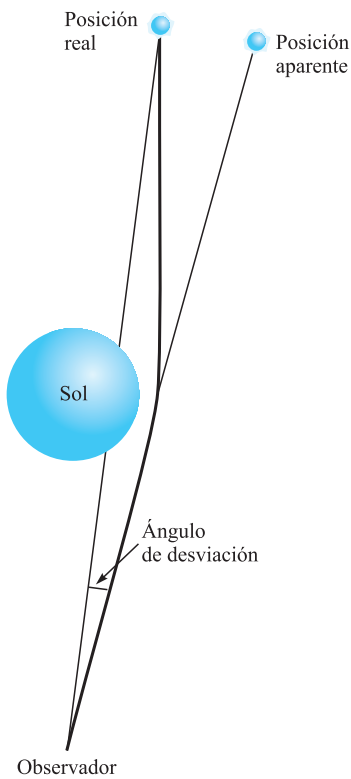


Figura 45.3. Desviación gravitacional de la luz.

de ella situemos un detector para medir la frecuencia que le llega de la citada fuente (Figura 45.4).

De acuerdo con el principio de equivalencia, llegaremos al mismo resultado midiendo la frecuencia que le llega al detector bajo la acción de la gravedad, que suponiendo que esta no existe y que el detector se desplaza hacia la fuente con aceleración  $g$  (Figura 45.5).

En primera aproximación, en el tiempo que tarda la onda en llegar al detector, que es  $t = y/c$ , éste ha adquirido una velocidad,  $v = gt = gy/c$ . Por tanto, de acuerdo con el efecto Doppler, la frecuencia que percibirá el detector será:

$$v' = \sqrt{\frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}} v \cong v \left(1 + \frac{V}{c}\right)$$

$$\frac{v' - v}{v} = \frac{\Delta v}{v} = \frac{gt}{c} = \frac{gy}{c^2} = \frac{\Phi}{c^2}$$

En la que  $\Phi = gy$ , es el potencial gravitacional. Para una masa  $M$ , esférica de radio  $R$  y muy alejada, el potencial gravitacional es  $-MG/R$ . Por lo cual, la variación unitaria en la frecuencia detectada de una onda proveniente de ella sería:

$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{GM}{Rc^2}$$

El signo menos significa que  $\Delta v$  es negativo, las frecuencias disminuyen, por lo cual el corrimiento se dice que es hacia el rojo.

El corrimiento gravitacional es pequeñísimo y sólo pudo ser detectado a partir del descubrimiento del efecto Mössbauer, en 1958. Utilizando éste, Pound y Rebka, en 1960, midieron el corrimiento provocado por el campo de la gravedad terrestre, utilizando la torre de la universidad de Harvard de 22,6 metros de altura, obteniendo un valor completamente concordante con el teórico.

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{9,81 \text{ (m/s}^2\text{)} \times 22,6 \text{ (m)}}{(3 \times 10^8)^2 \text{ (m/s}^2\text{)}} = 2,46 \times 10^{-15}$$

En consecuencia, los relojes atómicos en campos gravitacionales fuertes emitirán pulsos de frecuencia menor que la emitida por esos mismos relojes en campos gravitacionales más débiles; por tanto, los relojes en campos gravitacionales más débiles retrasan respecto de los situados en campos mayores. Una comprobación directa la llevaron a cabo Hafele y Keating, en octubre de 1971, al circunvolar dos veces la Tierra, una en dirección Este y otra hacia el Oeste, transportando en un avión comercial (Boeing 747) cuatro relojes atómicos de cesio cuyos registros se compararon con los de relojes iguales del Observatorio de la Marina en Washington. Como resultado encontraron que, al volar en dirección Este los relojes atrasaban 59 nanosegundos y al volar hacia el Oeste ganaban 273 nanosegundos. Estos resultados están causados por dos efectos: uno, debido a la Relatividad especial, es decir, a causa de la velocidad relativa de los relojes transportados por el avión respecto a los fijos en la superficie terrestre, y otro, debido a la Relatividad general, es decir, al campo gravitacional que actúa sobre ellos. En la Tabla 45.5 se desglosan ambos efectos calculados de forma teórica por aplicación de las citadas teorías.

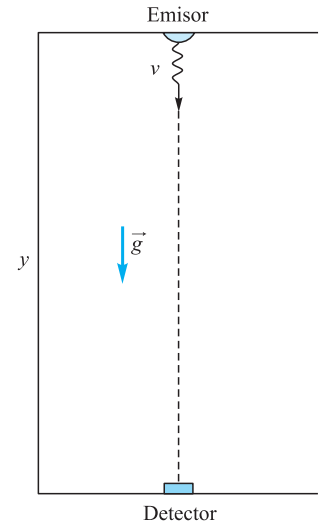


Figura 45.4. Detección en el campo de la gravedad

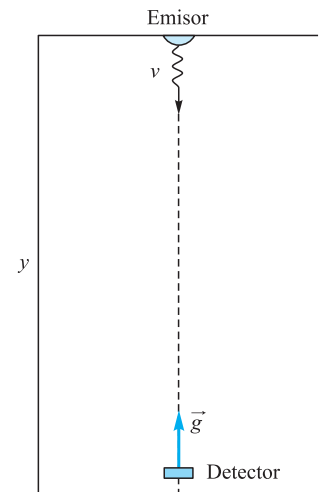


Figura 45.5. Detector acelerado sin gravedad.

**Tabla 45.5.** Modificación de la medida del tiempo en los relojes.

Efecto	Vuelo hacia el Este	Vuelo hacia el Oeste
Relatividad especial	- 184 ns	96 ns
Relatividad general	144 ns	179 ns
Efecto total	- 40 ns	275 ns

Resultados teóricos que ofrecen una gran concordancia con los experimentales.

Otra experiencia fue llevada a cabo en un avión de la marina, que voló a una altura media de 9 km, durante 15 horas con una velocidad de 500 km/h y transportando un reloj atómico. Se comprobó que este reloj adelantó 47,2 ns respecto a otro igual a él mantenido en la superficie de la Tierra. Debido a la velocidad relativa de ambos relojes, la relatividad especial establece un retraso para el reloj móvil de 5,8 ns, por tanto, la diferencia  $47,2 - (-5,8) = 53$  ns se debe a la acción de la gravedad terrestre.

Estos efectos hacen necesaria la corrección del tiempo en los sistemas de posicionamiento global (GPS), ya que los satélites que los integran llevan altas velocidades (14 000 km/h) y están situados en órbitas a una distancia media de la Tierra de 20 000 km. De acuerdo con la Relatividad especial, los relojes de los satélites deben retrasar del orden de 7,5 microsegundos al día y la Relatividad general establece que esos relojes deben adelantarse por estar en un campo gravitacional más débil, lo que estima en 45 microsegundos al día; el efecto resultante es un adelanto de 37,5  $\mu$ s/día.

## Agujeros negros

Un agujero negro sería un lugar en el espacio, de masa tan grande, que es capaz de absorber toda energía o materia que llegue a él e impedir la emisión de radiación, debido a la gran curvatura que provocaría sobre esta, de forma que no la permitiría escapar de él. Un lugar así, al no emitir ni radiación ni materia, no es posible detectarlo de forma directa. Hay ciertas regiones en el espacio desde las cuales se emiten rayos X, lo que indica que la materia debe estar fuertemente acelerada y, por tanto, debe existir una gran masa que ocasione un campo gravitacional intensísimo. Esto puede interpretarse como la existencia en ese lugar de un agujero negro, lo que ha llevado a creer en la existencia de un agujero negro en el centro de nuestra galaxia (Vía Láctea). Otra interpretación es que el corrimiento provocado sobre la radiación emitida es igual a la frecuencia de emisión, es decir, la emisión no se produce, el corrimiento unitario es la unidad,

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{v} = \frac{GM}{Rc^2} = 1$$

La teoría de la Relatividad general establece con más precisión la condición para la creación de un agujero negro en:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{GM}{Rc^2} \geq \frac{1}{2}$$

El radio crítico para que esto se produzca se denomina *Radio de Schwarzschild*,  $R_c$ ,

$$R_c = \frac{2GM}{c^2}$$

En las estrellas, al igual que en nuestro Sol, la estabilidad se consigue por el equilibrio entre las fuerzas gravitacionales que tratan de concentrarla, reduciendo su tamaño, y las fuerzas expansivas, creadas por los mecanismos de producción de energía existentes en su interior. Si  $R$  es menor que  $R_c$  la estrella colapsa y se forma un agujero negro.

## Ondas gravitacionales

Así como las ecuaciones del campo de Maxwell predicen la existencia de ondas electromagnéticas, las ecuaciones del campo de la Relatividad general predicen la existencia de ondas gravitacionales. Análogamente a las ondas electromagnéticas, que son emitidas por cargas aceleradas, cabe pensar que las ondas gravitacionales sean emitidas por masas aceleradas. Al ser la constante de la gravitación  $G$  tan pequeña serían necesarias masas enormes y aceleraciones fortísimas para poder detectar las ondas gravitacionales. El primer intento de detección directa se debe a Weber en 1960, utilizando una barra de aluminio de 1,5 m dotada de sensores piezoeléctricos para detectar sus vibraciones ocasionadas por las ondas gravitacionales. Las ondas gravitacionales transportan energía que habrá perdido la masa acelerada emisora, lo que debe traducirse en un cambio continuo en su movimiento. Esta situación fue comprobada por Taylor y Hulse en 1974, cuando encontraron el pulsar binario PSR 1913 + 16 y midieron la disminución de su período en el tiempo, encontrando que los valores se ajustaban perfectamente a los calculados por la teoría de la Relatividad general, quedando así probada de forma indirecta la existencia de las ondas gravitacionales.

La comunidad científica internacional está haciendo grandes esfuerzos para conseguir la detección directa de las ondas gravitacionales. Concretamente, están en marcha tres grandes proyectos basados en detección mediante interferometría laser: LIGO (Laser Interferometer Gravitational Waves Observatory) en el Instituto Tecnológico de California; GEO-600, en el Instituto Albert Einstein de Física Gravitacional de Hannover, y TAMA 300 en el Japón.





# Cuantización de la radiación. Dualidad onda-corpúsculo

- 46.1. Introducción
- 46.2. Naturaleza corpuscular de la radiación. Fotones
- 46.3. Efecto fotoeléctrico
- 46.4. Rayos X
- 46.5. Efecto Compton
- 46.6. Dualidad onda-corpúsculo

## 46.1 Introducción

La teoría electromagnética de Maxwell y la Termodinámica clásica fueron incapaces de dar una explicación satisfactoria a la distribución espectral de la energía radiada por un cuerpo negro. Fue Max Planck (1858-1947) quien estableció, en 1900, la hipótesis de la cuantización de la energía radiante: *la energía radiante sólo se emite o absorbe en cantidades múltiples de un valor mínimo o «quanto» de energía,  $E = h\nu$* . Con ella consiguió dar una explicación teórica satisfactoria para la citada distribución espectral de la energía radiante.

La cuantización de la carga eléctrica, según hemos visto, quedó claramente establecida a partir de 1909 con las experiencias de Millikan: *la carga eléctrica sólo se presenta en valores múltiplos de uno mínimo, que llamamos carga elemental,  $e$* .

La teoría ondulatoria de la luz se mostraría impotente para interpretar los nuevos fenómenos que fueron apareciendo, como el efecto fotoeléctrico o el efecto Compton. Fue Einstein, en 1905, quien dió al primero de ellos una explicación satisfactoria con su teoría de los fotones, basada en la hipótesis cuántica de Planck. Asimismo, se hace necesaria la teoría cuántica de la luz para explicar el efecto Compton, que aparece en la dispersión de fotones por la materia.

Nos encontramos ante una doble naturaleza de la luz, para la explicación de los fenómenos de interferencia, difracción y polarización se hace necesaria la teoría ondulatoria y para los fenómenos en los cuales la luz interactúa con la materia es necesaria la teoría cuántica corpuscular. Estamos ante la dualidad onda corpúsculo, que establecerá con toda generalidad Louis de Broglie, en 1923, y será básica para el desarrollo de la mecánica ondulatoria.

## 46.2 Naturaleza corpuscular de la radiación. Fotones

Clásicamente se suponía que el intercambio de energía entre la radiación electromagnética y la materia se hacía de forma continua. En 1900, Planck, para obtener una fórmula correcta que explicara el espectro de energía electromagnética radiada

por un cuerpo negro, demostró que era necesario admitir como hipótesis, que la materia emitía la energía de forma discreta. Planck postuló que una radiación de frecuencia  $\nu$ , únicamente puede intercambiar energía con la materia por «cuantos» de energía, de valor  $E = h\nu$ . A estos efectos, la radiación electromagnética se comporta como un fluido de partículas, que Einstein denominó fotones, cuya energía puede expresarse de las siguientes formas:

Energía del fotón

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{h\omega}{2\pi} = \hbar\omega \quad [46.1]$$

La constante universal  $h$  se denomina de Planck y su valor es:

$$h = 6,626\ 068\ 76 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 4,136 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$$

Constante de Planck

La constante  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  se denomina  $h$ -barra o  $h$ -cruzada.

Los fotones se propagan a la velocidad de la luz y de acuerdo con la teoría de la Relatividad, su masa en reposo es nula, siendo su cantidad de movimiento y su energía, respectivamente,  $p = mc$  y  $E = mc^2$ . La cantidad de movimiento del fotón puede expresarse de las siguientes formas:

Cantidad de movimiento

$$p = mc = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{\hbar k}{2\pi} = \hbar k \quad [46.2]$$

### 46.3 Efecto fotoeléctrico

Ciertos metales, al ser iluminados con una luz de longitud de onda adecuada, tienen la propiedad de emitir electrones. A este fenómeno se le denomina *efecto fotoeléctrico* y a los electrones liberados, *fotodectrones*. El efecto fotoeléctrico fue minuciosamente estudiado por Millikan (1868-1953), al cual se le concedió el Premio Nobel de Física de 1923 «por sus trabajos sobre la cantidad elemental de carga y el efecto fotoeléctrico». Utilizó un dispositivo que esquematizamos en la Figura 46.1.

La luz monocromática que llega a la placa A pone en libertad fotodectrones que, si aplicamos una diferencia de potencial  $V$  entre A y B, son atraídos por la copa metálica B, estableciéndose una corriente que se mide en el galvanómetro G.

La intensidad de la corriente depende del valor de  $V$  y es de la forma que se indica en la Figura 46.2, tendiendo a un límite al aumentar  $V$ , límite que corresponde al caso en el que todos los electrones emitidos alcanzan la copa.

Si se invierte el sentido de  $V$ , la corriente fotoeléctrica no se hace cero para  $V = 0$ , lo que demuestra que los electrones son emitidos por la superficie con una cierta velocidad, es decir, con energía suficiente para vencer al campo eléctrico que se opone a su movimiento y llegar a la copa. Si el potencial negativo llega a tener un valor suficientemente grande  $V_0$ , la corriente fotoeléctrica se anula, denominándose a  $V_0$  *potencial de interrupción*. Por tanto, no hay fotodectrón alguno que tenga una energía superior a  $eV_0$ ,

$$E_{\text{máx}} = eV_0$$

Asimismo, comprobó que el valor de  $V_0$  es independiente de la intensidad de la luz incidente, pues las curvas obtenidas para intensidades de luz incidente variable son del tipo de las representadas en la Figura 46.2. Sin embargo, el valor de  $V_0$  depende de la frecuencia de la luz incidente, pues para la intensidad de iluminación

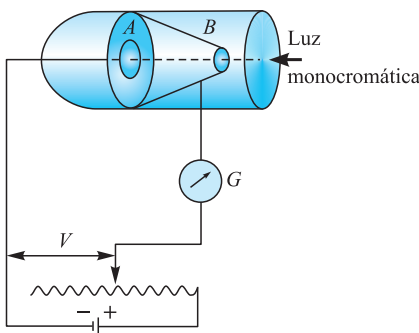


Figura 46.1. Dispositivo fotoeléctrico.

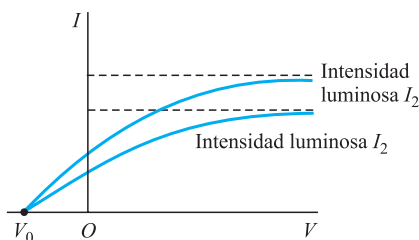


Figura 46.2. Intensidad de la corriente.

constante y frecuencias distintas se obtienen curvas del tipo de las representadas en la Figura 46.3, verificándose que al aumentar la frecuencia aumenta el potencial de interrupción.

Millikan estudió el valor del potencial de interrupción en función de la frecuencia de la luz incidente, encontrando que son proporcionales (Figura 46.4) y que, a partir de una determinada frecuencia denominada *frecuencia de corte*, característica para cada material, no se produce efecto fotoeléctrico (para el sodio  $4,39 \times 10^4$  ciclos/s). Para distintos materiales de cátodo, encontró la misma proporcionalidad, es decir, rectas paralelas entre sí.

La teoría ondulatoria de la luz no era capaz de explicar las características del efecto fotoeléctrico:

- a) Que la energía de emisión sea independiente de la intensidad de iluminación.
- b) Que el efecto fotoeléctrico se produzca para unas frecuencias y para otras no.

Utilizando la idea de los «cuantos» de Planck, Einstein logró explicar satisfactoriamente el efecto fotoeléctrico en su trabajo *Sobre un punto de vista heurístico acerca de la producción y transformación de la luz*, que apareció en el *Annalen der Physik*, volumen 17, año 1905, y que fue decisivo en la concesión del Premio Nobel de Física del año 1921: «por sus servicios a la Física teórica y especialmente por su descubrimiento de la ley del efecto fotoeléctrico». La energía de fotón incidente  $h\nu$  se comunica íntegramente a un electrón de capa superficial; una parte de esta energía,  $E_0$ , denominada *función de trabajo*, la emplea el electrón para romper sus ligaduras con el material y en trabajo dentro de este hasta que es emitido en su superficie, el resto de la energía  $h\nu - E_0$  va en el electrón emitido en forma de energía cinética. Por tanto, la energía máxima que puede tener un electrón, inmediatamente a su emisión, es  $h\nu - E_0$ ,

$$E_{\text{máx}} = h\nu - E_0 \tag{46.4}$$

Estas hipótesis explican satisfactoriamente las características fundamentales del efecto fotoeléctrico:

- a) Al aumentar la intensidad luminosa de la radiación incidente, se aumenta el número de fotones que llegan a la superficie y se aumentará la corriente fotoeléctrica  $i$ , pero no se altera la energía del fotón ni la naturaleza de los procesos fotoeléctricos, ni por tanto la energía de emisión, de aquí que  $V_0$  sea independiente de la intensidad de iluminación.
- b) Al disminuir la frecuencia  $\nu$ , disminuye la energía cinética máxima del electrón. Ésta como mínimo será nula y la frecuencia mínima de acuerdo con [46.4] será  $\nu_0 = E_0/h$ , por debajo de ella no se producirá el efecto fotoeléctrico, pues el fotón incidente no tendrá energía suficiente para liberar al electrón incidido. Teniendo en cuenta las Ecuaciones [46.3] y [46.4] es:

$$V_0 = \frac{h\nu}{e} - \frac{E_0}{e} \tag{46.5}$$

Expresión conocida como *ecuación fotoeléctrica de Einstein* para los fotoelectrones de máxima energía y que ponen de manifiesto la relación lineal entre  $V_0$  y  $\nu$ , concordando con lo obtenido experimentalmente por Millikan.

La pendiente de la recta obtenida experimentalmente debe ser  $h/e$ , lo que utilizó el propio Millikan para determinar la constante de Planck, en 1916, ya que él mismo había determinado la carga del electrón  $e$ , encontrando para la constante de Planck el valor  $h = 6,57 \times 10^{-34}$  J·s, cuyo valor actual más exacto es  $h = 6,62606876(52) \times 10^{-34}$  J·s.

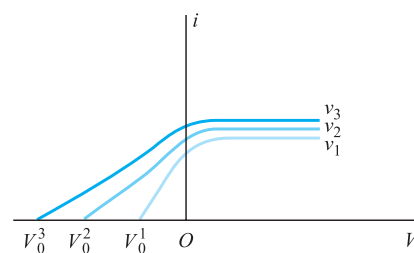


Figura 46.3. Corriente función de la frecuencia.

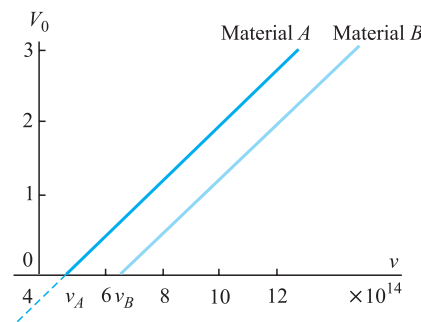


Figura 46.4. Potencial de interrupción función de la frecuencia.

También experimentalmente puede determinarse  $E_0$ , con solo multiplicar por  $e$  la ordenada en el origen de la recta obtenida experimentalmente.

### EJEMPLO 46.1

Una bombilla de filamento cuya potencia es de 60 vatios, emite de forma isótropa luz blanca, pero para nuestros cálculos supondremos que sólo lo hace en la banda central del espectro visible  $\nu = 5,76 \times 10^{14}$  Hz. Calculemos:

- El número de fotones emitidos por segundo.
- El número de fotones que penetran por la pupila de un observador, situado a la distancia de 2 metros, sabiendo que el diámetro de su pupila es de 5 milímetros.

#### Solución:

- La energía total emitida por segundo se expresa  $E = nh\nu$ , de donde podemos despejar el número  $n$  de fotones emitidos:

$$n = \frac{E}{h\nu} = \frac{60 \text{ (J/s)}}{6,626 \times 10^{-34} \text{ (J} \cdot \text{s)} \times 5,76 \times 10^{14} \text{ (s}^{-1}\text{)}} = 1,572 \times 10^{19} \text{ fotones/s}$$

- El número de fotones que penetran por la pupila del observador especificado, será igual a la densidad superficial de fotones en una superficie esférica de radio 2 metros, multiplicada por la superficie de la pupila.

La densidad superficial de fotones en la superficie esférica de radio 2 metros es:

$$\sigma = \frac{n}{4\pi R^2} = \frac{1,572 \times 10^{19}}{4\pi \times 4} = 3,1274 \times 10^{17} \text{ fotones/m}^2$$

El número de fotones que penetran por la pupila del observador es:

$$N = \sigma \frac{\pi d^2}{4} = 3,1274 \times 10^{17} \times \frac{3,1416 \times (5 \times 10^{-3})^2}{4} = 6,14 \times 10^{10} \text{ fotones}$$

## 46.4 Rayos X

Wilhelm Konrad Roentgen (1845-1923), en 1895, trabajando con un tubo de rayos catódicos, descubrió los rayos X al advertir que se producía una fluorescencia en una pantalla de platinocianuro de bario, lo que consideró debido a un cierto tipo de radiación que se originaba en las zonas del tubo contra las cuales chocaban los rayos catódicos (electrones). Roentgen estudió esta nueva radiación y encontró que no era desviada ni por los campos eléctricos ni por los magnéticos, lo que indicaba que su carga debía ser nula; las emulsiones fotográficas eran sensibles a ella; su paso a través de un gas aumentaba la conductividad de éste; los elementos ligeros son más transparentes a esta radiación que los elementos pesados, y no pudo observar fenómenos de refracción, ni interferencia. De todo ello, resultaba ser una incógnita la naturaleza de estos rayos, por lo que los denominó rayos X. Roentgen colocó la mano de su esposa sobre una placa fotográfica y la sometió a una exposición de rayos X, el revelado puso de manifiesto toda la estructura interna de la mano, Roentgen había obtenido la primera radiografía.

En 1899, Haga y Wind observaron que los rayos X se difractaban al atravesar una rendija de unas milésimas de milímetro de espesor, deduciendo que la longitud de onda debía estar próxima al angstrom ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ ).

En 1906, Charles Glover Barkla consiguió la polarización de los rayos X, y en 1912, Max von Laue sugirió que el reticulado atómico de un cristal podía ser una buena red de difracción para este tipo de radiación, lo que quedó comprobado por el propio Von Laue, Friedrich y Knipping al hacer pasar un estrecho haz de rayos X a través de un cristal de sulfuro de cinc, detrás del cual habían situado una placa fotográfica, que quedó impresionada con una figura de difracción, quedando así encuadrados definitivamente los rayos X dentro del espectro de radiación electromagnética. Esta experiencia puso a la vez de manifiesto la distribución regular de los átomos dentro de un cristal.

W. L. Bragg, en 1912, propuso una manera sencilla de estudiar la difracción por los cristales, para lo cual deben considerarse dentro del cristal series de planos paralelos que contienen los átomos del cristal (Figura 46.5).

Estos planos reflejan los rayos X de acuerdo con la ley de la reflexión (Figura 46.6). Los rayos reflejados en la misma dirección por planos paralelos interfieren y la interferencia será constructiva cuando la diferencia de camino sea un múltiplo entero de longitudes de onda. Es decir, si se verifica:

$$2d \sin \theta = n\lambda$$

que es la llamada condición de Bragg. Ella nos permite determinar el espaciamiento reticular del cristal si se conoce  $\lambda$  o viceversa.

La determinación del número de Avogadro se realiza utilizando rayos X monocromáticos de longitud de onda conocida, que se difractan sobre un cristal de una sustancia conocida, en la cual los átomos tengan una disposición reticular crítica, como sucede en el cloruro sódico. Con la condición de Bragg se determina el espaciamiento reticular  $d$ . El volumen ocupado por cada átomo será  $d^3$ . El número de átomos por kilogramo es  $2N_A/M$ , siendo  $M$  el peso molecular de la sustancia que compone el cristal. Si la densidad de éste es  $\rho$ , el número de átomos por  $\text{m}^3$  es  $2\rho N_A/M$ . Por tanto, debe ser:

$$\frac{2\rho N_A}{M} = \frac{1}{d^3} \quad N_A = \frac{M}{2\rho d^3}$$

Relación que determina el número de Avogadro, cuyo valor es:

$$N_A = 6,022\ 141\ 99(47) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Los rayos X se producen siempre que electrones de alta energía choquen contra un blanco determinado (generalmente un metal). El electrón, al penetrar en el metal, sufre una desaceleración y de acuerdo con la teoría electromagnética clásica emite radiación. Este proceso se conoce con el nombre de *bremssstrahlung*, palabra alemana que significa radiación de frenado (*bremss* = freno y *strahlung* = radiación). El espectro emitido se compone de un espectro continuo sobre el cual aparecen líneas espectrales intensas (Figura 46.7)

La forma del espectro continuo depende del potencial que acelera a los electrones y, en mucha menor medida, del tipo de metal que forma el blanco (Figuras 46.8 y 46.9).

Por el contrario, las rayas espectrales superpuestas al espectro continuo son características del metal que forma el blanco y no dependen de la diferencia de potencial entre cátodo y ánodo. Una característica muy importante en este espectro continuo es que no se produce por debajo de una cierta longitud de onda o bien por

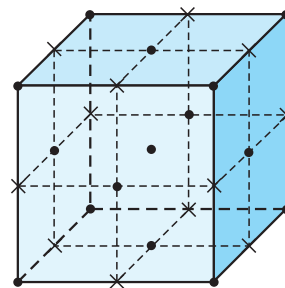


Figura 46.5. Reticulado atómico en un cristal.

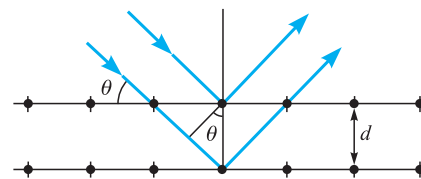


Figura 46.6. Reflexión en planos paralelos.

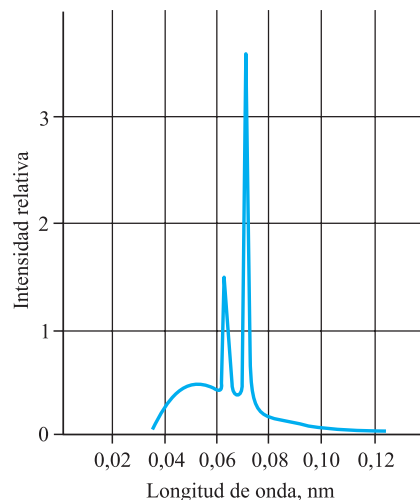
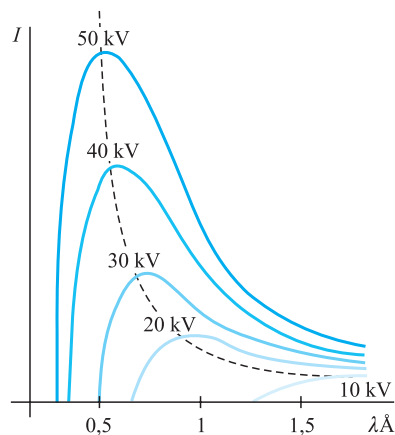
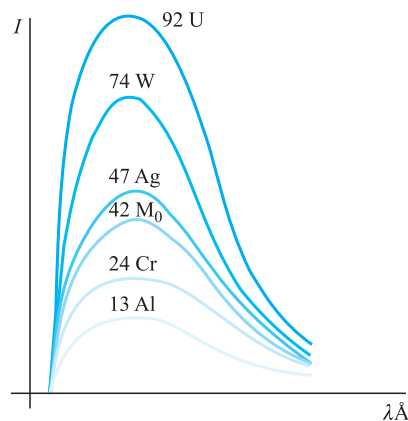


Figura 46.7. Espectro de rayos X.



**Figura 46.8.** Espectro continuo según potencial.



**Figura 46.9.** Espectro continuo según material.

encima de una cierta frecuencia, que se denomina *frecuencia máxima o de corte*, poniéndose de manifiesto que la frecuencia máxima es independiente de la naturaleza del blanco y depende únicamente de potencial acelerador (Figura 46.9), verificando:

$$\nu_{\text{máx}} = CV$$

en la que  $C$  es una constante y  $V$  el potencial acelerador. La existencia de la frecuencia máxima de corte, por encima de la cual no hay espectro continuo, así como su relación con el potencial acelerador, no se pueden explicar de manera aceptable mediante las teorías clásicas; sin embargo, utilizando la teoría de los fotones tiene todo ello una explicación clara y sencilla. La energía cinética del electrón acelerado bajo un potencial  $V$  es  $eV$ . Si este electrón, en el choque, cede su energía a un solo fotón, la energía de éste será la máxima posible y su valor es:

$$h\nu_{\text{máx}} = eV$$

Por tanto, es:

$$\nu_{\text{máx}} = \frac{e}{h} V \tag{46.6}$$

Lo que pone de manifiesto que la frecuencia máxima depende únicamente del potencial acelerador y es proporcional a él. Esta relación nos da un método preciso para determinar el valor de  $e/h$ .

El espectro continuo se explica porque el electrón puede disipar su energía en otros mecanismos distintos a la producción de fotones, como es la vibración de los átomos dentro del retículo cristalino o la ionización o excitación de aquellos.

### EJEMPLO 46.2

Al aplicar una diferencia de potencial entre cátodo y ánodo de 50 kV, se comprueba experimentalmente que la frecuencia de corte del espectro continuo en la emisión de rayos X es  $121 \times 10^{17}$  Hz. Calculemos el valor de la constante  $h$  de Planck.

#### Solución:

De acuerdo con la Expresión [46.6], el valor de  $h$  se expresa:

$$h = \frac{eV}{\nu} = \frac{1,6 \times 10^{-19} \times 50 \times 10^3 \text{ (J)}}{121 \times 10^{17} \text{ (s}^{-1}\text{)}} = 6,61 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

## 46.5 Efecto Compton

A. H. Compton (1892-1962), en 1923, realizó experiencias sobre la dispersión de rayos X por la materia. Dirigió un haz de rayos X monocromáticos de longitud de onda  $\lambda$  sobre una lámina de grafito y analizó los rayos X dispersados, encontrando que predominaban dos longitudes de onda, una coincidía con la de la radiación incidente y la otra era algo mayor. La presencia de esta segunda no puede explicarse si se considera la radiación incidente como onda electromagnética.

Cuando una onda electromagnética de frecuencia  $\nu$  incide sobre una sustancia con cargas eléctricas, éstas oscilan con frecuencia  $\nu$  e irradian ondas electromagnéticas de la misma frecuencia  $\nu$  que la incidente.

Compton aplicó la teoría cuántica de la luz para explicar sus resultados experimentales. Admitió que los fotones incidentes chocan de forma elástica con los electrones libres del grafito y los fotones rechazados constituyen la radiación dispersada. Parte de la energía del fotón incidente se transmite al electrón contra el cual choca, por tanto, la energía del fotón dispersado será menor, su frecuencia será menor y la longitud de onda mayor.

Sea  $\nu$  la frecuencia de la radiación incidente, la energía del fotón incidente es  $E = h\nu$  y su cantidad de movimiento  $p = h\nu/c$ . La radiación dispersada tendrá una frecuencia  $\nu'$  y la energía y cantidad de movimiento del fotón dispersado son, respectivamente,  $E' = h\nu'$  y  $p' = h\nu'/c$ . La energía del electrón antes del choque es  $E_1 = m_0c^2$  y después del choque  $E'_1 = mc^2$ , su cantidad de movimiento antes del choque  $p_1 = 0$  y después del choque  $p'_1 = mv = \gamma m_0v$  (Figura 46.10).

La conservación de la energía se expresa:

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2 \quad , \quad h\nu = h\nu' + m_0c^2(\gamma - 1) \quad [46.7]$$

La conservación de la cantidad de movimiento sobre la dirección del fotón incidente y sobre la normal a dicha dirección son, respectivamente:

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \varphi + m_0\gamma v \cos \theta \quad [46.8]$$

$$0 = \frac{h\nu'}{c} \operatorname{sen} \varphi - m_0\gamma v \operatorname{sen} \theta \quad [46.9]$$

Dividiendo la Expresión [46.7] por  $m_0c^2$  y las [46.8] y [46.9] por  $m_0c$ , se escriben:

$$\frac{h\nu}{m_0c^2} = \frac{h\nu'}{m_0c^2} + \gamma - 1$$

$$\frac{h\nu}{m_0c^2} = \frac{h\nu'}{m_0c^2} \cos \varphi + \frac{\gamma v}{c} \cos \theta$$

$$\frac{h\nu'}{m_0c^2} \operatorname{sen} \varphi = \frac{\gamma v}{c} \operatorname{sen} \theta$$

Las cuales pueden expresarse más sencillamente haciendo los siguientes cambios,

$$a = \frac{h\nu}{m_0c^2} \quad , \quad a' = \frac{h\nu'}{m_0c^2} \quad \text{y} \quad b = \frac{\gamma v}{c} \quad [46.10]$$

Con los cuales se expresan, respectivamente,

$$a = a' + \gamma - 1 \quad [46.11]$$

$$a = a' \cos \varphi + b \cos \theta \quad [46.12]$$

$$a' \operatorname{sen} \varphi = b \operatorname{sen} \theta \quad [46.13]$$

Elevando al cuadrado las Expresiones [46.12] y [46.13] y sumándolas, resulta:

$$b^2 = a^2 + a'^2 - 2aa' \cos \varphi \quad [46.14]$$

De [46.11] se obtiene  $\gamma = a - a' + 1$ . Elevando esta al cuadrado es:

$$\gamma^2 = a^2 + a'^2 + 1 + 2a - 2aa' - 2a' \quad [46.15]$$

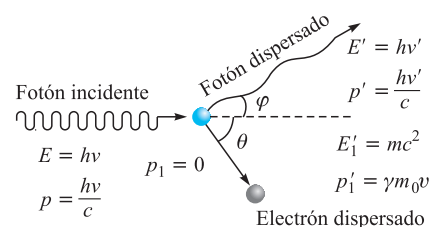


Figura 46.10. Dispersión Compton.

Puesto que es:

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \quad \gamma^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = 1, \quad \gamma^2 = \gamma^2 \frac{V^2}{c^2} + 1 = b^2 + 1$$

la [46.15] se expresa:

$$b^2 = a^2 + a'^2 + 2a - 2a' - 2aa'$$

Restando esta expresión de la [46.14], resulta:

$$a - a' = aa'(1 - \cos \varphi)$$

Si ahora sustituimos los valores de  $a$  y  $a'$  dados por las [46.10] y simplificamos, obtenemos

$$v - v' = \frac{hvv'}{m_0c^2} (1 - \cos \varphi) \quad [46.16]$$

La cual, en función de la longitud de onda, se escribe:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos \varphi) \quad [46.17]$$

Esta ecuación fue deducida por Compton en 1923 y a ella obedecen los fenómenos experimentales por él observados, constituyendo una prueba evidente de la teoría cuántica de la luz [Figura 46.11]. Estos trabajos le valieron a Compton el Premio Nobel de Física de 1927.

La Ecuación [46.17] nos da la variación de la longitud de onda experimentada por el fotón al ser dispersado por la partícula de masa  $m_0$  libre e inicialmente en reposo y depende únicamente del valor del ángulo de dispersión  $\varphi$  y no de la longitud de onda de la luz incidente  $\lambda$ . La diferencia de longitud de onda varía desde cero para  $\varphi = 0$ , que corresponde a un choque frontal, hasta:

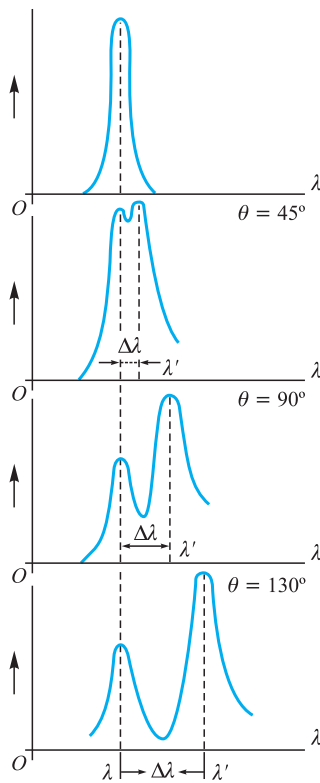
$$\lambda_C = \frac{h}{m_0c} \quad [46.18]$$

para  $\varphi = \pi$ , que corresponde a un choque frontal con retroceso del fotón incidente.

A la expresión  $\lambda_C$  se la conoce como *longitud de onda de Compton* y su valor es:

$$\lambda_C = \frac{h}{m_0c} = \frac{6,62606876 \times 10^{-34}}{9,10938188 \times 10^{-31} \times 299792458} = 2,42631 \times 10^{-12} \text{ m}$$

Si  $m_0$  es suficientemente grande, la variación de la longitud de onda no será detectable, así cuando el fotón choca contra un electrón ligado, lo que retrocede es todo el átomo, cuya masa puede ser 100 veces mayor que la del electrón y la variación de longitud de onda no es apreciable, por ello en todas las experiencias de Compton aparece la radiación de longitud de onda incidente.



**Figura 46.11.** Variación de onda Compton.

### EJEMPLO 46.3

Rayos X de longitud de onda  $\lambda = 0,120 \text{ nm}$  son dispersados por un bloque de grafito. Calculemos:

- La energía del fotón incidente.
- La longitud de onda de los rayos X dispersados un ángulo de  $60^\circ$ .
- La pérdida de energía del fotón dispersado un ángulo de  $90^\circ$ .



**Solución:**

a) La energía del fotón incidente es:

$$E = hv = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,626 \times 10^{-34} \times 299792458}{12 \times 10^{-11}} = 16\,553,540 \times 10^{-19} \text{ J} = 10\,333,046 \text{ eV}$$

b) La longitud de onda del fotón dispersado se obtiene por aplicación de la [46.17],

$$\lambda' = \lambda + \lambda_C(1 - \cos \varphi) = 0,120 + 2,43 \times 10^{-3}(1 - 0,5) = 0,120 + 1,215 \times 10^{-3} = 0,121215 \text{ nm}$$

c) La longitud de onda del fotón dispersado un ángulo de  $90^\circ$  es:

$$\lambda' = \lambda + \lambda_C(1 - \cos \varphi) = 0,120 + 2,43 \times 10^{-3} = 0,12343 \text{ nm}$$

La energía de este fotón es:

$$E' = hv' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{1\,986\,424\,827 \times 10^{-34}}{12,343 \times 10^{-11}} = 16\,093,533 \times 10^{-19} \text{ J} = 10\,045,901 \text{ eV}$$

Por tanto, la energía perdida por este fotón es:

$$\Delta E = E - E' = 287,145 \text{ eV}$$

## 46.6 Dualidad onda-corpúsculo

En Física clásica, los conceptos de onda y corpúsculo son mutuamente excluyentes, pero, por lo visto hasta aquí, la luz tiene un doble comportamiento: como onda clásica, cuando se propaga, se refleja o se refracta, y como corpúsculo, cuando interactúa con la materia intercambiando energía. Aunque ambos comportamientos no parece posible reconciliarlos en una misma naturaleza de la luz, de hecho ambos se han comprobado experimentalmente, lo que pone de manifiesto la complejidad de la naturaleza de la luz, que nos muestra su comportamiento dual, *dualidad onda-partícula*. Ambos comportamientos son excluyentes, pero complementarios uno del otro. Así, Bohr propuso el *Principio de complementariedad*: en cualquier proceso podemos considerar que la luz se comporta como onda o como fotón, pero nunca de ambas formas. No obstante, debemos hacer notar, que en la expresión de la energía del fotón, establecida por Einstein,  $E = hv$ , se relaciona la energía de la partícula con una propiedad ondulatoria, la frecuencia.

Para tratar de aclarar esto analicemos la experiencia de la difracción a través de doble rendija. La interferencia de las ondas secundarias que salen de ambas rendijas nos da sobre la pantalla la figura de difracción ya conocida con sus máximos y mínimos de intensidad. Si la intensidad de la luz incidente sobre las rendijas es muy baja, no podremos ver sobre la pantalla la figura de difracción, pero sí la veremos si sustituimos a ésta por una película fotográfica sensible y permitimos un tiempo de exposición suficiente. Si el tiempo de exposición es muy bajo, no significa que quede impresa la figura de difracción de forma más tenue, lo que aparece sobre la película fotográfica son puntos causados por la interacción de los fotones. El número de impactos fotónicos es mayor en las zonas donde la teoría ondulatoria

predice intensidad máxima y no se produce impacto alguno en las zonas de intensidad nula.

Todo ello debe interpretarse diciendo que el cuadrado de la amplitud de la onda, más que ser proporcional a la energía por unidad de volumen o número de fotones por unidad de volumen, es proporcional a la probabilidad de encontrar un fotón en la unidad de volumen.

Fue Born, hacia el 1928, quien estableció la hipótesis que resuelve la dualidad onda-corpúsculo, diciendo: *la energía no se distribuye a lo largo de la onda de forma continua como indica la teoría clásica, ella es transportada por los fotones.*

El cuadrado de la amplitud de la onda no da la intensidad en un punto del espacio, como pretende la teoría clásica, sino la probabilidad de encontrar el fotón en ese punto.

El nuevo significado físico que Max Born da al cuadrado de la amplitud de la onda resuelve el dilema onda o corpúsculo y establece que el movimiento de las partículas microscópicas está regido por leyes estadísticas.



## MAX PLANCK

Max Planck nació en Kiel, en 1858, en el seno de una gran familia, era el sexto hijo de su padre Julius, que era profesor de Derecho Constitucional en la Universidad de Kiel; también tanto su abuelo como su bisabuelo fueron profesores, pero estos de Teología en Göttingen. Fue educado en un gran sentido de honradez, justicia, laboriosidad y respeto hacia las instituciones. A los nueve años su familia se trasladó a Munich, donde su padre había sido nombrado profesor. En esta ciudad realizó sus estudios de secundaria en el *Maximilian Gymnasium*, destacando por su facilidad para la música y hay que agradecer a su profesor Hermann Müller que le hiciera interesarse por el estudio de la Física y las Matemáticas; aprobó su examen de reválida a los 16 años, edad a la que además tocaba de manera excelente el piano y el órgano.

En 1874 ingresó en la Universidad de Munich, en la que tuvo como profesores de Física a Jolly y a Beetz, y de Matemáticas a Seidel y a Bauer. Estuvo enfermo durante el verano de 1875 y en octubre de 1877 se trasladó a la Universidad de Berlín, en la que fue alumno nada menos que de Weierstrass, Helmholtz y Kirchhoff. Recibió su doctorado en la Universidad de Munich, en 1879, con la tesis: *Sobre la segunda ley de la teoría mecánica del calor*. En 1880 comenzó a dar clases en la Universidad de Munich y cinco años más tarde fue nombrado profesor de Física Teórica en la Universidad de Kiel. En 1887 se casó con una amiga de la infancia, Marie Merck, hija de un banquero bávaro, con la que tuvo cuatro hijos, dos varones Edwin y Kart y dos mellizas Margarete y Emma. A la muerte de Kirchhoff, en 1888, pasó a ocupar la plaza de este como profesor de Física Teórica de la Universidad de Berlín, donde permaneció hasta su jubilación en 1927, en cuyo momento pasó a ocupar la plaza otro eminente físico, Schrödinger.

En 1900, Planck, tratando de explicar el espectro continuo de radiación emitida por los cuerpos, estableció la Ley de la radiación que lleva su nombre, para lo cual se vio en la necesidad de establecer que la energía no se emite de forma continua, sino por pequeños paquetes que denominó *cuantos de energía*, cuyo valor es proporcional a su frecuencia, siendo su constante de proporcionalidad la famosa *Constante de Planck*. En 1918 le fue concedido el Premio Nobel de Física y en

su discurso manifestaba: *...durante muchos años mi objetivo fue resolver la distribución de energía en el espectro del calor irradiado [...] tras varias semanas del más duro trabajo de mi vida, la luz penetró en la oscuridad y una nueva perspectiva se abrió ante mí...* Planck había establecido las bases de la futura Mecánica cuántica, la energía radiante es discontinua y sólo se presenta en valores múltiples de un valor mínimo, el *quanto de energía*, cuyo tamaño es distinto para cada tipo de radiación. Einstein utilizaría estas ideas para explicar el efecto fotoeléctrico, estableciendo el *quanto de luz*, el *fotón*. Einstein manifestaría de Planck, que «era un hombre a quien le fue dado aportar al mundo una gran idea creadora».

Planck fue elegido miembro de la Academia Prusiana de Ciencias en 1894, de la que fue secretario de la Sección de Física y Matemáticas. En 1926 fue nombrado *Fellow* de la *Royal Society* y fue presidente de la Sociedad Kaiser Guillermo, desde 1930 a 1937, sociedad que hoy se denomina de Max Planck. Su oposición al régimen nazi le llevó, al llegar este al poder en Alemania, en 1933, a abandonar la sociedad, de la que volvería a ser presidente al acabar la Segunda Guerra Mundial.

La vida de Planck estuvo llena de adversidades, que según manifestaría su discípulo Max von Laue, las soportó sin la más mínima queja. Murió su mujer el año 1909 y dos años después se casó con una sobrina de ella, Marga von Hosslin, con la que tuvo un hijo. El más joven de los hijos de su primer matrimonio, Kart, murió, en 1916, durante la Primera Guerra Mundial; sus dos hijas mellizas murieron ambas de parto, Margarete, en 1917 y Emma, en 1919; su hijo mayor, Edwin, fue acusado por la GESTAPO de participar en el complot del 20 de julio de 1944 para asesinar a Hitler y ejecutado a comienzos de 1945, y su casa de Berlín fue destruida por los bombardeos de 1944. Todo lo cual soportó con gran entereza y resignación gracias a la sólida formación recibida en su juventud.

Al finalizar la Segunda Guerra Mundial, los aliados le llevaron a Göttingen y le repusieron de nuevo como Presidente de la Kaiser Guillermo, en la que, pese a su avanzada edad, contaba ya con 87 años, realizó un gran esfuerzo por reconstruir la ciencia alemana, muriendo en esta ciudad cuando iba a cumplir 90 años.



- 47.1. Descubrimiento del núcleo. Átomo de Rutherford
- 47.2. Átomo de Bohr
- 47.3. Espectro de rayas del hidrógeno
- 47.4. Principio de correspondencia
- 47.5. Corrección por movimiento nuclear
- 47.6. Órbitas elípticas. Estructura fina
- 47.7. Espectro característico de rayos X. Ley de Moseley
- 47.8. Experiencia de Franck-Hertz

## 47.1 Descubrimiento del núcleo. Átomo de Rutherford

En 1911, Rutherford (1871-1937) y sus colaboradores, Geiger y Marsden, realizaron su famosa experiencia de dispersión de partículas  $\alpha$  por láminas metálicas muy finas, encontrándose que algunas de éstas eran dispersadas formando ángulos mayores de  $90^\circ$  con la dirección de incidencia y que incluso algunas eran devueltas en aquella dirección.

El átomo de J. J. Thomson (1856-1940), propuesto por éste en 1906, no podía explicar estas dispersiones bajo ángulos tan grandes, ni por choque con un electrón, ya que la masa de la partícula  $\alpha$  es unas 7.300 veces mayor, ni por choque con un protón, aunque la masa de la partícula  $\alpha$  sea solamente unas cuatro veces la de éste; ni tampoco por la acción debida a los campos eléctricos que existen en tal modelo atómico.

Para poder explicar los grandes ángulos de desviación encontrados, Rutherford propuso un modelo atómico en el cual todas las cargas positivas y prácticamente toda la masa (99,9%), están concentradas en una pequeña región central que denominó *núcleo*. La dispersión de las partículas  $\alpha$  es debida precisamente al campo eléctrico creado por las cargas positivas del núcleo, que para un elemento de número atómico  $Z$  valen  $+Ze$ . Esta carga crea un potencial  $\alpha$ , cuyo valor a la distancia  $r$  del centro del núcleo es  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{r}$ . La partícula que trata de acercarse al núcleo debe vencer este potencial, para lo cual debe emplear su energía cinética. Si la dirección de incidencia pasa por el centro del núcleo, la partícula llegará a una distancia de éste,  $r$ , dada por:

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{2e \cdot Ze}{4\pi\epsilon_0 \cdot r}$$

Al aumentar la energía de las partículas incidentes, disminuye  $r$  y el menor valor de  $r$ , para el cual las partículas  $\alpha$  son dispersadas siguiendo la ley general, se toma como radio del núcleo. Utilizando una lámina finísima de oro y partículas  $\alpha$  de 7,7 MeV, Rutherford estimó para el radio del núcleo un valor comprendido

entre  $10^{-15}$  y  $10^{-14}$  m. Es evidente que el número atómico del elemento dispersante influye en el tamaño del núcleo, los elementos más ligeros tienen un radio nuclear menor que los más pesados.

Las dimensiones estimadas para el radio del átomo, deducidas de la teoría cinética y del análisis del movimiento browniano, son de  $10^{-10}$  m, por tanto, el electrón está a una distancia del orden de  $10^4$  ó  $10^5$  veces el radio del núcleo, y puesto que prácticamente toda su masa está concentrada en el núcleo, resulta que el átomo está vacío, y que una mínima parte de su volumen —el núcleo— contiene toda su masa.

El modelo atómico de Rutherford suponía que las cargas eléctricas estaban en la corteza del átomo, pero tal modelo atómico no puede ser estable, puesto que si los electrones estuviesen inmóviles en la corteza electrónica caerían sobre el núcleo al ser atraídos por la carga positiva de éste y si los electrones giran en torno al núcleo, estarán sometidos a una aceleración y, de acuerdo con la teoría clásica del electromagnetismo, irradiarán ondas electromagnéticas cuya frecuencia será la del movimiento del electrón alrededor del núcleo. Al irradiar energía, el electrón pierde energía cinética y, como el proceso es continuo, describirá una espiral y acabará cayendo sobre el núcleo. La estabilidad atómica, confirmada por la experiencia cotidiana, no puede ser explicada en este modelo atómico.

## 47.2 Átomo de Bohr

Ante la imposibilidad de conseguir un modelo atómico estable basado en la mecánica y la teoría electromagnética clásicas, aparece de nuevo la necesidad de *cuantizar* los estados energéticos de la materia, y, Bohr, en 1913, apoyándose en la mecánica clásica y en la teoría cuántica de Planck, emitió las siguientes hipótesis:

- 1.<sup>a</sup> Un sistema atómico posee un cierto número de estados estacionarios en los que no emite radiación alguna, aun cuando las partículas atómicas cargadas estén sometidas a movimientos acelerados.
- 2.<sup>a</sup> Toda emisión o absorción de radiación corresponde a transiciones entre dos estados estacionarios. La radiación emitida es homogénea y su frecuencia queda determinada por la relación  $E_i - E_j = hv_{ij}$ , siendo  $E_i$  y  $E_j$  la energía en los estados estacionarios  $i$  y  $j$ , respectivamente.
- 3.<sup>a</sup> El equilibrio dinámico en los estados estacionarios está regido por la mecánica clásica, pero ésta no es aplicable a las transiciones de un estado a otro.
- 4.<sup>a</sup> En los distintos estados estacionarios posibles en un sistema, el electrón gira alrededor del núcleo describiendo órbitas circulares cuantificadas por la relación:

$$L = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar \quad [47.1]$$

en la que  $L$  es el momento cinético del electrón y  $n$  un número entero y positivo denominado *número cuántico*.

De acuerdo con la cuarta hipótesis, en los estados estacionarios ha de verificarse:

$$mvr = n \frac{h}{2\pi} \quad [47.2]$$

En la que  $m$  es la masa del electrón,  $v$  la velocidad con que describe su órbita y  $r$  el radio de ésta.

Según la tercera hipótesis, la fuerza centrífuga ha de estar neutralizada por la de atracción electrostática, cumpliéndose:

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad [47.3]$$

Las dos últimas ecuaciones permiten despejar  $r$  y  $v$ , obteniéndose:

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Z e^2 m_e} n^2 \quad \text{y} \quad v = \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar n} \quad [47.4]$$

Por tanto, el radio de las órbitas permitidas, así como la velocidad del electrón dentro de éstas, están cuantizados. Para el caso del hidrógeno ( $Z = 1$ ), el menor radio permitido ( $n = 1$ ) se denomina *radio de Bohr* y su valor, deducido de la primera [47.4], es:

$$r_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e} = 5,29 \times 10^{-11} \text{ m} \quad [47.5] \quad \text{Radio de Bohr}$$

Los radios de las posibles órbitas para el electrón pueden expresarse de la forma:

$$r = n^2 \frac{r_0}{Z} \quad [47.6]$$

La energía cinética del electrón, teniendo en cuenta la [47.3], se expresa:

$$T = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{Z e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

La energía potencial del mismo, suponiendo que es nula en el infinito, es:

$$U = - \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Con ello, la energía total del electrón se escribe:

$$E = T + U = - \frac{Z e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

Teniendo en cuenta el valor del radio, dado por la primera [47.4], resulta:

$$E = - \frac{m_e Z^2 e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} \quad [47.7]$$

En consecuencia, la energía total del electrón también está cuantizada. El menor valor de esta ( $n = 1$ ) corresponde al estado llamado *fundamental*, *normal* o *base*, cuyo valor en el caso del hidrógeno, es:

$$E_0 = \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} = 2,17 \times 10^{-18} \text{ J} = 13,6 \text{ eV} \quad [47.8]$$

Con lo cual, los valores posibles para la energía del electrón en su órbita puede expresarse de la forma:

$$E = - \frac{Z^2}{n^2} E_0 \quad [47.9]$$

La energía mínima necesaria para arrancar un electrón del átomo en su estado base y dejarle libre con energía nula es  $E = Z^2 E_0$ , energía que se denomina *de enlace o de ionización*. En el caso del hidrógeno, esta energía es de 13,6 eV, según se ha calculado en la [47.8].

### EJEMPLO 47.1

Calculemos la diferencia de energía entre el estado base y el primer estado excitado del hidrógeno.

#### Solución:

La energía del primer estado excitado está dada por la [47.9], en la cual debemos hacer  $Z = 1$ , por tratarse del hidrógeno, y  $n = 2$ , que corresponde al primer estado excitado,

$$E_1 = -\frac{E_0}{4}$$

La diferencia de energía entre el primer estado y el estado base es:

$$\Delta E = E_1 - E_0 = -\frac{E_0}{4} + E_0 = \frac{3}{4} E_0 = \frac{3}{4} \times 13,6 = 10,2 \text{ eV}$$

### EJEMPLO 47.2

En un átomo de hidrógeno, un electrón salta desde una órbita,  $n = 4$ , a otra,  $n = 2$ . Calculemos:

- La energía del electrón en los estados inicial y final.
- La longitud de onda del fotón emitido.

#### Solución:

- Para el hidrógeno, la [47.9] se expresa  $E = -\frac{1}{n^2} E_0$ .

En el estado inicial, la energía del electrón es  $E = -\frac{1}{n^2} E_0 = -\frac{13,6}{4^2} = -0,85 \text{ eV}$ .

En el estado final, la energía es  $E = -\frac{1}{n^2} E_0 = -\frac{13,6}{2^2} = -3,40 \text{ eV}$ .

- La energía del fotón emitido será:

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_i - E_f = -0,85 - (-3,40) = 2,55 \text{ eV} = 2,55(\text{eV}) \times 1,602 \times 10^{-19} (\text{J} \cdot \text{eV}^{-1}) = \\ &= 4,085 \times 10^{-19} \text{ J} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \end{aligned}$$

De donde,

$$\lambda = \frac{hc}{4,085 \times 10^{-19}} = \frac{6,626 \times 10^{-34} \times 299792458}{4,085 \times 10^{-19}} = 486,26 \text{ nm}$$



### 47.3 Espectro de rayas del hidrógeno

Cuando un átomo se excita por cualquier proceso y pasa a un estado energético superior al fundamental,  $E > E_1$ , vuelve a este estado emitiendo la energía absorbida en la excitación; pero son varios los caminos que puede seguir para pasar del estado excitado al fundamental. Supongamos que el estado excitado en que se encuentra es el 4; para pasar al fundamental puede seguir cuatro caminos, que se esquematizan en la Figura 47.1 y en los cuales irradian distintas frecuencias que verifican:

$$\frac{E_4 - E_1}{h} = \nu_{41} = \nu_{42} + \nu_{21} = \nu_{43} + \nu_{31} = \nu_{43} + \nu_{32} + \nu_{21}$$

Las frecuencias realmente emitidas son características de cada elemento y constituyen su *espectro de emisión o espectro de líneas*.

Un aspecto importante es que estos espectros son emitidos por gases a baja presión y baja densidad, de forma que el proceso no es debido a la interacción entre átomos, sino a un proceso individual de cada átomo, por lo tanto, ello posibilita un buen camino para estudiar la estructura de estos.

El estudio del espectro del hidrógeno llevó a un primer conocimiento de una serie de frecuencias que se emitían en la región visible y cuyas longitudes de onda obedecían a la ley deducida, en 1885, por Balmer (1825-1898), de aquí que a esta serie se la denomine *de Balmer*. Las longitudes de onda que constituyen la serie Balmer son: 410 nm, 434 nm, 486 nm y 656 nm, las cuales obedecen a la fórmula:

$$\lambda = B \frac{m^2}{m^2 - 4}$$

en la que es  $B = 3645,6 \times 10^{-8}$  m y  $m = 3,4$ .

En 1890, Rydberg generalizó la fórmula de Balmer, escribiéndola de la forma:

$$\nu = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{B} \frac{m^2 - 4}{m^2} = \frac{1}{B} \left( 1 - \frac{4}{m^2} \right) = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

en la que  $R$  es la constante de Rydberg,  $R = 1,0974 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ . Al ver así la fórmula, pensó que era un caso particular de una más general:

$$\nu = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \tag{47.10}$$

en la cual debe ser  $m = n + 1, n + 2, \dots$  y, por tanto, cabía la posibilidad de que hubiese otras series de frecuencias en el espectro del hidrógeno.

En 1908, Lyman descubrió una serie en la región ultravioleta que obedece a la fórmula general con  $n = 1$ , y Paschen descubrió la serie  $n = 3$ , que se encuentra en el infrarrojo. En 1922, Brackett descubrió una nueva serie que obedece a la Ley general con  $n = 4$ , y, en 1925, Pfund descubrió otra para  $n = 5$ , ambas en la zona del infrarrojo.

Este espectro discontinuo, que no podrá ser explicado por los modelos atómicos anteriores, va a ser una confirmación del modelo atómico de Bohr, ya que a partir de los postulados de éste puede deducirse la expresión de Rydberg [47.10]. En efecto, de acuerdo con el segundo postulado, al saltar el electrón del estado estacionario  $i$  al  $j$  emite una radiación de frecuencia:

$$\nu = \frac{E_i - E_j}{h}$$

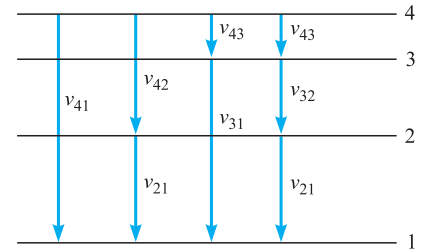


Figura 47.1. Saltos posibles desde el estado 4 al fundamental.

Frecuencia emitida

Teniendo en cuenta los valores posibles de la energía, dados por la [47.7], se escribe:

$$\nu = \frac{2\pi^2 m e^4 Z^2}{n^3} \left( \frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) = R \left( \frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

En la cual debe ser  $n_i > n_j$ , puesto que el estado  $i$  es el excitado,  $E_i > E_j$ . Esta expresión coincide exactamente con la empírica de Rydberg y expresa la constante de ésta en función de las características electrónicas:

Constante de Rydberg [47.11]

$$R = \frac{2\pi^2 m e^4 Z^2}{h^3}$$

En la Figura 47.2 se representa el diagrama de niveles de energía posibles para el átomo de hidrógeno, indicando la energía correspondiente a cada nivel, para los diferentes valores de  $n$  y se indican, mediante flechas, los saltos energéticos correspondientes a cada una de las series.

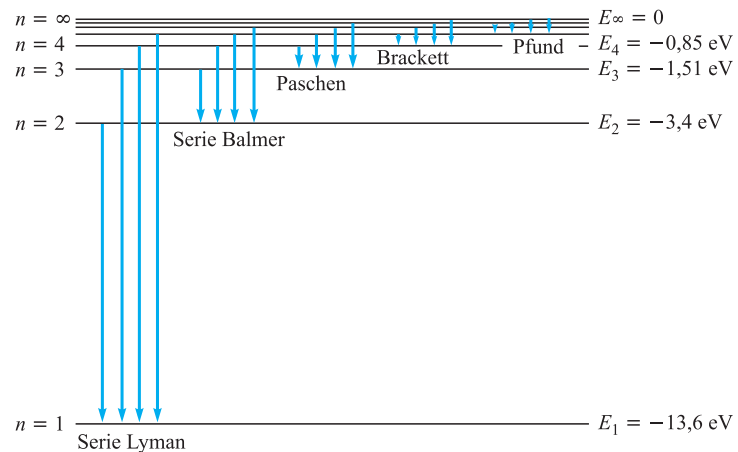


Figura 47.2. Niveles energéticos del átomo de hidrógeno.

**EJEMPLO 47.3**

Calculemos la diferencia de energía entre la línea más baja de la serie Paschen y la más baja de la serie Balmer.

**Solución:**

La energía de la línea más baja de la serie Balmer es  $E_{1B} = -\frac{E_0}{4}$ .

La energía de la línea más baja de la serie Paschen es  $E_{1P} = -\frac{E_0}{9}$ .

La diferencia de energía entre estas líneas es  $\Delta E = \frac{5E_0}{36} = 1,89 \text{ eV}$ .

**47.4 Principio de correspondencia**

Principio de correspondencia

El Principio de correspondencia puede enunciarse de la forma siguiente: *para valores muy grandes de los números cuánticos, las teorías cuántica y clásica deben coincidir* (Bohr).

La frecuencia emitida al pasar del estado estacionario  $n$  al  $n - 1$ , viene dada, según la teoría cuántica de Bohr, por la expresión:

$$\begin{aligned} \nu_{n,n-1} &= \frac{E_n - E_{n-1}}{h} = -\frac{2\pi^2 m e^4 Z^2}{n^2 h^3} + \frac{2\pi^2 m e^4 Z^2}{(n-1)^2 h^3} = \\ &= \frac{2\pi^2 m e^4 Z^2}{h^3} \left( \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{2\pi^2 m e^4 Z^2}{h^3} \cdot \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2} \end{aligned}$$

Ésta, para valores muy grandes de  $n$ ,  $n \gg 1$ , toma el valor:

$$\nu_{n,n-1} = \frac{4\pi^2 m e^4 Z^2}{h^3 n^3}$$

Según la teoría clásica, la frecuencia emitida es la misma del movimiento del electrón en su órbita, es decir

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi r}$$

La cual, utilizando las expresiones [47.4] que dan  $r$  y  $v$ , se expresa:

$$\nu = \frac{4\pi^2 m e^4 Z^2}{h^3 n^3}$$

Expresión que coincide con la dada por la teoría cuántica para valores grandes del número cuántico  $n$ .

Asimismo, el salto energético del nivel  $n$  al  $n - 1$ , para valores de  $n$ , está dado por:

$$E_n - E_{n-1} = h\nu_{n,n-1} = \frac{4\pi^2 m e^4 Z^2}{h^2 n^3}$$

Al aumentar  $n$  disminuye rápidamente el salto energético entre los niveles consecutivos, y para valores muy grandes de  $n$ , el espectro de niveles energéticos puede considerarse como continuo.

Por tanto, vemos cómo existe una región de transición, en la cual se solapan las leyes de la física clásica y cuántica.

## 47.5 Corrección por movimiento nuclear

Hasta aquí hemos supuesto que el núcleo estaba completamente en reposo, pero ello no puede ser así, ya que la cantidad de movimiento del átomo es nula y, puesto que el electrón se mueve en su órbita, el núcleo debe moverse de forma que su cantidad de movimiento sea igual y opuesta a la del electrón,  $MV = mv = P$ . La energía cinética total será la suma de las correspondientes al núcleo y al electrón:

$$T = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \frac{P^2}{M} + \frac{1}{2} \frac{P^2}{m} = \frac{P^2}{2} \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) = \frac{P^2}{2\mu}$$

siendo,

$$\mu = \frac{mM}{m+M} = \frac{m}{1 + \frac{m}{M}}$$

la denominada *masa reducida*. El no considerar la masa del núcleo, es tanto como suponer que tiene masa infinita, ya que para  $M \rightarrow \infty$ ,  $\mu \rightarrow m$ .

La variación de la constante de Rydberg con el número atómico dada por la expresión [47.11] no coincide con los valores hallados experimentalmente por métodos espectroscópicos, pero si en la expresión de la constante de Rydberg se sustituye la masa del electrón por la masa reducida, la concordancia de los valores teóricos con las experimentales es total.

Si en una sustancia existen dos isótopos de la misma, las frecuencias de emisión son distintas, debido al distinto valor de  $M$  y, en consecuencia, de su masa reducida. Por ello se descubrió, en 1931, la existencia del isótopo de hidrógeno,  $H_1^2$ , denominado Deuterio, aun existiendo en una proporción pequeñísima, 0,015 por 100.

## 47.6 Órbitas elípticas. Estructura fina

Cuando se analizan con un alto poder de resolución los espectros de emisión, se observa que cada línea está compuesta por un conjunto de líneas muy próximas, llamado *múltiple*. A esta estructura del espectro debido al desdoblamiento de los niveles energéticos en múltiple se le denomina *estructura fina*. Sommerfeld, en 1916, explicó la estructura fina considerando la existencia de órbitas elípticas y teniendo en cuenta en ellas los efectos relativistas.

Para cada valor del número cuántico  $n$  existe, además de la órbita circular ya estudiada, una serie de órbitas elípticas de distinta excentricidad, cuyos ejes mayores coinciden con el diámetro de la órbita circular. El momento cinético del electrón en cada una de las órbitas debe ser de la forma:

$$L = lh$$

siendo  $0 < l \leq n$ . Para  $l = n$  estamos en el caso de órbita circular y para  $0 < l < n$  son las órbitas elípticas. El caso  $l = 0$  se ha excluido porque suponía que el electrón choca con el núcleo. Cada órbita está determinada por dos números cuánticos:  $n$ , que nos determinará el valor del semieje mayor de la órbita, y  $l$ , que nos determinará su excentricidad y el valor del momento cinético,  $L$ .

El electrón está sometido a una fuerza central inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. De acuerdo con la Mecánica Clásica, la energía únicamente depende del eje mayor de la elipse y no de su excentricidad; el electrón en cualquiera de las órbitas con un mismo  $n$  tendrá la misma energía. Por ello, Sommerfeld aplicó la Mecánica Relativista al modelo nuclear de Bohr. La corrección relativista es del orden  $v^2/c^2$ , y como en las órbitas de mayor excentricidad, la velocidad debe ser mayor, también lo será la corrección, apareciendo una diferencia de energías para órbitas de igual  $n$  y distinta  $l$ . El orden de magnitud de la corrección relativista para la primera órbita ( $n = 1$ ) del hidrógeno ( $Z = 1$ ) puede calcularse utilizando la segunda [47.4] dividida por  $c$ , resultando:

Constante de estructura fina

$$\frac{v}{c} = \frac{2\pi e^2}{hc} \simeq \frac{1}{137}$$

Esta constante se denomina *constante de estructura fina*.

Aunque la teoría de Sommerfeld no es la correcta, explicaba perfectamente la estructura fina del espectro del átomo de hidrógeno, pero no pudo ser aplicada a átomos con varios electrones. Al desarrollarse la Mecánica Cuántica se comprobó que la estructura fina dependía de una propiedad mecanocuántica del electrón, el espín.

## 47.7 Espectro característico de rayos X. Ley de Moseley

Cuando los electrones que inciden sobre el blanco para producir rayos X son suficientemente energéticos, penetran en las capas profundas de los átomos que forman el blanco y hacen saltar un electrón de ellas, creando lo que se denomina un *hueco*. Al ser éste ocupado por electrones de capas exteriores se emite una radiación característica creándose un nuevo *hueco* que es ocupado por electrones de capas aún más exteriores, emitiéndose una nueva radiación característica. El conjunto de ellas constituye el espectro característico de rayos X del elemento que forma el blanco.

El espectro característico de rayos X se superpone al espectro continuo, resultando una imagen como se indica en la Figura 47.3.

En 1914, Moseley (1887-1915), mediante los métodos de difracción de Bragg, analizó los espectros característicos de rayos X de unos 40 elementos, notando una variación regular de unos a otros. Puesto que, de acuerdo con la teoría de Bohr, la energía  $E_1$  del electrón de la primera órbita es proporcional al cuadrado de la carga nuclear, Moseley pensó que la energía del fotón-X emitido debía ser también proporcional al cuadrado de esa carga nuclear, es decir, al cuadrado del número atómico del elemento que actúa de blanco. Por ello, para representar los resultados de sus experiencias tomó en ordenadas a la raíz cuadrada de la frecuencia de la radiación emitida y en abscisas el número atómico del elemento que formaba el blanco, encontrándose que sus datos experimentales se encontraban sobre rectas (Figura 47.4), las cuales pueden expresarse de la forma:

$$\nu^{1/2} = a(Z - b), \quad \text{o bien,} \quad \nu = A(Z - b)^2$$

En la que  $A$  y  $b$  son constantes características de cada línea.

De sus trabajos, Moseley concluía: [...] *hemos probado que hay en un átomo una magnitud fundamental, la cual aumenta de forma regular por saltos discretos al pasar de un elemento al siguiente inmediato. Esta magnitud solamente puede ser la carga del núcleo central.*

Antes de los trabajos de Moseley, el número atómico era el número de orden del elemento en la tabla de éstos ordenados por pesos, pasando ahora a ser el número de cargas positivas,  $+e$ , contenidas en el núcleo, que en los átomos en estado natural debe ser igual al de electrones. Esto sirvió para una correcta ordenación de algunos elementos, como es el caso del níquel, cuyo peso atómico es 58,7, que estaba colocado en la tabla periódica delante del cobalto, cuyo peso atómico es 58,9, pero Moseley pudo establecer que el cobalto tiene de número atómico 27 y el níquel 28, por lo cual éste debe ir detrás. También pudo predecir la existencia de algún elemento aún no descubierto, pero que efectivamente no tardó en encontrarse, como es el caso del hafnio.

## 47.8 Experiencia de Franck-Hertz

Los niveles discretos de energía en los átomos habían sido postulados por Bohr para conseguir un modelo atómico estable y tuvieron su confirmación en la explicación de los espectros de emisión. La evidencia directa de su existencia fue puesta de manifiesto en 1914, por Franck y Hertz, en una experiencia en la cual hicieron chocar electrones con átomos de vapor de mercurio. El dispositivo experimental se ha esquematizado en la Figura 47.5. Está formado por una ampolla de vidrio que se ha rellenado con vapor de mercurio, dentro de la cual hay un cátodo caliente,  $C$ , emisor de electrones, los cuales son acelerados por el campo eléctrico creado entre

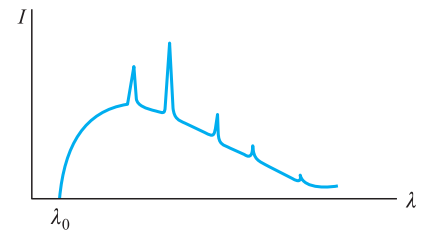


Figura 47.3. Espectro característico.

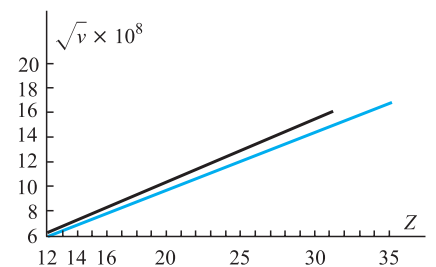


Figura 47.4. Ley de Moseley.

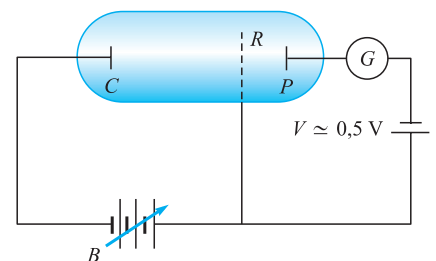


Figura 47.5.

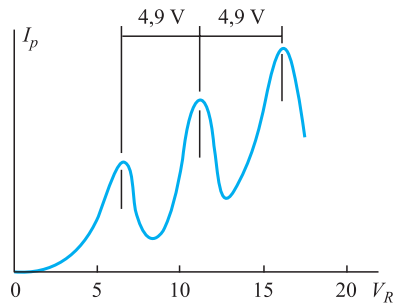


Figura 47.6.

el cátodo y la rejilla por la batería  $B$ , que establece entre rejilla y cátodo una diferencia de potencial  $V_R$ . Mediante una segunda batería, el ánodo o placa,  $P$ , se coloca a un potencial ligeramente superior al de la rejilla, aproximadamente,  $0,5 \text{ V}$ . Los electrones que lleguen a la rejilla con una energía superior a  $0,5 \text{ eV}$  llegarán al ánodo y darán lugar a una corriente  $I_c$ . Los electrones que lleguen a la rejilla con una energía menor de  $0,5 \text{ eV}$  no alcanzarán el ánodo y no contribuirán a la corriente  $I_c$ .

La experiencia consiste en medir la corriente de placa  $I_p$  mediante el galvanómetro  $G$ , en función del potencial de rejilla  $V_R$ . Los resultados se esquematizan en la Figura 47.6.

Al ir aumentando el potencial de rejilla, crece la intensidad de corriente, hasta llegar a un valor del potencial a partir del cual se produce un descenso brusco de la intensidad de corriente; si se sigue aumentando el potencial de rejilla vuelve a crecer la corriente de placa hasta un nuevo valor del potencial, separado del anterior  $4,9 \text{ V}$ , a partir del cual vuelve a descender la corriente. De seguir aumentando el potencial de rejilla van apareciendo sucesivamente picos de intensidad de corriente espaciados entre sí,  $4,9 \text{ V}$ . Todo ello nos indica que los átomos de mercurio tienen, en su primer estado excitado por encima del fundamental, la energía  $4,9 \text{ eV}$ . Si el electrón lleva una energía cinética inferior a  $4,9 \text{ eV}$  choca elásticamente con los átomos de mercurio, sigue su camino y llega a la placa. En cuanto su energía es superior a los  $4,9 \text{ eV}$ , ya es capaz de excitar a los átomos de mercurio a su primer estado, chocando con ellos inelásticamente, cediéndoles  $4,9 \text{ eV}$ . La energía que le queda al electrón después del choque no es suficiente para vencer el potencial placa-rejilla y no llega a aquella, disminuyendo la intensidad de corriente. El segundo pico aparece cuando el electrón tiene energía suficiente para realizar dos choques inelásticos sucesivos excitando a dos átomos.

En 1924, Hertz analizó el espectro de luz emitida por el vapor de mercurio encerrado en la ampolla y encontró una longitud de onda  $\lambda = 2.350 \text{ \AA}$ , lo que corresponde a un fotón de energía:

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ en s}^{-1}}{2536 \cdot 10^{-10} \text{ m}} \simeq 4,9 \text{ eV}$$

Esta radiación es emitida al volver el átomo desde su primer estado excitado a su estado fundamental.

Todos estos trabajos les valieron a Franck y Hertz la concesión del Premio Nobel en 1925.



## MECÁNICA CUÁNTICA

Una segunda revolución en el mundo de la Física se produjo desde el comienzo del siglo xx. La primera había sido la Teoría de la Relatividad, desarrollada por el genio Einstein con ayuda de los más eminentes matemáticos de la época; y la segunda, la Mecánica Cuántica, que comienza también su desarrollo en la misma época, pero cuyos avances se realizaron por aportaciones de gran número de científicos: Planck, Einstein, De Broglie, Bohr, Heisenberg, Schrödinger, Born, Pauli, Dirac, Von Neumann, entre otros, cuyas contribuciones fueron paso a paso, de forma lenta, configurando la nueva teoría, que será fundamental para la explicación de fenómenos cuyo origen está en el mundo atómico.

Para explicar la distribución espectral de la radiación del cuerpo negro, Planck, en 1900, estableció que la energía se emite o absorbe en paquetes, cuyo valor es múltiplo de un valor mínimo, el *quanto* de energía.

Einstein, en 1905, al objeto de explicar el efecto fotoeléctrico, admitió la hipótesis de Planck y estableció la naturaleza corpuscular de la luz: el *quanto* de energía sería transportado por una partícula que denominó *fotón*.

Por otro lado, la inestabilidad atómica había sido resuelta por Bohr, postulando que las órbitas que verificaban la condición cuántica  $L = nh$  eran estables. Postulado *ad hoc* para explicar teóricamente el espectro de rayas de hidrógeno, pero que fue mostrándose impotente ante los descubrimientos científicos que se fueron produciendo después.

En 1924, Lois de Broglie (1892-1987), en su tesis doctoral, postuló que no solamente las ondas luminosas tienen asociado un corpúsculo, sino que ello es general para todas las ondas y, además, también toda partícula tiene una onda asociada. Hipótesis que fue confirmada experimentalmente, en 1927, por Davisson y Germer, que observaron la difracción de electrones con las mismas figuras de difracción que presentan las ondas. En 1929 se concedió a De Broglie el Premio Nobel de Física.

Heisenberg (1901-1976) propuso, en 1925, usar para los desarrollos magnitudes cuyas cantidades fueran observables, abandonar la posición o la velocidad del electrón, que son imposibles de medir, y utilizar la frecuencia o la intensidad de la radiación emitida o

absorbida, que sí eran medibles. Heisenberg, utilizando matrices que contienen los valores posibles de las magnitudes estudiadas, desarrolló una teoría consistente, la *Mecánica cuántica matricial*.

Simultáneamente y de forma independiente, en 1925, Edwin Schrödinger (1887-1961), tomando como base la hipótesis de De Broglie, desarrolló la *Mecánica cuántica ondulatoria*, en la que cada partícula está caracterizada por una función de onda que determina la probabilidad de encontrar a la partícula en un cierto instante en un punto concreto, y obtuvo su famosa ecuación que describe la evolución de aquella.

Primero Eckart y posteriormente Pauli demostraron que ambas teorías eran equivalentes, eran formulaciones distintas de la misma cosa: *La Mecánica cuántica*.

Una propiedad de la nueva mecánica era su carácter no determinista, ya hemos indicado que la función de onda nos da probabilidades de encontrar al sistema en un cierto estado, y la formulación de Heisenberg estableció, en 1927, su famoso *Principio de incertidumbre*, que limita la posibilidad de determinar con precisión la posición y la velocidad, ya que el aumento de precisión en la medida de una de esas magnitudes debe conllevar la pérdida de precisión en la medida de la otra.

Einstein se opuso a la pérdida de descripción determinista de la ciencia, pero sus objeciones, mediante experimentos idealizados, ayudaron a aclarar muchos aspectos de la nueva teoría. Einstein pensó que la mecánica cuántica no era una teoría completa y creyó que podría ser reformulada de manera que no se perdiera el determinismo clásico, habiéndose hecho famosa su frase en contestación a las interpretaciones probabilísticas: *Yo creo que Dios no juega a los dados*.

En la ecuación de Schrödinger figuran la derivada de la función de ondas respecto al tiempo y la derivada segunda respecto al espacio, por lo cual, esa ecuación no será invariante en una transformación de Lorentz. En 1928, Dirac (1902-1984) aunó la mecánica ondulatoria y la relatividad especial, desarrollando un formalismo para la *Mecánica cuántica relativista*, que permitiría explicar la cuantización del espín del electrón como un fenómeno relativista y predecir la existencia de la antimateria; Dirac recibiría el Premio Nobel de Física en 1933.





### 48.1 Hipótesis de Broglie. Ondas de materia

La hipótesis de De Broglie, emitida en 1924, estableció que la dualidad onda-corpusculo no era privativa de la radiación electromagnética y que, al igual que a cada onda electromagnética le hemos asociado un fotón mediante las relaciones [46.1] y [46.2], así, a cada partícula material deberá asociarse una onda, que se denominó *onda de materia* u *onda de De Broglie* y que satisface análogas relaciones:

$$mv = p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \quad [48.1]$$

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad [48.2]$$

La onda de De Broglie para un fotón es una onda electromagnética, pero para las partículas materiales la onda asociada no será de naturaleza electromagnética.

La onda de materia asociada a los cuerpos del mundo sensible es extraordinariamente pequeña, debido a la pequeñez de  $h$ , motivo por el cual no puede ser detectada.

#### EJEMPLO 48.1 Onda asociada a una pelota de tenis

Supongamos una pelota de tenis de masa 100 g que se mueve a una velocidad de 216 km/h. Calculemos la longitud de onda de la onda asociada en su movimiento.

#### Solución:

La longitud de onda asociada está dada por la Expresión [48.1], cuyo valor es:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6,626 \times 10^{-34} \text{ (J} \cdot \text{s)}}{0,1 \text{ (kg)} \times 60 \text{ (m/s)}} = 1,104 \times 10^{-34} \text{ m}$$

Longitud de onda extremadamente pequeña, que resulta prácticamente imposible de detectar.

- 48.1. Hipótesis de Broglie. Ondas de materia
- 48.2. Difracción de electrones. Experiencia de Davisson y Germer
- 48.3. Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo
- 48.4. Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo
- 48.5. Interpretación de la función de onda
- 48.6. Principio de incertidumbre
- 48.7. Valores esperados. Valor más probable
- 48.8. Valores esperados para la cantidad de movimiento y la energía
- 48.9. Densidad de corriente
- 48.10. Escalón de potencial
- 48.11. Barrera de potencial. Efecto túnel
- 48.12. Pozo de potencial cuadrado e infinito. Paridad
- 48.13. El oscilador armónico
- 48.14. Formalismo de la mecánica cuántica
- 48.15. Valores propios y funciones propias
- 48.16. Postulados de la mecánica cuántica
- 48.17. Medida simultánea de dos magnitudes físicas. Principio de incertidumbre de Heisenberg

Sin embargo, en la onda de materia asociada a las partículas elementales, aunque éstas se muevan a altas velocidades, al ser su masa muy pequeña y aparecer en el denominador de la [48.1], el resultado es una longitud de onda asociada no detectable.

### EJEMPLO 48.2 Onda asociada a un electrón

Consideremos un electrón que se mueve a la velocidad de  $10^6$  m/s y calculemos la longitud de la onda a él asociada.

#### Solución:

La aplicación de la [48.1] en este caso nos da:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6,626 \times 10^{-34} \text{ (J} \cdot \text{s)}}{9,109 \times 10^{-31} \text{ (kg)} \times 10^6 \text{ (m/s)}} = 0,7274 \times 10^{-9} \text{ m} = 0,7274 \text{ nm}$$

Longitud de onda asociada al electrón con las velocidades indicadas ha resultado ser del orden del espaciamiento interatómico de algunos sólidos, por lo que se pensó que podían estos servir de red de difracción, lo que experimentalmente comprobaron Davisson y Germer.

La hipótesis de De Broglie permite deducir las condiciones cuánticas establecidas por Bohr *ad hoc* para el momento cinético del electrón en su órbita. Puesto que el electrón lleva una onda asociada y gira alrededor del núcleo en un estado estacionario, debe verificarse que la longitud de la órbita sea un múltiplo entero de la longitud de onda asociada al electrón. Es decir, debe verificarse  $2\pi r = n\lambda$ . Usando la relación [48.1] es:

$$2\pi r = n \frac{h}{p} = n \frac{h}{mv}$$

Con lo cual, el momento cinético se expresa:

$$L = mvr = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

Expresión que fue establecida como postulado por Bohr [47.1]. En la Figura 48.1 se ha representado la onda asociada a un electrón que se mueve en una órbita de radio  $r$ , para  $n = 3$ .

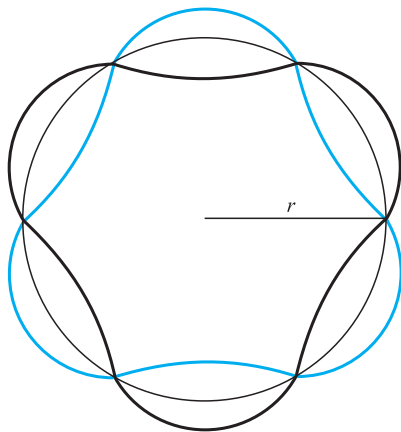


Figura 48.1. Onda asociada  $n = 3$ .

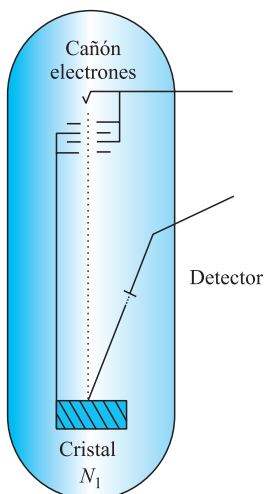


Figura 48.2. Dispositivo de difracción de electrones.

## 48.2 Difracción de electrones. Experiencia de Davisson y Germer

En 1927, Davisson y Germer comprobaron experimentalmente la hipótesis de De Broglie al conseguir la difracción de los electrones, propiedad ésta característica del comportamiento ondulatorio. El dispositivo utilizado se esquematiza en la Figura 48.2.

La física clásica predice que los electrones dispersados por el cristal deben serlo en todas las direcciones, no dependiendo de la energía del electrón incidente. Ello estaba siendo comprobado por los citados investigadores, hasta que una rotura en el dispositivo de vacío permitió la entrada de aire y la consiguiente oxidación de cristal de níquel. Para reducir a metal el óxido formado se calentó el cristal a elevada temperatura. Al volver a trabajar con él, los resultados cambiaron, la intensidad en la dispersión de los electrones variaba con la dirección y con la energía

del electrón incidente, presentando un máximo para una energía del electrón incidente de 54 eV y una desviación para el electrón dispersado de 50°.

El hecho de que la intensidad presente un máximo hace suponer que los electrones se difractan, hipótesis que está reforzada por el hecho de que al calentar el bloque de níquel se forma un monocristal a partir de los múltiples microcristales que lo forman. Para verificar la hipótesis, calculemos la longitud de la onda asociada al electrón aplicando la ley de Bragg y veamos si coincide con la calculada a partir de la hipótesis de De Broglie.

Consideremos en el espaciamiento regular de átomos del cristal de níquel unos planos paralelos entre sí y ricos en átomos (Figura 48.3).

Si la longitud de onda  $\lambda$  de la onda de De Broglie asociada a los electrones, satisface la ley de Bragg:

$$n\lambda = 2d \cos \theta$$

las ondas reflejadas por esos planos estarán en fase y producirán un máximo en la intensidad del haz reflejado. Puesto que es  $d = D \sin \theta$ , la ley de Bragg se escribe:

$$n\lambda = 2D \sin \theta \cos \theta = D \sin 2\theta \quad [48.3]$$

Debido a la naturaleza ondulatoria del haz reflejado, al salir del cristal se refractará, lo que no le sucede al incidente, ya que éste penetra normalmente a la superficie.

El índice de refracción es:

$$r = \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\sin \varphi}{\sin 2\theta} \quad [48.4]$$

En la que  $\lambda$  y  $\lambda'$  son las longitudes de onda asociadas al electrón en el vacío y en el cristal, respectivamente. Eliminando  $\lambda$  entre [48.3] y [48.4] resulta:

$$n\lambda' = D \sin \varphi$$

Para  $n = 1$  es  $\varphi = 50^\circ$ , que es el dato experimental obtenido por Davisson y Germer. Puesto que mediante técnicas de difracción de rayos-X se ha obtenido la separación  $D = 2,15 \text{ \AA}$ , resulta:

$$\lambda' = 2,15 \sin 50^\circ = 1,65 \text{ \AA}$$

Calculemos ahora, con las hipótesis de De Broglie, la longitud de onda asociada a un electrón acelerado con un potencial de 54 eV, que fue el empleado en la experiencia. La longitud de onda  $\lambda' = h/mv$ , teniendo en cuenta que es  $\frac{1}{2} mv^2 = eV$ , se escribe:

$$\lambda' = \frac{h}{\sqrt{2m eV}} = \frac{6,636 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{\sqrt{2 \times 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg} \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}\cdot\text{V}^{-1} \cdot 54 \text{ V}}} = 1,66 \text{ \AA}$$

Queda, pues, comprobada la hipótesis de De Broglie sobre la naturaleza ondulatoria de las partículas materiales en movimiento.

En 1928, Thomson ratificó experimentalmente la hipótesis de De Broglie, al enviar un haz de rayos catódicos normalmente sobre una finísima lámina de metal (250 Å) y comprobar que el haz emergente formaba una típica figura de difracción consistente en anillos circulares concéntricos, alternativamente con máximos y mínimos de intensidad, completamente semejantes a la formada por la difracción de rayos X.

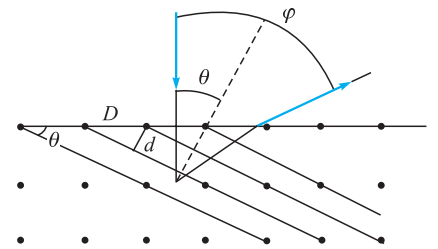


Figura 48.3. Difracción en el cristal.

Análogos fenómenos de difracción se fueron observando para las diferentes partículas materiales. La difracción de neutrones ha adquirido gran importancia por su aplicación al estudio de la estructura del sólido. Éstos, en lugar de ser reflejados por las capas electrónicas, lo son por los núcleos, proporcionando información sobre la distribución de los mismos.

Stern y Estermann, en 1932, observaron la difracción de haces atómicos y moleculares de hidrógeno y helio producida por reflexión sobre cristales de fluoruro de litio, lo que posibilitaba la consecución de haces prácticamente monoenergéticos y su utilización en posteriores investigaciones.

### EJEMPLO 48.3

Un haz de electrones cuya energía es de 125 eV se refracta en los planos atómicos de un cristal cuyo espaciamento es de 0,15 nm. Calculemos las direcciones de máxima intensidad en las figuras de difracción.

#### Solución:

La longitud de onda de De Broglie asociada a los electrones del haz es:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{6,626 \times 10^{-34} \text{ (J} \cdot \text{s)}}{\sqrt{2 \times 9,11 \times 10^{-31} \text{ (kg)} \times 125 \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ (J)}}} = 0,11 \text{ nm}$$

La ley de Bragg nos da los ángulos para los cuales la intensidad presenta máximos, la cual podemos escribirla de la forma:

$$\text{sen } \theta = n \frac{\lambda}{2d} = n \frac{0,11 \text{ (nm)}}{2 \times 0,15 \text{ (nm)}} = 0,367 \text{ n}$$

Para  $n = 1$  es  $\text{sen } \theta = 0,367$ , de donde  $\theta = 21,5307^\circ$

Para  $n = 2$  es  $\text{sen } \theta = 0,734$ , de donde  $\theta = 47,2228^\circ$

## 48.3 Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

Se hace necesario ahora encontrar la ecuación de ondas que verifican las ondas de materia, la cual nos permita, para los diferentes campos potenciales y distintas condiciones de contorno, hallar, como solución de ella, la correspondiente onda de materia.

Esta ecuación fue propuesta por Schrödinger en 1926. Comenzaremos su estudio tratando de justificar su expresión para el caso unidimensional independiente del tiempo.

Consideremos una función de onda independiente del tiempo, del tipo:

$$\Phi(x) = A e^{ikx} \quad [48.5]$$

Sus derivadas son:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = ik A e^{ikx} = ik \phi \quad [48.6]$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -k^2 A e^{ikx} = -k^2 \phi$$

En las que es:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi p}{h} = \frac{p}{\hbar} \quad [48.7]$$

La energía total de la partícula, suma de sus energías cinética y potencial, para el caso no relativista es:

$$E = \frac{p^2}{2m} + U(x)$$

En la que  $E$  es la energía total de la partícula,  $p$ , su cantidad de movimiento y  $U$ , la energía potencial a la que está sometida.

Puesto que el sistema es independiente del tiempo, la energía total debe mantenerse constante y el sistema será conservativo. Utilizando la [48.7], la energía puede escribirse de la forma:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + U(x)$$

Despejando de ésta  $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(x)]$  y llevándolo a la [48.6] resulta:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} [E - U(x)] \phi$$

o

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + [E - U(x)] \phi = 0 \quad [48.8]$$

que es la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. Por tanto, será únicamente de aplicación a los casos estacionarios, en los cuales la energía total permanece constante. La función de onda, solución de ella, será una onda estacionaria.

Una característica muy importante de la ecuación de Schrödinger es ser lineal, es decir, tanto la función como sus derivadas solamente tienen exponente unidad. Por ello, si  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son dos soluciones de la ecuación, también será solución  $\phi = A_1 \phi_1 + A_2 \phi_2$ , lo que no es más que una consecuencia del principio de superposición. Por tanto, puesto que  $\phi = B e^{-ikx}$  también es solución de [48.8], también lo será:

$$\phi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad [48.9]$$

Si el movimiento es tridimensional, la correspondiente ecuación Schrödinger es de la forma:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) + [E - U(x, y, z)] \phi = 0 \quad [48.10]$$

Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

La bondad de estas ecuaciones quedará establecida por su capacidad para dar soluciones que se ajusten a las determinaciones experimentales.

## 48.4 Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

Tratemos ahora de encontrar la ecuación de Schrödinger unidimensional dependiente del tiempo. Para ello consideremos la función de onda del tipo:

$$\psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} \quad [48.11]$$

Su derivada respecto al tiempo es:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega A e^{i(kx - \omega t)} = -i\omega \psi$$

multiplicándola por  $i\hbar$  y teniendo en cuenta la hipótesis de De Broglie [48.2], resulta:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi \quad [48.12]$$

La función  $\psi(x,t)$  satisface la Ecuación [48.8], ya que es  $\psi(x, t) = \Phi(x) \cdot e^{-i\omega t}$ ; con lo cual es:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} e^{-i\omega t}$$

Es decir, verifica:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + [E - U(x)]\psi = 0$$

Al sustituir en ella el valor de  $E\psi$ , dado por la [48.12], resulta:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - U(x)\psi = 0 \quad [48.13]$$

que es la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. Si el sistema es tridimensional, la ecuación será:

Ecuación general de Schrödinger

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - U(xyz)\psi = 0 \quad [48.14]$$

La solución  $\psi(x, t) = \phi(x)e^{-i\omega t}$ , puede escribirse de la forma:

$$\psi(x, t) = A e^{ikx} e^{-i\omega t} = \phi(x)e^{-Et/\hbar} \quad [48.15]$$

Solución que es la correspondiente a estados estacionarios, multiplicada por el factor dependiente del tiempo, ya que las variables posición y tiempo están separadas. La energía en los estados estacionarios está perfectamente definida  $E = \hbar\omega$ .

La solución general de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para casos no estacionarios se obtiene de acuerdo con la teoría general sobre ecuaciones diferenciales lineales, como superposición de las soluciones correspondientes a los estados estacionarios, y será de la forma:

$$\psi(x, t) = \sum_n A_n \phi_n(x) e^{-iEt/\hbar} \quad [48.16]$$

La ecuación de Schrödinger no será válida en Mecánica Relativista, ya que ha sido establecida en base a conceptos de la Mecánica Clásica. Una deducción similar a partir de la Mecánica Relativista conduce a la ecuación de Dirac, que es la ecuación fundamental de la Mecánica Cuántica Relativista, lo que cae fuera del alcance de este texto.

## 48.5 Interpretación de la función de onda

La función de onda, en general, será una función compleja, con parte real y parte imaginaria, por tanto, carece de sentido físico en sí misma, pero es el medio para

determinar a partir de ella magnitudes físicas observables, es decir, reales y medibles. Evidentemente,  $|\Phi|^2$  será real.

En todo movimiento ondulatorio hemos visto cómo su intensidad era proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda; así mismo, la densidad de energía del campo electromagnético era proporcional al cuadrado del campo eléctrico. Ahora, la intensidad de lo que podríamos llamar campo de materia, será proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda de materia o función de onda. También, puesto que la masa es una forma de energía, la densidad de energía asociada con la masa será el cuadrado de la función de onda asociada con la masa.

Del análisis de difracción por doble rendija podemos deducir claramente que el cuadrado de la amplitud de la onda, más que ser proporcional a la intensidad luminosa, energía por unidad de volumen o número de fotones por unidad de volumen, es proporcional a la probabilidad de encontrar un fotón en la unidad de volumen. Análogamente, el cuadrado de la función de onda debe ser proporcional a la probabilidad de encontrar a la partícula material en la unidad de volumen.

Como hemos indicado, la función de onda,  $\Phi$ , es una función compleja, cuya conjugada simbolizaremos mediante  $\Phi^*$  y, en consecuencia, el cuadrado de la función de onda se expresa:

$$|\Phi|^2 = \Phi \cdot \Phi^* = P(x)$$

Densidad de probabilidad

En la que  $P(x)$  es la *función densidad de probabilidad*.

En el caso unidimensional, el cuadrado de la función de onda debe dar la probabilidad de encontrar a la partícula en la unidad de longitud, por tanto, la probabilidad de encontrar a la partícula en el intervalo  $x_1, x_2$  es:

$$P = \int_{x_1}^{x_2} |\phi|^2 dx$$

En el caso tridimensional, la función de densidad de probabilidad nos da la probabilidad de encontrar a la partícula en el volumen unidad; por tanto, la probabilidad de encontrar la partícula en un cierto volumen  $V$  será:

$$P = \iiint |\phi|^2 dV$$

Puesto que la partícula se encuentra forzosamente en el intervalo  $-\infty, +\infty$ , será:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1 \tag{48.17}$$

A ésta condición se le denomina *condición de normalización* y, en general, se expresa:

$$\int_V |\psi|^2 dV = 1 \tag{48.18} \quad \text{Condición de normalización}$$

La condición de normalización es de suma importancia, ya que elimina muchas posibles soluciones y conlleva la cuantización de la energía, como posteriormente veremos.

Puesto que la probabilidad de encontrar a la partícula no puede variar discontinuamente de un punto al contiguo, es necesario que la función de onda sea continua. También será continua su derivada primera respecto a  $x$ , ya que la Ecuación [48.8] puede escribirse de la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{2m}{\hbar^2} [U(x) - E] \phi$$

y si  $\phi(x)$  es continua y  $U(x)$  se conserva finito,  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  será continua.

En consecuencia, la función de onda debe cumplir los siguientes requisitos:

1. Ser solución de la ecuación de Schrödinger.
2. Cumplir la condición de normalización.
3. Ser función continua de  $x$ .
4. Su derivada primera debe ser función continua de  $x$ .

Para los estados estacionarios, la densidad de probabilidad es independiente del tiempo, ya que es:

$$|\psi(x, t)|^2 = \psi \cdot \psi^* = \phi(x) e^{-iEt/\hbar} \phi(x)^* e^{iEt/\hbar} = \phi \cdot \phi^* = |\phi(x)|^2 \quad [48.19]$$

Para la solución general dependiente del tiempo, la densidad de probabilidad es función del tiempo y su expresión general es de la forma:

$$|\psi(x, t)|^2 = \psi \cdot \psi^* = \sum_n A_n \phi_n e^{-iE_n t/\hbar} \sum_n A_n^* \phi_n^* e^{iE_n t/\hbar} \quad [48.20]$$

Para el caso particular, en el cual la función de onda pueda expresarse solamente en función de dos términos estacionarios, será:

$$\begin{aligned} |\psi(x, t)|^2 &= [A_1 \phi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + A_2 \phi_2 e^{-iE_2 t/\hbar}] [A_1^* \phi_1^* e^{iE_1 t/\hbar} + A_2^* \phi_2^* e^{iE_2 t/\hbar}] = \\ &= |A_1 \phi_1|^2 + |A_2 \phi_2|^2 + A_1 A_2^* \phi_1 \phi_2^* e^{-i(E_1 - E_2)t/\hbar} + A_2 A_1^* \phi_2 \phi_1^* e^{-i(E_2 - E_1)t/\hbar} \end{aligned}$$

## 48.6 Principio de incertidumbre

El **Principio de incertidumbre**, enunciado por Heisenberg, en 1927, establece la imposibilidad de medir con precisión simultáneamente la posición y la cantidad de movimiento de una partícula. Si queremos ver la posición de una partícula, por ejemplo un electrón, debemos iluminarlo con fotones, que al ser reflejados por él electrón nos permite su visión. La precisión en la posición del electrón se aumenta disminuyendo la longitud de onda del fotón, es decir, usando fotones de mayor frecuencia, que tendrán mayor cantidad de movimiento y mayor energía. En su choque con el electrón le transferirán cantidad de movimiento y energía, con lo cual se variará la posición y cantidad de movimiento del electrón. Por tanto, un aumento en la precisión de la medida de la posición conlleva una disminución en la precisión de la medida de la cantidad de movimiento del electrón. Esto fue cuantificado por Heisenberg mediante la relación:

Principio de incertidumbre

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2} \quad [48.21]$$

El origen de este principio radica, como hemos visto, por un lado en la dualidad onda-corpúsculo y, además, en la interacción inevitable del elemento usado para la observación con la partícula a observar. Hay que hacer notar que el Principio de incertidumbre no se opone a que midamos con toda exactitud una de las variables, lo que establece es que ello conllevaría el no poder medir la otra. Podemos medir la posición con precisión infinita, pero ello conllevaría que mediríamos la cantidad de movimiento con precisión nula, o lo que es igual con error infinito.

Debido a tener  $h$  un valor tan pequeño, las incertidumbres son también muy pequeñas y a nivel macroscópico no tienen significación, pero sí la tienen de forma decisiva a nivel atómico, en el cual debe usarse para su estudio la Mecánica cuántica.

El Principio de incertidumbre va implícito en la filosofía de la Mecánica cuántica, la cual abandona el determinismo de la Mecánica clásica y describe la naturaleza en base a probabilidades. La partícula (el electrón) no ocupa un lugar concreto en el espacio, solamente existen probabilidades de encontrarla en un cierto instante en un lugar. Como comprobación de que el principio en cuestión anida en la



esencia de la Mecánica cuántica, al final del capítulo deduciremos el Principio de incertidumbre a partir de los postulados básicos de la Mecánica cuántica. Principio de incertidumbre que, como veremos, no se limita a las variables posición y cantidad de movimiento, sino a cualquier pareja de variables que *conmuten*, como son el tiempo y la energía. Así, también se verificará:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2} \quad [48.22] \quad \text{Principio de incertidumbre}$$

#### EJEMPLO 48.4 Incertidumbre en la posición de una pelota de tenis

Calculemos la incertidumbre en la posición de una pelota de tenis, cuyo peso sea de 100 gramos y que se mueve a la velocidad de 210 km/h, medida con una incertidumbre de  $\pm 1$  m/s.

##### Solución:

La incertidumbre en la medida de la cantidad de movimiento es:

$$\Delta p = m\Delta v = 0,100 \text{ (kg)} \cdot 1 \text{ (m/s)} = 0,100 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

La incertidumbre en la posición se deduce de [48.21]:

$$\Delta x \geq \frac{h}{4\pi\Delta p} = \frac{6,626 \times 10^{-34} \text{ (J} \cdot \text{s)}}{4 \times 3,1416 \times 0,1 \text{ (kg} \cdot \text{m/s)}} = 5,27 \times 10^{-34} \text{ m}$$

Absolutamente imposible de detectar.

#### EJEMPLO 48.5 Incertidumbre en la posición de un electrón

Calculemos la incertidumbre en la posición de un electrón, cuya velocidad,  $v = 10^6$  m/s, ha sido medida con una incertidumbre de 100 m/s.

##### Solución:

La incertidumbre en la medida de la cantidad de movimiento del electrón es:

$$\Delta p = m \Delta v = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ (kg)} \times 100 \text{ (m/s)} = 9,11 \cdot 10^{-29} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

La incertidumbre en la posición se obtiene de la [48.21]:

$$\Delta x \geq \frac{h}{4\pi\Delta p} = \frac{6,626 \times 10^{-34} \text{ (J} \cdot \text{s)}}{4 \times 3,1416 \times 9,11 \times 10^{-29} \text{ (kg} \cdot \text{m/s)}} = 5,79 \times 10^{-7} \text{ m}$$

Imprecisión que es unas mil veces mayor que el diámetro del átomo, por lo cual es de gran trascendencia para determinar la posición del electrón dentro del átomo.

### 48.7 Valores esperados. Valor más probable

La probabilidad de encontrar a la partícula en el intervalo  $x, x + dx$ , es:

$$P(x, t) dx = |\psi(x, t)|^2 dx = \psi^*(x, t)\psi(x, t) dx$$

Si pudiéramos repetir muchas veces en el instante  $t$ , la medida de la posición de la partícula asociada a la onda  $\psi(x, t)$ , obtendríamos una serie de valores, cuya media ponderada se denomina *valor esperado* de la posición en el instante  $t$ . El cual está dado por la expresión:

Valor esperado para la posición

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xP(x, t) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} P(x, t) dx} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t)x\psi(x, t) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t)\psi(x, t) dx} \quad [48.23]$$

Si la función  $\psi(x)$  está normalizada, será:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t)\psi(x, t) dx = 1$$

y el valor esperado se expresa:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t)x\psi(x, t) dx \quad [48.24]$$

En general, para cualquier función de,  $f(x, t)$ , el valor esperado para las medidas en un instante  $t$  es:

Valor esperado

$$\langle f(x, t) \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t)f(x)\psi(x, t) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t)\psi(x, t) dx} \quad [48.25]$$

La cual, si la función  $\psi$  está normalizada se reduce a:

$$\langle f(x, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t)f(x)\psi(x, t) dx \quad [48.26]$$

El *valor más probable* en un instante  $t$  es el que hace máxima la función densidad de probabilidad en ese instante; por lo cual deberá verificar la condición:

Valor más probable

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = 0 \quad [48.27]$$

### EJEMPLO 48.6 Normalización de la función de onda

La función de onda normalizada para el electrón en el estado base del átomo de hidrógeno es:

$$\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi r_0^3}} e^{-r/r_0}$$

En la cual,  $r_0$  es el radio de Bohr. Calculemos:

- El valor medio de  $r$ .
- El valor más probable.

**Solución:**

a) De acuerdo con [48.24] el valor medio del radio es:

$$\langle r \rangle = \int_V \phi^*(r) r \phi(r) dV = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_V r e^{-2r/r_0} dV$$

La integración debe hacerse para todo el volumen, para lo cual usaremos el elemento de volumen de coordenadas esféricas  $dV = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr$ .

Con ello, la anterior se escribe:

$$\langle r \rangle = \frac{1}{\pi r_0^3} \int_0^\infty r^3 e^{-2r/r_0} dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Cuya integración nos da:

$$\langle r \rangle = \frac{1}{\pi r_0^3} \frac{4}{r_0^3} \int_0^\infty r^3 e^{-2r/r_0} dr = \frac{4}{r_0^3} \left(\frac{r_0}{2}\right)^4 3! = \frac{3}{2} r_0$$

b) La probabilidad de encontrar al electrón a la distancia  $r$  es:

$$P(r) = 4\pi r^2 |\phi(r)|^2 = \frac{2r^2}{r_0^3} e^{-2r/r_0}$$

El valor más probable para  $r$  debe verificar:

$$\frac{dP(r)}{dr} = 0 = \frac{8r}{r_0^3} e^{-2r/r_0} - \frac{2}{r_0} \frac{4r^2}{r_0^3} e^{-2r/r_0} = \frac{8r}{r_0^3} e^{-2r/r_0} \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)$$

Por tanto, la única solución con significado físico es  $r = r_0$ , es decir, el radio más probable es el radio de Bohr.

## 48.8 Valores esperados para la cantidad de movimiento y la energía

Siguiendo el planteamiento inicial de Heisenberg, tomemos para una partícula libre, que se mueve en dirección del eje equis, la siguiente función de onda:

$$\psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} \quad [48.28]$$

Al derivarla respecto a  $x$ , obtenemos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = A ik e^{i(kx - \omega t)} = ik\psi = i \frac{p}{\hbar} \psi$$

La última igualdad se ha escrito teniendo en cuenta la [48.1]. Ahora podemos expresarla de la forma:

$$p[\psi(x, t)] = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} [\psi(x, t)]$$

Expresión que nos indica que, asociado a la magnitud cantidad de movimiento,  $p$ , hay un operador diferencial,

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

de forma que existe una equivalencia formal entre ambos a la hora de aplicarlos a la función de onda.

Operador cantidad de movimiento

$$p \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad [48.29]$$

Análogamente, si derivamos la [48.28] respecto al tiempo, resulta:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -A i \omega e^{i(kx - \omega t)} = -i \omega \psi = -i \frac{E}{\hbar} \psi$$

La cual puede ser escrita de la forma:

$$E[\psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} [\psi(x, t)]$$

Expresión que nos indica que la magnitud energía,  $E$ , lleva asociado un operador,  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ , existiendo una equivalencia formal a la hora de aplicarlos a la función de onda.

Operador energía

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad [48.30]$$

La expresión general de la energía, como suma de cinética y potencial, se expresa:

$$E = p^2/2m + U(x, t)$$

Si en ella sustituimos las magnitudes cantidad de movimiento y energía por sus operadores asociados [48.29] y [48.30], respectivamente, resulta:

$$\frac{1}{2m} \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + U(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

o bien,

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad [48.31]$$

Que es una ecuación entre operadores, la cual, al ser multiplicada por la función  $\psi(x, t)$ , nos da la ecuación de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + U(x, t) \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}$$

Este resultado justifica que se usen las relaciones [48.29] y [48.30]. Así, el valor esperado para la cantidad de movimiento será:

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) p \psi(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \left[ -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right] \psi(x, t) dx = \\ &= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} dx \end{aligned} \quad [48.32]$$

Análogamente, el valor esperado para la energía será:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) E \psi(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \left[ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right] \psi(x, t) dx = \\ &= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} dx \end{aligned} \quad [48.33]$$

## 48.9 Densidad de corriente

Si llamamos  $\rho$  a la densidad de probabilidad:

$$\rho = |\psi(r, t)|^2 = \psi^*(r, t)\psi(r, t) \quad [48.34]$$

la ecuación de continuidad para una onda asociada a una partícula será:

$$\nabla \cdot j = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

En la cual,  $j$  es la densidad de probabilidad de corriente para la partícula material. Derivando respecto al tiempo la [48.34], podemos expresar:

$$\nabla \cdot j = -\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi\right) \quad [48.35]$$

Si el potencial al que está sometida la partícula es  $U(r)$ , al ser reales  $r$  y  $U(r)$ , serán  $r = r^*$  y  $U = U^*$ , con lo cual las ecuaciones de Schrödinger para  $\psi$  y  $\psi^*$ , son, respectivamente:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U(r)\psi \quad [48.36]$$

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + U(r)\psi^* \quad [48.37]$$

Al multiplicar la [48.36] por  $\psi^*$ , la [48.37] por  $\psi$  y restarlas, obtenemos:

$$i\hbar \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\right) = \frac{\hbar^2}{2m} (\psi \nabla^2 \psi^* - \psi^* \nabla^2 \psi) \quad [48.38]$$

Ahora debemos tener en cuenta dos identidades:

$$\nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi) = \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi + \psi^* \nabla^2 \psi \quad \text{y} \quad \nabla \cdot (\psi \nabla \psi^*) = \nabla \psi \cdot \nabla \psi^* + \psi \nabla^2 \psi^*$$

Restando la segunda de la primera obtenemos:

$$\nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = \psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*$$

Con lo cual, llevado a la [48.38], resulta:

$$i\hbar \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

Dividiendo por  $i\hbar$  obtenemos el segundo miembro de [48.35], con lo cual podemos escribir:

$$\nabla \cdot j = \frac{\hbar}{2mi} \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

De donde obtenemos para la probabilidad de densidad de corriente para las partículas la expresión:

$$j = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad [48.39]$$

Si las partículas llevan la carga  $q$ , la densidad de probabilidad de corriente eléctrica es:

$$j_q = qj \quad [48.40]$$

Para el caso del electrón, es:

$$j_e = -ej \quad [48.41]$$

## 48.10 Escalón de potencial

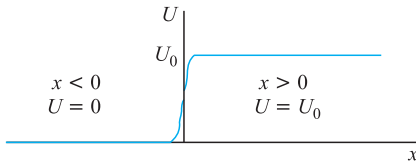


Figura 48.4. Escalón de potencial.

La partícula va a estar sometida al potencial indicado en la Figura 48.4. Es decir, para  $x < 0$ , la energía potencial es nula y para  $x > 0$ , la energía toma un valor constante,  $U_0$ . En la realidad, no aparecen escalones bruscos de potencial como el indicado, sino cambios rápidos pero continuos del mismo, según se indica en la curva de trazo fino. En Mecánica Cuántica es más sencillo el estudio suponiendo que el potencial sufra una discontinuidad, y los resultados así obtenidos son perfectamente aplicables a la realidad física.

La partícula, de masa  $m$  y velocidad  $v$ , se dirige al escalón de potencial desde la región negativa del eje de las equis. Veamos en primer lugar el problema desde el punto de vista de la Mecánica Clásica. La fuerza que actúa sobre la partícula será siempre nula,  $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$ ; así será realmente, salvo en un entorno del origen. La energía total de la partícula será la suma de sus energías cinética y potencial:

$$E = T(x) + U(x)$$

Para  $x < 0$ , al ser  $U(x) = 0$ , es  $E = T = \frac{p^2}{2m}$ , manteniéndose constante su velocidad. Al llegar a las proximidades del origen la partícula se encuentra frenada por la fuerza  $-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0$ , disminuyendo su energía cinética y adquiriendo energía potencial. Hay ahora que distinguir dos casos, según si  $E$  es mayor o menor que  $U_0$ . En el primero, las partículas pueden superar la barrera de potencial y moverse en la zona de potencial  $U_0$ , con la energía cinética  $T_1 = E - U_0$ . En el segundo caso, no serán capaces de perforar la barrera de potencial y serán reflejadas por ésta.

Analicemos ahora el problema desde el punto de vista de la Mecánica cuántica. El potencial es independiente del tiempo y el movimiento obedecerá a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + [E - U(x)]\phi = 0$$

En ésta debemos hacer  $U(x) = 0$ , para  $x < 0$  y  $U(x) = U_0$ , para  $x > 0$ . Asimismo, habrá que distinguir dos casos, según que sea  $E$  mayor o menor que  $U_0$ .

**Caso 1.º:**  $E < U_0$ . Para  $x < 0$ , la ecuación de Schrödinger es:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} + E\phi_1 = 0 \quad [48.42]$$

La solución general es del tipo:

$$\phi_1(x) = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x} \quad [48.43]$$

En la que es:

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad [48.44]$$

Para  $x > 0$ , la ecuación de Schrödinger se escribe:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} + [E - U_0] \phi_2 = 0 \quad [48.45]$$

Su solución general es de la forma:

$$\phi_2(x) = C e^{k_2 x} + D e^{-k_2 x} \quad [48.46]$$

En la que es:

$$k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} \quad [48.47]$$

Las constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  se determinan obligando a que la función de onda y su derivada cumplan la condición de ser finitas y continuas. Así, al tender  $x$  a infinito  $\phi_2$  debe conservarse finito, para lo cual es necesario que sea  $C = 0$ , y con ello es:

$$\phi_2(x) = D e^{-k_2 x}$$

Las condiciones de continuidad son:

$$\phi_1(0) = \phi_2(0)$$

$$\left( \frac{d\phi_1}{dx} \right)_0 = \left( \frac{d\phi_2}{dx} \right)_0$$

Por lo que deben verificarse,

$$A + B = D$$

$$A - B = i \frac{k_2}{k_1} D$$

de las cuales se obtienen:

$$D = \frac{2Ak_1}{k_1 + ik_2} = \frac{2Ak_1(k_1 - ik_2)}{k_1^2 + k_2^2}$$

$$B = \frac{A(k_1 - ik_2)}{k_1 + ik_2} = \frac{A(k_1 - ik_2)^2}{k_1^2 + k_2^2}$$

Con ello, las funciones de onda se escriben:

$$\phi_1(x) = \frac{2A(k_1 - ik_2)}{k_1^2 + k_2^2} (k_1 \cos k_1 x - k_2 \operatorname{sen} k_1 x) \quad [48.48]$$

$$\phi_2(x) = \frac{2A(k_1 - ik_2)}{k_1^2 + k_2^2} k_1 e^{-k_2 x} \quad [48.49]$$

Las cuales son de la forma representada en la Figura 48.5.

El hecho de que  $\phi_2(x)$  sea distinto de cero, indica que la partícula puede superar la barrera de potencial, a pesar de ser  $E < U_0$ , existiendo alguna probabilidad

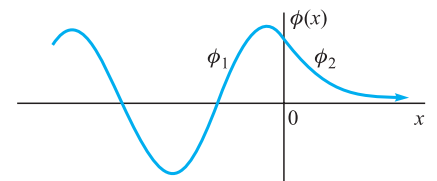


Figura 48.5. Funciones de onda,  $E < U_0$ .

de encontrar a la partícula en la zona de alto potencial,  $x > 0$ , probabilidad que disminuye rápidamente al aumentar  $x$ .

La probabilidad de que la partícula sea reflejada por el escalón de potencial es igual al cociente entre la densidad de probabilidad de la onda reflejada y la densidad de probabilidad de la onda incidente:

$$r = \frac{BB^*}{AA^*} = \frac{1}{AA^*} \frac{A(k_1 - ik_2)^2}{k_1^2 + k_2^2} \cdot \frac{A^*(k_1 + ik_2)^2}{k_1^2 + k_2^2} = 1$$

lo que nos indica que toda partícula que llega al escalón de potencial es reflejada por éste. Como, según hemos demostrado, algunas partículas penetran en el escalón, hay que admitir que también estas partículas son posteriormente reflejadas.

**Caso 2.º:**  $E > U_0$ . Para  $x < 0$ , sigue siendo válida la ecuación de Schrödinger [48.42], cuya solución general es la [48.43], con  $k_1$  dado por la [48.44]. Para  $x > 0$ , se verifica la ecuación de Schrödinger [48.45], pero ahora es  $E - U_0 > 0$  y la solución es del tipo:

$$\phi_2(x) = F e^{ik_3x} \quad [48.50]$$

En la que es:

$$k_3 = \frac{\sqrt{2m(E - U_0)}}{\hbar} \quad [48.51]$$

No hemos considerado el término en  $e^{-ik_3x}$ , porque hemos supuesto que en la región  $x > 0$  no habrá ondas que viajen en el sentido de las equis decrecientes.

Las condiciones de continuidad dan, en este caso, las relaciones:

$$A + B = F \quad \text{y} \quad Ak_1 - Bk_1 = Fk_3$$

De las que se obtiene:

$$F = \frac{2Ak_1}{k_1 + k_3} \quad \text{y} \quad B = \frac{A(k_1 - k_3)}{k_1 + k_3}$$

Con ello, las funciones de onda se expresan:

$$\phi_1(x) = A \left( e^{ik_1x} + \frac{k_1 - k_3}{k_1 + k_3} e^{ik_1x} \right) \quad [48.52]$$

$$\phi_2(x) = \frac{2Ak_1}{k_1 + k_3} e^{ik_3x} \quad [48.53]$$

Puesto que  $B$  no es nulo, resulta que algunas partículas son reflejadas en la superficie  $x = 0$ , a pesar de que su energía es superior a  $U_0$ . Se verifica así una propiedad común a toda onda, la de reflejarse en la superficie de separación de dos medios distintos.

La probabilidad de que la partícula sea reflejada en la superficie  $x = 0$  es:

$$r = \frac{BB^*}{AA^*} = \left( \frac{k_1 - k_3}{k_1 + k_3} \right)^2 \quad [48.54]$$

y la probabilidad de que la partícula sea transmitida es:

$$t = \frac{k_3 FF^*}{k_1 AA^*} = \frac{k_3}{k_1} \frac{4k_1^2}{(k_1 + k_3)^2} = \frac{4k_1k_3}{(k_1 + k_3)^2} \quad [48.55]$$

Como fácilmente se puede comprobar, se verifica  $r + t = 1$ , es decir, toda partícula que llega al escalón, o es reflejada, o es transmitida.



## 48.11 Barrera de potencial. Efecto túnel

Consideremos una barrera de potencial como la indicada en la Figura 48.6. En la que  $U(x)$  es nulo para  $x < 0$  y  $x > a$ , mientras que toma el valor constante  $U_0$  para  $x$  mayor que cero y menor que  $a$ ,  $0 < x < a$ .

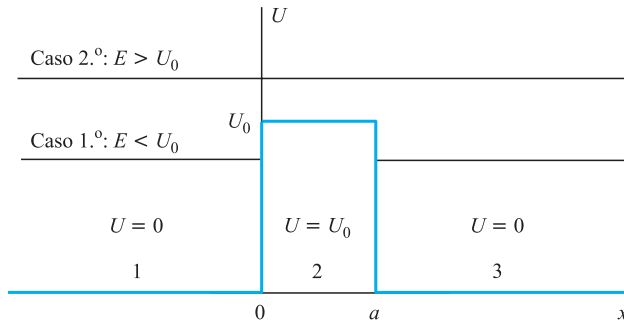


Figura 48.6. Barrera de potencial.

Supondremos que las partículas provienen de la región de las equis negativas y se dirigen hacia la barrera de potencial en dirección paralela al citado eje. Según la Mecánica clásica, si la energía  $E$  de las partículas incidentes es superior a la energía de la barrera  $E > U_0$ , todas las partículas atraviesan la barrera, y si es  $E < U_0$ , todas las partículas son reflejadas.

Analicemos el problema desde el punto de vista de la Mecánica cuántica. En la región  $x < 0$  se cumple la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo [48.42], cuya solución general es la Ecuación [48.43]:

$$\phi_1(x) = A e^{ik_1x} + B e^{-ik_1x} \quad [48.56]$$

Una ecuación completamente análoga es válida en la región  $x > a$ , pero aquí únicamente habrá onda transmitida, ya que no cabe esperar onda reflejada alguna. Por tanto, la solución en la zona  $x > a$  es de la forma:

$$\phi_3(x) = C e^{ik_1x} \quad [48.57]$$

En ambas expresiones es:

$$k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE} \quad [48.58]$$

En la región  $0 < x < a$  habrá que distinguir dos casos, según si  $E$  es mayor o menor que  $U_0$ . Ambos han sido tratados en el epígrafe anterior y sus soluciones generales son de la forma análoga a la [48.46], si es  $E < U_0$ , y de forma análoga a [48.43], si  $E > U_0$ .

Para  $E < U_0$ , la solución es de la forma:

$$\phi_2(x) = D e^{-k_2x} + F e^{k_2x} \quad [48.59]$$

En la que es:

$$k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} \quad \text{y} \quad E < U_0 \quad [48.60]$$

Para  $E > U_0$ , la solución es de la forma:

$$\phi_2(x) = D e^{ik_3x} + F e^{-ik_3x} \quad [48.61]$$

En la que es:

$$k_3 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - U_0)} \quad \text{y} \quad E > U_0 \quad [48.62]$$

En este caso no puede hacerse  $F$  cero en [48.59], puesto que  $\phi_2(x)$  se conserva finita dentro de los límites en los que está definida; ni tampoco en [48.61], puesto que al existir una superficie de separación en  $x = a$ , cabe esperar una onda reflejada.

**Caso 1.º:**  $E < U_0$ . Está gobernado por las Ecuaciones [48.56], [48.57] y [48.59]. Las condiciones de continuidad que deben verificar éstas y sus derivadas primeras son:

$$\begin{aligned} \phi_1(0) &= \phi_2(0) & \phi_2(a) &= \phi_3(a) \\ \left(\frac{d\phi_1}{dx}\right)_0 &= \left(\frac{d\phi_2}{dx}\right)_0 & \left(\frac{d\phi_2}{dx}\right)_a &= \left(\frac{d\phi_3}{dx}\right)_a \end{aligned} \quad [48.63]$$

Las cuales exigen que se cumplan las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} A + B &= D + F \\ D e^{-k_2 a} + F e^{k_2 a} &= C e^{ik_1 a} \\ -D k_2 e^{-k_2 a} + F k_2 e^{k_2 a} &= C i k_1 e^{ik_1 a} \\ A i k_1 - B i k_1 &= -D k_2 + F k_2 \end{aligned}$$

Éstas nos posibilitan la obtención del valor de cuatro de los coeficientes en función del quinto y de los valores  $k_1$ ,  $k_2$  y  $a$ . Así, los coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $D$  y  $F$  se expresan en función de  $C$  y de los valores  $k_1$ ,  $k_2$  y  $a$ , de la forma:

$$\begin{aligned} F &= \frac{C}{2} \left(1 + i \frac{k_1}{k_2}\right) e^{a(i k_1 - k_2)} \\ D &= \frac{C}{2} \left(1 - i \frac{k_1}{k_2}\right) e^{a(i k_1 + k_2)} \\ A &= \frac{C}{2} e^{ik_1 a} \left[2 \cosh k_2 a + i \left(\frac{k_2}{k_1} - \frac{k_1}{k_2}\right) \sinh k_2 a\right] \\ B &= -\frac{C}{2} i e^{ik_1 a} \left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1}\right) \sinh k_2 a \end{aligned}$$

La probabilidad de que una partícula sea reflejada por la barrera es:

$$r = \frac{BB^*}{AA^*} = \frac{\left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1}\right)^2 \sinh^2 k_2 a}{4 \cosh^2 k_2 a + \left(\frac{k_2}{k_1} - \frac{k_1}{k_2}\right) \sinh^2 k_2 a} \quad [48.64]$$

La probabilidad de transmisión a través de la barrera es:

$$t = \frac{CC^*}{AA^*} = \frac{4}{4 \cosh^2 k_2 a + \left(\frac{k_2}{k_1} - \frac{k_1}{k_2}\right) \sinh^2 k_2 a} \quad [48.65]$$

Puesto que se verifica  $r + t = 1$ , toda partícula que llega a la barrera de potencial, o es reflejada por ésta, o perfora la barrera apareciendo en la región  $x > a$ .

A este fenómeno mecanocuántico, de superación de barreras de potencial por partículas cuya energía es inferior a la de la barrera, contrario a la Mecánica clásica, se le conoce con el nombre de *efecto túnel*.

Cuando la energía de la partícula tiende a cero,  $E \rightarrow 0$ , la probabilidad de transmisión tiende también a cero, ya que:

$$k_1 \rightarrow 0, \quad k_2 \rightarrow \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mV_0} \quad \text{y} \quad \frac{k_2}{k_1} \rightarrow \infty$$

Cuando la energía de la partícula tiende a la de la barrera,  $E \rightarrow U_0$ , cada uno de los otros parámetros tiende a los siguientes valores:

$$k_1 \rightarrow \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mU_0}, \quad k_2 \rightarrow 0, \quad \frac{k_1}{k_2} \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad \sinh k_2 a \rightarrow 0$$

apareciendo una indeterminación en el denominador, que al quitarla resulta:

$$t = \frac{4}{4 + k_1^2 a^2} \tag{48.66}$$

Esto pone de manifiesto que al tender la energía de las partículas incidentes al valor de la energía de la barrera, el coeficiente de transmisión es mayor que cero y menor que 1,  $0 < t < 1$ , de manera que siempre hay partículas reflejadas.

En la Figura 48.7 se han representado las partes reales de las Ecuaciones [48.56], [48.57] y [48.59].

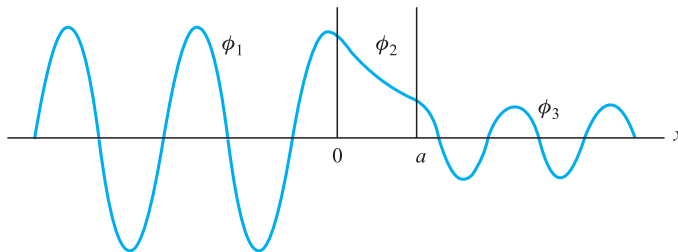


Figura 48.7. Funciones de onda.

**Caso 2.º:**  $E > U_0$ . La función de onda asociada a la partícula en cada una de las regiones  $x < 0$ ,  $x > a$  y  $0 < x < a$  es, respectivamente, la [48.56], [48.57] y [48.61], debiendo verificar las ecuaciones de continuidad [48.63], que en este caso imponen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} A + B &= D + F \\ D e^{ik_3 a} + F e^{-k_3 a} &= C e^{ik_1 a} \\ Ak_1 - Bk_1 &= Dk_3 - Fk_3 \\ Dk_3 e^{ik_3 a} - Fk_3 e^{-k_3 a} &= Ck_1 e^{ik_1 a} \end{aligned}$$

Éstas nos permiten calcular cuatro coeficientes en función del quinto y de los valores  $k_1$ ,  $k_3$  y  $a$ . Así, los coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $D$  y  $F$  se expresan en función de  $C$  y de los valores  $k_1$ ,  $k_3$  y  $a$ , de la forma:

$$D = \frac{C}{2} \left( 1 + \frac{k_1}{k_3} \right) e^{ia(k_1 - k_3)}$$

$$F = \frac{C}{2} \left(1 - \frac{k_1}{k_3}\right) e^{ia(k_1+k_3)}$$

$$A = \frac{C}{2} e^{iak_1} \left[ 2 \cos ak_3 - i \left( \frac{k_1}{k_3} + \frac{k_3}{k_1} \right) \text{sen} ak_3 \right]$$

$$B = \frac{C}{2} e^{iak_1} \left( \frac{k_3}{k_1} - \frac{k_1}{k_3} \right) i \text{sen} ak_3$$

La probabilidad de reflexión por la barrera de potencial es:

$$r = \frac{B^*B}{A^*A} = \frac{\left(\frac{k_3}{k_1} - \frac{k_1}{k_3}\right)^2 \text{sen}^2 ak_3}{4 \cos^2 ak_3 + \left(\frac{k_1}{k_3} + \frac{k_3}{k_1}\right)^2 \text{sen}^2 ak_3} \quad [48.67]$$

La probabilidad de transmisión a través de la barrera es:

$$t = \frac{C^*C}{A^*A} = \frac{4}{4 \cos^2 ak_3 + \left(\frac{k_1}{k_3} + \frac{k_3}{k_1}\right)^2 \text{sen}^2 ak_3} \quad [48.68]$$

La suma de ambas probabilidades es igual a la unidad:

$$r + t = 1$$

Si se sustituye en [48.68] los valores de  $k_1$  y  $k_3$ , y se hacen las adecuadas transformaciones, la probabilidad de transmisión se expresa de la forma:

$$t = \left[ 1 + \frac{\text{sen}^2 \frac{a}{\hbar} \sqrt{2mU_0} \left( \frac{E}{U_0} - 1 \right)}{4 \frac{E}{U_0} \left( \frac{E}{U_0} - 1 \right)} \right]^{-1} \quad [48.69]$$

Al tender  $E$  a  $U_0$ , aparece en  $t$  una indeterminación, que al ser eliminada se obtiene para  $t$  el valor:

$$t = \left( 1 + \frac{ma^2 U_0}{2\hbar^2} \right)^{-1}$$

el cual coincide con [48.66], como cabía esperar.

Para ciertos valores de la energía, la [48.69] se hace igual a la unidad y todas las partículas son transmitidas. Esos valores son los que anulan el seno que aparece en la citada expresión, es decir, los que cumplen:

$$\frac{a}{\hbar} \sqrt{2mU_0} \left( \frac{E}{U_0} - 1 \right) = n\pi$$

de donde,

$$\frac{E}{U_0} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mU_0 a^2} + 1 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Si es  $\frac{E}{U_0} > 1$ , el coeficiente de transmisión es menor que la unidad  $t < 1$ .

La representación de  $t$  en función de  $\frac{E}{U_0}$  se ha realizado en la Figura 48.8.

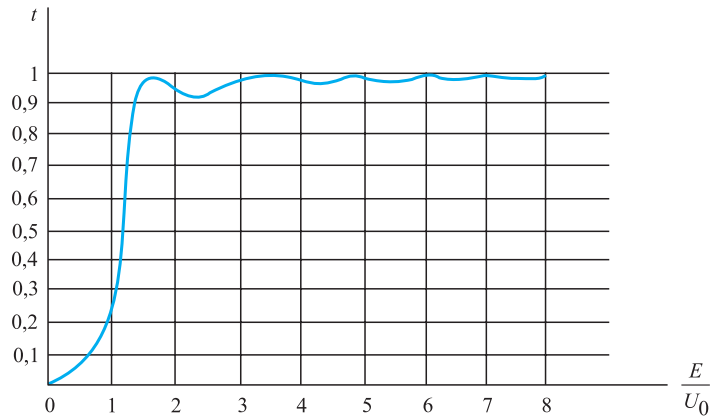


Figura 48.8. Coeficiente de transmisión.

Un efecto macroscópico de perforación de barras de potencial se produce en óptica. La luz que trata de salir de un prisma, si incide sobre la superficie interior de una de sus caras con un ángulo superior al crítico, sufre la reflexión total y no aparece luz fuera del prisma (Figura 48.9).

El campo eléctrico en los puntos del exterior infinitamente próximos al punto de incidencia de la luz interior, no es nulo, decrece exponencialmente en unas cuantas longitudes de onda. Si se acerca al prisma en este punto otra pieza de vidrio, la luz se propagará dentro de ésta, atravesando la barrera entre ambas. Se ha observado que la intensidad del haz de luz dentro de la segunda pieza de vidrio disminuye exponencialmente cuando la distancia entre ambas piezas aumenta, lo que concuerda con la Mecánica cuántica.

Otro fenómeno real de perforación de barreras de potencial se produce en las uniones de conductores eléctricos. Entre los conductores en contacto, normalmente cobre, se forma una capa de óxido, en ese caso óxido de cobre, que es aislante. Sin embargo, los electrones que circulan por uno de los conductores atraviesan esa barrera aislante y penetran en el otro conductor.

En 1928, Gamow, Condon y Gurney explicaron la emisión de partículas del  $U^{238}$  como un fenómeno de perforación de una barrera de potencial. Por las experiencias de dispersión de partículas  $\alpha$  por núcleos de uranio, realizadas por Rutherford, se sabía que éstas presentaban un potencial de 8,8 MeV a una distancia de  $3 \times 10^{-14}$  m de su centro. Por otra parte, la energía cinética de la partícula emitida, cuando ésta se mide a gran distancia del centro del átomo, debe coincidir con el valor de la energía total de la partícula, ya que, a esa distancia, el potencial atómico es nulo. Así se había determinado que la energía total de la partícula  $\alpha$  era de 4,2 MeV. Por tanto, únicamente por efecto túnel puede salir del núcleo atómico y atravesar la barrera de 8,8 MeV que le rodea.

El efecto túnel tiene actualmente una importante aplicación tecnológica en el denominado *diodo túnel*, que es un dispositivo electrónico formado por dos semiconductores con una pequeñísima separación entre ellos. La corriente que atraviesa esta barrera de potencial es controlable mediante un voltaje opuesto y permite cortar la corriente a frecuencias superiores al GHz.

Aprovechando el efecto túnel, Binnig y Rohrer inventaron, en 1981, el *microscopio de efecto túnel*, lo que les valió el Premio Nobel de Física en el año 1986.

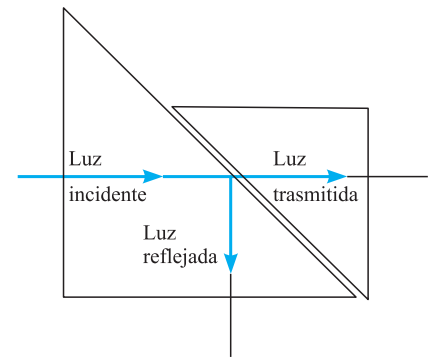


Figura 48.9. Efecto túnel óptico.

En esencia, se compone de una sonda, en general de tungsteno, cuya punta debe ser muy fina, a ser posible debe acabar en un solo átomo, y que se aproxima a la superficie a estudiar hasta unos pocos nanómetros, llevando dos movimientos que se controlan mediante un ordenador: uno paralelo a la superficie y otro de aproximación. Entre la sonda y la superficie se mantiene un pequeño potencial, menor de un voltio. Debido al efecto túnel, escapan electrones de la superficie y pasan a la sonda, mientras ésta explora la superficie y envía datos al ordenador, que reconstruirá una imagen tridimensional. La amplificación conseguida puede ser de más de dos millones de veces y la resolución de la mitad del radio atómico. En consecuencia, es un instrumento fundamental en la moderna nanotecnología, ya que con él pueden verse y manipularse átomos y moléculas.

### EJEMPLO 48.7 Efecto túnel

Un electrón con energía  $E = 50$  eV se dirige hacia una barrera de espesor 1 nm, cuyo potencial es de  $U_0 = 70$  eV. Calculemos la probabilidad que tiene el electrón de atravesar la citada barrera.

#### Solución:

En este caso, la probabilidad de que se produzca el efecto túnel está dada por la [48.65]. Por tanto, previamente debemos calcular  $k_1$  y  $k_2$ , que están dadas, respectivamente, por las expresiones [48.58] y [48.60].

$$k_1 = \frac{2\pi}{6,63 \times 10^{-34}} \sqrt{2 \times 9,11 \times 10^{-31} \times 50 \times 1,602 \times 10^{-19}} = 36,204104 \times 10^9$$

$$k_2 = \frac{2\pi}{6,63 \times 10^{-34}} \sqrt{2 \times 9,11 \times 10^{-31} \times 20 \times 1,602 \times 10^{-19}} = 22,897486 \times 10^9$$

$$\frac{k_1}{k_2} = 1,581139 \quad \text{y} \quad \frac{k_2}{k_1} = 0,632456$$

Con lo cual, la [48.65] nos da:

$$t = [\cosh^2 22,897486 - 0,237171 \sinh^2 22,897486]^{-1} = 6,7786 \times 10^{-20}$$

### 48.12 Pozo de potencial cuadrado e infinito. Paridad

El pozo de potencial cuadrado e infinito queda definido mediante la función  $U(x)$ , que se expresa de la siguiente forma:

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ \infty & \text{para } x < -\frac{a}{2} \text{ y } x > \frac{a}{2} \end{cases}$$

La forma del citado potencial se ha dibujado en la Figura 48.10.

La ecuación de Schrödinger para este caso es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi}{dx^2} = E \phi$$

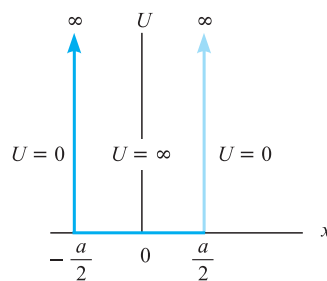


Figura 48.10. Pozo de potencial cuadrado e infinito.

cuya solución general puede escribirse de la forma:

$$\phi(x) = A \cos kx + B \operatorname{sen} kx$$

En la que es:

$$k = \sqrt{2mE}/\hbar \quad [48.70]$$

Para satisfacer las condiciones de continuidad del potencial en  $x = \pm \frac{a}{2}$ , la función  $\phi(x)$  ha de cumplir las relaciones:

$$A \cos k\frac{a}{2} + B \operatorname{sen} k\frac{a}{2} = 0$$

$$A \cos k\frac{a}{2} - B \operatorname{sen} k\frac{a}{2} = 0$$

Ello exige que se cumplan una de las dos condiciones:

$$\text{Condición 1.ª} \quad A = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} k\frac{a}{2} = 0$$

$$\text{Condición 2.ª} \quad B = 0 \quad \text{y} \quad \cos k\frac{a}{2} = 0$$

Es decir:

$$\text{Condición 1.ª} \quad A = 0 \quad \text{y} \quad k = 2n\frac{\pi}{a} = N\frac{\pi}{a}, \quad N = 2, 4, 6, \dots$$

$$\text{Condición 2.ª} \quad B = 0 \quad \text{y} \quad k = (2n + 1)\frac{\pi}{a} = N\frac{\pi}{a}, \quad N = 1, 3, 5, \dots$$

El valor de la energía despejado de la [48.70] se expresa:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = N^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad [48.71]$$

La energía quedará cuantizada y su menor valor es:

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \quad [48.72]$$

En consecuencia, la partícula no puede tener energía nula.

La cantidad de movimiento de la partícula también quedará cuantizada, puesto que es:

$$p = \hbar k = N \frac{\pi \hbar}{a} \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad [48.73]$$

Las funciones de onda asociadas a cada valor de la energía son:

$$\phi(x) = A \cos N \frac{\pi}{a} x \quad N = 1, 3, 5, \dots$$

$$\phi(x) = B \operatorname{sen} N \frac{\pi}{a} x \quad N = 2, 4, 6, \dots$$

Las constantes  $A$  y  $B$  se determinan mediante las condiciones de normalización, resultando:

$$A = B = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

Con ello, son:

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos N \frac{\pi}{a} x \quad N = 1, 3, 5, \dots \quad [48.74]$$

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen} N \frac{\pi}{a} x \quad N = 2, 4, 6, \dots \quad [48.75]$$

Por tanto, las funciones de onda quedan clasificadas en dos grupos. En el primero [48.74] verifican:

$$\phi(x) = \phi(-x)$$

y se dice que tienen paridad par; mientras que en el segundo verifican:

$$\phi(x) = -\phi(-x)$$

y se dice que tienen paridad impar.

En la Figura 48.11 se representa las dos primeras funciones de cada clase.

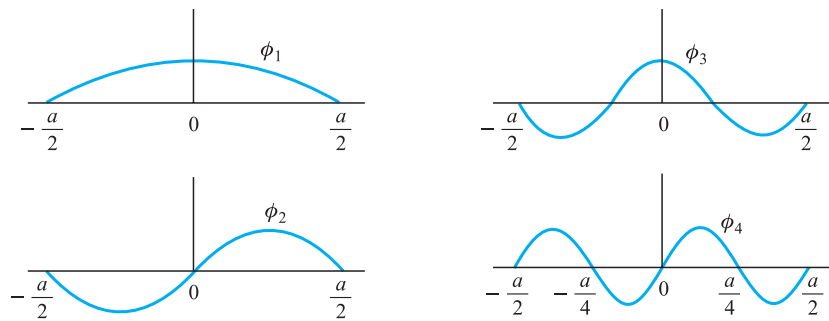


Figura 48.11. Funciones de onda.

En general, cuando el potencial es simétrico respecto al eje  $x = 0$ ,  $U(x) = U(-x)$ , si  $\phi_n(x)$  es una solución de la ecuación:

$$\left[ \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) \right] \phi_n(x) = E_n \phi_n(x)$$

también es solución  $\phi(-x)$ , lo que se comprueba cambiando en la ecuación  $x$  en  $-x$  y teniendo en cuenta la simetría del potencial.

Como para cada valor de  $E_n$  solamente puede existir una solución,  $\phi_n(x)$  y  $\phi_n(-x)$  deben ser múltiplo una de la otra,

$$\phi_n(x) = P \phi_n(-x)$$

Al cambiar  $x$  en  $-x$ , es:

$$\phi_n(-x) = P \phi_n(x)$$

Por tanto debe ser  $P = \pm 1$ .

Al factor  $P$  se le denomina paridad. Cuando es  $P = 1$  se dice que la paridad es par, y las funciones de onda son simétricas respecto al eje  $x = 0$ ; cuando es  $P = -1$  se dice que la paridad es impar y las funciones de onda son simétricas respecto al origen.



**EJEMPLO 48.8** Cálculo de las constantes de normalización

Calculemos el valor de las constantes  $A$  y  $B$  que figuran en las expresiones [48.74] y [48.75].

**Solución:**

La condición de normalización [48.17] se expresa en este caso:

$$\int_0^a |\phi(x)|^2 dx = 1$$

a) Para la función [48.74], la condición de normalización es:

$$\int_0^a A^2 \cos^2 N \frac{\pi}{a} x dx = 1$$

Cuya integración se realiza teniendo en cuenta la relación trigonométrica  $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi)$ , con lo cual la anterior se expresa:

$$1 = \frac{A^2}{2} \int_0^a (1 + \cos 2N \frac{\pi}{a} x) dx = \frac{A^2}{2} \left[ x + \frac{a}{2\pi N} \sin 2N \frac{\pi}{a} x \right]_0^a = \frac{A^2}{2} a$$

De donde se obtiene para la constante  $A$  el valor  $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$ .

b) Para la función [48.75], la condición de normalización es:

$$\int_0^a B^2 \sin^2 N \frac{\pi}{a} x dx = 1$$

Cuya integración se hace teniendo en cuenta la relación  $\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi)$ , con lo cual, la anterior se expresa:

$$1 = \frac{B^2}{2} \int_0^a (1 - \cos 2N \frac{\pi}{a} x) dx = \frac{B^2}{2} \left[ x - \frac{a}{2\pi N} \sin 2N \frac{\pi}{a} x \right]_0^a = \frac{B^2}{2} a$$

De donde se obtiene el valor  $B = \sqrt{\frac{2}{a}}$ .

**48.13** El oscilador armónico

El estudio del oscilador armónico a partir de la Mecánica clásica, que se realizó en el Capítulo 13 del Tomo I, establece como ecuación diferencial del movimiento:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

Cuya solución es  $x = x_0(\cos \omega t + \varphi)$ , con  $\omega^2 = k/m$ .

La frecuencia del movimiento es:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

y la energía total del oscilador es:

$$E = \frac{k}{2} x_0^2$$

Realicemos ahora el estudio desde el punto de vista de la Mecánica cuántica. El potencial al que está sometida la partícula es de la forma:

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

cuando se toma como origen de potenciales una posición de mínimo, es decir, de equilibrio estable. La ecuación de Schrödinger para estados estacionarios es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + k \frac{x^2}{2} \phi = E\phi \quad [48.76]$$

La cual puede escribirse de la forma:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \left( \frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{mk}{\hbar^2} x^2 \right) \phi = 0$$

Haciendo,

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = a \quad \text{y} \quad \frac{mk}{\hbar^2} = b^2 \quad [48.77]$$

se escribe:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + (a - b^2 x^2) \phi = 0$$

Si ahora hacemos el cambio de variable  $z = \sqrt{b}x$ , se expresa de la forma:

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} + \left( \frac{a}{b} - z^2 \right) \phi = 0$$

Finalmente, haciendo el cambio de función:

$$\phi(z) = e^{-z^2/2} H(z)$$

Resulta,

$$\frac{d^2 H}{dz^2} - 2z \frac{dH}{dz} + \left( \frac{a}{b} - 1 \right) H = 0$$

Ecuación diferencial cuya solución son los polinomios de Hermite, los cuales pueden obtenerse a partir de la expresión:

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n (e^{-z^2})}{dz^n}$$

A continuación se expresan los siete primeros:

$$\begin{aligned} H_0 &= 1 & H_1 &= 2z \\ H_2 &= 4z^2 - 2 & H_3 &= 8z^3 - 12z \\ H_4 &= 16z^4 - 48z^2 + 12 & H_5 &= 32z^5 - 160z^3 + 120z \\ H_6 &= 64z^6 - 480z^4 + 720z^2 - 120 \end{aligned}$$

La solución de la ecuación de Schrödinger es de la forma:

$$\phi = A e^{-z^2/2} H(z) = A e^{-bx^2/2} H(\sqrt{b}x) \tag{48.78}$$

Solución que, únicamente para  $a/b = 2n + 1$ , cumple con las características requeridas para ser función de onda.

De las relaciones [48.77] obtenemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{2mE}{\hbar \sqrt{mk}} = \frac{2E}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2E}{\hbar \omega} = \frac{2E}{\hbar \nu}$$

Por tanto, la condición para que [48.78] sea solución es:

$$\frac{2E}{\hbar \nu} = 2n + 1$$

De donde los valores de la energía deben verificar:

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \nu \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{48.79}$$

En consecuencia, la energía queda cuantizada y el menor valor de ella, para  $n = 0$ , es  $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \nu$ . Por tanto, la situación de mínima energía no es de energía nula, lo que será de gran importancia en termodinámica.

La condición de normalización de la función [48,69] exige para A el valor:

$$A = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2}$$

Con lo cual, la solución general se escribe:

$$\phi = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} e^{-z^2/2} H(z) \tag{48.80}$$

Para cada valor de  $n$ , hay un valor para la energía y una función de onda asociada. En la Figura 48.12 se representan las cuatro primeras funciones de onda.

Se observa que para  $n =$  número par, las funciones presentan paridad par, mientras que para  $n =$  número impar, las funciones tienen paridad impar. Asimismo, se observa que la Mecánica cuántica permite a la partícula zonas prohibidas por la Mecánica clásica. Según ésta, las posiciones de la partícula donde mejor puede ser detectada son los extremos de la oscilación, ya que allí su velocidad es nula. En Mecánica cuántica, por el contrario, la densidad de probabilidad depende de  $n$ , tendiendo a los resultados de la Mecánica clásica al tender  $n$  a infinito.

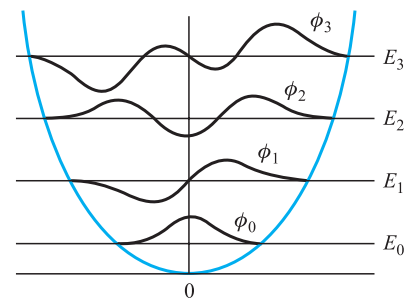


Figura 48.12. Funciones de onda asociadas a E.

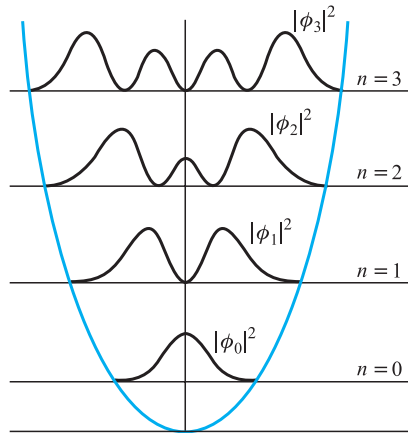


Figura 48.13. Densidad de probabilidad.

En la Figura 48.13 se representa la densidad de probabilidad para los mismos valores, correspondientes a  $n = 0, 1, 2$  y  $3$ .

$$\begin{aligned} \phi_0^* \phi_0 &= \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/2} e^{-z^2} & |\phi_1|^2 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} z^2 e^{-z^2} \\ |\phi_2|^2 &= \frac{1}{2\sqrt{n}} (2z^2 - 1)^2 e^{-z^2} & |\phi_3|^2 &= \frac{1}{3\sqrt{n}} z^2 (2z^2 - 3)^2 e^{-z^2} \end{aligned}$$

Calculemos ahora los valores esperados de las energías cinética y potencial para el oscilador armónico mecanocuántico. Lo haremos para el caso de mínima energía,  $n = 0$ , en el cual la función de onda dependiente del tiempo es:

$$\psi_0(z) = \pi^{-1/4} e^{-z^2/2} e^{-iE_0 t/\hbar}$$

La energía cinética  $T = 1/2 mv^2 = p^2/2m$ , llevará asociado un operador, que de acuerdo con la [48.29] será  $-\frac{1}{2m} \hbar \frac{\partial}{\partial x}$ , con lo cual, el valor esperado para la energía cinética se expresa:

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^*(z) T \psi_0(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^*(z) \left[ -\frac{1}{2m} \hbar \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 \psi(z) dz = \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dz \end{aligned}$$

Puesto que es

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{b} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{b} \frac{\partial}{\partial z} \right) = b \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

será,

$$\bar{T}_0 = -\frac{\hbar^2 b}{m} \int_0^{\infty} \psi_0^* \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} dz$$

La conjugada compleja de  $\psi_0$  es  $\psi_0^* = \pi^{-1/4} e^{-z^2/2} e^{iE_0 t/\hbar}$  y, calculando la derivada segunda de  $\psi_0$ , es

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial z} = \pi^{-1/4} (-z) e^{-z^2/2} e^{-iE_0 t/\hbar}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} = \pi^{-1/4} e^{-iE_0 t/\hbar} [(-1) e^{-z^2/2} + z^2 e^{-z^2/2}] = \pi^{-1/4} e^{-z^2/2} e^{-iE_0 t/\hbar} (z^2 - 1)$$

con todo ello se expresa:

$$\begin{aligned} \bar{T}_0 &= -\frac{\hbar^2 b}{m} \int_0^{\infty} \pi^{-1/2} e^{-z^2} (z^2 - 1) dz = \frac{\hbar^2 b}{m\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} (e^{-z^2} - z^2 e^{-z^2}) dz = \\ &= \frac{\hbar^2 b}{m\sqrt{\pi}} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{4} \right) = \frac{\hbar^2 b}{4m} = \frac{\hbar^2}{4m} \frac{\sqrt{mk}}{\hbar} = \\ &= \frac{\hbar}{4} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\hbar}{4} \omega = \frac{\hbar}{4} 2\pi\nu = \frac{h\nu}{4} = \frac{E_0}{2} \end{aligned}$$

Calculemos ahora el valor esperado para la energía potencial. Ésta puede escribirse de la forma:

$$U_0 = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} \frac{k}{b} z^2 = \frac{1}{2} \frac{\hbar k}{\sqrt{mk}} z^2 = \frac{1}{2} \hbar \omega z^2 = \frac{1}{2} \hbar \nu z^2$$

El valor esperado para  $U$  está dado por la expresión:

$$\bar{U}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^* \left[ \frac{\hbar \nu}{2} z^2 \right] \psi_0 dz$$

Lo cual se expresa de la forma:

$$\bar{U}_0 = \hbar \nu \int_0^{\infty} \pi^{-1/2} e^{-z^2} z^2 dz = \hbar \nu \pi^{-1/2} \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{\hbar \nu}{4} = \frac{E_0}{2}$$

Esta demostración, realizada para  $n = 0$ , es de validez general, verificándose para todo valor de  $n$ :

$$\bar{T}_n = \bar{U}_n = \frac{E_n}{2} \quad [48.81]$$

## 48.14 Formalismo de la mecánica cuántica

### Operadores

Un operador es todo ente matemático que al aplicarse a una función cualquiera de un cierto espacio la transforma en una nueva función del mismo espacio. Así son operadores, por ejemplo, los entes  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ , etc., cuya aplicación a una función  $\psi(x)$  da, respectivamente, la nueva función  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$  o  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ . Los operadores se suelen simbolizar con una letra mayúscula  $A$ , o de tipo gótico  $\mathcal{A}$ , o bien con una letra normal a la cual se le coloca encima un ángulo  $\hat{A}$ .

La suma o diferencia de operadores es un nuevo operador:

$$\hat{A} = \hat{a} + \hat{b}, \quad \hat{A}\psi = (\hat{a} + \hat{b})\psi = \hat{a}\psi + \hat{b}\psi$$

y

$$\hat{B} = \hat{a} - \hat{b}, \quad \hat{B}\psi = (\hat{a} - \hat{b})\psi = \hat{a}\psi - \hat{b}\psi$$

Es evidente que la adición o sustracción de operadores es conmutativa.

Un operador se dice que es lineal cuando verifica las relaciones:

$$\hat{A}(f_1 + f_2) = \hat{A}f_1 + \hat{A}f_2 \quad \text{y} \quad \hat{A}(Cf) = C\hat{A}f$$

En la que  $C$  es una constante. La linealidad de los operadores asegura el principio de superposición.

El producto de dos operadores es un nuevo operador  $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$ . El producto de operadores, en general, no es conmutativo. Cuando el producto de operadores  $\hat{A}\hat{B}$  actúa sobre una función  $(\hat{A}\hat{B})\psi$ , debe hacerlo primero el  $B$  y luego el  $A$ .

$$(\hat{A}\hat{B})\psi = \hat{A}(\hat{B}\psi) \quad [48.82]$$

Si actúa el operador  $(\hat{B}\hat{A})$ , será:

$$(\hat{B}\hat{A})\psi = \hat{B}(\hat{A}\psi)$$

En general, el resultado es distinto:

$$(\hat{A}\hat{B})\psi - (\hat{B}\hat{A})\psi = \hat{A}(\hat{B}\psi) - \hat{B}(\hat{A}\psi) \neq 0$$

en cuyo caso se dice que los operadores no conmutan.

Si el resultado de aplicar el operador  $(\hat{A}\hat{B})$  o el  $(\hat{B}\hat{A})$  es el mismo, entonces se dice que los operadores  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  conmutan y verifican:

$$(\hat{A}\hat{B})\psi = (\hat{B}\hat{A})\psi \quad \text{o} \quad \hat{A}(\hat{B}\psi) = \hat{B}(\hat{A}\psi)$$

### EJEMPLO 48.9 Conmutación de operadores

Veamos si conmutan o no los operadores siguientes:

$$\hat{A} = \frac{\partial}{\partial x} - 1 \quad \text{y} \quad \hat{B} = \frac{\partial}{\partial x} + 1$$

#### Solución:

Calculemos en primer lugar:

$$(\hat{A}\hat{B})f = \hat{A}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - 1\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} - f$$

Calculemos ahora:

$$(\hat{B}\hat{A})f = \hat{B}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - f\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + 1\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x} - f\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} - f$$

En consecuencia: es  $(\hat{A}\hat{B})f = (\hat{B}\hat{A})f$  y estos dos operadores sí conmutan.

## Operadores mecanocuánticos

En el Epígrafe 48.8 hemos obtenido la expresión de los operadores cantidad de movimiento,  $p$ , y energía,  $E$ :

$$\hat{p} \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{y} \quad \hat{E} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad [48.83]$$

Ahora explicitamos el cálculo del operador energía cinética. La expresión de ésta puede escribirse en función de la cantidad de movimiento:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Escribiendo la ecuación en términos de los operadores obtenemos el operador energía cinética:

Operador energía cinética

$$\hat{T} \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad [48.84]$$

El operador energía, deducido como suma de las energías cinética y potencial, se denomina operador hamiltoniano y su expresión es:

Operador hamiltoniano

$$\hat{H} \rightarrow T + U \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U \quad [48.85]$$

En tres dimensiones será:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U \quad [48.86]$$

El operador momento cinético se obtiene de la expresión de este  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , cuyas tres componentes son:

$$L_x = yp_z - zp_y; \quad L_y = zp_x - xp_z \quad y \quad L_z = xp_y - yp_x$$

Los operadores correspondientes son:

$$L_x = -i\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$L_y = -i\hbar \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad y \quad L_z = -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad [48.87]$$

Operador movimiento cinético

**EJEMPLO 48.10** Conmutador de los operadores posición y cantidad de movimiento

Comprobemos si los operadores posición,  $x$ , y cantidad de movimiento,  $p$ , conmutan.

**Solución:**

Los operadores posición,  $\hat{x} = x$  y cantidad de movimiento,  $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$  no conmutan, ya que es:

$$[\hat{x}, \hat{p}]\psi = \left[ x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right] \psi = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} x + i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (x\psi) =$$

$$= -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} x + i\hbar \psi + i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} x = i\hbar \psi$$

Por tanto, se verifica:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad [48.88]$$

**EJEMPLO 48.11** Conmutador de los operadores tiempo y energía

Comprobemos si los operadores tiempo  $t = t$  y energía  $E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  conmutan.

**Solución:**

Los operadores tiempo  $\hat{t} = t$  y energía  $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  no conmutan, ya que es:

$$[\hat{E}\hat{t} - \hat{t}\hat{E}]\psi = i\hbar \left( \psi + t \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - t i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = i\hbar \psi$$

Por tanto, se verifica:

$$[\hat{E}\hat{t} - \hat{t}\hat{E}] = i\hbar \quad [48.89]$$

### EJEMPLO 48.12 Conmutador de los operadores cantidad de movimiento y energía cinética

Comprobemos si los operadores cantidad de movimiento,  $p$ , y energía cinética,  $T$ , conmutan.

#### Solución:

Los operadores cantidad de movimiento,  $\hat{p}$ , y energía cinética para una partícula libre que se mueve en dirección del eje equis,  $\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ , sí conmutan. En efecto:

$$\begin{aligned} [\hat{p}, \hat{T}]\psi &= \left[ -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \psi = \\ &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) - \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left( -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \\ &= i \frac{\hbar^3}{2m} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \right) = 0 \end{aligned}$$

### Operador adjunto y operador hermítico

En el espacio vectorial de las funciones complejas de variable real, continuas, derivables y de cuadrado integrable, y en el dominio del intervalo cerrado  $[a, b]$  del cuerpo de números reales, se define el operador adjunto del  $\hat{A}$ , que simbolizaremos con  $\hat{A}'$ , mediante la expresión:

$$\int_a^b \psi_1^* \hat{A} \psi_2 dx = \int_a^b [\psi_2^* \hat{A}' \psi_1]^* dx = \int_a^b \psi_2 [\hat{A}' \psi_1]^* dx \quad [48.90]$$

Lo que puede expresarse mediante la notación establecida por Dirac de la forma:

$$\langle \psi_1 | \hat{A} \psi_2 \rangle = \langle \psi_2 | \hat{A}' \psi_1 \rangle^* = \langle \hat{A}' \psi_1 | \psi_2 \rangle \quad [48.91]$$

Por definición, se dice que un operador es hermítico cuando coincide con su adjunto,  $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ . Para un operador hermítico, las expresiones [48.90] y [48.91] se escriben, respectivamente:

$$\int_a^b \psi_1^* \hat{A} \psi_2 dx = \int_a^b [\psi_2^* \hat{A} \psi_1]^* dx = \int_a^b \psi_2 [\hat{A} \psi_1]^* dx \quad [48.92]$$

$$\langle \psi_1 | \hat{A} \psi_2 \rangle = \langle \psi_2 | \hat{A} \psi_1 \rangle^* = \langle \hat{A} \psi_1 | \psi_2 \rangle \quad [48.93]$$

Expresiones que son las condiciones de hermiticidad del operador  $\hat{A}$ .

Un operador hermítico es lineal si verifica:

$$\int \psi^* \hat{A} \varphi dx = \int \varphi (\hat{A} \psi)^* dx \quad [48.94]$$

En Mecánica cuántica toda magnitud física está asociada a un operador hermítico lineal, de aquí la gran importancia de este tipo de operadores.



## 48.15 Valores propios y funciones propias

Para cada operador  $\hat{A}$  existe un conjunto de funciones  $\varphi_n$  y de valores  $a_n$ , correspondientes con cada una de ellas, que verifican la ecuación:

$$\hat{A}\varphi_n(x) = a_n\varphi_n(x) \quad [48.95]$$

A las funciones  $\varphi_n$  se les denomina *funciones propias* y a los valores,  $a_n$ , *valores propios* del operador  $\hat{A}$ , los cuales dependen de las condiciones de contorno y de la naturaleza del operador.

En Mecánica cuántica todos los operadores son hermíticos, es decir, sus valores propios son reales y sus funciones propias ortogonales, verificando éstas la condición de ortogonalidad:

$$\int \psi_m^* \psi_n dx = 0 \quad m \neq n$$

En el caso de estar las funciones normalizadas, se cumplirá la condición de ortonormalidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n dx = \delta_{m,n} \quad [48.96]$$

siendo  $\delta_{m,n}$  la delta de Kronecker, cuyo valor es la unidad si es  $m = n$  y cero si es  $m \neq n$ .

## 48.16 Postulados de la mecánica cuántica

**Primero:** Existe una función de onda,  $\psi(x, t)$ , compleja y de cuadrado integrable que describe el sistema dinámico.

**Segundo:** A cada magnitud física le corresponde un operador mecanocuántico lineal y hermítico.

**Tercero:** Cuando se mide una cantidad de una cierta magnitud, los únicos valores que pueden obtenerse son los valores propios del operador cuántico correspondiente,  $\hat{A}\phi = a_n\phi$ .

**Cuarto:** El valor esperado en la medida de una magnitud de un sistema, en un estado cualquiera definido por la función de onda normalizada  $\phi(x)$  es:

$$\langle a \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x) \hat{A} \phi(x) dx \quad [48.97]$$

**Quinto:** La evolución del sistema en el tiempo está dada por la correspondiente ecuación de Schrödinger,  $\hat{H}\psi = E\psi$ .

El tercer postulado no es tal, ya que es un caso particular del cuarto. En efecto, si el sistema está en un estado propio, el valor esperado es:

$$\langle a \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^*(x) \hat{A} \varphi_n(x) dx$$

De acuerdo con la ecuación de valores propios es:

$$\langle a \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^*(x) a_n \varphi_n(x) dx = a_n$$

puesto que las funciones  $\varphi_n(x)$  están normalizadas, es decir, verifican:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^*(x)\varphi_n(x) dx = 1$$

Si el sistema está en un estado cualquiera, descrito por la función  $\psi(x)$  que no corresponde a ningún estado propio del sistema, podemos desarrollar la función de onda  $\psi(x)$  en términos de las funciones propias del operador correspondiente a la magnitud a medir, de la forma:

$$\psi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots = \sum c_n\varphi_n(x) \quad [48.98]$$

En la que son:

$$c_i = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\varphi_i dx \quad [48.99]$$

Con ello, el valor esperado se escribe:

$$\begin{aligned} \langle a \rangle &= \int \psi^*\hat{A}\psi dx = \int \sum_i c_i^*\varphi_i^*\hat{A}\left(\sum_j c_j\varphi_j\right) dx = \int \sum_i c_i^*\varphi_i^* \sum_j c_j\hat{A}\varphi_j dx = \\ &= \int \sum_i c_i^*\varphi_i^* \sum_j c_j a_j \varphi_j dx = \int \sum_i \sum_j c_i^*\varphi_i^* c_j a_j \varphi_j dx = \sum_i \sum_j a_j c_i^* c_j \int \varphi_i^* \varphi_j dx \end{aligned}$$

De acuerdo con la condición de ortonormalidad, es:

$$\langle a \rangle = \sum_i \sum_j a_j c_i^* c_j \delta_{ij} = \sum_i a_i c_i^2 \quad [48.100]$$

Por tanto, *la probabilidad de que el resultado de la medición de una magnitud coincida con el valor propio  $a_i$ , del operador asociado  $A$ , es igual al cuadrado del módulo del coeficiente  $c_i$  en el desarrollo de la función de onda en serie de funciones propias del operador  $A$ .*

Es adecuado demostrar que la suma de estas probabilidades es la unidad, es decir, que se verifica:

$$\sum c_i^2 = 1$$

En efecto, la condición de normalización de la función de onda:

$$\int \psi^*\psi dx = 1$$

se escribe:

$$\int \left(\sum_i c_i^*\varphi_i^*\right)\left(\sum_j c_j\varphi_j\right) dx = 1$$

La cual puede ponerse de la forma:

$$\sum_i \sum_j c_i^* c_j \int \varphi_i^* \varphi_j dx = 1$$

Teniendo en cuenta la condición de ortonormalidad, es:

$$\sum_i \sum_j c_i^* c_j \delta_{ij} = 1$$

Por tanto, resulta que debe ser:

$$\sum_i c_i^2 = 1$$

## 48.17 Medida simultánea de dos magnitudes físicas. Principio de incertidumbre de Heisenberg

Sean dos magnitudes  $A$  y  $B$ , y sus respectivos operadores asociados  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$ . Si la función de onda  $\psi$  es función propia de ambos operadores, se puede medir ambas magnitudes simultáneamente.

En efecto por ser  $\psi$  función propia de  $\hat{A}$  cumple:

$$\hat{A}\psi = a\psi$$

en la que  $a$  es un valor propio de  $\hat{A}$ . Por ser también  $\psi$  función propia de  $B$ , verifica:

$$\hat{B}\psi = b\psi$$

en la que  $b$  es un valor propio de  $\hat{B}$ .

En consecuencia, se verificarán:

$$\hat{A}\hat{B}\psi = \hat{A}b\psi = b\hat{A}\psi = ba\psi$$

y

$$\hat{B}\hat{A}\psi = \hat{B}a\psi = a\hat{B}\psi = ab\psi$$

Por tanto, es  $(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) = 0$ , y los dos operadores conmutan. Recíprocamente, si dos operadores conmutan, existen funciones propias comunes y las magnitudes físicas asociadas pueden medirse simultáneamente.

Si los operadores no conmutan, es decir, no tienen función propia común alguna, en una serie de medidas de la magnitud  $A$ , obtendremos unos valores cuya desviación cuadrática media llamaremos  $\Delta a^2$ , y análogamente, para la media de  $B$ , obtendremos una serie de valores, cuya desviación cuadrática media será  $\Delta b^2$ . Vamos a demostrar el denominado principio de incertidumbre de Heisenberg, cuya expresión general es:

$$\Delta a \cdot \Delta b \geq \frac{\hbar}{2} \quad [48.101]$$

Para ello, vamos a partir de una relación matemática denominada desigualdad de Schwartz,

$$4 \int f_1^* f_1 dx \int f_2^* f_2 dx \geq \left[ \int (f_1^* f_2 + f_2^* f_1) dx \right]^2 \quad [48.102]$$

La desviación cuadrática media de una serie de medidas de la magnitud  $A$  se expresa:

$$\Delta a^2 = \int (\hat{A}^* - a)\psi^*(\hat{A} - a)\psi dx = \int f_1^* f_1 dx \quad [48.103]$$

en la que es:

$$f_1 = (\hat{A} - a)\psi$$

Análogamente, para la magnitud  $B$ , es:

$$\Delta b^2 = \int (\hat{B} - b)\psi^*(\hat{B} - b)\psi dx = \int [-i(\hat{B}^* - b)\psi^*][i(\hat{B} - b)\psi] dx = \int f_2^* f_2 dx \quad [48.104]$$

siendo:

$$f_2 = i(\hat{B} - b)\psi$$

Además, puesto que el operador  $\hat{A} - a$  debe ser hermético, será:

$$\int f_1^* f_2 dx = \int (\hat{A}^* - a) \psi^* i (\hat{B} - b) \psi dx = i \int \psi^* [(\hat{A} - a)(\hat{B} - b) \psi] dx$$

Análogamente, puesto que el operador  $\hat{B} - b$  también debe ser hermético, es:

$$\int f_2^* f_1 dx = \int [-i(\hat{B}^* - b) \psi^*][(\hat{A} - a) \psi] dx = -i \int \psi^* [(\hat{B} - b)(\hat{A} - a) \psi] dx$$

Por ello, resulta ser:

$$\begin{aligned} \int (f_1^* f_2 + f_2^* f_1) dx &= i \int \psi^* [(\hat{A} - a)(\hat{B} - b) - (\hat{B} - b)(\hat{A} - a) \psi] dx = \\ &= i \int \psi^* [\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}] \psi dx \end{aligned}$$

De acuerdo con [48.88] y [48.89], para los operadores posición y cantidad de movimiento y los operadores tiempo y energía, es  $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = i\hbar$ , y puesto que la función de onda está normalizada, se verificará:

$$\int (f_1^* f_2 + f_2^* f_1) dx = -\hbar \quad [48.105]$$

Llevando a la desigualdad de Schwartz los valores [48.94], [48.95] y [48.96], resulta:

$$4\Delta a^2 \cdot \Delta b^2 \geq \hbar^2$$

es decir,

Principio de incertidumbre

$$\Delta a \cdot \Delta b \geq \frac{\hbar}{2} \quad [48.106]$$

Este principio de incertidumbre pone de manifiesto el carácter no determinista de la Mecánica cuántica. Si aumentamos la precisión en la medida de la posición, forzosamente irá en detrimento de la precisión en la medida de la cantidad de movimiento y, análogamente, para las magnitudes tiempo y energía.

El determinismo de la Mecánica clásica sigue siendo válido a escala macroscópica porque la indeterminación que establece [48.106], dada la pequeñez de  $\hbar$ , es mucho menor que los errores cometidos en los métodos de medida. Así, el estudio del movimiento de un electrón en un campo eléctrico macroscópico puede hacerse por los métodos clásicos sin error apreciable, mientras que el estudio del movimiento dentro de un átomo exige el empleo de la Mecánica cuántica, como se puso de manifiesto en el Ejemplo 48.5.

### 49.1 La ecuación de Schrödinger

El átomo de hidrógeno está formado por un núcleo que únicamente contiene un protón, por tanto, con masa  $m_p$  y carga positiva  $+e$ , alrededor del cual se mueve un solo electrón de masa  $m_e$  y carga  $-e$ . El electrón debe moverse dentro del campo eléctrico creado por la carga puntual del protón,  $+e$ , que es un campo potencial cuya expresión es:

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r} \quad [49.1]$$

en la cual  $r$  es la distancia del electrón al centro del átomo (Figura 49.1).

La ecuación de Schrödinger para el movimiento de este electrón es:  $H\phi = E\phi$ . Teniendo en cuenta la [48.77] se escribe:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 \phi + U\phi = E\phi$$

La cual puede ponerse de la forma:

$$\nabla^2 \phi + \frac{2m_e}{\hbar^2} (E - U)\phi = 0$$

Por la simetría esférica que presenta el problema, es conveniente expresar esta ecuación en coordenadas esféricas  $r, \theta, \varphi$  (Apéndice D), resultando:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m}{\hbar} (E - U)\phi = 0 \quad [49.2]$$

Esta ecuación se puede resolver por el método de separación de variables, haciendo:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = R(z)Z(\theta)F(\varphi) \quad [49.3]$$

- 49.1. La ecuación de Schrödinger
- 49.2. Solución de las ecuaciones. Números cuánticos
- 49.3. Números cuánticos y degeneración
- 49.4. Funciones propias
- 49.5. Densidad de probabilidad para el electrón
- 49.6. Momento cinético orbital
- 49.7. Momento magnético orbital. Efecto Zeeman. Precesión de Larmor
- 49.8. Spin del electrón. Experiencia de Stern-Gerlach
- 49.9. Interacción espín-órbita
- 49.10. Momento cinético total
- 49.11. Los números cuánticos y el modelo atómico

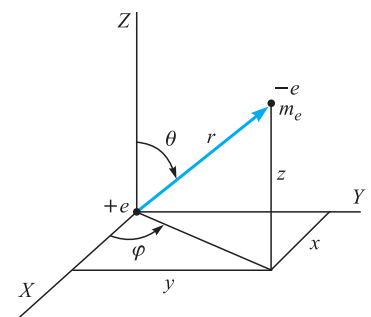


Figura 49.1. Posicionamiento del electrón.

Ello dará lugar a tres ecuaciones diferenciales, cada una de una sola variable,  $r$ ,  $\theta$  y  $\varphi$ . En efecto:

calculemos en [49.3] los valores de  $\frac{\partial \phi}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial \phi}{\partial \theta}$  y  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = ZF \frac{dR}{dr} \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = RF \frac{dZ}{d\theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = RZ \frac{d^2 F}{d\varphi^2}$$

Llevando estos valores a [49.2], se escribe:

$$\begin{aligned} \frac{ZF}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{RF}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dZ}{d\theta} \right) + \frac{RZ}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} + \\ + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) RZF = 0 \end{aligned}$$

Multiplicando por  $\frac{r^2 \sin^2 \theta}{RZF}$ , puede ponerse de la forma:

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{Z} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dZ}{d\theta} \right) + \frac{2mr^2 \sin^2 \theta}{\hbar^2} (E - U) = - \frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\varphi^2}$$

Puesto que el primer miembro es independiente de  $\varphi$ , la única forma de que siempre se verifique la igualdad es que ambos miembros sean iguales a una constante, es decir:

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} = -m^2 \quad [49.4]$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{Z} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dZ}{d\theta} \right) + \frac{2mr^2 \sin \theta}{\hbar^2} (E - U) = m^2$$

Esta ecuación también es de variables separadas y, previa división por  $\sin^2 \theta$ , puede escribirse de la forma:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} (E - U) = \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{Z \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dZ}{d\theta} \right)$$

El primer miembro es función únicamente de  $r$ , mientras que el segundo es función únicamente de  $\theta$ , por tanto, la única posibilidad es que ambos sean iguales a una nueva constante:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} (E - U) = l(l + 1) \quad [49.5]$$

$$\frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{Z \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dZ}{d\theta} \right) = l(l + 1) \quad [49.6]$$

En definitiva, hemos reducido la ecuación en derivadas parciales [49.2], que dependía de tres variables, a tres ecuaciones diferenciales ordinarias [49.4], [49.5] y [49.6], cada una de las cuales depende de una sola variable.

## 49.2 Solución de las ecuaciones. Números cuánticos

### Función $F(\varphi)$

La solución de la Ecuación [49.4] es de la forma:

$$F = A e^{im\varphi} \quad [49.7]$$

lo cual puede comprobarse fácilmente sustituyendo en aquélla. La función  $F$  debe dar los mismos valores para  $\varphi$  y  $\varphi + 2\pi$ , puesto que en ambos casos debe describir la misma situación real del electrón. Por tanto, debe verificarse:

$$e^{im0} = e^{im2\pi}$$

es decir,

$$1 = \cos 2\pi m + i \operatorname{sen} 2\pi m$$

Lo cual únicamente se verifica para valores enteros de  $m$ ,

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad [49.8] \quad \text{Número cuántico magnético}$$

En consecuencia, las únicas funciones [49.7] que son solución física aceptable están dadas por:

$$F_m = A e^{im\varphi} \quad [49.9]$$

con  $m$  dado por la [49.8], al cual se le llama *número cuántico magnético*. La constante  $A$  se obtiene de la condición de normalización:

$$\int_0^{2\pi} F_m^* F_m d\varphi = 1$$

$$\int_0^{2\pi} A^* e^{-im\varphi} A e^{im\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} A^2 d\varphi = A^2 2\pi = 1$$

$$A = (2\pi)^{-1/2}$$

Con la cual, la función  $F(\varphi)$  se expresa:

$$F(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \quad [49.10]$$

### Función $Z(\theta)$

Para resolver la Ecuación [49.6] conviene hacer el cambio de variable  $y = \cos \theta$ , con lo cual, y puesto que es:

$$\frac{dZ}{d\theta} = \frac{dZ}{dy} \frac{dy}{d\theta} = -\operatorname{sen} \theta \frac{dZ}{dy}$$

aquella se escribe:

$$\frac{d}{dy} \left[ (1 - y^2) \frac{dZ}{dy} \right] + \left[ l(l + 1) - \frac{m^2}{1 - y^2} \right] Z = 0$$

que puede ponerse de la forma:

$$(1 - y^2) \frac{d^2 Z}{dy^2} - 2y \frac{dZ}{dy} + \left[ l(l + 1) - \frac{m^2}{1 - y^2} \right] Z = 0$$

La solución de esta ecuación son las funciones asociadas de Legendre:

$$Z_{l,m}(y) = A_{l,m}(1 - y^2)^{m/2} \frac{d^m Z_l(y)}{dy^m} \quad [49.11]$$

con la condición de ser:

$$l > m \quad [49.12]$$

Número cuántico orbital

Al parámetro  $l$ , se le denomina *número cuántico orbital*, y  $Z_l(y)$  son los polinomios de Legendre, cuya expresión general es:

$$Z_l(y) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l (y^2 - 1)^l}{dy^l} \quad [49.13]$$

La condición de normalización de [49.11] permitirá calcular  $A_{l,m}$ .

### Función $R(r)$

Para la resolución de la [49.5] realicemos en ella la derivación indicada, luego sustituyamos el valor de  $U$  dado por la [49.1] y, finalmente, multipliquemos toda ella por  $R/r^2$ ; con todo lo cual se escribe:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[ \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0 \quad [49.14]$$

Si hacemos el cambio de variable  $\rho = 2\alpha r$ , y puesto que son:

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} = 2\alpha \frac{dR}{d\rho}$$

y

$$\frac{d^2 R}{dr^2} = 4\alpha^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2}$$

Al sustituir en la [49.14], esta se expresa de la forma:

$$4\alpha^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} 4\alpha^2 \frac{dR}{d\rho} + \left[ \frac{2mE}{\hbar^2} + \frac{m e^2 \alpha}{\pi\epsilon_0 \hbar^2 \rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} 4\alpha^2 \right] R = 0$$

Si ahora hacemos:

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = -\alpha^2 \quad [49.15]$$

y dividimos toda ella por  $4\alpha^2$  resulta:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left[ -\frac{1}{4} + \frac{m e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 \alpha \rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] R = 0$$

Llamando:

$$n = \frac{m e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 \alpha} \quad [49.16]$$

podemos escribir:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left[ \frac{n}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} - \frac{1}{4} \right] R = 0 \quad [49.17]$$



Ecuación cuya solución en función de los polinomios asociados de Laguerre se expresa:

$$R_{n,l}(\rho) = A_{n,l} e^{-\rho/2} \rho^l L_{n-l-1, 2l+1}(\rho) \quad [49.18]$$

En la cual, para tener validez física la solución, debe ser:

$$n \geq l + 1 \quad [49.19]$$

y verificarse:

$$L_{n-l-1, 2l+1}(\rho) = \frac{d^{2l+1}[L_{n-l}(\rho)]}{d\rho^{2l+1}} \quad [49.20]$$

Siendo los polinomios de Laguerre, definidos por la expresión:

$$L_{n-l}(\rho) = e^\rho \frac{d^{n-l}(\rho^{n-l} e^{-\rho})}{d\rho^{n-l}} \quad [49.21]$$

La condición de normalización de [49.18] permitirá calcular  $A_{n,l}$ .

### Cuantización de la energía

Si se eleva al cuadrado la [49.16], se sustituye en ella la [49.15] y se despeja el valor de la energía, resulta:

$$E_n = -\frac{m e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} = -\frac{13,6}{n^2} \text{ eV} \quad [49.22]$$

Por tanto, la energía está cuantizada, siendo  $n$  el *número cuántico principal*, cuyos valores posibles son  $n = 1, 2, 3, \dots$ . La [49.22] es exactamente la misma predicha por la teoría de Bohr, lo cual constituyó una de las primeras validaciones de la Mecánica cuántica.

### Número cuántico principal

Si en la expresión [49.15] se introduce el valor de la energía dado por la [49.22], resulta para  $\alpha$  el valor:

$$\alpha = \frac{m e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n} = \frac{1}{nr_0} \quad [51.23]$$

siendo  $r_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 0,529 \times 10^{-10}$  m, el llamado radio de Bohr. En consecuencia, el valor de  $\rho$  es:

$$\rho = \frac{2}{nr_0} r$$

## 49.3 Números cuánticos y degeneración

Los números cuánticos  $m$ ,  $l$  y  $n$ , cuyos valores posibles están dados por las Ecuaciones [49.8], [49.12] y [49.19], respectivamente, pueden también expresarse de la siguiente forma:

*Número cuántico principal*  $n = 1, 2, 3, \dots$

*Número cuántico orbital*  $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  [49.24]

*Número cuántico magnético*  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$

Se observa, que para cada valor de  $n$  hay  $n$  valores posibles de  $l$ , y para cada uno de estos hay  $2l + 1$  valores posibles de  $m$ , luego para cada estado, determinado

por tres valores:  $l, m, n$ , con energía  $E_n$ , hay  $N$  estados asociados que tienen la misma energía, pero distintos números cuánticos; fenómeno que se conoce con el nombre de *degeneración*. Para cada valor de  $n$  hay un solo valor de la energía, dado por la [49.22] y hay  $N$  estados degenerados, siendo:

$$N = \sum_0^{n-1} (2l + 1) = n^2$$

En la Tabla 49.1 se recogen, para cada valor de  $n = 1, 2, 3$ , los valores posibles de  $l$  y  $m$ , así como el número de estados degenerados para cada valor de  $n$ .

**Tabla 49.1.** Números cuánticos y estados degenerados.

$n$	1	2			3									
$l$	0	0	1		0	1	2							
$m$	0	0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	1	-1	2	-2
Estados degenerados	1	4 = 2 <sup>2</sup>			9 = 3 <sup>2</sup>									

### 49.4 Funciones propias

Las funciones que definen los estados estacionarios del átomo de hidrógeno están dadas por la expresión:

$$\phi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi) = A_{n,l,m} R_{n,l}(r) Z_{l,m}(\theta) F_m(\varphi) \tag{49.25}$$

En la cual, las diferentes funciones que intervienen están dadas por las expresiones:

Función  $F(\varphi)$

$$F_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \tag{49.26}$$

Función  $Z(\theta)$

$$Z_{l,m}(y) = (1 - y^2)^{m/2} \frac{d^m Z_l(y)}{dy^m} \tag{49.27}$$

En la que es:

$$Z_l(y) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l (y^2 - 1)^l}{dy^l} \tag{49.28}$$

e  $y = \cos \theta$ .

Función  $R(r)$

$$R_{n,l}(\rho) = e^{-\rho/2} \rho^l L_{n+l, 2l+1}(\rho) \tag{49.29}$$

En la que son:

$$L_{n+l, 2l+1}(\rho) = \frac{d^{2l+1} [L_{n+l}(\rho)]}{d\rho^{2l+1}} \tag{49.30}$$

$$L_{n+l}(\rho) = e^\rho \frac{d^{n+l} (\rho^{n+l} e^{-\rho})}{d\rho^{n+l}} \tag{49.31}$$

con

$$\rho = 2\alpha r = \frac{2r}{nr_0} \tag{49.32}$$

La normalización de la función [49.25] puede hacerse imprimiéndole directamente a ella la condición de normalización, o normalizando por separado cada una de las funciones que en ella intervienen. Nosotros seguiremos este segundo procedimiento. La función  $F(\varphi)$ , [49.26], ya ha sido normalizada; ahora debemos normalizar las  $Z(\theta)$  y  $R(r)$ . Para ello, calcularemos las primeras funciones de cada una de ellas y normalizaremos cada una de éstas en concreto.

En la Tabla 49.2 se recogen los valores de  $Z_{l,m}$  sin normalizar y normalizados, para los valores de  $l$  y  $m$  que se indican.

**Tabla 49.2.** Expresiones de  $Z(\theta)$  sin normalizar y normalizadas.

$l$	$Z_l$	$m$	$Z_{l,m}$	
			Sin normalizar	Normalizadas
0	$Z_0 = 1$	0	$Z_{0,0} = 1$	$Z_{0,0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
1	$Z_1 = y$	0	$Z_{1,0} = y = \cos \theta$	$Z_{1,0} = \frac{\sqrt{6}}{2} \cos \theta$
		1	$Z_{1,1} = (1 - y^2)^{1/2} = \text{sen } \theta$	$Z_{1,1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen } \theta$
2	$Z_2 = \frac{3y^2 - 1}{2}$	0	$Z_{2,0} = \frac{1}{2}(3y^2 - 1) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$	$Z_{2,0} = \frac{\sqrt{10}}{4}(3 \cos^2 \theta - 1)$
		1	$Z_{2,1} = (1 - y^2)^{1/2}3y = 3 \text{sen } \theta \cos \theta$	$Z_{2,1} = \frac{\sqrt{15}}{2} \text{sen } \theta \cos \theta$
		2	$Z_{2,2} = (1 - y^2)3 = 3 \text{sen}^2 \theta$	$Z_{2,2} = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{sen}^2 \theta$
3	$Z_3 = \frac{5y^3 - 3y}{2}$	0	$Z_{3,0} = \frac{1}{2}(5y^3 - 3y) = \frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$	$Z_{3,0} = \frac{\sqrt{14}}{4}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$
		1	$Z_{3,1} = \frac{1}{2}(15y^2 - 3)(1 - y^2)^{1/2} = \frac{3}{2} \text{sen } \theta(5 \cos^2 \theta - 1)$	$Z_{3,1} = \frac{\sqrt{42}}{8} \text{sen } \theta(5 \cos^2 \theta - 1)$
		2	$Z_{3,2} = (1 - y^2)15y = 15 \text{sen}^2 \theta \cos \theta$	$Z_{3,2} = \frac{\sqrt{105}}{4} \text{sen}^2 \theta \cos \theta$
		3	$Z_{3,3} = (1 - y^2)^{3/2}15 = 15 \text{sen}^3 \theta$	$Z_{3,3} = \frac{\sqrt{70}}{8} \text{sen}^3 \theta$

**EJEMPLO 49.1 Normalización de la función  $Z_{2,1}$**

Realicemos la normalización de la función:

$$Z_{2,1} = 3y(1 - y^2)^{1/2}$$

En la cual, por ser  $y = \cos \theta$ , los límites de variación de  $y$  serán de  $-1$ ,  $+1$ .

**Solución:**

La función normalizada será de la forma:

$$Z_{2,1} = A_{2,1}3y(1 - y^2)^{1/2}$$

La condición de normalización se expresa:

$$9A_{2,1}^2 \int_{-1}^1 y^2(1 - y^2) dy = 1$$

Realizada la integración da para  $A_{2,1}^2$  el valor:

$$A_{2,1} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

Con lo cual, la función normalizada se expresa:

$$Z_{2,1} = \frac{\sqrt{15}}{6} 3y(1 - y^2)^{1/2} = \frac{\sqrt{15}}{2} \text{sen } \theta \cos \theta$$

Asimismo, en la Tabla 49.3 se recogen los valores de las expresiones  $L_{n+l}(\rho)$  [49.31], y  $L_{n+l,2l+1}(\rho)$  [49.30].

**Tabla 49.3.** Expresiones de  $L_{n+l}(\rho)$  y  $L_{n+l,2l+1}(\rho)$ .

$n$	$l$	$L_{n+l}(\rho)$	$L_{n+l,2l+1}(\rho)$
1	0	$L_1(\rho) = 1 - \rho$	$L_{1,1}(\rho) = -1$
2	0	$L_2(\rho) = 2 - 4\rho + \rho^2$	$L_{2,1}(\rho) = 2\rho - 4$
	1	$L_3(\rho) = 6 - 18\rho + 9\rho^2 - \rho^3$	$L_{3,3}(\rho) = -6$
3	0	$L_3(\rho) = 6 - 18\rho + 9\rho^2 - \rho^3$	$L_{3,1}(\rho) = -18 + 18\rho - 3\rho^2$
	1	$L_4(\rho) = 24 - 96\rho + 72\rho^2 - 16\rho^3 + \rho^4$	$L_{4,3}(\rho) = -96 + 24\rho$
	2	$L_5(\rho) = 120 - 600\rho + 600\rho^2 - 200\rho^3 + 25\rho^4 - \rho^5$	$L_{5,5}(\rho) = -120$

La condición de normalización de la función de onda [49.25] expresa que el electrón se encuentra con toda certeza en algunos de los elementos de volumen del espacio, lo que en coordenadas esféricas (Apéndice D) se expresa:

$$A_{n,l,m}^2 \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \phi^*(r, \theta, \varphi) \phi(r, \theta, \varphi) r^2 \text{sen } \theta dr d\theta d\varphi = 1$$

o bien de la forma,

$$A_{n,l,m}^2 \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R_{n,l}^2(r) Z_{l,m}^2(\theta) F_m^2(\varphi) r^2 \text{sen } \theta dr d\theta d\varphi = 1 \quad [49.33]$$

Puesto que las funciones de onda  $Z(\theta)$  y  $F(\varphi)$  ya están normalizadas, se verificará:

$$A_{l,m}^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Z_{l,m}^2(\theta) F_m^2(\varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 1$$

En consecuencia, la condición de normalización de la función  $R(r)$  se expresa:

$$A_{n,l}^2 \int_0^\infty R_{n,l}^2(r) r^2 \, dr = 1 \quad [49.34]$$

### EJEMPLO 49.2 Normalización de la función $R_{1,0}(r)$

Normalicemos la función  $R_{1,0}(r) = e^{-r/r_0}$ .

#### Solución:

La condición de normalización se expresa:

$$A^2 \int_0^\infty e^{-2r/r_0} r^2 \, dr = 1$$

Haciendo el cambio de variable  $y = 2r/r_0$ , será  $dy = 2/r_0 \, dr$ , y la condición de normalización se escribe:

$$A^2 \int_0^\infty \frac{r_0^3}{8} y^2 e^{-y} \, dy = 1$$

La cual, integrada da:

$$A^2 \frac{r_0^3}{8} \gamma(3) = A^2 \frac{r_0^3}{8} (3 - 1)! = 1$$

De donde, es:

$$A = 2r_0^{-3/2}$$

Con lo cual, la expresión de la función normalizada es:

$$R_{1,0}(r) = 2r_0^{-3/2} e^{-r/r_0}$$

### EJEMPLO 49.3 Normalización de la función $R_{2,1}(r)$

Normalicemos la función  $R_{2,1}(r) = \frac{6r}{r_0} e^{-r/2r_0}$ .

#### Solución:

La condición de normalización se expresa:

$$A^2 \int_0^\infty \frac{36r^2}{r_0^2} e^{-r/r_0} r^2 \, dr = 1$$

Haciendo el cambio de variable  $\frac{r}{r_0} = y$ , será  $dr = r_0 \, dy$ , y la condición de normalización se escribe:

$$\frac{36A^2}{r_0^2} \int_0^\infty r_0^5 y^4 e^{-y} \, dy = 1$$

La cual, integrada da:

$$36r_0^3 A^2 \gamma(5) = 36r_0^3 A^2 (5 - 1)! = 1$$

De donde, es:

$$A_{2,1} = \frac{1}{12\sqrt{6}r_0^{3/2}}$$

Con lo cual, la expresión de la función normalizada es:

$$R_{2,1}(r) = \frac{\sqrt{6}}{12} \frac{r}{r_0^{5/2}} e^{-r/2r_0}$$

En la Tabla 49.4 se expresan las funciones  $R(\rho)$  y  $R(r)$ , para los números cuánticos que se indican.

**Tabla 49.4.** Expresiones de las funciones  $R(\rho)$  y  $R(r)$ .

$R_{n,l}(\rho)$	$R_{n,l}(r)$
$R_{1,0}(\rho) = e^{-\rho/2}$	$R_{1,0}(r) = \frac{2}{r_0^{3/2}} e^{-r/r_0}$
$R_{2,0}(\rho) = (4 - 2\rho)e^{-\rho/2}$	$R_{2,0}(r) = \frac{\sqrt{2}}{2r_0^{3/2}} \left(1 - \frac{r}{2r_0}\right) e^{-r/2r_0}$
$R_{2,1}(\rho) = 6\rho e^{-\rho/2}$	$R_{2,1}(r) = \frac{\sqrt{6}}{12} \frac{r}{r_0^{5/2}} e^{-r/2r_0}$
$R_{3,0}(\rho) = (18 - 18\rho + 3\rho^2)e^{-\rho/2}$	$R_{3,0}(r) = \frac{2\sqrt{3}}{243} \left(27 - 18\frac{r}{r_0} + 2\frac{r^2}{r_0^2}\right) e^{-r/3r_0}$
$R_{3,1}(\rho) = (96 - 24\rho)\rho e^{-\rho/2}$	$R_{3,1}(r) = \frac{2\sqrt{6}}{243} \frac{r}{r_0^{5/2}} \left(6 - \frac{r}{r_0}\right) e^{-r/3r_0}$
$R_{3,2}(\rho) = 120\rho^2 e^{-\rho/2}$	$R_{3,2}(r) = \frac{2\sqrt{30}}{1215} \frac{r^2}{r_0^{7/2}} e^{-r/3r_0}$

En la Tabla 49.5 (véase la página siguiente) se expresan las diez primeras funciones de onda normalizadas,  $\phi_{n,l,m}$ , correspondientes a cada una de las ternas  $n, l, m$ , que se indican.

### 49.5 Densidad de probabilidad para el electrón

La densidad de probabilidad para el electrón en el átomo de hidrógeno es:

$$\phi^* \phi = |\phi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi)|^2 = (F^*F)(R^*R)(Z^*Z) = |F(\varphi)|^2 |R(r)|^2 |Z(\theta)|^2$$

Usando la [49.10], se comprueba que es  $F^*F = 1/2\pi$ , independiente de  $\varphi$  y, por tanto, la densidad de probabilidad tiene simetría alrededor del eje de las zetas, expresándose:

$$\phi^* \phi = \frac{1}{2\pi} |R(r)|^2 |Z(\theta)|^2 \tag{49.35}$$

La probabilidad de encontrar al electrón en un elemento de volumen es:

$$\phi^* \phi dV = \frac{1}{2\pi} |R(r)|^2 |Z(\theta)|^2 dV \tag{49.36}$$

**Tabla 49.5.** Expresiones de la función de onda normalizada.

$n$	$l$	$m$	$\phi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi)$
1	0	0	$\phi_{1,0,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi} r_0^{3/2}} e^{-r/r_0}$
2	0	0	$\phi_{2,0,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi} (2r_0)^{3/2}} \left(1 - \frac{r}{2r_0}\right) e^{-r/2r_0}$
2	1	0	$\phi_{2,1,0} = \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{\pi}} \frac{r}{r_0^{5/2}} e^{-r/2r_0} \cos \theta$
2	1	1	$\phi_{2,1,1} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \frac{r}{r_0^{5/2}} e^{-r/2r_0} \operatorname{sen} \theta e^{i\varphi}$
3	0	0	$\phi_{3,0,0} = \frac{\sqrt{3}}{243\sqrt{\pi} r_0^{5/2}} \left(27 - 18 \frac{r}{r_0} + 2 \frac{r^2}{r_0^2}\right) e^{-r/3r_0}$
3	1	0	$\phi_{3,1,0} = \frac{\sqrt{2}}{81\sqrt{\pi}} \frac{r}{r_0^{5/2}} \left(6 - \frac{r}{r_0}\right) e^{-r/3r_0} \cos \theta$
3	1	1	$\phi_{3,1,1} = \frac{1}{81\sqrt{\pi}} \frac{r}{r_0^{5/2}} \left(6 - \frac{r}{r_0}\right) e^{-r/3r_0} \operatorname{sen} \theta e^{i\varphi}$
3	2	0	$\phi_{3,2,0} = \frac{\sqrt{6}}{486\sqrt{\pi}} \frac{r^2}{r_0^{7/2}} e^{-r/3r_0} (3 \cos^2 \theta - 1)$
3	2	1	$\phi_{3,2,1} = \frac{1}{81\sqrt{\pi}} \frac{r^2}{r_0^{7/2}} e^{-r/3r_0} \operatorname{sen} \theta \cos \theta e^{i\varphi}$
3	2	2	$\phi_{3,2,2} = \frac{1}{162\sqrt{\pi}} \frac{r^2}{r_0^{7/2}} e^{-r/3r_0} \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta e^{i2\varphi}$

Utilizando el elemento de volumen de esféricas (Apéndice D) se escribe:

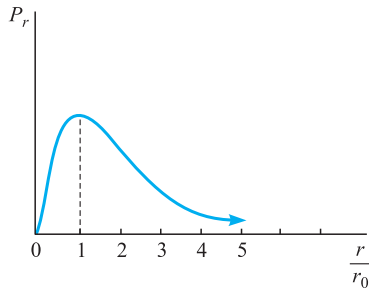
$$\phi^* \phi dV = \frac{1}{2\pi} R^2(r) Z^2(\theta) r^2 \operatorname{sen} \theta dr d\theta d\varphi \quad [49.37]$$

Cuya integración es:

$$\begin{aligned} \int_V \phi^* \phi dV &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{sen} \theta Z^2(\theta) d\theta \int_0^{r_1} r^2 R^2(r) dr = \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{sen} \theta Z^2(\theta) d\theta \int_0^{r_1} r^2 R^2(r) dr \end{aligned} \quad [49.38]$$

En el estado fundamental del átomo de hidrógeno  $(n, l, m) = (1, 0, 0)$ , tomando el valor de  $Z_{0,0}$  de la Tabla 49.2 y el de  $R_{1,0}$  de la Tabla 49.4, la probabilidad de encontrar al electrón se expresa:

$$\begin{aligned} P &= \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta \frac{1}{2} d\theta \int_0^{r_1} r^2 \frac{4}{r_0^3} e^{-2r/r_0} dr = [-\cos \theta]_0^\pi \frac{1}{2} \int_0^{r_1} r^2 \frac{4}{r_0^3} e^{-2r/r_0} dr = \\ &= \int_0^{r_1} 4 \frac{r^2}{r_0^3} e^{-2r/r_0} dr \end{aligned} \quad [49.39]$$



**Figura 49.2.** Probabilidad de encontrar al electrón a la distancia  $r$ .

La cual es también independiente de  $\theta$ , por lo que el estado fundamental presenta simetría esférica y la [49.39] nos da la probabilidad de encontrar al electrón dentro de la distancia  $r_1$  al centro del átomo. La densidad de probabilidad radial, en este caso es:

$$P_r = 4 \frac{r^2}{r_0^3} e^{-2r/r_0} \quad [49.40]$$

En la Figura 49.2 se representa la función  $P_r$ , cuyo máximo se encuentra a la distancia  $r = r_0$ . Como ya se calculó en el ejercicio (48.6).

#### EJEMPLO 49.4

Un átomo de hidrógeno se encuentra en su estado fundamental, calculemos la probabilidad de encontrar al electrón dentro de la distancia  $r_1 = 1,5r_0$ .

#### Solución:

La probabilidad buscada se obtiene de la [49.39]. Para su integración debemos hacer el cambio de variable  $x = \frac{2r}{r_0}$ . Con lo cual es  $dx = \frac{2}{r_0} dr$  y la probabilidad se expresa:

$$P = \int_0^{1,5} \frac{x^2}{r_0} e^{-x} \frac{r_0}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{1,5} x^2 e^{-x} dx$$

La integración de ésta debe hacerse por partes, tomando  $u = x^2$  y  $dv = e^{-x} dx$ ; con lo cual son  $du = 2x dx$  y  $v = -e^{-x}$ , y la probabilidad se expresa:

$$P = \frac{1}{2} \left[ -x^2 e^{-x} + \int e^{-x} 2x dx \right]_0^{1,5}$$

Esta nueva integral, de nuevo, debe resolverse por partes, haciendo  $u = 2x$  y  $dv = e^{-x} dx$ ; con lo cual son  $du = 2dx$  y  $v = -e^{-x}$  y la probabilidad se expresa:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \left[ -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx \right]_0^{1,5} = -\frac{1}{2} [(x^2 + 2x + 2)e^{-x}]_0^{1,5} = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \frac{17}{e^3} = 0,5768 \end{aligned}$$

Para estados excitados en los cuales sean  $l = 0$  y  $m = 0$ , la densidad de probabilidad será también independiente de las variables  $\theta$  y  $\phi$ , el estado presentará simetría esférica y la densidad de probabilidad dependerá únicamente de  $r$ , como se deduce de la simple observación de la Tabla 49.5.

#### EJEMPLO 49.5 Densidad de probabilidad para el primer estado excitado del hidrógeno

Encontremos la densidad de probabilidad para el electrón en el primer estado excitado del átomo de hidrógeno  $(n, l, m) = (2, 0, 0)$ .



**Solución:**

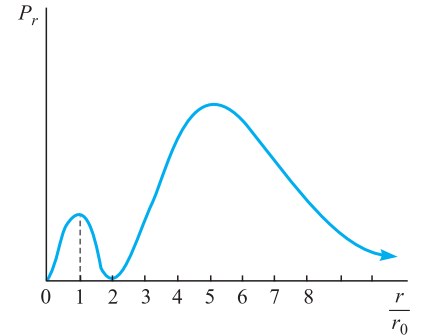
Los valores  $Z_{0,0}$  y  $R_{2,0}$  se obtienen, respectivamente de las Tablas 49.2 y 49.4, con los cuales la expresión [49.38] se escribe:

$$\int_0^\pi \sin\theta \frac{1}{2} d\theta \int_0^r r^2 \frac{1}{2r_0^3} \left(1 - \frac{r}{2r_0}\right)^2 e^{-r/r_0} dr = \int_0^r \frac{r^2}{2r_0^3} \left(1 - \frac{r}{2r_0}\right)^2 e^{-r/r_0} dr$$

Con lo cual, la densidad de probabilidad es:

$$P_r = \frac{r^2}{2r_0^3} \left(1 - \frac{r}{2r_0}\right)^2 e^{-r/r_0} dr$$

Función que ha sido representada en la Figura 49.3.



**Figura 49.3.** Densidad de probabilidad del primer estado excitado del hidrógeno.

**49.6 Momento cinético orbital**

El momento cinético del electrón respecto al centro del átomo, en su movimiento orbital alrededor de éste, es:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

El cual, en coordenadas cartesianas trirrectangulares, se descompone en las tres ecuaciones escalares:

$$L_x = yp_z - zp_y$$

$$L_y = zp_x - xp_z$$

$$L_z = xp_y - yp_x$$

Los correspondientes operadores mecanocuánticos son:

$$\hat{L}_x = -i\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) ; \quad \hat{L}_y = -i\hbar \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) ;$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

El módulo del momento cinético  $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ , tendrá como operador mecanocuántico:

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

Por la simetría esférica del problema, conviene expresar todos estos operadores en coordenadas esféricas (Apéndice D), resultando para cada uno de ellos las siguientes expresiones:

$$\hat{L}_x = i\hbar \left( \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} + \text{ctg}\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} \right)$$

$$\hat{L}_y = i\hbar \left( -\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} + \text{ctg}\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} \right)$$

$$\hat{L}_z = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right]$$

Apliquemos a la función de onda [49.3] el operador  $\hat{L}_z$ :

$$\hat{L}_z \phi(r, \theta, \varphi) = -i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = -i\hbar R(r)Z(\theta) \frac{dR(\varphi)}{d\varphi} \quad [49.41]$$

Derivando la [49.10] respecto a  $\varphi$  se expresa:

$$\hat{L}_z \phi(r, \theta, \varphi) = -i\hbar R(r)Z(\theta) \text{im} F(\varphi) = m\hbar \phi(r, \theta, \varphi) \quad [49.42]$$

En consecuencia, los valores propios del operador son:

$$L_z = m\hbar \quad [49.43]$$

Apliquemos ahora el operador  $\hat{L}^2$  a la función de onda [49.3]:

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 \phi(r, \theta, \varphi) &= \hat{L}^2 [R(r)Z(\theta)F(\varphi)] = \\ &= -\hbar^2 R(r) \left[ \frac{1}{\text{sen } \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \text{sen } \theta \frac{dZ(\theta)}{d\theta} \right) F(\varphi) + \frac{1}{\text{sen}^2 \varphi} \frac{d^2 F(\varphi)}{d\varphi^2} Z(\theta) \right] \end{aligned}$$

Hallando la segunda derivada respecto a  $\varphi$  de [49.10] y sustituyendo su valor en la anterior, se escribe:

$$\hat{L}^2 \phi(r, \theta, \varphi) = -\hbar^2 R(r)F(\varphi) \left[ \frac{1}{\text{sen } \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \text{sen } \theta \frac{dZ(\theta)}{d\theta} \right) - m^2 \frac{Z(\theta)}{\text{sen}^2 \varphi} \right]$$

Teniendo en cuenta la [49.6] multiplicada por  $Z(\theta)$ , la anterior se expresa:

$$\hat{L}^2 \phi(r, \theta, \varphi) = \hbar^2 R(r)F(\varphi)l(l+1)Z(\theta)$$

o

$$\hat{L}^2 \phi(r, \theta, \varphi) = \hbar^2 l(l+1)\phi(r, \theta, \varphi) \quad [49.44]$$

Lo que nos indica que los valores propios del operador  $\hat{L}^2$  son:

$$L^2 = \hbar^2 l(l+1) \quad [49.45]$$

Por tanto, el módulo del momento cinético está determinado por el número cuántico  $l$ , mientras que la proyección del momento cinético sobre un eje normal al plano de la órbita está cuantizado mediante el número cuántico magnético  $m$ . Las componentes del momento cinético  $L_y$  y  $L_z$  deben quedar indeterminadas, pues de lo contrario quedaría determinado el momento cinético como vector y, en consecuencia, el plano en el cual debe producirse el movimiento del electrón. Para cada valor de  $L$  queda definido el módulo del momento cinético y sus posibles orientaciones están dadas por los valores  $L_z$ , ya que  $m$  puede tomar los valores  $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ . En la Figura 49.4 se han representado las distintas orientaciones del momento cinético para  $l = 2$ , valor que permite cinco posibles proyecciones  $L_z$ .

Para cada nivel energético definido por el número cuántico  $n$ , hay  $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ , es decir,  $n$  valores posibles de  $l$  y, por tanto,  $n$  valores diferentes del módulo del momento angular,  $L$ , todos con la misma energía. Por otra parte, de acuerdo con [49.43], para cada valor de  $L$  hay  $2l + 1$  valores posibles de  $L_z$ , para  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ , lo cual es conocido como degeneración del estado del momento cinético,  $g = 2l + 1$ .

Según hemos visto, la función de onda,  $\phi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi)$ , es función propia de los operadores  $E, L^2$  y  $L_z$ , y los valores propios son los correspondientes números cuánticos, lo que se expresa:

$$E\phi_{n,l,m} = -\frac{13,6}{n^2} \phi_{n,l,m} \quad , \quad E_n = -\frac{136}{n^2} \text{ eV} \quad [49.22]$$

$$L_z \phi_{n,l,m} = m\hbar \phi_{n,l,m} \quad , \quad L_z = m\hbar \quad [49.43]$$

$$L^2 \phi_{n,l,m} = \hbar^2 l(l+1)\phi_{n,l,m} \quad , \quad L^2 = \hbar^2 l(l+1) \quad [49.45]$$

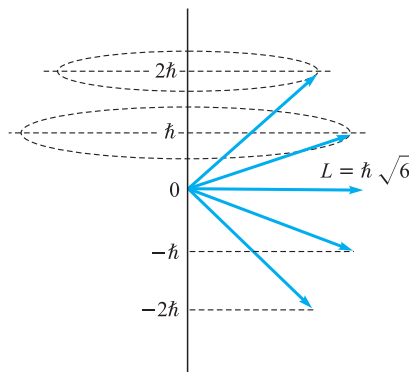


Figura 49.4. Momento cinético  $L$  y sus proyecciones  $L_z$ .

El momento angular queda cuantizado no sólo en módulo, sino también en sus posibles direcciones, lo que se denomina *cuantización espacial*.

En espectroscopia a cada nivel energético definido por el número cuántico  $n$  se le denomina *capa* y se le simboliza mediante una letra mayúscula, como se indica:

$$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

$$\text{Símbolo de la capa} = K, L, M, N, O, P, Q$$

Asimismo, se denomina *subcapa* a los estados dentro de una capa, que se simbolizan mediante una letra minúscula para cada valor de  $l$ , con la siguiente correspondencia:

$$l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$$

$$\text{Símbolo de la subcapa} = s, p, d, f, g, h, i, j, \dots$$

Con ello, la notación espectroscópica  $4d^2$  indica que hay dos electrones, con  $n = 4$  y  $l = 2$ .

### EJEMPLO 49.6

Calculemos el valor de la energía y el módulo del momento cinético del electrón en el átomo de hidrógeno, para el valor  $n = 3$ .

#### Solución:

El valor de la energía está dado por la [49.22]:

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} = -\frac{13,6}{3^2} = -1,51 \text{ eV}$$

Los posibles valores de  $l$  son 0, 1 y 2, para los cuales el módulo del momento cinético, dado por la [49.45] es:

$$l = 0 \quad L = 0$$

$$l = 1 \quad L = \hbar\sqrt{2} = 1,49 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

$$l = 2 \quad L = \hbar\sqrt{6} = 2,58 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

### 49.7 Momento magnético orbital. Efecto Zeeman. Precesión de Larmor

El periodo del electrón en su órbita puede evaluarse como:

$$P = \frac{l}{v} = \frac{2\pi r}{v}$$

En consecuencia, la frecuencia del electrón en sus giros orbitales es:

$$\nu = \frac{1}{P} = \frac{v}{2\pi r}$$

Ello hace que se establezca una corriente eléctrica cuya intensidad es:

$$I = \nu e = \frac{ev}{2\pi r}$$

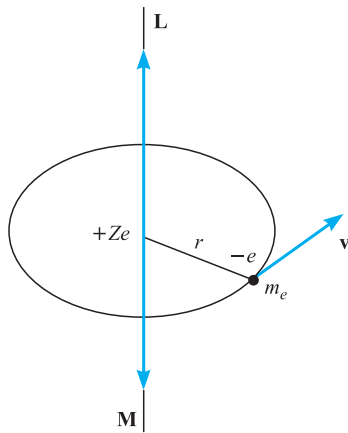


Figura 49.5. Momento cinético del electrón.

Esta espira de corriente, así creada, es equivalente a un dipolo magnético, cuyo momento magnético es:

$$\mathbf{M} = -\frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 \mathbf{k} = -\frac{1}{2} evr \mathbf{k}$$

El momento cinético del electrón en su movimiento orbital (Figura 49.5), es:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m_e \mathbf{v} = m_e r v \mathbf{k}$$

La relación de los módulos de ambos momentos,  $M/L$ , se expresa:

$$\frac{M}{L} = \frac{evr}{2m_e r v} = \frac{e}{2m_e} = \frac{\mu_B}{\hbar}$$

Al valor:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 0,92732 \text{ A} \cdot \text{m}^2 = 9,27 \times 10^{-24} \text{ J/T} = 5,79 \times 10^{-5} \text{ eV/T}$$

se le denomina *magnetón de Bohr* y, en función de él, el momento magnético se expresa:

$$\mathbf{M} = -\frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{L} \tag{49.46}$$

La misma relación sigue siendo válida en mecánica cuántica, verificándose:

$$M_l = \frac{M_B}{\hbar} L = \mu_B \sqrt{l(l+1)} \tag{49.47}$$

Análogamente, para la componente sobre el eje  $OZ$ , es:

$$M_{lz} = \frac{M_B}{\hbar} L_z = \mu_B m_l \tag{49.48}$$

Cuando un dipolo magnético de momento  $\mu$  se coloca en un campo magnético  $\mathbf{B}$  aparece un momento sobre el dipolo,  $\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ , que trata de alinearlo con el campo. Por ello, si el átomo es colocado en un campo magnético  $\mathbf{B}$ , aparece sobre el electrón el momento:

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M} \times \mathbf{B} = -\frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{L} \times \mathbf{B} \tag{49.49}$$

Esto hace que el momento angular  $\mathbf{L}$  precese alrededor de la dirección del campo  $\mathbf{B}$  (Figura 49.6).

La actuación de  $\mathbf{B}$  sobre los dipolos hace que se acumule en ellos energía, que es liberada cuando cesa el campo  $\mathbf{B}$ . Esta energía es:

$$E' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{L} \cdot \mathbf{B}$$

Si tomamos la dirección de  $\mathbf{B}$  como eje  $Z$ , se expresa:

$$E' = \frac{\mu_B}{\hbar} L_z B$$

Teniendo en cuenta la [49.43], resulta:

$$E' = \mu_B B m_l \tag{49.50}$$

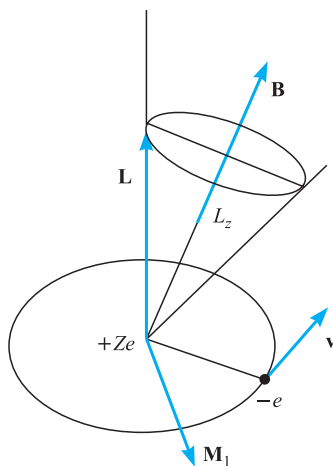


Figura 49.6. Precesión del momento cinético.

La energía total del electrón, cuando el átomo está situado en un campo magnético, será la correspondiente al electrón en ausencia de campo exterior, más la añadida por el campo, es decir,  $E + E'$ . En consecuencia, cada nivel energético  $n, l$  queda desdoblado por la presencia del campo magnético, según la [49.50], en  $2l + 1$  niveles, unos con mayor y otros con menor energía que la correspondiente al nivel en ausencia de campo magnético externo. En consecuencia, en estos casos, la energía no depende solamente del número  $n$ , sino también del número  $m$ . Este desdoblamiento de los niveles de energía por acción de un campo magnético exterior se conoce con el nombre de *efecto Zeeman*, ya que fue este investigador quien lo observó por vez primera en 1896.

La aplicación del teorema del momento cinético nos permite calcular la velocidad  $\omega$ , pues  $d\mathbf{L}/dt$  será la velocidad del extremo de  $\mathbf{L}$  en su movimiento de precesión alrededor de  $\mathbf{B}$ , que es un movimiento de rotación, y por ello:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{M}_1$$

Teniendo en cuenta el valor de  $\mathbf{M}_1$ , la anterior se escribe:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = -\frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

$$\left( \boldsymbol{\omega} - \frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{B} \right) \times \mathbf{L} = 0$$

Puesto que  $\mathbf{L}$  no es nulo, ni perpendicular a  $\boldsymbol{\omega} - \frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{B}$ , deberá ser:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{B} \quad [49.51]$$

Este fenómeno de precesión es conocido como *precesión de Larmor* y la frecuencia angular  $\omega$ , *frecuencia de Larmor*.

## 49.8 Espín del electrón. Experiencia de Stern-Gerlach

Goudsmit y Uhlenbeck, en 1925, para explicar el desdoblamiento en parejas de ciertas líneas del espectro óptico del hidrógeno, postularon la existencia de un momento cinético intrínseco del electrón,  $\mathbf{s}$ , y un momento magnético dipolar,  $\mathbf{M}_s$ , que están relacionados de forma análoga a como lo están el momento cinético orbital  $\mathbf{L}$  y el momento magnético orbital,  $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M}_s = -g_s \frac{e}{2m_e} \mathbf{s} \quad [49.52]$$

En la que  $g_s$  es la razón *giromagnética* o *factor  $g$  de espín* del electrón, cuyo valor experimental es  $g = 2,00232$ .

Stern y Gerlach, en 1921, hicieron que un haz de átomos de plata en su estado fundamental atravesara un campo magnético no homogéneo e incidiera en una placa fotográfica sensible. El campo creado variaba únicamente con  $z$ . Por estar los átomos en su estado fundamental ( $l = 0$ ), el momento cinético orbital es nulo y así será también el momento magnético orbital, existiendo únicamente momento magnético de espín. La fuerza que un campo magnético no homogéneo ejerce sobre un

dipolo magnético depende de la orientación de éste. La Física clásica admite todas las orientaciones como posibles e igualmente probables, lo que daría como resultado un área impresionada sobre la placa. El resultado de la experiencia no fue así, ya que el haz inicial se desdobló en dos, uno por encima y otro por debajo del inicial. Ello llevó a pensar que sólo eran posibles dos orientaciones de  $s$  respecto al campo magnético exterior, paralelo o antiparalelo a él.

Se postula que el momento cinético de espín  $S$  y su componente en dirección del campo externo  $S_z$ , están relacionados con sendos números cuánticos  $s$  y  $m$ , respectivamente, de forma análoga a como lo están los valores orbitales:

$$S = \sqrt{s(s + 1)} \hbar \tag{49.53}$$

$$S_z = m_s \hbar \tag{49.54}$$

Admitiendo que el número de orientaciones posibles del momento cinético, al igual que en el caso orbital, es  $g = 2s + 1$  y puesto que de la experiencia se ha deducido que es  $g = 2$ , deberá ser  $s = 1/2$  y, por tanto,  $S = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar$ . Puesto que la relación entre  $m_s$  y  $s$  deberá ser análoga a la existente entre  $m_l$  y  $l$ , será  $m_s = \pm 1/2$ .

En consecuencia, el electrón es una partícula atómica, puntual (diámetro  $10^{-16}$  m) que necesita cuatro números cuánticos para quedar definido su estado, que son:  $n$ ,  $l$ ,  $m_l$  y  $m_s$ , tres para fijar su posición en el espacio y un cuatro para determinar la orientación de su momento de espín. En la Tabla 49.6 se presentan todos los números cuánticos y sus posibles valores para el electrón en el átomo de hidrógeno.

**Tabla 49.6.** Números cuánticos para el electrón.

Número cuántico	Símbolo	Valores posibles	Número total de valores posibles
Principal	$n$	1, 2, 3, 4, ...	Infinitos
Orbital	$l$	para cada valor de $n$ : 0, 1, 2, 3, ..., $n - 1$	$n$
Magnético	$m_l$	para cada pareja $n, l$ : 0, $\pm 1$ , $\pm 2$ , $\pm 3$ , ..., $\pm l$	$2l + 1$
Spin	$m_s$	para cada terna $n, l, m_l$ : $\pm 1/2$	2

Existirá una función de onda  $\Omega$  asociada con el espín, que deberá verificar:

$$\hat{S}^2 \Omega = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar \Omega \quad \text{y} \quad \hat{S}_z \Omega = m_s \hbar \Omega \tag{49.55}$$

Con ella, la función de onda completa de un electrón que está sometido a un potencial central será:

$$\phi_{n,l,m_l,m_s} = A_{n,l,m_l,m_s} R_{n,l}(r) Z_{l,m_l}(\theta) F_{m_l}(\varphi) \Omega \tag{49.56}$$

La teoría cuántica no relativista, que venimos desarrollando, no es capaz de dar una demostración teórica rigurosa del espín del electrón, ya indicamos que la ecuación de Schrödinger no es invariante en una transformación de Lorentz. La explicación fue dada por Dirac (1902-1984), en 1931, con su mecánica cuántica relativista, que en el límite  $v \ll c$ , se simplifica a la ecuación de Schrödinger, demostrando que el momento cinético intrínseco del electrón es  $1/2$  y deduciendo el factor  $g$  de espín. Parece, pues, que el espín está íntimamente relacionado con los efectos relativistas.

### 49.9 Interacción espín-órbita

El electrón dentro del átomo está sometido a un campo magnético interno, ya que desde el punto de vista del electrón, el núcleo gira alrededor de él, luego hay una carga  $+Ze$  girando con velocidad  $v$ , lo que creará un campo magnético que está dado por:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2r} (\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r)$$

Puesto que la intensidad de la corriente creada por la carga  $Ze$  girando en una circunferencia de radio  $r$  a la velocidad  $v$  es  $I = \frac{Zev}{2\pi r}$ , será

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 Zev}{4\pi r^2} (\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r)$$

o bien,

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 Ze}{4\pi r^3} (\mathbf{v} \times \mathbf{r})$$

En función del momento cinético orbital del electrón  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m_e \mathbf{v}$  es:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 Ze}{4\pi m_e r^3} \mathbf{L} \tag{49.57}$$

Por tanto, el momento magnético de espín del electrón  $\mathbf{M}_s$ , dado por [49.52], está sometido a la acción del campo  $\mathbf{B}$  [49.57], lo que se conoce con el nombre de *interacción espín-órbita*. La energía de la interacción espín-órbita es:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \mathbf{M}_s \cdot \mathbf{B} = \frac{g_s \mu_0 Ze^2}{16\pi m_e^2 r^3} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \tag{49.58}$$

Este campo  $\mathbf{B}$  provoca sobre el electrón un momento que hace precesar a  $\mathbf{S}$ , de forma análoga a lo visto para la precesión de Larmor, sin cambiar el módulo  $S$ . Los momentos cinéticos  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{S}$  quedan acoplados y la precesión se realiza alrededor de su suma y no alrededor del eje  $Z$ ; por tanto, debido a la interacción espín-órbita, las componentes  $L_z$  y  $S_z$  son aleatorias.

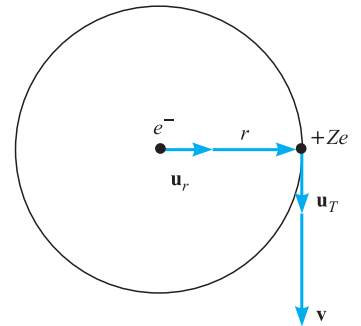


Figura 49.7.

### 49.10 Momento cinético total

El momento cinético total del átomo será la suma de los momentos cinéticos orbital y de espín:  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ . Puede demostrarse que, análogamente a los otros momentos cinéticos, el módulo  $J$  y la componente  $J_z$  están cuantizadas en función de sendos números cuánticos,  $j$  y  $m_j$ , respectivamente:

$$J = \sqrt{j(j+1)} \hbar \tag{49.59}$$

$$J_z = m_j \hbar \tag{49.60}$$

en la que los valores posibles son:

$$j = |l \pm 1/2| \quad \text{y} \quad -j \leq m_j \leq j \tag{49.61}$$

Y, por tanto, hay  $2j + 1$  valores posibles.

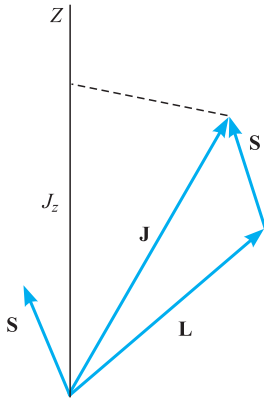


Figura 49.8. Momento cinético total  $\mathbf{J}$ .

Puesto que es  $J_z = L_z + S_z$  (Figura 49.8), será:

$$m_j \hbar = m_l \hbar + m_s \hbar$$

o bien,

$$m_j = m_l + m_s \tag{49.62}$$

Puesto que el máximo valor de  $m_l$  es  $l$  y el máximo valor de  $m_s$  es  $1/2$ , el máximo valor de  $m_j$  es:

$$m_j \leq l + \frac{1}{2} \tag{49.63}$$

De acuerdo con [49.59], este será también el máximo valor de  $j$ :

$$j \leq l + \frac{1}{2} \tag{49.64}$$

Para cada valor de  $l$ ,  $j$  puede tomar solamente los valores  $l + 1/2$  ó  $l - 1/2$ , salvo para  $l = 0$ , que únicamente es posible el valor  $j = 1/2$ .

Si no se ejerce momento exterior alguno sobre el átomo, es decir, en ausencia de campo exterior, el momento cinético total se conserva y, por tanto, también su módulo  $J$  y su componente  $J_z$ , no así sus componentes  $J_x$  y  $J_y$ , que son aleatorias. Los vectores  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{S}$  precesan alrededor de  $\mathbf{J}$  y conservan constantes sus módulos y su proyección sobre  $\mathbf{J}$ .

Cuando se aplica un campo magnético exterior débil frente al campo de interacción espín-órbita, los vectores  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{S}$  siguen precesando alrededor de  $\mathbf{J}$ , pero ahora  $J$  precesa alrededor del campo exterior. Si el campo exterior aplicado es fuerte frente al campo de interacción espín-órbita, ésta deja de ser significativa y los vectores  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{S}$  precesan independientemente alrededor de la dirección del campo, careciendo de significado su suma.

### EJEMPLO 49.7

Determinemos, para estados con valores  $l = 2$ ,  $s = 1/2$ , los posibles valores de los números cuánticos  $j$  y  $m_j$ .

#### Solución:

Los valores posibles para el número cuántico  $j$  son solamente  $5/2$  y  $3/2$  y los correspondientes valores de  $m_j$  están dados por la [49.61]:  $\frac{\sqrt{35}}{2} \hbar$  y  $\frac{\sqrt{15}}{2} \hbar$ .

Para  $j = 5/2$ , los valores posibles de  $m_j$  son:  $-5/2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2$ , y los correspondientes valores de  $J_z$  son éstos multiplicados por  $\hbar$ .

Para  $j = 3/2$ , los valores posibles de  $m_j$  son:  $-3/2, -1/2, 1/2, 3/2$ , y los correspondientes valores de  $J_z$ , éstos multiplicados por  $\hbar$ .

Ello puede representarse en sendos diagramas (Figura 49.9).

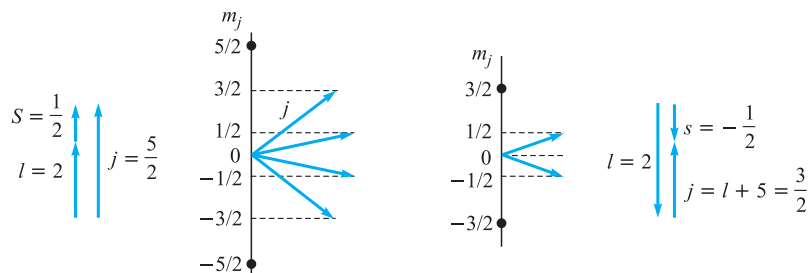


Figura 49.9. Diagramas de los posibles números cuánticos.



## 49.11 Los números cuánticos y el modelo atómico

Hemos descrito siete números cuánticos cuyo significado dentro del modelo atómico es el indicado en la Tabla 49.7:

**Tabla 49.7.** Números cuánticos en el electrón del átomo de hidrógeno.

Número cuántico	Magnitudes físicas que cuantifica
$n$	Radio de la órbita o distancia media del electrón al centro del átomo. Energía en el estado del átomo.
$l$	Módulo del momento cinético orbital, $L$ . Velocidad del electrón en su órbita.
$m_l$	Componente $L_z$ del momento cinético orbital. Orientación espacial de la órbita.
$s$	Módulo del momento cinético de giro del electrón sobre su eje (espín), $S$ . Velocidad de giro del electrón alrededor de su propio eje.
$m_s$	Componente $S_z$ del momento cinético de espín, $S$ . Orientación espacial del eje del electrón.
$j$	Módulo del momento cinético total, $J$ , cuando existe interacción espín-órbita, $ J  =  L  +  S $ . Ángulo entre $L$ y $S$ .
$m_j$	Componente $J_z$ del momento cinético total, $J$ . Orientación espacial del vector $J$ .

Para la descripción del estado cuántico de un electrón, únicamente son necesarios cuatro números cuánticos:  $n$ ,  $l$ ,  $m_l$  y  $m_s$ , o bien,  $n$ ,  $l$ ,  $j$  y  $m_j$ , el primer conjunto se utiliza cuando el acoplamiento espín-órbita es débil, y el segundo, cuando es significativo.



# Átomos con varios electrones

CAPÍTULO

50

- 50.1. Introducción
- 50.2. Principio de exclusión de Pauli
- 50.3. Configuración electrónica
- 50.4. Sistema periódico de los elementos
- 50.5. Absorción y emisión espontánea de la radiación
- 50.6. Transiciones radiantes. Reglas de selección
- 50.7. Emisión estimulada. Láser

## 50.1 Introducción

Hemos estudiado con algún detalle el átomo de hidrógeno, único átomo con un solo electrón. Después de los trabajos de Moseley sobre espectros característicos de rayos X de gran número de elementos, se sabe que el número de electrones aumenta, de uno en uno, de unos elementos a otros, lo que permite ordenar a estos para formar el sistema periódico. Un aspecto muy importante es saber la disposición de los electrones dentro del átomo, en cuántas capas se distribuyen, qué número de ellos en cada capa, etc. Para el conocimiento de esta configuración electrónica fue fundamental el establecimiento, en 1925, por Wolfgang Pauli (1900-1958), de su famoso Principio de exclusión.

## 50.2 Principio de exclusión de Pauli

El Principio de exclusión de Pauli puede enunciarse de la siguiente forma: *No pueden existir en un mismo átomo dos electrones en el mismo estado cuántico*, o bien, *no pueden existir en un mismo átomo dos electrones con los mismos números cuánticos*.

Este principio, que fue establecido de forma empírica después de estudiar los espectros de emisión de varios elementos, tiene un fundamento mecano cuántico, ya que, teóricamente, puede establecerse que *la función de onda total de un sistema de electrones debe ser antisimétrica*, lo que constituye otra forma de mayor cuidado de enunciar el Principio de exclusión.

Puede demostrarse que si la función de onda total de un sistema de varios electrones es antisimétrica, se verifica el Principio de exclusión. En efecto: consideremos dos electrones indistinguibles entre sí y que no interactúan, uno en el estado  $a$  y otro en el  $b$ . La función de onda del electrón 1 en el estado  $a$  es  $\Phi_a(1)$  y la

del electrón 2 en el estado  $b$ ,  $\Phi_b(2)$ . La función de onda total del sistema será de la forma:

$$\Phi_T = \Phi_a(1)\Phi_b(2)$$

La densidad de probabilidad se expresará  $\Phi_T^* \Phi_T = \Phi_a^*(1)\Phi_b^*(2)\Phi_a(1)\Phi_b(2)$ . Puesto que los electrones son indistinguibles, al intercambiarlos  $1 \rightarrow 2$  y  $2 \rightarrow 1$ , no debe cambiar la densidad de probabilidad, pero ello no es así, ya que es:

$$\Phi_a^*(1)\Phi_b^*(2)\Phi_a(1)\Phi_b(2) \neq \Phi_a^*(2)\Phi_b^*(1)\Phi_a(2)\Phi_b(1)$$

Por tanto, es necesario buscar otra función de onda para el sistema, que verifique la ecuación de Schrödinger y tal que la densidad de probabilidad no cambie al intercambiar los electrones, ya que estos son indistinguibles. Esto lo verifican las funciones:

$$\Phi'_T = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Phi_a(1)\Phi_b(2) \pm \Phi_b(1)\Phi_a(2)]$$

El factor  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  asegura que  $\bar{\Phi}'_T$  está normalizada si lo están  $\Phi_T = \Phi_a(1)\Phi_b(2)$  y  $\Phi_T = \Phi_a(2)\Phi_b(1)$ . La energía del sistema debe permanecer constante al intercambiar los electrones, luego ambas expresiones de  $\Phi_T$  son autofunciones del mismo valor cuántico de la energía y ambas serán solución de la ecuación de Schrödinger, como también lo será cualquier combinación lineal de ellas y por tanto  $\Phi'_T$ .

La solución con signo más (+) es simétrica, pues al intercambiar los electrones no cambia:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [\Phi_a(1)\Phi_b(2) + \Phi_b(1)\Phi_a(2)] = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Phi_a(2)\Phi_b(1) + \Phi_b(2)\Phi_a(1)]$$

La solución con signo menos es antisimétrica ya que al intercambiar los electrones cambia de signo:

$$\Phi_A = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Phi_a(1)\Phi_b(2) - \Phi_b(1)\Phi_a(2)] \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} [\Phi_a(2)\Phi_b(1) - \Phi_b(2)\Phi_a(1)] = -\Phi_A$$

Si la función de onda es antisimétrica, no es posible que ambos electrones estén en el mismo estado cuántico, pues la función de onda del sistema se anula:

$$\Phi_A = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Phi_a(1)\Phi_a(2) - \Phi_a(1)\Phi_a(2)] = 0$$

En consecuencia, en estos sistemas se verifica el Principio de exclusión.

Todas las partículas de espín  $1/2$ , al igual que el electrón, como son los protones y los neutrones, tienen funciones de onda antisimétricas, verificando el Principio de exclusión, y son denominadas *fermiones*, por haber sido Fermi quien estableció las leyes estadísticas que regulan su comportamiento. Por el contrario, las partículas de espín nulo o entero, como son los fotones o las partículas  $\alpha$ , tienen función de onda simétrica y no están sujetas al principio de exclusión; a estas partículas se les denomina *bosones*, ya que su comportamiento estadístico obedece a la ley de distribución establecida por Bose (1894-1974). Da la impresión de que el tipo de simetría es una propiedad básica de las partículas, como lo es su masa o su carga.

### 50.3 Configuración electrónica

Todos los electrones que en un átomo presentan el mismo número cuántico  $n$  constituyen lo que se denomina una *capa*, todos ellos tienen aproximadamente la misma energía y la denominación de la capa se hace mediante una letra mayúscula, como ya indicamos en el Epígrafe 49.6:

$n$	1	2	3	4	5	6	7
capa	<i>K</i>	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>N</i>	<i>O</i>	<i>P</i>	<i>Q</i>

Dentro de cada capa, los electrones pueden clasificarse en *subcapas*, que son formadas por los conjuntos de electrones con igual número cuántico  $l$ , todos los electrones de cada subcapa tienen aproximadamente la misma energía, denominándose las subcapas mediante una letra minúscula, de la forma ya indicada en el Epígrafe 49.6:

$l$	0	1	2	3	4	5
subcapa	<i>s</i>	<i>p</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>

La configuración electrónica de un elemento es la expresión del número de electrones que éste presenta en cada una de sus subcapas, dentro de cada capa. Ello se hace identificando la capa con su número y la subcapa con su letra minúscula correspondiente al número cuántico  $l$ , poniendo a ésta por exponente el número de electrones que lleva. Así, por ejemplo, un electrón en el estado  $n = 3, l = 2$ , se expresa  $3d$ , y tres electrones en el estado  $n = 3, l = 1$  se expresa  $3p^3$ . La configuración electrónica para el Litio ( $Z = 3$ ) es  $1s^2 2s^1$ , y para el Oxígeno ( $Z = 8$ ) es  $1s^2 2s^2 2p^4$ . En la Figura 50.1 se representan la configuración electrónica de ambos elementos.

Dentro de cada subcapa hay  $2l + 1$  valores posibles diferentes para el número cuántico magnético  $m_l$ , y para cada uno de estos dos valores posibles ( $1/2, -1/2$ ) de número cuántico de espín  $m_s$ , luego el número máximo posible de electrones en una subcapa es:

$$2(2l + 1)$$

El número máximo de electrones en la capa  $n$ , puesto que es  $l = 0, 1, \dots, n - 1$ , será:

$$\sum_{l=0}^{n-1} 2(2l + 1) = 2(1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1) = 2 \frac{2n - 1 + 1}{2} n = 2n^2$$

Por tanto, la capa  $k(n = 1)$  se completa con dos electrones, ambos en la subcapa  $s$ . La capa  $L(n = 2)$  se completa con 8 electrones: 2 en la subcapa  $s(l = 0)$  y 6 en la subcapa  $p(l = 1)$ . La capa  $M(n = 3)$  se completa con 18 electrones: 2 en la subcapa  $s$ , 6 en la subcapa  $p$  y 10 en la subcapa  $d(l = 2)$ ; así sucesivamente. Los electrones, en el estado normal del átomo, ocupan los niveles más bajos de energía o, dicho de otro modo, la configuración del átomo en su estado base es la de mínima energía.

En cada subcapa completa, el momento cinético de espín es nulo. Así mismo, en cada capa o subcapa completa, el momento cinético orbital es nulo. Por tanto, los electrones en cada subcapa completa se distribuyen con simetría esférica. En los átomos con muchos electrones casi todos ellos están ocupando capas y subcapas completas. A continuación se presenta, en la Tabla 50.1, la configuración electrónica de los distintos elementos atómicos en su estado base.

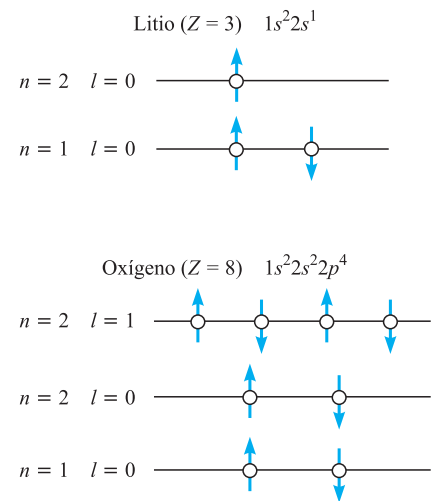


Figura 50.1. Configuraciones electrónicas del litio y del oxígeno.

**Tabla 50.1.** Configuraciones electrónicas de los átomos en el estado base.

Número atómico <i>Z</i>	Elemento		Capa	<i>K</i>			<i>L</i>			<i>M</i>			<i>N</i>			<i>O</i>			<i>P</i>			<i>Q</i>	
	Símbolo	Nombre	Subcapa	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	4	
1	H	Hidrogeno		1																			
2	He	Helio		2																			
3	Li	Litio		2	1																		
4	Be	Berilio		2	2																		
5	B	Boro		2	2	1																	
6	C	Carbono		2	2	2																	
7	N	Nitrogeno		2	2	3																	
8	O	Oxgeno		2	2	4																	
9	F	Fluor		2	2	5																	
10	Ne	Neon		2	2	6																	
11	Na	Sodio		2	2	6	1																
12	Mg	Magnesio		2	2	6	2																
13	Al	Aluminio		2	2	6	2	1															
14	Si	Silicio		2	2	6	2	2															
15	P	Fosforo		2	2	6	2	3															
16	S	Azufre		2	2	6	2	4															
17	Cl	Cloro		2	2	6	2	5															
18	Ar	Argon		2	2	6	2	6															
19	K	Potasio		2	2	6	2	6	.	1													
20	Ca	Calcio		2	2	6	2	6	.	2													
21	Sc	Escandio		2	2	6	2	6	1	2													
22	Ti	Titanio		2	2	6	2	6	2	2													
23	V	Vanadio		2	2	6	2	6	3	2													
24	Cr	Cromo		2	2	6	2	6	5	1													
25	Mn	Manganeso		2	2	6	2	6	5	2													
26	Fe	Hierro		2	2	6	2	6	6	2													
27	Co	Cobalto		2	2	6	2	6	7	2													
28	Ni	Nquel		2	2	6	2	6	8	2													
29	Cu	Cobre		2	2	6	2	6	10	1													
30	Zn	Cinc		2	2	6	2	6	10	2													
31	Ga	Galio		2	2	6	2	6	10	2	1												
32	Ge	Germanio		2	2	6	2	6	10	2	2												
33	As	Arsenico		2	2	6	2	6	10	2	3												
34	Se	Selenio		2	2	6	2	6	10	2	4												
35	Br	Bromo		2	2	6	2	6	10	2	5												
36	Kr	Cripton		2	2	6	2	6	10	2	6												
37	Rb	Rubidio		2	2	6	2	6	10	2	6	.	.	1									
38	Sr	Estroncio		2	2	6	2	6	10	2	6	.	.	2									
39	Y	Itrio		2	2	6	2	6	10	2	6	1	.	2									

Tabla 50.1. (Continuacion).

Número atómico Z	Elemento		Capa	K			L			M			N			O			P			Q	
	Símbolo	Nombre	Subcapa	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	4	
40	Zr	Zirconio		2	2	6	2	6	10	2	6	2	.	2									
41	Nb	Niobio		2	2	6	2	6	10	2	6	4	.	1									
42	Mo	Molibdeno		2	2	6	2	6	10	2	6	5	.	1									
43	Te	Tecnecio		2	2	6	2	6	10	2	6	6	.	1									
44	Ru	Rutenio		2	2	6	2	6	10	2	6	7	.	1									
45	Ph	Rodio		2	2	6	2	6	10	2	6	8	.	1									
46	Pd	Paladio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	.	.									
47	Ag	Plata		2	2	6	2	6	10	2	6	10	.	1									
48	Cd	Cadmio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	.	2									
49	In	Indio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	.	2	1								
50	Sn	Estano		2	2	6	2	6	10	2	6	10	.	2	2								
51	Sb	Antimonio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	.	2	3								
52	Te	Telurio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	.	2	4								
53	I	Yodo		2	2	6	2	6	10	2	6	10	.	2	5								
54	Xe	Xenon		2	2	6	2	6	10	2	6	10	.	2	6								
55	Cs	Cesio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	.	2	6	.	.	1					
56	Ba	Bario		2	2	6	2	6	10	2	6	10	.	2	6	.	.	2					
57	La	Lantano		2	2	6	2	6	10	2	6	10	.	2	6	1	.	2					
58	Ce	Cerio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	1	2	6	1	.	2					
59	Pr	Prasimidio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	3	2	6	.	.	2					
60	Nd	Neodimio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	4	2	6	.	.	2					
61	Pm	Prometio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	5	2	6	.	.	2					
62	Sm	Samario		2	2	6	2	6	10	2	6	10	6	2	6	.	.	2					
63	Eu	Europio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	7	2	6	.	.	2					
64	Gd	Gadolinio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	7	2	6	1	.	2					
65	Tb	Terbio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	9	2	6	.	.	2					
66	Dy	Disprobio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	10	2	6	.	.	2					
67	Ho	Holmio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	11	2	6	.	.	2					
68	Er	Erbio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	12	2	6	.	.	2					
69	Tm	Tulio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	13	2	6	.	.	2					
70	Yb	Iterbio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	.	.	2					
71	Lu	Lutecio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	1	.	2					
72	Hf	Hafanio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	2	.	2					
73	Ta	Tantalo		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	3	.	2					
74	W	Wolframio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	4	.	2					
75	Re	Renio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	5	.	2					
76	Os	Osmio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	6	.	2					
77	Ir	Iridio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	7	.	2					
78	Pt	Platino		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	9	.	1					
79	Au	Oro		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	7	10	.	1					
80	Hg	Mercurio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	.	2					

Tabla 50.1. (Continuacion).

Número atómico <i>Z</i>	Elemento		Capa	<i>K</i>			<i>L</i>			<i>M</i>			<i>N</i>			<i>O</i>			<i>P</i>			<i>Q</i>			
	Símbolo	Nombre	Subcapa	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
84	Po	Polonio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	.	2	4						
85	At	Astato		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	.	2	5						
86	Rn	Radón		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	.	2	6						
87	Fr	Francio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	.	2	6	.	1				
88	Ra	Radio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	.	2	6	.	2				
89	Ac	Actinio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	.	2	6	1	2				
90	Th	Torio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	.	2	6	2	2				
91	Pa	Protactinio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	2	2	6	1	2				
92	U	Uranio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	3	2	6	1	2				
93	Np	Neptuno		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	4	2	6	1	2				
94	Pu	Plutonio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	6	2	6	.	2				
95	Am	Americio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	7	2	6	.	2				
96	Cm	Curio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	7	2	6	1	2				
97	Bk	Berkelio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	8	2	6	1	2				
98	Cf	Californio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	10	2	6	.	2				
99	Es	Einsteinio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	11	2	6	.	2				
100	Fm	Fermio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	12	2	6	.	2				
101	Md	Mendelevio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	13	2	6	.	2				
102	No	Nobelio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	.	2				
103	Lr	Laurencio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	1	2				
104	Rf	Rutherfordio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	2	2				
105	Db	Dubnio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	3	2				
106	Sg	Seaborgio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	4	2				
107	Bh	Bohrio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	5	2				
108	Hs	Hassio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	6	2				
109	Mt	Meitnerio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	7	2				
110	Ds	Darmstadtio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	9	1				
111	Rg	Roentgenio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	10	1				
112	Uub	Ununbio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	10	2				
113	Uut	Ununtrio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	10	2	1			
114	Uuq	Ununquadio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	10	2	2			
115	Uup	Ununpentio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	10	2	3			
116	Uuh	Ununhexio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	10	2	4			
117	Uus	Ununseptio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	10	2	5			
118	Uuo	Ununoctio		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	10	2	6			



## 50.4 Sistema periódico de los elementos

Ya en 1817, Döbereiner encontró triadas de elementos cuyas propiedades eran muy parecidas; inicialmente fueron (Litio, Sodio, Potasio), (Calcio, Estroncio, Bario), (Azufre, Selenio, Teluro) y (Cloro, Bromo, Yodo), las cuales fue ampliando hasta más de veinte. En 1864, Chancourtois construyó una hélice cilíndrica en la que ordenó por pesos atómicos todos los elementos entonces conocidos, de forma que en una misma generatriz quedaban situados los elementos de propiedades parecidas. Ese mismo año, Newlands ordenó los elementos por orden creciente de su peso atómico y encontró que cada ocho elementos, las propiedades de estos parecían repetirse.

La primitiva tabla periódica, publicada en 1869, fue confeccionada por Mendeléiev a partir de las propiedades químicas de los elementos y por Mayer, de forma independiente, a partir de las propiedades físicas. A partir de los trabajos de Moseley, quedó asignado a cada elemento un número  $Z$ , denominado número atómico, que es igual al número de electrones que contiene el átomo de ese elemento. La ordenación por número atómico introdujo algunas modificaciones en la primitiva tabla, en la que Mendeléiev no dudó en dejar huecos donde no encajaba, por sus propiedades, ningún elemento de los conocidos y predijo la existencia de nuevos elementos. En la actualidad se ha llegado hasta el elemento 118, en algunos casos mediante métodos de síntesis.

A partir del elemento más sencillo  $Z = 1$ , que es Hidrógeno, se van construyendo las configuraciones electrónicas de todos los demás, añadiendo electrones en las subcapas de menor energía hasta completarlas, pasando luego a la siguiente. Así, el Helio ( $Z = 2$ ) tiene completa la primera capa con 2 electrones, su configuración electrónica es  $1s^2$ ; el Litio ( $Z = 3$ ) tendrá completa la capa 1 y el nuevo electrón estará en la subcapa  $s$  de la 2, su configuración electrónica es  $1s^2 2s^1$ , y así sucesivamente se construye la Tabla 50.1.

Un electrón situado en una subcapa externa queda apantallado por los electrones de las capas más internas y, por tanto, menos ligado al átomo, siendo fácil su cesión. Por el contrario, una subcapa a la que falta un electrón para completarse tiene una gran avidez por él. Las propiedades químicas de los elementos radican en el número de electrones contenidos en su capa más externa, es decir, en la valencia del elemento. Si se agrupan en columna todos los elementos de igual valencia y en filas desde la valencia 1 hasta completar la capa externa, se obtiene la tabla periódica que presentamos (Tabla 50.2). Los elementos de una misma columna pertenecen al mismo *grupo* y los elementos de la misma fila al mismo *periodo*. Todos los elementos del mismo grupo tienen la misma valencia y, por tanto, las mismas o muy similares propiedades, y todos los elementos del mismo periodo tienen el mismo número de orbitales.

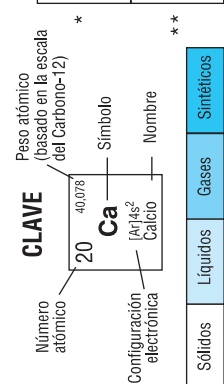
## 50.5 Absorción y emisión espontánea de la radiación

La absorción de la radiación por un sistema atómico consiste en la adquisición por éste de la energía del fotón incidente, con desaparición del mismo y elevación de los átomos del sistema a un nivel energético superior. Así, si una radiación de una cierta banda del espectro pasa a través de un gas, los átomos de éste absorben fotones de unas determinadas energías y pasan a estados excitados. La radiación, después de atravesar el gas, no presentará las frecuencias absorbidas, apareciendo el espectro de absorción del gas, que verificará:

$$E_i - E_o = hv_i \quad [50.1]$$

Tabla 50.2. Tabla periódica de los elementos

<b>GRUPO</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18																																																																							
<b>IA</b>	<b>H</b> 1s <sup>1</sup> Hidrógeno	<b>He</b> 1s <sup>2</sup> Helio	<b>Li</b> [He]2s <sup>2</sup> 2p <sup>1</sup> Litio	<b>Be</b> [He]2s <sup>2</sup> Berilio	<b>B</b> [He]2s <sup>2</sup> 2p <sup>1</sup> Boro	<b>C</b> [He]2s <sup>2</sup> 2p <sup>2</sup> Carbono	<b>N</b> [He]2s <sup>2</sup> 2p <sup>3</sup> Nitrógeno	<b>O</b> [He]2s <sup>2</sup> 2p <sup>4</sup> Oxígeno	<b>F</b> [He]2s <sup>2</sup> 2p <sup>5</sup> Fluor	<b>Ne</b> [He]2s <sup>2</sup> 2p <sup>6</sup> Neón	<b>Na</b> [Ne]3s <sup>1</sup> Sodio	<b>Mg</b> [Ne]3s <sup>2</sup> Magnesio	<b>Al</b> [Ne]3s <sup>2</sup> 3p <sup>1</sup> Aluminio	<b>Si</b> [Ne]3s <sup>2</sup> 3p <sup>2</sup> Silicio	<b>P</b> [Ne]3s <sup>2</sup> 3p <sup>3</sup> Fósforo	<b>S</b> [Ne]3s <sup>2</sup> 3p <sup>4</sup> Azufre	<b>Cl</b> [Ne]3s <sup>2</sup> 3p <sup>5</sup> Cloro	<b>Ar</b> [Ne]3s <sup>2</sup> 3p <sup>6</sup> Argón	<b>K</b> [Ar]4s <sup>1</sup> Potasio	<b>Ca</b> [Ar]4s <sup>2</sup> Calcio	<b>Sc</b> [Ar]3d <sup>1</sup> 4s <sup>2</sup> Escandio	<b>Ti</b> [Ar]3d <sup>2</sup> 4s <sup>2</sup> Titanio	<b>V</b> [Ar]3d <sup>3</sup> 4s <sup>2</sup> Vanadio	<b>Cr</b> [Ar]3d <sup>5</sup> 4s <sup>1</sup> Cromo	<b>Mn</b> [Ar]3d <sup>5</sup> 4s <sup>2</sup> Manganeso	<b>Fe</b> [Ar]3d <sup>6</sup> 4s <sup>2</sup> Hierro	<b>Co</b> [Ar]3d <sup>7</sup> 4s <sup>2</sup> Cobalto	<b>Ni</b> [Ar]3d <sup>8</sup> 4s <sup>2</sup> Níquel	<b>Cu</b> [Ar]3d <sup>10</sup> 4s <sup>1</sup> Cobre	<b>Zn</b> [Ar]3d <sup>10</sup> 4s <sup>2</sup> Zinc	<b>Ga</b> [Ar]3d <sup>10</sup> 4s <sup>2</sup> 4p <sup>1</sup> Galio	<b>Ge</b> [Ar]3d <sup>10</sup> 4s <sup>2</sup> 4p <sup>2</sup> Germanio	<b>As</b> [Ar]3d <sup>10</sup> 4s <sup>2</sup> 4p <sup>3</sup> Arsénico	<b>Se</b> [Ar]3d <sup>10</sup> 4s <sup>2</sup> 4p <sup>4</sup> Selenio	<b>Br</b> [Ar]3d <sup>10</sup> 4s <sup>2</sup> 4p <sup>5</sup> Bromo	<b>Kr</b> [Ar]3d <sup>10</sup> 4s <sup>2</sup> 4p <sup>6</sup> Cripton	<b>Rb</b> [Kr]5s <sup>1</sup> Rubidio	<b>Sr</b> [Kr]5s <sup>2</sup> Estroncio	<b>Y</b> [Kr]4d <sup>1</sup> 5s <sup>2</sup> Itrio	<b>Zr</b> [Kr]4d <sup>2</sup> 5s <sup>2</sup> Zirconio	<b>Nb</b> [Kr]4d <sup>4</sup> 5s <sup>1</sup> Niobio	<b>Mo</b> [Kr]4d <sup>5</sup> 5s <sup>1</sup> Molibdeno	<b>Tc</b> [Kr]4d <sup>5</sup> 5s <sup>2</sup> Tecnecio	<b>Ru</b> [Kr]4d <sup>7</sup> 5s <sup>1</sup> Rutenio	<b>Rh</b> [Kr]4d <sup>8</sup> 5s <sup>1</sup> Rodio	<b>Pd</b> [Kr]4d <sup>10</sup> 5s <sup>1</sup> Paladio	<b>Ag</b> [Kr]4d <sup>10</sup> 5s <sup>1</sup> Plata	<b>Cd</b> [Kr]4d <sup>10</sup> 5s <sup>2</sup> Cadmio	<b>In</b> [Kr]4d <sup>10</sup> 5s <sup>2</sup> 5p <sup>1</sup> Indio	<b>Sn</b> [Kr]4d <sup>10</sup> 5s <sup>2</sup> 5p <sup>2</sup> Estaño	<b>Sb</b> [Kr]4d <sup>10</sup> 5s <sup>2</sup> 5p <sup>3</sup> Antimonio	<b>Te</b> [Kr]4d <sup>10</sup> 5s <sup>2</sup> 5p <sup>4</sup> Telurio	<b>I</b> [Kr]4d <sup>10</sup> 5s <sup>2</sup> 5p <sup>5</sup> Yodo	<b>Xe</b> [Kr]4d <sup>10</sup> 5s <sup>2</sup> 5p <sup>6</sup> Xenón	<b>Cs</b> [Xe]6s <sup>1</sup> Cesio	<b>Ba</b> [Xe]6s <sup>2</sup> Bario	<b>La*</b> [Xe]5d <sup>1</sup> 6s <sup>2</sup> Lantano	<b>Hf</b> [Xe]5d <sup>2</sup> 6s <sup>2</sup> Hafnio	<b>Ta</b> [Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>3</sup> 6s <sup>2</sup> Tantalio	<b>W</b> [Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>4</sup> 6s <sup>2</sup> Wolframio	<b>Os</b> [Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>6</sup> 6s <sup>2</sup> Osmio	<b>Ir</b> [Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>7</sup> 6s <sup>2</sup> Iridio	<b>Pt</b> [Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>9</sup> 6s <sup>1</sup> Platino	<b>Au</b> [Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>10</sup> 6s <sup>1</sup> Oro	<b>Hg</b> [Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>10</sup> 6s <sup>2</sup> Mercurio	<b>Tl</b> [Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>9</sup> 6s <sup>2</sup> Talio	<b>Pb</b> [Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>10</sup> 6s <sup>2</sup> Plomo	<b>Bi</b> [Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>10</sup> 6s <sup>2</sup> Bismuto	<b>Po</b> [Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>10</sup> 6s <sup>2</sup> Polonio	<b>At</b> [Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>10</sup> 6s <sup>2</sup> Astatio	<b>Rn</b> [Xe]4f <sup>14</sup> 5d <sup>10</sup> 6s <sup>2</sup> Radón	<b>Fr</b> [Rn]7s <sup>1</sup> Francio	<b>Ra</b> [Rn]7s <sup>2</sup> Radio	<b>Ac**</b> [Rn]6d <sup>1</sup> 7s <sup>2</sup> Actinio	<b>Rf</b> [Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>2</sup> 7s <sup>2</sup> Rutherfordio	<b>Db</b> [Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>3</sup> 7s <sup>2</sup> Dubnio	<b>Sg</b> [Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>4</sup> 7s <sup>2</sup> Seaborgio	<b>Bh</b> [Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>5</sup> 7s <sup>2</sup> Bohrio	<b>Hs</b> [Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>6</sup> 7s <sup>2</sup> Hassio	<b>Mt</b> [Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>7</sup> 7s <sup>2</sup> Meitnerio	<b>Ds</b> [Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>8</sup> 7s <sup>2</sup> Darmstadtio	<b>Rg</b> [Rn]5f <sup>14</sup> 6d <sup>9</sup> 7s <sup>2</sup> Roentgenio	<b>Uub</b> [Uub]7p <sup>1</sup> Ununbio	<b>Uut</b> [Uub]7p <sup>2</sup> Ununtrio	<b>Uuq</b> [Uub]7p <sup>3</sup> Ununquadro	<b>Uup</b> [Uub]7p <sup>4</sup> Ununpentio	<b>Uuh</b> [Uub]7p <sup>5</sup> Ununhexio	<b>Uus</b> [Uub]7p <sup>6</sup> Ununseptio	<b>Uuo</b> [Uub]7p <sup>6</sup> Ununoctio



NOTA: Los elementos 43, 61 y 93-105 no han sido preparados sintéticamente.

Los elementos cuya masa atómica se ha colocado entre paréntesis no son estables en la naturaleza y se ha dado el número másico del isótopo de mayor vida. Los elementos como el Th, U, Np y Pu, aun cuando también son radiactivos, presentan isótopos de períodos de semidesintegración tan grandes que se han considerado estables.

En la que  $E_0$  es la energía del átomo del gas en su estado fundamental y  $E_i$  la energía en su estado excitado, después de haber absorbido al fotón de frecuencia  $\nu_i$ . Es decir, únicamente absorben fotones, cuya energía  $h\nu_i$  es igual a la diferencia de energías entre un posible estado excitado y el fundamental. Del espectro de absorción podemos deducir los estados excitados posibles para los átomos en cuestión.

La emisión es el proceso contrario al anterior, un sistema atómico con átomos en niveles excitados puede emitir energía en forma radiante volviendo sus átomos al estado fundamental o a otro estado excitado de menor energía. Si el proceso se realiza de forma natural, se denomina emisión espontánea. Los fotones emitidos verifican la relación [50.1] y constituyen el espectro de emisión de los átomos en cuestión, el cual nos pone de manifiesto los estados excitados de los mismos.

La vida media de un átomo en un estado excitado es inversamente proporcional a la probabilidad de transición de ese estado al fundamental, generalmente su valor oscila alrededor de  $10^{-8}$  s. Sin embargo, hay estados en los cuales la vida media es muchísimo mayor, siendo su valor del orden de  $10^{-3}$  segundos, a éstos se les denomina *estados metastables* y tienen gran importancia, como enseguida veremos.

En el caso del Hidrógeno, podemos expresar la frecuencia del fotón emitido al saltar el electrón desde un estado excitado con número cuántico  $n_i$  a otro estado final con número cuántico  $n_f$ , utilizando la [50.1] y el valor de la energía en función del número cuántico  $n$  dada por la [49.22]:

$$h\nu = \frac{e^4 m_e}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

Puesto que es  $\hbar = h/2\pi$ , la anterior se expresa:

$$h\nu = \frac{e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 h^2} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

Con lo cual, la frecuencia del fotón emitido es:

$$\nu = \frac{e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 h^3} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad [50.2] \quad \text{Frecuencia emitida H}_2$$

### EJEMPLO 50.1

En un átomo excitado de Hidrógeno su electrón está en el nivel  $n = 2$  y salta al estado fundamental emitiendo un fotón. Calculemos:

- a) La frecuencia de la radiación emitida.
- b) Su longitud de onda.

#### Solución:

- a) La frecuencia de la radiación emitida está dada por la [50.2]:

$$\nu = \frac{e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 h^3} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3e^4 m_e}{32\epsilon_0^2 h^3}$$

Utilizando el valor dado por la [47.8]  $\frac{e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 h^2} = 2,17 \times 10^{-18}$  J, resulta:

$$\nu = \frac{3}{4h} 2,17 \times 10^{-18} = 2,456 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

- b) La longitud de onda de la radiación emitida es:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \times 10^8}{2,456 \times 10^{15}} = 1,22 \times 10^{-7} \text{ m}$$

En general, para cualquier átomo la [50.2] se expresa:

Frecuencia emitida

$$\nu = \frac{Ze^4 m_e}{8\epsilon_0^2 h^3} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad [50.3]$$

En la que  $Z$  es el número atómico del elemento y nos da la frecuencia del fotón emitido al saltar un electrón desde un estado inicial excitado, en el cual es  $n = n_i$ , a otro estado final, en el cual es  $n = n_f$ .

Se denomina *energía de ionización* o *energía de enlace* de un elemento a la energía mínima necesaria para liberar un electrón del estado fundamental del átomo de ese elemento. El valor de la energía de ionización coincidirá con el valor de la energía correspondiente al estado fundamental, ya que el electrón debe pasar de la energía  $E_1$ , correspondiente a  $n = 1$ , a la energía  $E = 0$ , correspondiente al estado libre. Así, par el hidrógeno, la energía de ionización será 13,6 eV, pues el electrón pasa de tener la energía  $E_1 = -13,6$  en su estado fundamental, a la energía  $E = 0$ , correspondiente al estado libre.

Para átomos de número atómico  $Z$ , la energía de ionización, considerando que no existe interacción electrón-electrón, se expresa:

$$E_1 = 13,6 \frac{Z^2}{n_o^2} \text{ (eV)} \quad [50.4]$$

En la que  $n_o$  es el número cuántico principal del electrón menos ligado al átomo. Si tenemos en cuenta la interacción entre electrones, los más internos apantallarán el efecto de la carga positiva del núcleo sobre los electrones exteriores y la energía para liberar al menos ligado será inferior, pudiendo expresarse:

Energía de ionización

$$E_1 = 13,6 \frac{Z_e^2}{n_o^2} \text{ (eV)} \quad [50.5]$$

en la que  $Z_e$  es el número atómico efectivo.

La energía de ionización aumentará al aumentar  $Z_e$  dentro del mismo periodo, es decir, mientras  $n_o$  se mantiene constante, pero disminuirá bruscamente al pasar al periodo siguiente, es decir, al aumentar  $n$  en una unidad. En la Figura 50.2 se representa la variación de  $E_1$  en función del número atómico.

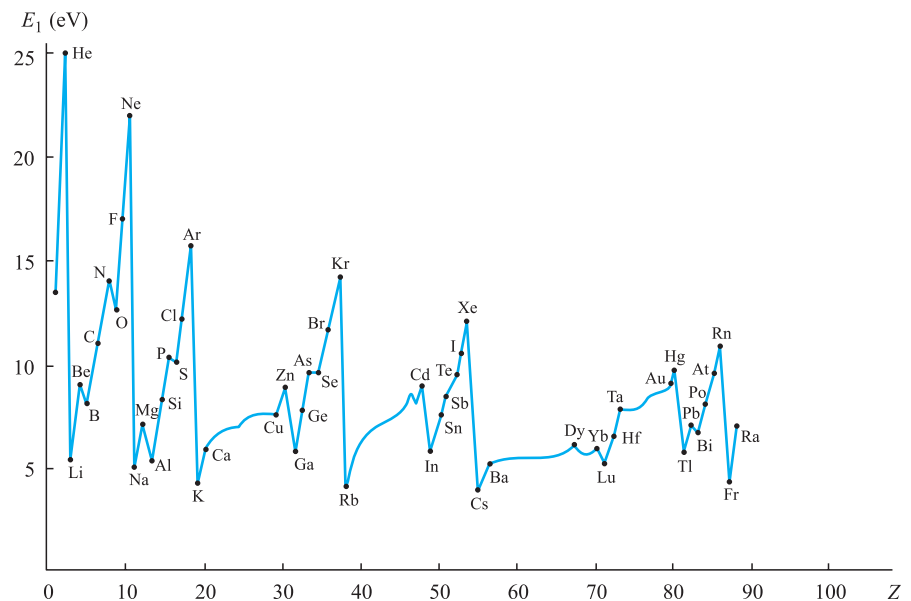


Figura 50.2. Energía de ionización función de  $Z$ .

Pueden apreciarse algunas anomalías en la relación de  $E_1$  frente a  $Z$ , como son las correspondientes al Boro, al Aluminio, al Oxígeno, al Azufre o al Galio, las cuales son debidas al llenado de nuevas subcapas.

## 50.6 Transiciones radiantes. Reglas de selección

La descripción del electrón en un estado de energía  $E$  está dada por la función de onda:

$$\psi_n = \phi_n e^{-iE_n t/\hbar} \quad [50.6]$$

En la que  $\phi_n$  una solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para ese electrón.

La posición media del electrón respecto al centro del átomo es:

$$\langle r \rangle = \int_0^\infty r \psi_n \psi_n^* dr \quad [50.7]$$

La cual, puesto que es:

$$\psi_n^* = \phi_n^* e^{iE_n t/\hbar}$$

se expresa de la forma:

$$\langle r \rangle = \int_0^\infty r |\phi_n|^2 dr \quad [50.8]$$

Su valor es una constante y, por tanto, el electrón no oscila y no habrá emisión radiante alguna.

Analicemos ahora el caso de un electrón que está en un estado de energía  $E_m$  y salta a otro de energía  $E_n$ . La función de onda, que debe representar al electrón en ambos estados, debe ser de la forma:

$$\psi_{m,n} = a\psi_m + b\psi_n \quad [50.9]$$

Cuando el electrón esté en el estado  $m$ , es  $a = 1$  y  $b = 0$ , y cuando esté en el estado  $n$ , será  $a = 0$  y  $b = 1$ . De acuerdo con lo visto, ni en uno ni en otro caso habrá radiación.

En la transición deben ser  $0 < a < 1$  y  $0 < b < 1$ , verificándose la [50.9]. La posición media del electrón está ahora dada por:

$$\begin{aligned} \langle r \rangle &= \int_0^\infty r \psi_{m,n} \psi_{m,n}^* dr = \int_0^\infty r (a\psi_m + b\psi_n)(a\psi_m^* + b\psi_n^*) = \\ &= a^2 \int_0^\infty r |\psi_m|^2 dr + b^2 \int_0^\infty r |\psi_n|^2 dr + ab \int_0^\infty r (\psi_m \psi_n^* + \psi_n \psi_m^*) dr \end{aligned}$$

El primero y segundo sumandos son constantes, según hemos visto, pero el tercero, puesto que son:

$$\psi_m \psi_n^* = \phi_m \phi_n e^{-\frac{E_m - E_n}{\hbar} it}$$

y

$$\psi_n \psi_m^* = \phi_n \phi_m e^{i \frac{E_m - E_n}{\hbar} t}$$

Al sumar, teniendo en cuenta que es  $e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} = 2 \cos \omega t$  resulta:

$$2ab \cos \frac{E_m - E_n}{\hbar} \int_0^\infty r \phi_m \phi_n dr \tag{50.10}$$

En definitiva, la posición media del electrón es función armónica del tiempo, oscilando con la frecuencia,  $\nu$ , igual a la diferencia de energías entre los estados inicial y final dividida por  $\hbar$ :

Así se simboliza la frecuencia:

$$\nu = \frac{E_m - E_n}{\hbar}$$

Para que la transición entre los estados sea posible, es necesario que la integral de [50.10] sea no nula. Si la citada integral es cero, la transición no es posible y se llama *transición prohibida*. Las condiciones para las cuales la integral citada es distinta de cero se denominan *reglas de selección*.

En el caso del átomo de Hidrógeno, cada estado orbital está determinado por tres números cuánticos,  $n$ ,  $l$  y  $m_l$ . Las reglas de selección se expresan:

$$\int \phi_{n_2, l_2, m_2} \hat{r} \phi_{n_1, l_1, m_1} dV \neq 0 \tag{50.11}$$

Lo cual es una generalización de la integral de [50.10].

Para que [50.11] se cumpla, debe verificarse alguna de las relaciones:

Reglas de selección

$$\Delta m = 0, \pm 1 \quad \text{o} \quad \Delta l = \pm 1 \tag{50.12}$$

que son las conocidas reglas de selección para las transiciones permitidas.

### 50.7 Emisión estimulada. Láser

La palabra LASER es un acrónimo de la denominación inglesa *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*. Hemos analizado la emisión espontánea de radiación por los átomos en estados excitados al pasar de forma espontánea a su estado base. En 1917, Einstein, basándose en razonamientos termodinámicos y en los conceptos de la incipiente Mecánica cuántica, estableció la posibilidad de estimular la emisión de radiación en átomos que se encuentran en estados excitados. Einstein predijo que al interactuar un fotón de energía  $h\nu = E_2 - E_1$  con un átomo que se encuentra en el estado excitado de energía  $E_2$ , y cuyo estado base tiene por energía  $E_1$ , estimula al átomo a pasar a su estado base y emitir un fotón igual al incidente, con lo cual aparecen en el medio dos fotones iguales (Figura 50.3), es decir, con la misma frecuencia, la misma dirección de movimiento y en fase, además de haber sido amplificada la luz incidente. A esta forma de emisión se le denomina *emisión estimulada*. Los fotones producidos, a su vez, pueden interactuar

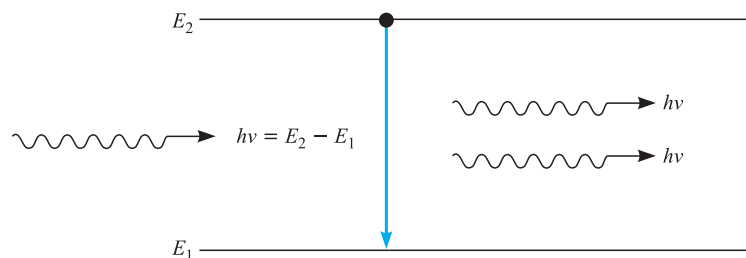


Figura 50.3. Emisión estimulada.

con otros átomos excitados de energía  $E_2$  produciendo nuevos fotones iguales y nuevos átomos que pasan al estado base, pero también pueden ser simplemente absorbidos por un átomo.

Para que se produzca emisión láser es necesario un sistema atómico con al menos dos niveles de excitación electrónica, uno de los cuales, el de menor energía, debe ser metastable. Del estado fundamental, los electrones pasan al nivel excitado superior  $E_2$  por absorción de energía, proceso que se denomina *bombeo óptico* (Figura 50.4). Este estado excitado es muy inestable y, de forma espontánea, el electrón salta al estado metastable de energía  $E_1 < E_2$ , el cual tiene una vida media de unos milisegundos, lo que es del orden de  $10^5$  veces mayor que la correspondiente al nivel  $E_2$ . Por este procedimiento, la población de átomos en estado metastable llega a ser superior a la de aquellos en estado fundamental, diciéndose que se ha producido una *inversión* en la población, ya que lo normal es que sea más abundante la población de átomos en estado base. Un fotón de frecuencia  $\nu = (E_1 - E_0)/h$  inducirá el salto de electrones desde el estado metastable al fundamental produciéndose la radiación láser.

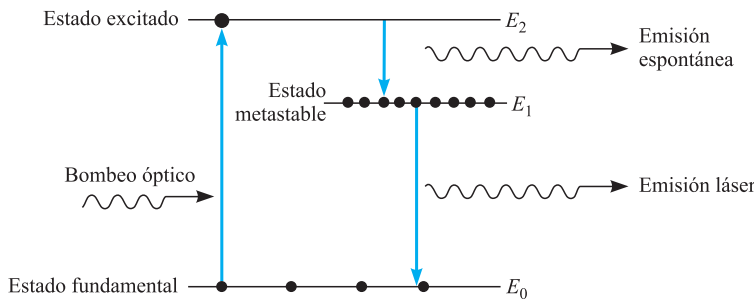


Figura 50.4. Emisión láser.

Para que el sistema entre en avalancha y se produzca la amplificación es necesario que los fotones láser emitidos queden confinados en el sistema un mínimo de tiempo, lo que se consigue situando en los extremos del sistema sendos espejos, uno de los cuales sea semitransparente. La radiación láser acabarán saliendo por éste, pero antes sus fotones habrán sido reflejados alguna vez obligándoles a permanecer por más tiempo dentro del sistema.

El primer láser fue construido, en 1960, por Theodore Maiman, y en el denominado **láser de rubí**, ya que usó para ello un cristal cilíndrico de rubí, que es un óxido de aluminio con algunos átomos de éste remplazados por átomos de cromo. Este rubí presenta dos niveles de excitación, uno de  $E_2 = 2,2$  eV y otro, metastable, de  $E_1 = 1,8$  eV, los cuales se han presentado en la Figura 50.5.

Láser de rubí

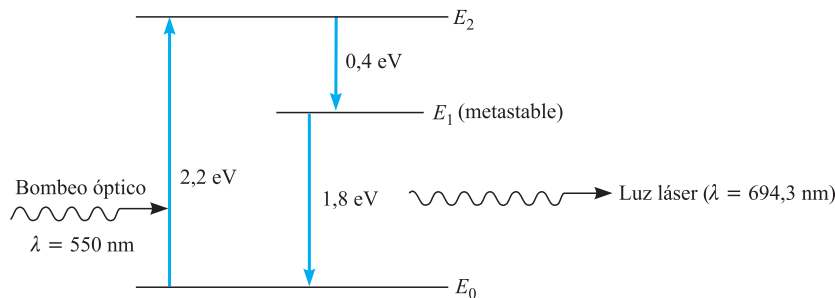


Figura 50.5. Niveles de energía del Rubí.

El bombeo óptico se realiza con radiación intensa de fotones de longitud de onda  $\lambda = 550$  nm, luz amarillo verdosa, que elevan electrones al estado energético  $E_2$ ;

de este pasan rápidamente al estado metastable  $E_1$ , del cual decaen al estado base emitiendo fotones de energía 1,8 eV y longitud de onda  $\lambda = 694,3$  nm, zona roja del espectro, color rojo rubí. Uno de los extremos del cristal de rubí está perfectamente plateado, mientras que el otro está semiplateado y deja salir la radiación láser, aproximadamente un 1 por 100 de la incidente. La excitación se realizaba mediante una lámpara en espiral que rodeaba al cristal de rubí y que emitía de forma intermitente, a lo que el sistema respondía emitiendo pulsos de radiación láser.

### Láser helio-neón

El **láser de helio-neón**, hoy común en nuestros laboratorios, fue diseñado a finales de 1960 por Alí Javan en los laboratorios de la Bell, y está formado por un tubo de descarga lleno con una mezcla de Helio y Neón en la proporción 5/1. El Helio presenta un estado metastable de  $E_3 = 20,61$  eV. La excitación del Helio se realiza mediante las descargas eléctricas que se provocan en el interior del tubo haciendo que electrones pasen al nivel  $E_3$  (Figura 50.6). El Neón presenta un estado excitado metastable de energía  $E_2 = 20,66$  eV, muy próxima a la  $E_3$  del Helio, y otro estado  $E_1 = 18,70$  eV, que es muy inestable.

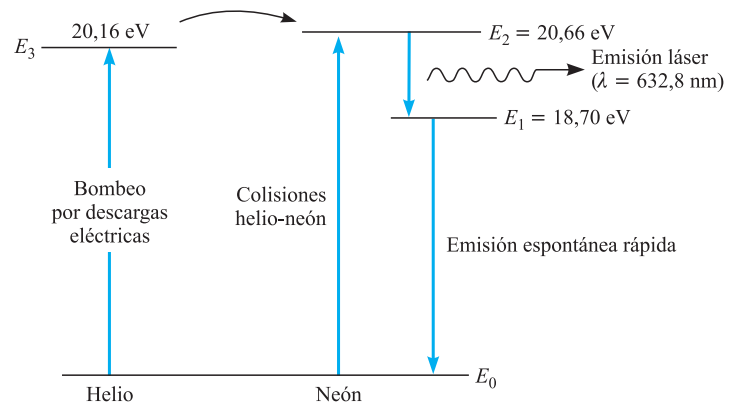


Figura 50.6. Láser helio-neón.

Los átomos de Helio en nivel  $E_3$  vuelven a su estado base y transfieren con mucha facilidad su energía a los átomos de Neón, haciéndoles pasar al estado metastable  $E_2$ , la diferencia de energía  $E_2 - E_3 = 0,05$  eV es transferida a expensas de la energía cinética. La población de átomos de Neón en este estado es muy superior a la existente en el estado  $E_1$ , por varias razones: en primer lugar por ser el  $E_3$  estado metastable del Helio y transferir éste con mucha facilidad su energía al Neón; en segundo lugar por ser el estado  $E_2$  del Neón metastable, y finalmente, por tener el estado  $E_1$  del Neón una vida media muy pequeña. Por tanto, la transición predominante es la  $E_2 \rightarrow E_1$  emitiendo luz láser de  $\lambda = 632,8$  nm.

El sistema de emisión estimulada y su amplificación se consiguen mediante dos ventanas, una en cada extremo del tubo y sendos espejos parabólicos con foco en el centro del tubo. Uno de los espejos es completamente reflectante y el otro semitransparente, a través del cual sale la radiación láser. La inclinación de las ventanas respecto al eje del tubo verifica la ley de Brewster, de forma que no hay pérdidas por reflexión,  $\text{tg } \theta = n$ , siendo  $n$  el índice de refracción del vidrio de las ventanas para la longitud de onda de la radiación láser (Figura 50.7).

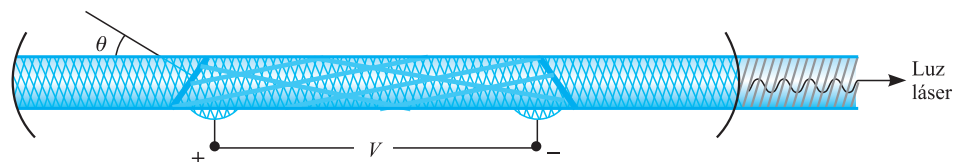
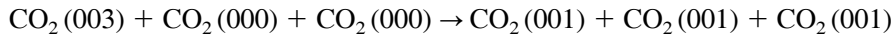


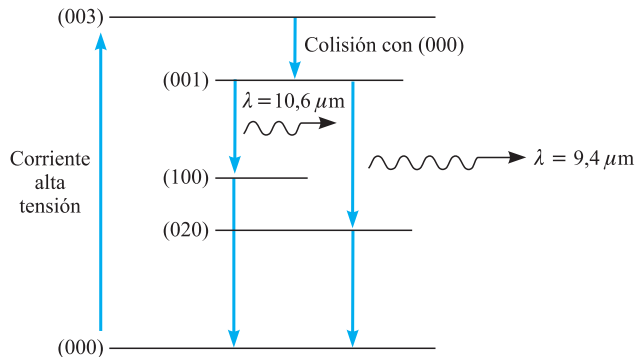
Figura 50.7. Sistema láser helio-neón.



El **láser de CO<sub>2</sub>** fue creado, en 1964 por el indú Kumar Patel. Es el primer láser de gas y aprovecha los niveles energéticos de las vibraciones de la molécula de CO<sub>2</sub>, los cuales se simbolizan mediante tres dígitos, siendo el estado base el (000). El CO<sub>2</sub> se mantiene dentro de un tubo a baja presión, en el cual se establece una diferencia de potencial alta, produciéndose una corriente cuyos electrones chocan con las moléculas de CO<sub>2</sub> lo que provoca su excitación, con la particularidad de que el nivel más poblado es el (003). Las moléculas en este estado chocan con las del estado base y las transfieren su energía apareciendo gran cantidad de moléculas en el estado (001), según la ecuación:



De esta forma se produce la inversión de la población, ya que el estado más poblado es el (001). De este estado las moléculas pasan fundamentalmente al estado (100), emitiendo una radiación de longitud de onda  $\lambda = 10,6 \mu\text{m}$  (Figura 50.8).



**Figura 50.8.** Láser de CO<sub>2</sub>.

También, aunque en menor cantidad, las moléculas del estado (001) pueden pasar al estado (020), emitiendo una radiación de  $\lambda = 9,4 \mu\text{m}$ . Finalmente, en ambos casos, las moléculas vuelven a su estado base para reiterar el proceso. El láser de CO<sub>2</sub> es el de mayor potencia, ya que puede llegar a los 500 W.

La intensidad del haz de luz láser puede ser extraordinariamente grande, pues si un haz láser de 1 W se concentra mediante una lente en una sección transversal de diámetro del orden de la micra, su área será del orden de  $10^{-12} \text{ m}^2$ , y la intensidad del haz es  $I = 10^{12} \text{ W/m}^2$ , que es suficiente para fundir en breve tiempo cualquier sustancia, e incluso perforar un diamante.

Los **láseres de semiconductores** fueron desarrollados a partir de 1962, cuando Robert Hall comprobó la emisión de luz coherente en dispositivos de semiconductores. El semiconductor más usado fue el arseniuro de Galio (GaAs), que había mostrado grandes cualidades optoelectrónicas. En 1963, Kroemer planteó la posibilidad de construir un láser formado por una estructura de tres capas, en la central se situaría el semiconductor activo (GaAs) limitado, a ambos lados, por arseniuro de Galio dopado con Aluminio (AlGaAs). El sistema debía constituir una unidad, es decir, debía crearse un cristal único, lo que consiguieron Panish y Hayashi en los laboratorios de la Bell, en 1967. Su técnica fue mejorada por los investigadores de los mismos laboratorios, Arthur y Cho, los cuales desarrollaron un nuevo método de crecimiento de cristales, denominado *crecimiento epitaxial* o MBE (*Molecular Beam Epitaxy*), cuya precisión permitía depositar sobre la superficie de un cristal capas de espesor atómico de otro elemento. Ello permitió construir láseres de semiconductores de muy pequeño tamaño. La monocromaticidad de la luz láser permite su fácil modulación con una señal adecuada, pudiendo llevar gran cantidad

Láser de CO<sub>2</sub>

Láser de semiconductores

de información dada su alta frecuencia, información que puede ser transportada mediante fibras ópticas, todo lo cual les hace de gran aplicación en telecomunicaciones. También a este tipo de láser pertenecen los punteros láser, los lectores de código de barras, y los lectores de CD y DVD.

Por ser una radiación de extraordinaria coherencia, presenta interferencias muy nítidas, lo que le hace útil para detectar pequeños desplazamientos y para la medida muy precisa de distancias; su perfecta direccionalidad y su mínima dispersión le hacen muy útil en el trazado de alineaciones de gran precisión, fundamentalmente sobre lugares inaccesibles, todo lo cual es de gran aplicación en geofísica e ingeniería. La telemetría láser ha permitido medir con gran precisión la distancia Tierra-Luna, para lo cual fue necesario situar en la Luna un reflector láser, hacia el cual se envía un haz láser desde la Tierra utilizando un telescopio que se encarga de recibir el haz láser reflejado y todo lo cual está temporizado mediante un reloj atómico.

El láser ha encontrado grandes aplicaciones en medicina tanto en dermatología, como en oftalmología y, en general, en microcirugía. También, ha facilitado el desarrollo de la holografía, que consiste en fotografiar un objeto iluminado con luz láser, de forma que en la película se superpongan la luz láser directa y la reflejada en el objeto. De esa forma se consigue que en la película quede reflejada no solamente la intensidad de la luz que llega del objeto, sino también su fase. Una vez revelada la película (holograma) constituye una especie de sistema de difracción, que al ser iluminado con luz láser de la misma longitud de onda, reconstruye la imagen tridimensional del objeto.

#### Láser atómico

Finalmente citaremos al **láser atómico**, el cual en lugar de emitir ondas electromagnéticas coherentes, emite ondas de materia coherentes, es decir, en lugar de emitir fotones, emite átomos, todos ellos en el mismo estado cuántico, de forma que se propagan según una única ecuación de ondas. Ya en 1924, Einstein y Bose predijeron que átomos extremadamente enfriados podían condensarse en un único estado cuántico, que se denominó *condensado Bose-Einstein*. Este estado fue conseguido, en 1994, por Cornell y Weiman, en EEUU y, de forma independiente, por Ketterle en Alemania, para lo cual tuvieron que llegar a temperaturas absolutas inferiores a la millonésima de grado, los primeros trabajaron con átomos de Rubidio y Ketterle con átomos de Sodio. En este nuevo estado de la materia, los átomos pierden su identidad y forman una sóla onda cuántica, vibrando todos con la misma frecuencia. Es muy interesante la observación de Ketterle cuando dice: *si se intentan unir dos condensados, ni se mezclan como los gases, ni rebotan como los sólidos, lo que hacen realmente es interferir entre ellos como ondas*.

# Mecánica estadística. Estadística de Maxwell-Boltzmann

- 51.1. Introducción
- 51.2. Estadística de Maxwell-Boltzmann
- 51.3. Función de partición
- 51.4. Entropía y probabilidad termodinámica
- 51.5. Calor y trabajo
- 51.6. Expresiones en función de  $T$
- 51.7. Aplicación al gas ideal
- 51.8. Entropía de un sistema en equilibrio
- 51.9. Entalpía. Energía libre y entalpía libre

## 51.1 Introducción

Al estudiar sistemas de muchas partículas, obviamente, no es posible definirlos aplicando la Mecánica clásica a cada una de aquéllas. Se hace necesario utilizar métodos estadísticos que nos permitan conocer las magnitudes macroscópicas del sistema, sin necesidad de estudiar a cada una de sus partículas, sino únicamente su comportamiento más probable. La Mecánica estadística es la parte de la Física que tiene por objeto este estudio, y comenzó su desarrollo a fines del siglo XIX, con Maxwell (1831-1879) y Boltzmann (1844-1906).

No todas las partículas del sistema estarán en el mismo estado dinámico, y para describir el sistema, será necesario conocer la distribución de las partículas en cada estado. Llamaremos  $n_i$  al número de partículas en el estado  $i$ . Si hay  $m$  estados posibles, una distribución está definida por  $m$  números, que nos indicarán el número de partículas que hay en cada estado:

$$n_1, n_2, \dots, n_m \quad \text{o bien} \quad n_i, i = 1, 2, \dots, m$$

Siempre deberá verificarse:

$$\sum n_i = N \quad [51.1]$$

En la que  $N$  es el número total de partículas del sistema.

La probabilidad de encontrar una partícula en el estado  $i$  es  $f_i = \frac{n_i}{N}$ , debiendo también verificarse:

$$\sum f_i = \sum \frac{n_i}{N} = \frac{1}{N} \sum n_i = 1 \quad [51.2]$$

El valor medio, que para una cierta función de distribución  $f_i$ , toma una variable dinámica, tal como  $E$ , cuyo valor en el estado  $i$  es  $E_i$ , está dado por:

$$\langle E \rangle = \sum f_i E_i \quad [51.3]$$

Si la variable dinámica considerada puede adoptar toda una serie continua de valores, será:

$$\langle E \rangle = \int f(E)E dE \quad [51.4]$$

En este caso, la [51.2], se expresa:

$$\int f(E) dE = 1 \quad [51.5]$$

Expresión que constituye la condición de normalización de la función de distribución  $f(E)$ .

De todas las distribuciones posibles, hay una de máxima probabilidad o distribución más probable, alcanzada la cual, el sistema ha llegado al equilibrio estadístico y no variará su distribución más que por acciones externas.

Conocida la distribución más probable, es posible, según métodos que veremos, deducir las propiedades macroscópicas del sistema. Por tanto, el problema fundamental de la Mecánica estadística es hallar la distribución más probable para el sistema en cuestión y en las condiciones consideradas.

Evidentemente, la función de distribución depende de las hipótesis que hagamos para su deducción. En este capítulo nos ocuparemos únicamente de la Mecánica estadística clásica o de Maxwell-Boltzmann, la cual admite como hipótesis que las partículas son distinguibles y que, en un mismo estado, puede haber más de una partícula.

## 51.2 Estadística de Maxwell-Boltzmann

Consideremos un sistema de  $N$  partículas distinguibles entre sí, que pueden ocupar  $m$  niveles energéticos, de energía  $E_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , respectivamente. Admitimos que un mismo nivel puede estar ocupado por más de una partícula y que los niveles energéticos presentan degeneración, es decir, que con el mismo nivel energético hay distintos estados posibles para las partículas; supongamos que es  $g_i$  el grado de degeneración del nivel  $i$ .

Si la energía interna del sistema es  $U$ , para una distribución cualquiera  $n_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , siempre se verificará:

$$U = \sum n_i E_i \quad [51.6]$$

Analicemos ahora de cuántas formas posibles, distintas entre sí, podemos distribuir las  $N$  partículas del sistema, entre los  $m$  niveles energéticos, con la degeneración indicada para éstos. Supongamos alineadas las  $N$  partículas y hagamos corresponder cada nivel energético con un cierto segmento de la línea, de forma que las partículas de ese segmento tengan la energía correspondiente al nivel asociado. Las  $N$  formas distintas de alinear  $N$  partículas no dan distribuciones distintas, pues las permutaciones entre sí de las partículas de un mismo nivel energético repiten la misma distribución. Por tanto, el número de formas posibles de distribuir  $N$  partículas distinguibles entre sí, en  $m$  grupos de  $n_i$  partículas cada uno, es:

$$\frac{N!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_m!} = \frac{N!}{\prod_{i=1}^m (n_i!)}$$

Por otra parte, debemos considerar que cada nivel energético está desdoblado en  $g_i$  estados, es decir, dentro de cada nivel hay  $g_i$  formas distintas para que la partícula tome la energía  $E_i$ . Las formas diferentes de que las  $n_i$  partículas del nivel  $i$ , distinguibles entre sí, tomen la energía  $E_i$  es:

$$g_i^{n_i}$$

En consecuencia, el número de distribuciones distintas de las  $N$  partículas entre los  $m$  estados energéticos, con la degeneración indicada para cada uno de éstos, es:

$$w = \frac{N! \times g_1^{n_1} \times g_2^{n_2} \times \dots \times g_m^{n_m}}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_m!} = N! \prod_{i=1}^m \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \quad [51.7]$$

Es interesante eliminar la distinguibilidad entre las partículas, lo que da lugar a la estadística de Maxwell-Boltzmann corregida, la cual comprende la anterior y amplía sus posibilidades de aplicación satisfactoria.

Al ser las partículas indistinguibles, no hay  $N!$  formas distintas de alinearlas, sino una sola; por ello, suponiendo las partículas idénticas y no distinguibles entre sí, habrá que dividir la [51.7] por  $N!$ , resultando:

$$w = \prod_{i=1}^m \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \quad [51.8]$$

La distribución más probable será la que hace máxima a esta expresión. Para calcularla, tomemos logaritmos neperianos:

$$\ln w = \sum [n_i \ln g_i - \ln(n_i!)]$$

Dado que los valores  $n_i$  serán muy grandes, podemos utilizar la aproximación de Stirling  $\ln(N!) = N \ln N - N$ , con lo cual y teniendo en cuenta la [51.1], es:

$$\ln w = \sum_i n_i \ln \frac{g_i}{n_i} + N \quad [51.9]$$

El máximo de  $w$  verificará  $d(\ln w) = 0$ , y puesto que debe cumplirse la diferencial de la Ecuación [51.1]:

$$\sum dn_i = 0 \quad [51.10]$$

resulta:

$$\sum \ln \frac{g_i}{n_i} dn_i = 0 \quad [51.11]$$

Asimismo, siempre debe verificarse la diferencial de [51.6]:

$$\sum E_i dn_i = 0 \quad [51.12]$$

Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange, el máximo de  $w$  verificará la expresión obtenida sumando a la [51.11], la [51.10] multiplicada por  $\alpha$  y la [51.12] multiplicada por  $\beta$ :

$$\sum_{i=1}^m \left( \ln \frac{n_i}{g_i} + \alpha + \beta E_i \right) dn_i = 0 \quad [51.13]$$

A causa de las condiciones [51.1] y [51.6], solamente  $m - 2$  de las  $n_i$  son independientes entre sí; por tanto, hay dos valores de  $n$  que dependen de los demás. Podremos tomar  $\alpha$  y  $\beta$  de forma que los coeficientes de  $dn_i$  correspondientes a esos dos valores sean nulos; los otros  $m - 2$  coeficientes también deberán serlo para que se verifique [51.13], puesto que los restantes  $n_i$  son independientes entre sí. Por tanto, siempre ha de ser:

$$\ln \frac{n_i}{g_i} + \alpha + \beta E_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Lo que en forma exponencial se escribe:

$$n_i = g_i e^{-\alpha - \beta E_i} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad [51.14]$$

Expresión que se conoce como *Ley de distribución de Maxwell-Boltzmann*.

Esta ley debe verificar la [51.1]; por tanto, debe ser:

$$N = \sum g_i e^{-\alpha - \beta E_i} = e^{-\alpha} \sum g_i e^{-\beta E_i}$$

De esta se despeja:

$$e^{-\alpha} = \frac{N}{\sum g_i e^{-\beta E_i}}$$

Con lo cual, la *Ley de distribución de Maxwell-Boltzmann* [51.14], se expresa:

Distribución de  
Maxwell-Boltzmann

$$n_i = \frac{N g_i e^{-\beta E_i}}{\sum g_i e^{-\beta E_i}} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad [51.15]$$

### 51.3 Función de partición

Se denomina *función de partición*,  $Z$ , a la expresión:

Función de partición

$$Z = \sum_{i=1}^m g_i e^{-\beta E_i} \quad [51.16]$$

Lo que llevado a la [51.15] permite expresar la distribución más probable de la forma:

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\beta E_i} \quad [51.17]$$

Esta expresión también debe verificar la [51.6]; es decir, debe ser:

$$U = \frac{N}{Z} \sum E_i g_i e^{-\beta E_i} \quad [51.18]$$

La derivada respecto a  $\beta$  de la función de partición es:

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\sum E_i g_i e^{-\beta E_i}$$

Sustituyendo este valor en la [51.18], permite escribirla de la forma:

$$U = -\frac{N}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = -N \frac{\partial}{\partial \beta} (\ln Z) \quad [51.19]$$

Por tanto, la energía media de una partícula es únicamente función de  $Z$ , ya que es:

Energía media

$$\langle E \rangle = \frac{U}{N} = -\frac{\partial}{\partial \beta} (\ln Z) \quad [51.20]$$

Esto pone de manifiesto la gran importancia de la función de partición en Mecánica estadística y nos va a permitir expresar las principales magnitudes termodinámicas en función de ella.

## 51.4 Entropía y probabilidad termodinámica

Según la Termodinámica clásica, el estado de equilibrio es el de entropía máxima, y según la Mecánica estadística, es el de distribución de máxima probabilidad. Ello induce a pensar en la posibilidad de que la entropía,  $S$ , y la probabilidad máxima,  $W$ , estén de algún modo relacionadas.

Supongamos que la entropía es una cierta función de  $W$ ,  $S = f(W)$ . Considerando dos partes de un sistema, deberán verificar  $S_1 = f(W_1)$  y  $S_2 = f(W_2)$ . Puesto que la entropía es una magnitud extensiva, ha de ser:

$$S = S_1 + S_2, \quad \text{o bien,} \quad f(W) = f(W_1) + f(W_2)$$

Por otra parte, puesto que cualquier estado de la parte 1 del sistema es independiente de los estados de la parte 2 y, recíprocamente, debe ser  $W = W_1 W_2$ , con lo cual es:

$$f(W_1 W_2) = f(W_1) + f(W_2) \quad [51.21]$$

Por lo indicado,  $W_1$  y  $W_2$  son independientes entre sí. Hallemos la derivada de [51.21] respecto a  $W_1$ :

$$\frac{df(W_1)}{dW_1} = \frac{\partial f(W_1 \cdot W_2)}{\partial W_1} = \frac{df(W_1 W_2)}{d(W_1 W_2)} W_2$$

Multiplicando por  $W_1$ , resulta:

$$W_1 \frac{df(W_1)}{dW_1} = \frac{df(W_1 \cdot W_2)}{d(W_1 \cdot W_2)} W_1 \cdot W_2$$

Análogamente, si se halla la derivada de [51.21] respecto a  $W_2$  y se multiplica por  $W_2$ , resulta:

$$W_2 \frac{df(W_2)}{dW_2} = \frac{df(W_1 \cdot W_2)}{d(W_1 \cdot W_2)} W_1 \cdot W_2$$

Puesto que los segundos miembros son iguales, los primeros también deben serlo:

$$W_1 \frac{df(W_1)}{dW_1} = W_2 \frac{df(W_2)}{dW_2}$$

Puesto que el primer miembro sólo es función de  $W_1$  y el segundo sólo función de  $W_2$ , para que se verifique la igualdad, ambos deben ser igual a una constante:

$$W \frac{df(W)}{dW} = k$$

o

$$df(W) = k \frac{dW}{W}$$

Expresión que integrada da:

$$f(W) = k \ln W + C$$

La cual, en función de la entropía, se expresa:

$$S = k \ln W + S_0$$

en la que  $S_0$  es el valor de  $S$  para  $W = 1$ . Ahora bien, de acuerdo con el Tercer Principio de la Termodinámica, para  $T = 0$ , debe ser  $S = 0$ , pero para  $T = 0$

no hay más que un estado posible, es decir,  $W = 1$ , luego debe ser  $S_0 = 0$ , verificándose:

$$\text{Entropía} \quad S = k \ln W \quad [51.22]$$

A la constante  $k$  se le denomina *constante de Boltzmann*, cuyo valor es:

$$\text{Constante de Boltzmann} \quad k = 1,3806503(24) \times 10^{-23} \text{ J } ^\circ\text{K}^{-1} = 8,61734 \times 10^{-5} \text{ eV } ^\circ\text{K}^{-1}$$

## 51.5 Calor y trabajo

Consideremos un gas en equilibrio estadístico que, como consecuencia de la interacción con el medio exterior, experimenta una transformación infinitesimal. La energía interna sufrirá una variación infinitesimal, la cual se obtiene diferenciando la Ecuación [51.6],

$$dU = \sum E_i dn_i + \sum n_i dE_i \quad [51.23]$$

El primer sumando corresponde a la variación de energía interna, debida a la redistribución de las partículas entre los niveles energéticos, y el segundo sumando, corresponde a la variación de energía interna debida a la variación de los niveles de energía. Estos posibles niveles de energía están asociados a las dimensiones o volumen del recipiente, cuya modificación debe ir asociada con el trabajo de una fuerza exterior, por ello debe ser:

$$d\tau = -\sum n_i dE_i \quad [51.24]$$

Teniendo esto en cuenta y comparando la [51.23] con la expresión del Primer Principio dada por [20.12], resulta que debe ser:

$$dQ = \sum E_i dn_i \quad [51.25]$$

Por tanto, estadísticamente, el calor es la variación de energía interna del sistema debida a la redistribución de sus partículas en los diferentes niveles energéticos, como resultado de la interacción energética con el medio.

Consideremos un proceso reversible en el cual se suministra una cantidad de calor al sistema, a volumen constante. Los niveles de energía permanecen constantes y la variación de energía interna es debida a la nueva redistribución de las partículas entre los niveles energéticos.

Consideremos ahora un proceso adiabático reversible, en el cual se suministra trabajo al sistema, produciendo una variación en su volumen. Debido a esta variación, hay una variación en los niveles energéticos ocupados por las partículas y, como resultado, una variación de la energía interna del sistema.

## 51.6 Expresiones en función de $T$

Hallemos la diferencial de la Ecuación [51.22],

$$dS = k d(\ln W) = k \sum_i \frac{\partial \ln W}{\partial n_i} dn_i$$

De la [51.10] se obtiene:

$$\frac{\partial \ln W}{\partial n_i} = \ln \frac{g_i}{n_i} - 1$$

Con lo cual, y teniendo en cuenta la [51.10], es:

$$dS = k \sum \left( \ln \frac{g_i}{n_i} - 1 \right) dn_i = k \sum_i \ln \frac{g_i}{n_i} dn_i$$



De la [51.16] se despeja:

$$\frac{g_i}{n_i} = \frac{Z}{N} e^{\beta E_i}$$

cuyo neperiano es:

$$\ln \frac{g_i}{n_i} = \ln \frac{Z}{N} + \beta E_i$$

Con lo cual se escribe:

$$dS = k \sum \left( \ln \frac{Z}{N} + \beta E_i \right) dn_i = k \beta E_i dn_i$$

Teniendo ahora en cuenta la expresión [51.25], se escribe:

$$dS = k \beta dQ$$

Al comparar ésta con la [21.8], resulta que debe ser:

$$k \beta = \frac{1}{T} \tag{51.26}$$

Lo que puede considerarse como una definición estadística de la temperatura.

Llevando a la Ecuación [51.16] el valor de  $\beta$  dado por la [51.26], resulta para la función de partición la expresión:

$$Z = \sum_{i=1}^m g_i e^{-E_i/kT} \tag{51.27} \text{ Función de partición}$$

y para la distribución más probable:

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-E_i/kT} \tag{51.28} \text{ Distribución más probable}$$

Lo que es la expresión de la distribución de Maxwell-Boltzmann en función de la temperatura. Asimismo, para expresar la energía interna en función de la temperatura, hallemos la diferencial de [51.26]:

$$k d\beta = - \frac{1}{T^2} dT$$

Con lo cual será:

$$\frac{d}{d\beta} = \frac{d}{dT} \frac{dT}{d\beta} = -kT^2 \frac{d}{dT}$$

y la Ecuación [51.19] se escribe:

$$U = kNT^2 \frac{d}{dT} (\ln Z) \tag{51.29}$$

La energía media será:

$$\langle E \rangle = kT^2 \frac{d}{dT} (\ln Z) \tag{51.30} \text{ Energía media}$$

En consecuencia, tanto la energía interna total como la media por partícula dependen únicamente de la temperatura absoluta, a través de la función de partición del sistema.

## 51.7 Aplicación al gas ideal

### Energía interna

Consideremos un gas ideal monoatómico, por tanto, en él, la energía de sus moléculas es debida únicamente a su energía cinética traslacional, no será necesario tener en cuenta energías de vibración o de rotación, ni de potenciales intermoleculares. La energía de la partícula es:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{p^2}{2m} \quad [51.31]$$

Por otra parte, al ocupar el gas un volumen suficientemente grande, su energía no estará cuantizada, presentando ésta un espectro continuo. En consecuencia, la Ecuación [51.27] se debe escribir:

$$Z = \int_0^{\infty} g(E) e^{-E/kT} dE \quad [51.32]$$

El número de estados con energía comprendida entre  $E$  y  $E + dE$ ,  $g(E) dE$ , será proporcional al volumen del espacio de las fases para  $p$ , es decir, al volumen  $dV$  del espacio de las fases entre  $p$  y  $p + dp$ , el cual es:

$$dV = 4\pi p^2 dp$$

Teniendo en cuenta la [51.31] y su diferencial:

$$dE = \frac{p}{m} dp$$

se escribe:

$$dV = 4\pi p^2 dp = 4\pi(2mE)^{1/2} m dE$$

Por tanto, es:

$$g(E) dE = C_1 E^{1/2} dE \quad [51.33]$$

en la que  $C_1$  es una constante de proporcionalidad.

Con ello la función de partición se expresa:

$$Z = C_1 \int_0^{\infty} E^{1/2} e^{-E/kT} dE$$

La cual, haciendo el cambio de variable  $E = y^2$ , se escribe:

$$Z = 2C_1 \int_0^{\infty} y^2 e^{-y^2/kT} dy$$

Cuya integral es:

$$Z = \frac{C_1}{2} \sqrt{\pi k^3 T^3} = C(kT)^{3/2} \quad [51.34]$$

Para determinar el valor medio de la energía hallemos el neperiano de  $Z$ :

$$\ln Z = \ln C + \frac{3}{2} \ln(kT)$$

El valor medio de la energía de sus moléculas es:

$$\langle E \rangle = kT^2 \frac{d}{dT} \left[ \frac{3}{2} \ln(kT) \right] = kT^2 \frac{3}{2} \frac{k}{kT} = \frac{3}{2} kT \quad [51.35] \quad \text{Energía molecular media}$$

La energía interna del gas será:

$$U = N\langle E \rangle = \frac{3}{2} NkT = \frac{3}{2} nN_A kT = \frac{3}{2} nRT \quad [51.36] \quad \text{Energía interna}$$

En la que  $n$  es el número de moles y  $N_A$  el número de Avogadro; por tanto, la energía interna únicamente es función de la temperatura absoluta.

### Ley de distribución de la energía

La Ecuación [51.17], para  $g = g(E) dE$ , se expresa:

$$dn = \frac{N}{Z} g(E) e^{-E/kT} dE$$

Teniendo en cuenta [51.33] y el valor de  $Z$  dado por [51.34], se escribe:

$$dn = \frac{N}{C(kT)^{3/2}} C_1 E^{1/2} e^{-E/kT} dE$$

Lo que puede expresarse de la forma:

$$\frac{dn}{dE} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{N}{(kT)^{3/2}} E^{1/2} e^{-E/kT} \quad [51.37]$$

Lo cual es la expresión de la ley de distribución de energía de las moléculas de un gas ideal.

#### EJEMPLO 51.1

Determinemos:

- La energía más probable de las moléculas de un gas en función de su temperatura.
- El valor de esa energía a la temperatura de 20°C.

#### Solución:

- La energía más probable es la que hace máxima la ley de distribución de energías, es decir, hace máxima la expresión:

$$y = E^{1/2} e^{-E/kT}$$

Por tanto, debe verificar:

$$\frac{dy}{dE} = 0 = \frac{1}{2} E^{-1/2} e^{-E/kT} - E^{1/2} e^{-E/kT} \frac{1}{kT} = \left( \frac{E^{-1/2}}{2} - \frac{E^{1/2}}{kT} \right) e^{-E/kT}$$

De donde resulta:

$$E = \frac{1}{2} kT$$

- El valor de  $E$  a la temperatura de 20°C es:

$$E = 2 \times 10^{-21} \text{ J } ^\circ\text{K}^{-1} = 0,0125 \text{ eV } ^\circ\text{K}^{-1}$$

### Ley de distribución de velocidades

La energía de las moléculas es únicamente cinética traslacional,  $E = \frac{1}{2}mv^2$ . La diferencial de ésta es  $dE = mv dv$ . Todo lo cual permite escribir la [51.37] de la forma:

$$dn = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{N}{(kT)^{3/2}} \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} v e^{-mv^2/2kT} mv dv$$

Lo que puede expresarse:

$$\frac{dn}{dv} = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT} \quad [51.38]$$

Lo cual es la *ley de distribución de velocidades de las moléculas de un gas ideal*.

#### EJEMPLO 51.2

Determinemos para las moléculas de un gas ideal en función de su temperatura:

- La velocidad más probable.
- La velocidad media.
- La velocidad cuadrática media.

#### Solución:

- La velocidad más probable es la que hace máxima la expresión [51.38], es decir, hace máxima a:

$$y = v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

Por tanto, debe verificar:

$$\frac{dy}{dv} = 0 = \left(1 - \frac{mv^2}{kT}\right) 2v e^{-mv^2/2kT}$$

De donde resulta:

$$v = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

- La velocidad media por definición se expresa:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v dn = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v \frac{dn}{dv} dv$$

Teniendo en cuenta la [51.38] se escribe:

$$\langle v \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-mv^2/2kT} dv$$

Para su integración debemos hacer el cambio  $u = v^2$ , lo que diferenciando es  $du = 2v dv$ , y la integral se escribe:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} u e^{-mu/2kT} du$$

La cual puede integrarse por partes, dando como valor de ella  $2 \frac{k^2 T^2}{m^2}$ .  
 Con este valor la velocidad media se expresa:

$$\langle v \rangle = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{kT}{m} \right)^{1/2} = \left( \frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2}$$

c) La velocidad cuadrática media se expresa:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{N} \int_0^\infty v^2 dm$$

Puesto que toda la energía es cinética de traslación, puede escribirse:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{N} \int_0^\infty \frac{2E}{m} dn = \frac{2}{m} \bar{E}$$

Teniendo ahora en cuenta la [51.35], resulta:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m}$$

### EJEMPLO 51.3

Calculemos para el Oxígeno a la temperatura de 300 K:

- La velocidad que hace máxima la función de distribución.
- La velocidad media de sus moléculas.
- El valor cuadrático medio de sus velocidades moleculares.

#### Solución:

- a) Según hemos obtenido en el ejemplo anterior, la velocidad que hace máxima la función de distribución es:

$$v = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1,38065 \times 10^{-23} \times 300}{0,032}} = 394,83 \text{ m/s}$$

- b) El valor medio de las velocidades moleculares está dado por:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \frac{2v}{\sqrt{\pi}} = 445,52 \text{ m/s}$$

- c) El valor cuadrático medio de las velocidades es:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m} = \frac{3}{2} v^2 = 233.836,09 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

## 51.8 Entropía de un sistema en equilibrio

La expresión [51.22] nos da el valor de la entropía  $S = k \ln W$ . Utilizando la [51.10], la entropía se expresa:

$$S = k \sum n_i \ln \frac{g_i}{n_i} + kN$$

Tomando neperianos en la [51.28], resulta:

$$\ln n_i = \ln \frac{N}{Z} + \ln g_i - \frac{E_i}{kT}$$

De donde es:

$$\ln \frac{g_i}{n_i} = \frac{E_i}{kT} + \ln \frac{Z}{N}$$

Con lo cual, la expresión de la entropía se escribe:

$$\begin{aligned} S &= k \sum n_i \left( \frac{E_i}{kT} + \ln \frac{Z}{N} \right) + kN = \\ &= \frac{U}{T} + kN \ln Z - kN \ln N + kN = \frac{U}{T} + kN \left[ \ln \frac{Z}{N} + 1 \right] \end{aligned} \quad [51.39]$$

Teniendo en cuenta la aproximación de Stirling, resulta:

$$S = \frac{U}{T} + kN \ln Z - k \ln(N!) = \frac{U}{T} + k \ln \frac{Z^N}{N!} \quad [51.40]$$

Entropía

### Aplicación al gas ideal

La energía interna para un gas ideal está dada por la [51.36] y la función de partición por la [51.34], cuyo neperiano es:

$$\ln Z = \ln C + \frac{3}{2} \ln(kT)$$

Con ello, la entropía se expresa:

$$S = \frac{3}{2} kN + kN \left[ \ln C + \frac{3}{2} \ln(kT) \right] - kN \ln N + kN = \frac{5}{2} kN + kN \ln \frac{C(kT)^{3/2}}{N}$$

Puesto que el valor de la constante  $C$  es:

$$C = \frac{C_1}{2} \sqrt{\pi} = (2\pi m)^{3/2}$$

Resulta, para la entropía del gas ideal, la expresión:

$$S = \frac{5}{2} kN + kN \ln \frac{(2\pi m kT)^{3/2}}{N} \quad [51.41]$$

Entropía gas ideal

**EJEMPLO 51.4**

Calculemos la variación de entropía de un mol de gas monoatómico en la experiencia de Joule, en la cual inicialmente ocupa un volumen  $V_1$ , a temperatura  $T_1$  y se expande de forma adiabática e irreversible hasta un volumen  $2V_1$ .

**Solución:**

La entropía en el estado inicial es:

$$S_1 = \frac{5}{2} kN + kN \ln \frac{(2\pi mkT_1)^{3/2}}{N}$$

En el estado final será:

$$S_2 = \frac{5}{2} kN + kN \ln \frac{(2\pi mkT_2)^{3/2}}{N}$$

La variación de entropía es:

$$S_2 - S_1 = kN \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{3/2}$$

Puesto que el proceso es adiabático, al ser  $V_2 = 2V_1$  y  $\gamma = \frac{5}{3}$  es  $\frac{T_2}{T_1} = 2^{2/3}$ , con lo cual resulta:

$$S_2 - S_1 = kN \ln 2$$

**51.9 Entalpía. Energía libre y entalpía libre**

La entalpía, cuya definición fue establecida en [20.19],  $H = U + pV$ , teniendo en cuenta la [19.4] se expresa:

$$H = U + NkT$$

Utilizando la expresión de  $U$  [51.29], se escribe:

$$H = kNT \left[ T \frac{d(\ln Z)}{dT} + 1 \right] \quad [51.42] \quad \text{Entalpía}$$

La energía libre  $F = U - TS$ , utilizando el valor de  $S$  dado por [51.39], se expresa:

$$F = -kNT \left[ \ln \frac{Z}{N} + 1 \right] \quad [51.43] \quad \text{Energía libre}$$

La entalpía libre o función de Gibbs, que fue definida en [21.43],  $G = H - TS$ , utilizando los valores de  $H$  dado por la [51.42], de  $S$  dado por la [51.39] y de  $U$  dado por la [51.39], se expresa:

$$G = -kNT \ln \frac{Z}{N} \quad [51.44] \quad \text{Entalpía libre}$$

También podía haberse obtenido empleando la definición:

$$G = F + pV = F + kNT$$

y usando el valor de  $E$  dado por la [51.43].

Como comprobación puede verse que se verifica la expresión para la función de Gibbs dada por la Termodinámica clásica:

$$G = N \left( \frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V} \quad [51.45]$$

En efecto, derivando respecto a  $N$  la [51.43], supuestas  $T$  y  $V$  constantes, se obtiene:

$$\left( \frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V} = -kT \left( \ln \frac{Z}{N} + 1 \right) + kT = -kT \ln \frac{Z}{N}$$

Lo cual, al multiplicarlo por  $N$ , nos lleva a la expresión de  $G$  [51.44].



# Mecánica estadística cuántica.

## Estadísticas de Fermi-Dirac y Bose-Einstein

CAPÍTULO

52

- 52.1. Introducción
- 52.2. Distribución de Fermi-Dirac
- 52.3. Distribución de Bose-Einstein
- 52.4. Magnitudes termodinámicas en las estadísticas de Fermi-Dirac y Bose-Einstein
- 52.5. Aplicaciones de la estadística de Fermi-Dirac
- 52.6. Aplicaciones de la estadística de Bose-Einstein

### 52.1 Introducción

En Mecánica estadística cuántica, todas las partículas se consideran idénticas entre sí y, por tanto, indistinguibles; además, la presencia de una partícula en un cierto estado cuántico puede afectar a la posibilidad de que otra partícula ocupe ese estado, por ello haremos una división en dos grandes categorías, según obedezcan o no al principio de exclusión, es decir, que no puedan existir dos partículas en el mismo estado cuántico o que sí sea esto posible.

Como ya quedó establecido en el Capítulo 50, el principio de exclusión se cumple en todas las partículas de espín semientero, para las cuales, la función de onda que las describe es antisimétrica y solamente una partícula puede ocupar un estado energético. A este tipo de partículas se les denomina *fermiones*, por obedecer a la estadística de Fermi-Dirac y, como ejemplo, pertenecen a ella los electrones, protones y neutrones.

La segunda categoría de partículas cuánticas son las que no obedecen al principio de exclusión, por tener espín nulo o entero y estar descritas por funciones de onda simétricas. A este tipo de partículas se les denomina *bosones*, por obedecer a la estadística de Bose-Einstein y, como ejemplo, pertenecen a ellas los fotones y las partículas  $\alpha$ .

Estudiaremos sistemas con un número total de partículas  $N$  y energía total  $U$ , que presentan  $m$  posibles niveles energéticos de energías  $E_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , teniendo  $g_i$  estados posibles el nivel  $i$ . Una distribución vendrá definida por  $m$  números  $n_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , que nos determina el número de partículas en cada nivel. Cada distribución tendrá una probabilidad de producirse, y la de máxima probabilidad corresponderá al estado de equilibrio estadístico. Seguirá siendo válido todo lo establecido en el Epígrafe 51.1 del capítulo anterior, verificándose las relaciones desde la [51.1] a la [51.6].

### 52.2 Distribución de Fermi-Dirac

Puesto que dos partículas que obedezcan a esta estadística no pueden ocupar el mismo estado energético, deberá verificarse que el número de partículas en cada

nivel debe ser menor, o a lo sumo igual, a los estados energéticos distintos posibles dentro de ese nivel, es decir,  $n_i \leq g_i$ .

Veamos cómo podemos distribuir  $n_i$  partículas entre los  $g_i$  estados del nivel  $i$ , de forma que no haya más de una por estado. Supongamos por un momento, únicamente a efectos de razonamiento, que las partículas son distinguibles. Las formas distintas posibles serían:

$$\frac{g_i!}{(g_i - n_i)!} \quad [52.1]$$

Puesto que para la primera partícula hay  $g_i$  posibilidades, para la segunda  $g_i - 1$ , para la tercera  $g_i - 2$  y, así sucesivamente, para la  $n_i$ ésima las posibilidades serán  $g_i - n_i + 1$ .

Ahora bien, debido a que las partículas no son distinguibles, debemos dividir [52.1] por  $n_i!$ , puesto que cualquier elección de partícula como primera, cualquiera como segunda y así sucesivamente, cualquiera como  $n_i$ ésima, no dan distribuciones distintas. Por ello, el número de formas distintas de distribuir  $n_i$  partículas entre los  $g_i$  estados energéticos de energía  $E_i$ , de forma que no haya más de una por estado, es:

$$\frac{g_i!}{(g_i - n_i)!n_i!} \quad [52.2]$$

Esto se verificará para cada uno de los niveles energéticos y el número total de distribuciones distintas  $n_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , se obtiene multiplicando entre sí las expresiones [52.2] correspondientes a cada uno de los niveles energéticos posibles, obteniéndose:

$$w = \prod_{i=1}^m \frac{g_i!}{(g_i - n_i)!n_i!} \quad [52.3]$$

Debemos determinar ahora la distribución más probable, es decir, aquella que hace máxima [52.3]. Para ello seguiremos un proceso completamente análogo al seguido en la estadística de Maxwell-Boltzmann, en el capítulo anterior. Tomemos logaritmos neperianos en [52.3]:

$$\ln w = \sum [\ln g_i! - \ln (g_i - n_i)! - \ln n_i!]$$

Usando la aproximación de Stirling, se escribe:

$$\ln w = \sum [g_i \ln g_i - (g_i - n_i) \ln (g_i - n_i) - n_i \ln n_i]$$

El máximo de esta expresión verificará  $d(\ln w) = 0$ , lo cual, teniendo en cuenta que los factores  $g_i$  son constantes, se expresa:

$$d(\ln w) = \sum [\ln (g_i - n_i) dn_i - \ln n_i dn_i] = \sum \left[ \ln \frac{g_i - n_i}{n_i} \right] dn_i = 0$$

También deben verificarse las diferenciales de las expresiones [51.1] y [51.6]:

$$\sum dn_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum E_i dn_i = 0$$

Por tanto, debe verificarse la expresión:

$$\sum \left( \ln \frac{g_i - n_i}{n_i} - \alpha - \beta E_i \right) dn_i = 0 \quad [52.4]$$

Si todas las  $n_i$  fueran independientes entre sí, todos y cada uno de los coeficientes de las  $dn_i$  deberían ser nulos, pero las  $n_i$  están ligadas por las expresiones [51.1] y [51.6], y por ello, serán todas independientes entre sí menos dos. Lo que podemos hacer es elegir  $\alpha$  y  $\beta$  de forma que los coeficientes de las diferenciales de estas dos, en la expresión [52.4], sean también nulos, y así siempre se verificará para todo  $i$ :

$$\ln \frac{g_i - n_i}{n_i} - \alpha - \beta E_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

En consecuencia, la distribución más probable será:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta E_i} + 1}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad [52.5] \quad \text{Distribución de Fermi-Dirac}$$

Expresión de la denominada *Ley de distribución de Fermi-Dirac*.

La determinación del parámetro  $\beta$  se hace de forma análoga a como se hizo en la estadística de Maxwell-Boltzmann, obteniéndose:

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

Igual que se hizo en la estadística de Maxwell-Boltzmann, también aquí el parámetro  $\alpha$  se determina imponiendo la condición  $\sum n_i = N$ , pero, en general, se obtiene una cantidad negativa y, usualmente, se emplea la constante:

$$\varepsilon = -\alpha kT$$

cuya ecuación de dimensiones es la de una energía.

Con todo ello, la distribución de Fermi-Dirac se expresa:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{E_i - \varepsilon/kT} + 1}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad [52.6] \quad \text{Distribución de Fermi-Dirac}$$

La cual puede escribirse de la forma:

$$f_i = \frac{n_i}{g_i} = \frac{1}{e^{E_i - \varepsilon/kT} + 1}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad [52.7] \quad \text{Grado de ocupación}$$

Expresión que nos da la probabilidad de que un estado de energía  $E_i$  esté ocupado, lo que también suele denominarse *grado de ocupación*. En la Figura 52.1 se ha representado  $n_i/g_i$  en función de  $E$  para diferentes temperaturas. A temperaturas bajas están ocupados los niveles de menor energía y, al aumentar la temperatura, se van ocupando los niveles de energía más alta.

A  $T = 0$  únicamente están ocupados los niveles de energía inferior a  $\varepsilon$ , ya que si es  $E_i < \varepsilon$  se verificará:

$$\lim_{T \rightarrow 0} e^{E_i - \varepsilon/kT} = 0 \quad \text{y} \quad n/g = 1$$

Por el contrario, si es  $E_i > \varepsilon$ , es:

$$\lim_{T \rightarrow 0} e^{E_i - \varepsilon/kT} = \infty \quad \text{y} \quad n/g = 0$$

Por tanto, a  $T = 0$  la energía máxima que puede tener un fermión es  $\varepsilon$  y a ésta se le denomina *Energía de Fermi*,  $\varepsilon_F$ ; denominándose *Temperatura de Fermi*,  $T_F$ , la que verifica  $kT_F = \varepsilon_F$ .

A cualquier temperatura, para  $E = \varepsilon_F$ , el grado de ocupación siempre vale 1/2.

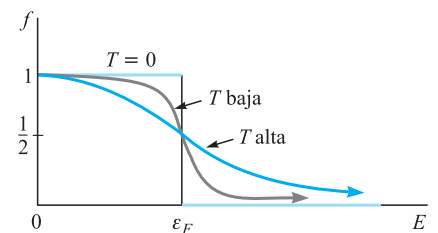


Figura 52.1. Grado de ocupación función de  $E$ .

### 52.3 Distribución de Bose-Einstein

Las partículas que obedecen a esta estadística no están sujetas al principio de exclusión y, en consecuencia, en ella no está limitado el número de partículas que pueden coexistir en un mismo estado cuántico. Al ser las partículas indistinguibles, el que sean unas u otras las partículas de un nivel no produce distinta distribución, éstas se deben únicamente a las diferentes formas posibles de distribuir las  $n_i$  partículas dentro de cada nivel, entre los  $g_i$  estados posibles de ese nivel, sin limitación del número de partículas dentro de cada estado.

Para este cálculo, consideremos  $g_i$  cajas que denominaremos  $C_1, C_2, \dots, C_{g_i}$ , y  $n_i$  partículas, que a efectos del razonamiento comenzaremos suponiendo distinguibles y simbolizaremos por  $p_1, p_2, \dots, p_{n_i}$ . Tomemos una cualquiera de las posibles alineaciones de los  $g_i + n_i$  símbolos, con la única condición de que empiece por  $C_1$ , por ejemplo:

$$C_1 p_2 p_6 C_6 C_3 p_3 C_4 p_7 p_9 C_9 \dots$$

Asociamos a cada caja las partículas que la siguen, es decir, en la caja  $C_1$  están las partículas  $p_2$  y  $p_6$ , la caja  $C_6$  está vacía, la caja  $C_3$  tiene la partícula  $p_3$ , la caja  $C_4$  las partículas  $p_7$  y  $p_9$ , etc.

Después del símbolo  $C_1$  hay  $g_i + n_i - 1$  símbolos y, por tanto  $(g_i + n_i - 1)!$  alineaciones posibles que empiezan por  $C_1$ . Ahora bien, no todas estas dan distribuciones distintas, puesto que en la alineación, las permutaciones de las  $g_i - 1$  cajas, después de la  $C_1$ , no dan distribuciones distintas, por lo que habrá que dividir por  $(g_i - 1)!$ . Además, como las partículas son indistinguibles, lo único que importa es el número de partículas en cada caja y no qué partículas son, por tanto, cualquier permutación de las  $n$  partículas da la misma distribución y, por ello, se debe dividir por  $n_i!$ . En consecuencia, el número total de formas de distribuir  $n_i$  partículas indistinguibles, entre  $g_i$  estados energéticos, sin limitación del número de partículas por estado, es:

$$\frac{(n_i + g_i - 1)!}{(g_i - 1)! n_i!} \quad [52.8]$$

En definitiva, el número total de distribuciones distintas  $n_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , de  $N$  partículas indistinguibles, entre los  $E_i$  niveles energéticos con degeneración  $g_i$ , se obtiene multiplicando las  $m$  expresiones [52.8], resultando:

$$w = \prod_{i=1}^m \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i! (g_i - 1)!} \quad [52.9]$$

La determinación de la distribución más probable, que es aquella que hace máxima la expresión [52.9], se hace de forma completamente análoga a como se ha hecho en las estadísticas de Maxwell-Boltzmann y Fermi-Dirac. Tomemos logaritmos neperianos en la [52.8]:

$$\ln w = \sum [\ln(n_i + g_i - 1)! - \ln n_i! - \ln(g_i - 1)!]$$

Aplicando la aproximación de Stirling, se escribe:

$$\ln w = \sum [(n_i + g_i - 1) \ln(n_i + g_i - 1) - n_i \ln n_i - (g_i - 1) \ln(g_i - 1)]$$

El máximo verificará:

$$d(\ln w) = \sum [\ln(n_i + g_i - 1) - \ln n_i] dn_i = 0$$

Como también deben cumplirse las condiciones  $\sum dn_i = 0$  y  $\sum E_i dn_i = 0$ , debe verificarse:

$$\sum [\ln(n_i + g_i - 1) - \ln n_i - \alpha - \beta E_i] dn_i = 0$$

Por los mismos razonamientos usados en las estadísticas de MB y FD, deben ser:

$$\ln(n_i + g_i - 1) - \ln n_i - \alpha - \beta E_i = 0$$

Admitiendo que es  $n_i + g_i \gg 1$ , puede escribirse:

$$\ln \frac{n_i + g_i}{n_i} = \alpha + \beta E_i$$

y tomando antineperianos es:

$$\frac{n_i + g_i}{n_i} = e^{\alpha + \beta E_i}$$

De donde resulta:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta E_i} - 1} \quad [52.10] \quad \text{Distribución de Bose-Einstein}$$

Lo cual es la *Ley de distribución de Bose-Einstein*.

El parámetro  $\beta$  tiene el mismo significado que en las estadísticas anteriores y también se define mediante la expresión  $\beta = 1/kT$ . El parámetro  $\alpha$ , que también se determina imponiendo a [52.10] la condición  $\sum n_i = N$ , no tiene el significado visto en la estadística de Fermi-Dirac.

En función de la temperatura, la ley de distribución de Bose-Einstein se expresa:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha} e^{E_i/kT} - 1} \quad [52.11]$$

En la Figura 52.2 se representa esta ley de distribución para dos temperaturas extremas.

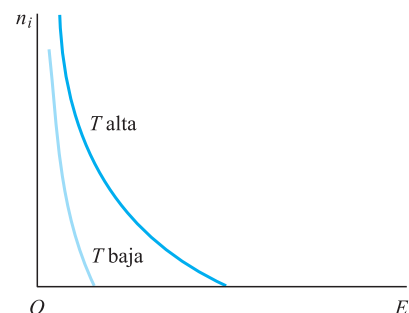


Figura 52.2. Distribución Bose-Einstein.

## 52.4 Magnitudes termodinámicas en las estadísticas de Fermi-Dirac y Bose-Einstein

Para la determinación de las expresiones de la entropía, utilizaremos la expresión general [51.22], que para cada una de las distribuciones se escribe:

$$S_{FD} = k \ln w_{FD} \quad \text{y} \quad S_{BE} = k \ln w_{BE}$$

Tomemos logaritmos neperianos en [52.3] y [52.9]; lo que es, respectivamente:

$$\begin{aligned} \ln w_{FD} &= \sum [\ln g_i! - \ln n_i! - \ln (g_i - n_i)!] = \\ &= \sum [g_i \ln g_i - n_i \ln n_i - (g_i - n_i) \ln (g_i - n_i)] = \\ &= \sum \left[ n_i \ln \left( \frac{g_i}{n_i} - 1 \right) - g_i \ln \left( 1 - \frac{n_i}{g_i} \right) \right] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \ln w_{BE} &= \sum [\ln(n_i + g_i - 1)! - \ln n_i! - \ln(g_i - 1)!] = \\ &= \sum [(n_i + g_i - 1) \ln(n_i + g_i - 1) - n_i \ln n_i - (g_i - 1) \ln(g_i - 1)] \simeq \\ &\simeq \sum [(n_i + g_i) \ln(n_i + g_i) - n_i \ln n_i - g_i \ln g_i] = \\ &= \sum \left[ n_i \ln \left( 1 + \frac{g_i}{n_i} \right) + g_i \ln \left( 1 + \frac{n_i}{g_i} \right) \right] \end{aligned}$$

las expresiones de la entropía son, respectivamente:

$$S_{FD} = k \sum \left[ n_i \ln \left( \frac{g_i}{n_i} - 1 \right) - g_i \ln \left( 1 - \frac{n_i}{g_i} \right) \right] \quad [52.12]$$

$$S_{BE} = k \sum \left[ n_i \ln \left( 1 + \frac{g_i}{n_i} \right) + g_i \ln \left( 1 + \frac{n_i}{g_i} \right) \right] \quad [52.13]$$

De la ley de distribución de Fermi-Dirac [52.5], se despeja:

$$\frac{g_i}{n_i} - 1 = e^{(E_i - \varepsilon_F)/kT}$$

Tomando en esta neperianos es:

$$\ln \left( \frac{g_i}{n_i} - 1 \right) = \frac{E_i - \varepsilon_F}{kT} \quad [52.14]$$

Así mismo, es:

$$1 - \frac{n_i}{g_i} = \frac{g_i - n_i}{g_i} = \frac{g_i - n_i}{n_i} \cdot \frac{n_i}{g_i} = \frac{e^{(E_i - \varepsilon_F)/kT}}{e^{(E_i - \varepsilon_F)/kT} + 1} = \frac{1}{1 + e^{(E_i - \varepsilon_F)/kT}}$$

cuyo neperiano se expresa:

$$\ln \left( 1 - \frac{n_i}{g_i} \right) = -\ln \left( 1 + e^{(E_i - \varepsilon_F)/kT} \right) \quad [52.15]$$

Llevando los valores [52.14] y [52.15] a [52.12], resulta una nueva expresión para la entropía en la estadística de Fermi-Dirac:

Entropía Fermi-Dirac

$$\begin{aligned} S_{FD} &= k \sum \left[ n_i \frac{E_i - \varepsilon_F}{kT} + g_i \ln \left( 1 + e^{(E_i - \varepsilon_F)/kT} \right) \right] = \\ &= \frac{U}{T} - \frac{N\varepsilon_T}{T} + k \sum [g_i \ln \left( 1 + e^{(E_i - \varepsilon_F)/kT} \right)] \end{aligned} \quad [52.16]$$

Análogamente, de la ley de distribución de Bose-Einstein [52.11], se despeja:

$$\frac{g_i}{n_i} + 1 = e^\alpha e^{E_i/kT}$$

cuyo neperiano es:

$$\ln \left( 1 + \frac{g_i}{n_i} \right) = \alpha + \frac{E_i}{kT} \quad [52.17]$$

Así mismo, podemos escribir:

$$1 + \frac{n_i}{g_i} = \frac{g_i + n_i}{n_i} \cdot \frac{n_i}{g_i} = \frac{e^\alpha e^{E_i/kT}}{e^\alpha e^{E_i/kT} - 1} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha} e^{-E_i/kT}}$$

El logaritmo neperiano de la anterior es:

$$\ln \left( 1 + \frac{n_i}{g_i} \right) = -\ln \left( 1 - e^{-\alpha} e^{-E_i/kT} \right) \quad [52.18]$$

Llevando a [52.13] los valores dados por [52.17] y [52.18], resulta una nueva expresión para la entropía en la estadística de Bose-Einstein:

$$\begin{aligned}
 S_{BE} &= k \sum \left[ n_i \left( \alpha + \frac{E_i}{kT} \right) - g_i \ln (1 - e^{-\alpha} e^{-E_i/kT}) \right] = \\
 &= \frac{U}{T} + k\alpha N - k \sum [g_i \ln (1 - e^{-\alpha} e^{-E_i/kT})] \quad [52.19] \quad \text{Entropía Bose-Einstein}
 \end{aligned}$$

Para la energía libre  $F = U - TS$  se deducen las expresiones:

$$F_{FD} = N\varepsilon_F - kT \sum [g_i \ln (1 + e^{(E_i - \varepsilon_F)/kT})] \quad [52.20] \quad \text{Energía libre Fermi-Dirac}$$

$$F_{BE} = kT \sum [g_i \ln (1 - e^{-\alpha} e^{-E_i/kT})] - k\alpha NT \quad [52.21] \quad \text{Energía libre Bose-Einstein}$$

La expresión de la función de Gibbs en las estadísticas de Fermi-Dirac y Bose-Einstein la obtendremos a partir de la expresión general [51.45]. Para la estadística de Fermi-Dirac hallems la derivada respecto de  $N$  de la expresión [52.20], recordando que  $\varepsilon$  es función de  $N$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial N} &= \varepsilon_F + N \frac{\partial \varepsilon_F}{\partial N} - kT \sum \left( g_i \frac{1}{1 + e^{(\varepsilon_F - E_i)/kT}} e^{(\varepsilon_F - E_i)/kT} \frac{1}{kT} \frac{\partial \varepsilon_F}{\partial N} \right) = \\
 &= \varepsilon_F + N \frac{\partial \varepsilon_F}{\partial N} - \frac{\partial \varepsilon_F}{\partial N} \sum \left( \frac{g_i}{e^{(E_i - \varepsilon_F)/kT} + 1} \right) = \varepsilon_F
 \end{aligned}$$

Con lo cual resulta:

$$G_{FD} = N\varepsilon_F \quad [52.22] \quad \text{Entalpía libre Fermi-Dirac}$$

Para la estadística de Bose-Einstein hallems la derivada de la expresión [52.21] respecto de  $N$ , admitiendo que  $\alpha$  sea función de  $N$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial N} &= kT \sum \left[ \frac{-g_i}{1 - e^{-\alpha} e^{-E_i/kT}} e^{-\alpha} e^{-E_i/kT} \left( -\frac{\partial \alpha}{\partial N} \right) \right] - k\alpha T - kNT \frac{\partial \alpha}{\partial N} = \\
 &= kT \frac{\partial \alpha}{\partial N} \sum \left( \frac{g_i}{e^{\alpha} e^{E_i/kT} - 1} \right) - k\alpha T - kNT \frac{\partial \alpha}{\partial N} = -k\alpha T
 \end{aligned}$$

Con lo cual resulta:

$$G_{BE} = -NkT\alpha \quad [52.23] \quad \text{Entalpía libre Bose-Einstein}$$

## 52.5 Aplicaciones de la estadística de Fermi-Dirac

### Electrones en un metal. Energía de Fermi

Los electrones dentro de un conductor están sometidos a un potencial que varía periódicamente, de acuerdo con la atracción que ejercen los núcleos que forman la red reticulada del metal. En una primera aproximación supondremos que el potencial es constante dentro del conductor y toma valores muy superiores en la superficie de aquel, al no existir atracción desde el exterior. De acuerdo con esto, los electrones en el interior de un metal se comportarán como partículas no interactuantes confinadas en una caja de potencial.

Los niveles de energía posibles para una partícula en una caja de potencial unidimensional están dados por [48.71], lo que podemos generalizar para una caja cúbica, estando dados en este caso por:

$$E = \frac{h^2}{8mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = \frac{h^2}{8mL^2} n^2 \quad [52.24]$$

siendo  $L$  el lado de la caja.

En un espacio tridimensional, cada punto  $(n_x, n_y, n_z)$  representa un nivel de energía. Son puntos con coordenadas enteras y positivas, que además verifican:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = n^2$$

Puntos que están sobre el primer octante de la superficie esférica de centro  $O$  y radio  $n$ . El número de estados de energía  $N(E)$ , con energía comprendida entre 0 y  $E$ , será el volumen del octante de esfera de radio  $n$ , es decir:

$$N(E) = \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi n^3$$

Usando el valor de  $n$  despejado de [52.24], es:

$$N(E) = \frac{\pi}{6} \left( \frac{E8mL^2}{h^2} \right)^{3/2} = \frac{8\pi V}{3h^3} 2^{1/2} (mE)^{3/2} \quad [52.25]$$

ya que el volumen de la caja cúbica es  $V = L^3$ .

El número de estados de energía con energía comprendida entre  $E$  y  $E + dE$ , o número de estados de energía por unidad de intervalo de esta, se obtiene derivando [52.25]:

$$g(E) = \frac{dN(E)}{dE} = \frac{4\pi V \sqrt{2}}{h^3} m^{3/2} E^{1/2} \quad [52.26]$$

Ahora bien, en cada uno de estos estados puede haber dos electrones, los cuales tendrán espín opuesto. Por ello, el número de electrones por unidad de volumen con energía comprendida entre  $E$  y  $E + dE$ , es:

$$dN = \frac{8\pi \sqrt{2}}{h^3} m^{3/2} E^{1/2} dE$$

El número total de electrones que puede haber por unidad de volumen hasta un nivel de energía  $E$  es:

$$N = \frac{8\pi \sqrt{2}}{h^3} m^{3/2} \int_0^E E^{1/2} dE = \frac{16\pi \sqrt{2}}{3h^3} m^{3/2} E^{3/2} \quad [52.27]$$

A la temperatura del cero absoluto, según hemos visto, el metal está en su estado fundamental y los electrones de máxima energía tienen por valor de ésta  $\varepsilon_F$ . Por tanto, el número de electrones por unidad de volumen en el estado fundamental del metal es:

$$N_0 = \frac{16\pi \sqrt{2}}{3h^3} m^{3/2} \varepsilon_F^{3/2} \quad [52.28]$$

El valor de la energía de Fermi para el metal se expresa:

$$\varepsilon_F = \frac{h^2}{8m} \left( \frac{3N_0}{\pi} \right)^{2/3} \quad [52.29]$$



En la Tabla 52.1 se recogen los valores de  $\varepsilon_F$  para algunos metales:

**Tabla 52.1.** Valores de  $\varepsilon_F$  para algunos metales.

Metal	Li	Na	K	Rb	Cs	Cu	Ag	Au	Al
$\varepsilon_F$ , eV	4,72	3,12	2,14	1,82	1,53	7,04	5,51	5,54	11,9

**EJEMPLO 52.1**

Calculemos la energía de Fermi para el Aluminio.

**Solución:**

La densidad del Aluminio es de  $2,7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , su valencia es 3 y su peso atómico 26,982. Tomando como valor del número de Avogadro  $6,02 \times 10^{23}$  moléculas/mol, el número de electrones por unidad de volumen es:

$$N_0 = 6,02 \times 10^{23} \times 3 \times \frac{1}{26,982 \times 10^{-3}} \times 2,7 \times 10^3 = 1,8072048 \times 10^{29}$$

$$\frac{3N_0}{\pi} = 172,57535 \times 10^{27} \quad ; \quad \left(\frac{3N_0}{\pi}\right)^{2/3} = 30,996965 \times 10^{18}$$

Tomando para la constante de Planck el valor  $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J s}$  y para la masa del electrón  $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , resulta para  $\varepsilon_F$  el valor:

$$\varepsilon_F = \frac{6,6256^2 \times 10^{-68}}{8 \times 9,11 \times 10^{-31}} \times 30,996965 \times 10^{18} = 18,670727 \times 10^{-19} \text{ J}$$

El número de electrones por unidad de volumen, con energía comprendida entre  $E$  y  $E + dE$ , está dado por [52.6], en la cual debemos sustituir  $g_i$  por el valor de  $g(E)$  dado por la [52.26] y tener en cuenta la doble posibilidad de espín para el electrón, resultando:

$$dN = \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \frac{E^{1/2}}{e^{(E-\varepsilon_F)/kT} + 1} dE$$

Este mismo número por unidad de intervalo de energía es:

$$\frac{dN}{dE} = \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \frac{E^{1/2}}{e^{(E-\varepsilon_F)/kT} + 1}$$

Al tener en cuenta la [52.28], se expresa:

$$N(E) = \frac{3/2 N_0 \varepsilon_F^{-3/2} E^{1/2}}{e^{(E-\varepsilon_F)/kT} + 1} \tag{52.30}$$

La cual es la expresión de Fermi-Dirac para la distribución de energía de los electrones libres.

Al elevarse la temperatura a partir del cero absoluto, se excitan electrones que pasan a niveles superiores. Pero únicamente pueden ser excitados aquellos cuya energía está próxima a  $\varepsilon_F$ , pues son los únicos que tienen por encima estados sin ocupar. Los electrones de baja energía tienen ocupados todos los niveles próximos por encima de ellos y el principio de exclusión impide que puedan saltar a esos niveles. Por otra parte, el valor de  $kT$  a temperatura ambiente ( $20^\circ\text{C}$ ) es:

$$kT = 1,380622 \times 10^{-23} \times 293,15 = 4,0472934 \times 10^{-21} \text{ J} = 2,5264 \times 10^{-2} \text{ eV}$$

Este mismo valor a  $1000^\circ\text{K}$  es  $kT = 0,0862 \text{ eV}$ . Por tanto, únicamente son excitados a estados de energía superior a  $\varepsilon_F$  aquellos electrones que ya están en niveles muy próximos.

Estos electrones de energía superior puede considerarse que se mueven dentro del metal, comportándose como si de un gas de electrones se tratase. La velocidad de estos electrones puede calcularse suponiendo que toda su energía es cinética, así para electrones de energía  $\varepsilon_F$  será:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \varepsilon_F \quad \text{y} \quad v = \sqrt{\frac{2\varepsilon_F}{m}} \quad [52.31]$$

A lo que se denomina *velocidad de Fermi*.

### EJEMPLO 52.2 Velocidad de Fermi en el cobre

Calculemos la velocidad de Fermi correspondiente a los electrones en el Cobre.

#### Solución:

Aplicamos la expresión [54.31], utilizando el valor de la energía de Fermi de la Tabla 52.1,  $\varepsilon_F = 7,04 \text{ eV}$  y para la masa del electrón  $m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , con ello resulta:

$$v_F = \sqrt{\frac{2 \times 7,04 (\text{eV}) \times 1,602 \times 10^{-19} (\text{J/eV})}{9,11 \times 10^{-31}}} = 1,57 \times 10^6 \text{ m/s}$$

Este resultado contrasta con el obtenido en el Capítulo 31, pudiendo establecerse una analogía con el comportamiento de las moléculas dentro de una masa de aire. Esta puede moverse lentamente e incluso estar parada, mientras que aquellas se mueven aleatoriamente a grandes velocidades. Solamente la componente de la velocidad del electrón en la dirección de la corriente contribuye a ésta.

La consideración del comportamiento de los electrones dentro de un conductor como un gas, llevó a una contradicción, ya que un gas con energía  $kT/2$  en cada grado de libertad, debe contribuir al calor específico en  $R/2$  por mol y grado de libertad. Así considerado, el gas electrónico debiera contribuir al calor específico en  $3R/2$  por mol, puesto que es:

$$E = \frac{3}{2}kTN_0 = \frac{3}{2}RT \quad \text{y} \quad c_v = \frac{dE}{dT} = \frac{3}{2}R$$

Pero ello no es así, pues, a temperatura ambiente, la energía ganada por los electrones excitados dependerá del número de electrones excitados y de la energía de cada uno de ellos. Como ambas son proporcionales a  $kT$ , su producto y, por tanto, la energía ganada será proporcional a  $T^2$  y el calor específico electrónico proporcional a la temperatura absoluta, lo que ha sido comprobado experimentalmente a muy bajas temperaturas.

### Emisión termiónica. Potencial de contacto

Los electrones en el interior de un metal están sometidos a un pozo de potencial, cuya energía denominaremos  $w$ . La energía máxima de los electrones a temperatura ambiente es prácticamente  $\varepsilon_F$ , y por tanto, para que el electrón pueda escapar del pozo de potencial es necesario darle al menos la energía  $w - \varepsilon_F$ . El potencial al que están sometidos los electrones se representa en la Figura 52.3.

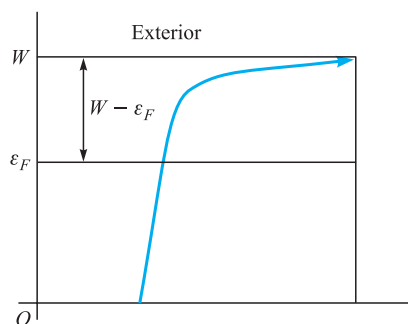


Figura 52.3. Potencial en el interior.

Según vimos en el Capítulo 48 al estudiar el efecto fotoeléctrico, hace falta una energía mínima del fotón incidente para arrancar al electrón del metal, que es la necesaria para que los electrones de máxima energía puedan salir del pozo de potencial, luego debe ser:

$$h\nu_0 = E_0 = e\phi_0 = w - \varepsilon_F$$

En general, será:

$$e\phi \geq w - \varepsilon_F$$

La energía  $e\phi$  puede suministrarse mediante fotones, como en el caso del efecto fotoeléctrico, o por calentamiento, lo que constituye la emisión termoiónica, o por bombardeo del metal por partículas (electrones,  $\alpha$ , etc.).

La emisión termoiónica se produce en los filamentos a alta temperatura, para los cuales la energía suministrada  $e\phi$  puede hacer que se verifique  $e\phi + \varepsilon_F > w$  y el electrón escapa del metal. Para que realmente se produzca el escape no es suficiente que los electrones lleguen a la superficie con la energía indicada, sino que también deben llevar la dirección adecuada. Aplicando la ley de distribución de Fermi-Dirac, se obtiene la densidad de corriente termoelectrónica que es emitida por la superficie de un metal en función de la temperatura, obteniéndose:

$$j = \frac{4\pi mk^2}{h^3} T^2 e^{-e\phi/kT} = A_0 T^2 e^{-e\phi/kT} \quad [52.32]$$

Ecuación que se conoce con el nombre de Richardson-Dushman y en la cual la constante teórica  $A_0$  vale:  $A_0 = 1,2 \times 10^6 \text{ A/m}^2 \text{ K}^2$ .

Determinaciones experimentales de  $A_0$  han comprobado que su valor depende del metal emisor usado. El error del modelo teórico reside en haber considerado que todo electrón que llega a la superficie con energía suficiente y dirección adecuada sale, pues según hemos visto al estudiar el escalón de potencial, siempre algunos son reflejados. Además, el valor de la función varía con la dirección cristalográfica. En la Tabla 52.2 se dan algunos valores de  $A_0$  encontrados experimentalmente.

**Tabla 52.2.** Valores de la constante de emisión termoiónica.

Emisor	$A_0 (\text{A} \cdot \text{m}^{-2} \text{ K}^{-2})$
Ni	$0,30 \times 10^6$
Pt	$0,32 \times 10^6$
Cr	$0,48 \times 10^6$
Ta	$0,55 \times 10^6$
Ca	$0,60 \times 10^6$
Mo	$0,60 \times 10^6$
W	$0,70 \times 10^6$
Cs	$1,60 \times 10^6$

Consideremos dos metales,  $A$  y  $B$ , cada uno con su correspondiente energía de Fermi  $\varepsilon_{FA} > \varepsilon_{FB}$  y unas funciones de trabajo, respectivamente  $e\phi_A$  y  $e\phi_B$ . Tomemos como origen de potenciales el del exterior a ambos metales. En la parte  $a$ ) de la Figura 52.4 se muestra la situación relativa de niveles de energía.

Si se ponen en contacto ambos metales, los electrones del metal  $A$  que están a mayor energía pasarán al  $B$ , hasta que los niveles energéticos de los electrones de máxima energía se igualen en ambos metales. A partir de entonces, la probabilidad de que un electrón pase del metal  $A$  al  $B$  es la misma para pasar de  $B$  al  $A$ . El metal  $B$  se carga negativamente y el  $A$  positivamente, apareciendo una diferencia de potencial entre ambos, que es el denominado *potencial de contacto*. La situación final

se indica en la parte *b*) de la Figura 52.4, en la cual se ha representado la barrera de potencial que aparece entre ambas superficies. Esta diferencia de potencial o potencial de contacto es  $\Delta V = \phi_B - \phi_A$  y su valor suele ser de uno o varios voltios. En esta situación, para que un electrón pase de un metal a otro es necesario suministrarle la energía  $e\phi_B$ , lo que puede hacerse por iluminación de uno de los metales.

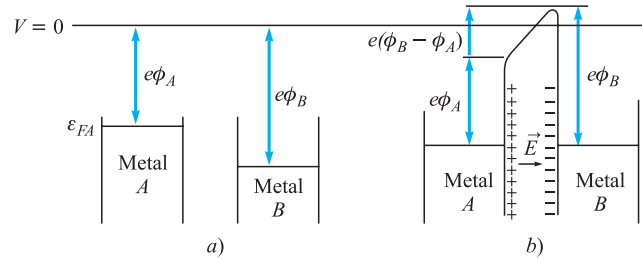


Figura 52.4. Niveles de energía y potencial de contacto.

### Susceptibilidad paramagnética

Los valores medidos de la susceptibilidad paramagnética han resultado ser independientes de la temperatura, lo que ha puesto de manifiesto el fallo de la Ecuación [35.25], que además, da valores muy superiores a los medidos experimentalmente.

Pauli, en 1927, dedujo una nueva expresión para la susceptibilidad paramagnética usando el siguiente razonamiento: Supongamos el gas electrónico formado por dos gases de electrones con espines opuestos. Sean las densidades de ocupación de niveles  $n_1(E)$  y  $n_2(E)$ , respectivamente, las cuales se han representado en la parte *a*) de la Figura 52.5, tomando  $n_1$  en las ordenadas positivas y  $n_2$  en las negativas. Puesto que para  $E < \epsilon_F$ , el índice de ocupación es 1, resulta  $n(E) = g(E)$ .

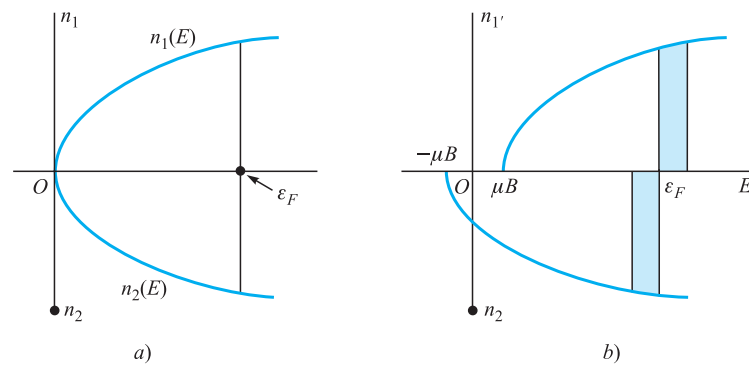


Figura 52.5.

Cuando se aplica un campo magnético  $\mathbf{B}$  exterior, la energía de los electrones con espín paralelo a  $\mathbf{B}$  aumenta en  $\mu B$ , y la de cada electrón con espín antiparalelo a  $\mathbf{B}$  disminuye en la misma cantidad, resultando las distribuciones que aparecen en la parte *b*) de la Figura 52.5.

Ahora hay electrones del gas 1 que encuentran estados de energía más bajos en el gas 2, de forma que invierten sus espines y se pasan a éste. El número de electrones que hacen esto son la mitad de los que tienen energía comprendida entre  $\epsilon_F$  y  $\epsilon_F + \mu B$ , ya que el nivel de ocupación para cada gas es  $1/2$ . Este número es igual al área sombreada en la figura multiplicada por  $1/2$ , es decir:

$$n = \frac{1}{2} \mu B n(\epsilon_F) = \frac{1}{2} \mu B g(\epsilon_F)$$

Al invertir el espín, cada electrón cambia su momento magnético en  $2\mu$ , y el momento magnético resultante es:

$$2\mu n = \mu^2 B g(\varepsilon_F)$$

La magnetización resultante es:

$$M = \frac{\mu^2 B g(\varepsilon_F)}{V}$$

Con lo cual, la susceptibilidad paramagnética se expresa:

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{\mu^2 \mu_0 g(\varepsilon_F)}{V}$$

Utilizando la expresión [52.26] multiplicada por 2, pues en cada estado puede haber 2 electrones con espines opuestos, es:

$$\chi = \frac{\mu^2 \mu_0 8\pi \sqrt{2}}{h^3} m^{3/2} \varepsilon_F^{1/2}$$

La expresión [52.28] nos permite escribir:

$$\frac{8\pi \sqrt{2}}{h^3} = \frac{3N_0}{2} \varepsilon_F^{-3/2}$$

Con ello, la susceptibilidad paramagnética se expresa:

$$\chi = \mu^2 \mu_0 \frac{3N_0}{2\varepsilon_F} \quad [52.33] \quad \text{Susceptibilidad paramagnética}$$

Expresión independiente de  $T$  y que mejora la [35.25], pero que tampoco consigue una concordancia con los valores experimentales. El error reside en considerar constante el potencial dentro del metal, cuando realmente es periódico. En metales con muy pequeño espaciado de red, el error será menor, pero en metales de red muy espaciada, el error de suponer el potencial constante puede ser muy grande.

## 52.6 Aplicaciones de la estadística de Bose-Einstein

### Gas de fotones. Ley de Planck del cuerpo negro

La radiación de una cavidad (cuerpo negro) se comporta como un gas de fotones que están en equilibrio térmico con las paredes de la cavidad. Aquellos son emitidos o absorbidos por los átomos que forman las paredes de la cavidad, pero no interactúan entre sí, son indistinguibles e infinidad de ellos pueden tener la misma energía, por lo cual obedecen a la estadística de Bose-Einstein. Este gas de fotones no tiene un número constante de éstos, ya que son absorbidos y emitidos según hemos indicado. Ahora no se cumplirá la condición  $\sum dn_i = 0$  y no deberá ser tenida en cuenta en la Ecuación [52.11], lo que exige hacer  $\alpha = 0$ , y la ley de distribución se escribe ahora:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{E_i/kT} - 1}$$

Si la cavidad es grande respecto a la longitud de onda de la radiación emitida, el espectro de estados energéticos para los fotones es prácticamente continuo, pudiendo expresarse:

$$dn(E) = \frac{g(E) dE}{e^{E/kT} - 1} \quad [52.34]$$

El número de fotones por estado energético y unidad de intervalo de energía es:

$$\frac{dn(E)}{g(E) dE} = \frac{1}{e^{E/kT} - 1}$$

La energía media por estado será:

$$\langle E \rangle = \frac{hv}{e^{hv/kT} - 1} \quad [52.35]$$

Expresión debida a Planck para la energía media de los osciladores de las paredes de la cavidad (cuerpo negro).

La Ecuación [52.26] nos da el número de estados por unidad de intervalo de energía entre los valores  $E$  y  $E + dE$ , pero ahora es más conveniente encontrar el número de estados por unidad de intervalo de frecuencias, entre las correspondientes frecuencias  $\nu$  y  $\nu + d\nu$ . Para ello usaremos la función  $g(\nu)$ , que verifica:

$$dN = g(\nu) d\nu = g(E) dE$$

o bien:

$$\frac{dN}{d\nu} = g(\nu) = g(E) \frac{dE}{d\nu} = \frac{4\pi V \sqrt{2}}{h^3} m^{3/2} E^{1/2} \frac{dE}{d\nu} \quad [52.36]$$

Debemos hallar la expresión de  $E$  en función de  $\nu$ , que es:

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} = \frac{h^2\nu^2}{2mc^2}$$

Llevando a la [52.36] los valores:

$$E^{1/2} = \frac{h\nu}{(2m)^{1/2}c} \quad \text{y} \quad \frac{dE}{d\nu} = \frac{h^2\nu}{mc^2}$$

Resulta:

$$g(\nu) = \frac{4\pi V}{c^3} \nu^2$$

Puesto que hay dos estados de polarización por cada estado energético, es:

$$g(E) dE = g(\nu) d\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu \quad [52.37]$$

Con esto, la [52.34] se escribe:

$$dn(\nu) = \frac{8\pi V}{c^3} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{hv/kT} - 1} \quad [52.38]$$

Los  $dn$  fotones con frecuencia comprendida entre  $\nu$  y  $\nu + d\nu$  tienen la energía  $h\nu dn$ , y la energía por unidad de volumen y unidad de frecuencia, entre las frecuencias  $\nu$  y  $\nu + d\nu$  es:

$$\varepsilon = \frac{h\nu dn}{V d\nu}$$

Es decir:

$$\varepsilon = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad [52.39] \quad \text{Ley de Planck}$$

Expresión conocida como la *Ley de la radiación del cuerpo negro de Planck*, cuya concordancia con los datos experimentales da validez a todas las hipótesis utilizadas para su obtención.

### Calor específico de sólidos. Gas de fonones

La ley de Dulong y Petit establecía el calor específico de sólidos en  $3R$  por kilomol, lo cual se cumple a altas temperaturas, pero no es cierto a bajas. Einstein, en 1907, trató de buscar una ley más acorde con la realidad y supuso que cada átomo es un oscilador armónico con tres grados de libertad, que vibra sin interactuar con los de su entorno. Además, en lugar de usar el valor  $kT$  para la energía por grado de libertad, empleó el valor deducido por Planck, dado por la [52.35]. Con ello, la energía vibracional por kilomol es:

$$E = \frac{3N_A h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

La expresión del calor específico por kilomol se obtiene con solo derivar la anterior:

$$c_V = \frac{dE}{dT} = \frac{3N_A h\nu e^{h\nu/kT} h\nu/kT^2}{e^{h\nu/kT} - 1} = 3R \left( \frac{h\nu}{kT} \right)^2 \frac{e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2}$$

Expresión que da buenos resultados a altas temperaturas, pero da valores inferiores a la realidad a bajas temperaturas.

Debye, en 1912, consideró que era erróneo suponer que los átomos vibran sin interactuar con los de su entorno y estableció como hipótesis la contraria, de forma que la vibración de cada átomo se propaga a los demás, dando lugar a una onda elástica que se propaga en el sólido. A estas ondas se les puede aplicar la dualidad onda-corpúsculo y asociarlas uno de éstos. Análogamente a la radiación electromagnética, en la cual una onda lleva asociado un corpúsculo llamado fotón, así, a las ondas elásticas les asociaremos un corpúsculo llamado *fonon*. La energía de éstos también está cuantizada, expresándose:

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad [52.40]$$

Su cantidad de movimiento es:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \quad [52.41]$$

De igual manera a como los fotones eran emitidos y absorbidos por los átomos del material que forma la pared de la cavidad, los fonones son emitidos y absorbidos en los átomos de la materia que forma el sólido, en el cual se propaga la vibración elástica. No obstante, existen diferencias fundamentales entre fotones y fonones en cuanto a su propagación, aquéllos pueden hacerlo en el vacío, mientras que éstos,

no, y además tienen grandes limitaciones para su velocidad de propagación, siendo ésta igual a la velocidad de propagación de las ondas elásticas en sólidos.

En el sólido se propagan dos tipos de ondas elásticas: unas transversales, de velocidad  $v_t$ , y con dos grados de libertad por modo de vibración, y otras longitudinales, de velocidad  $v_l$ , con un solo grado de libertad por modo de vibración. Aquí también los valores de la energía y las frecuencias correspondientes presentan un espectro continuo, ya que el sólido es muy grande frente al espaciamiento atómico. Usando la Ecuación [52.37] se escribe, para los fonones asociados a las ondas transversales:

$$g_t(v) dv = \frac{8\pi V}{v_t^2} v^2 dv$$

Análogamente, para los asociados a las ondas longitudinales, será:

$$g_l(v) dv = \frac{4\pi V}{v_l^3} v^2 dv$$

El número total de modo de vibración entre las frecuencias  $v$  y  $v + dv$  será:

$$g(v) dv = 4\pi V \left( \frac{1}{v_t^3} + \frac{1}{v_l^3} \right) v^2 dv$$

Admitiremos que la energía asociada con cada modo de vibración tiene como valor medio el dado por [52.35], con lo cual la energía existente entre las frecuencias  $v$  y  $v + dv$  es:

$$dE = 4\pi V \left( \frac{1}{v_t^3} + \frac{2}{v_l^3} \right) \frac{hv^3}{e^{hv/kT} - 1} dv$$

La energía total para todo el espectro de frecuencias es:

$$E = 4\pi V \left( \frac{1}{v_t^3} + \frac{2}{v_l^3} \right) \int_0^{v_m} \frac{hv^3}{e^{hv/kT} - 1} dv$$

en la cual  $v_m$  es la máxima frecuencia que puede existir en ese sólido.

Para establecer el valor de  $v_m$  se impone la condición de que el número total de modos de vibración por kilomol es igual a tres veces el número de átomos por kilomol, es decir:

$$3N_A = 4\pi V \left( \frac{1}{v_t^3} + \frac{2}{v_l^3} \right) \int_0^{v_m} v^2 dv = \frac{4}{3} \pi V \left( \frac{1}{v_t^3} + \frac{2}{v_l^3} \right) v_m^3$$

Con lo cual es:

$$v_m = \left[ \frac{9N_A}{4\pi V \left( \frac{1}{v_t^3} + \frac{2}{v_l^3} \right)} \right]^{1/3}$$

En consecuencia, la energía por kilomol se expresa:

$$E = \frac{9N_A h}{v_m^3} \int_0^{v_m} \frac{hv^3}{e^{hv/kT} - 1} dv$$

Se define la *temperatura de Debye*,  $T_D$ , mediante la relación:

$$hv_m = kT_D \quad [52.42]$$



Si hacemos el cambio de variable  $z = hv/kT$ , los límites de la integral serán  $z = 0$  para  $v = 0$ , y  $z = hv_m/kT = T_D/T$  para  $v = v_m$ . Puesto que son:  $v = \frac{kTz}{h}$  y

$dv = \frac{kT dz}{h}$ , la energía se expresa:

$$E = 9R \frac{T^4}{T_D^3} \int_0^{T_D/T} \frac{z^3}{e^z - 1} dz \quad [52.43]$$

Por tanto, el calor específico se expresa:

$$c_V = \frac{dE}{dT} = 36R \frac{T^3}{T_D^3} \int_0^{T_D/T} \frac{z^3}{e^z - 1} dz + 9R \frac{T^4}{T_D^3} \frac{d}{dT} \int_0^{T_D/T} \frac{z^3}{e^z - 1} dz$$

Puesto que es:

$$\frac{d}{dT} = \frac{d}{dz} \frac{dz}{dT}$$

será:

$$\frac{d}{dT} \int_0^{T_D/T} \frac{z^3}{e^z - 1} dz = \left[ \frac{z^3}{e^z - 1} \right]^{T_D/T} \left( -\frac{hv}{kT^2} \right) = -\frac{T_D^3}{kT^5} \frac{hv}{e^{T_D/T} - 1}$$

Con lo cual, la expresión del calor específico resulta ser:

$$c_V = 36R \left( \frac{T}{T_D} \right)^3 \int_0^{T_D/T} \frac{z^3}{e^z - 1} dz - 9R \frac{T_D}{T} \frac{1}{e^{T_D/T} - 1} \quad [52.44] \quad \text{Fórmula de Debye}$$

Expresión que es la denominada *fórmula de Debye para el calor específico de sólidos*.

Si es  $T \gg T_D$  la variable  $z$  es muy pequeña, pudiendo hacerse  $e^z = 1 + z$ , con lo cual el valor de  $E$  [52.43] es:

$$E = 9R \frac{T^4}{T_D^3} \int_0^{T_D/T} z^2 dz = 9R \frac{T^4}{T_D^3} \frac{1}{3} \left( \frac{T_D}{T} \right)^3 = 3RT$$

Con lo cual el calor específico es  $C_V = 3R = 6 \text{ cal/mol K}$ , que es la ley de Dulong y Petit.

Si  $T \rightarrow 0$ ,  $T_D/T \rightarrow \infty$  y el valor de  $E$  tiende a:

$$E = 9R \frac{T^4}{T_D^3} \int_0^\infty \frac{z^3}{e^z - 1} dz = 9R \frac{T^4}{T_D^3} \frac{\pi^4}{15} = \frac{3\pi^4}{5} R \frac{T^4}{T_D^3}$$

En cuyo caso, el calor específico está dado por:

$$C_V = \frac{12}{5} \pi^4 R \frac{T^3}{T_D^3}$$

resultando ser proporcional al cubo de la temperatura absoluta.

Si es  $T = T_D$ , la expresión [52.44] da para el calor específico el valor:

$$C_V = 36R \int_0^1 \frac{z^3}{e^z - 1} dz - \frac{9R}{e - 1} = 2,856R$$

Esto permite redefinir la temperatura de Debye como *aquella para la cual el calor específico del sólido vale 2,856R*.



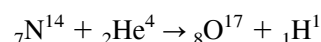
### 53.1 Introducción

El descubrimiento de la radiactividad por Becquerel (1852-1908), en 1896, tras advertir que las placas fotográficas eran impresionadas por alguna radiación penetrante cuando eran colocadas cerca de sales de uranio, puede considerarse el nacimiento de la física nuclear.

El modelo nuclear del átomo fue establecido por Rutherford, en 1911, para poder explicar las grandes desviaciones que aparecían en las partículas cuando con ellas se irradiaban finísimas láminas metálicas. Según este modelo, toda la carga positiva, y prácticamente toda la masa, están concentradas en una pequeñísima zona central de un radio aproximado de  $10^{-15}$  m, a la que denominó núcleo.

Moseley, estudiando los espectros característicos de rayos X para un gran número de elementos, encontró la variación regular del número atómico  $Z$ , estableciendo una nueva ordenación del sistema periódico basada en éste. Puesto que la materia en estado natural es neutra, el núcleo debe tener la carga  $+Ze$ , igual y opuesta a la carga de la corteza electrónica,  $-Ze$ . El número atómico  $Z$  es, por tanto, el número de electrones en el átomo y el número de cargas positivas, iguales a  $+e$ , en el núcleo, y también el número de orden en la serie de elementos naturales partiendo del hidrógeno con  $Z = 1$ .

Marsden, en 1914; Rutherford, en 1919, y Chadwich, en 1922, estudiaron la dispersión de partículas  $\alpha$  por diversos gases, fundamentalmente hidrógeno y nitrógeno. Utilizaban para ello una cámara dentro de la cual situaban un emisor de partículas  $\alpha$  ( $^{214}\text{Po}$ ), y en una ventana de observación colocaron una pantalla de sulfuro de zinc para detectar por centelleo el impacto de las partículas. Uno de los resultados fue detectar la presencia de protones  ${}_1\text{H}^1$ , tras lo que Rutherford concluyó que habían debido de ser lanzados fuera del núcleo por el impacto de las partículas  $\alpha$ . Blackett fotografió esta desintegración y en ningún caso observó partículas  $\alpha$  después de su impacto en el núcleo, concluyendo que la partícula  $\alpha$  era absorbida, emitiéndose un protón y quedando formado un nuevo núcleo. Así quedó descubierta la primera desintegración nuclear artificial, cuya ecuación es:



- 53.1. Introducción
- 53.2. Unidad de masa atómica
- 53.3. El neutrón
- 53.4. Algunas propiedades del núcleo
- 53.5. Masas y energía de enlace
- 53.6. Fuerzas nucleares
- 53.7. Estabilidad
- 53.8. Modelos nucleares
- 53.9. Radiactividad natural
- 53.10. Ley general de la emisión radiactiva. Actividad, media vida y vida media
- 53.11. Datación radioactiva
- 53.12. Reacciones nucleares
- 53.13. Radiactividad artificial
- 53.14. Desintegración  $\beta$
- 53.15. Desintegración  $\gamma$
- 53.16. Fisión nuclear
- 53.17. Fusión
- 53.18. Partículas fundamentales
- 53.19. Clasificación de partículas
- 53.20. Los quarks
- 53.21. Interacciones
- 53.22. Modelo Standard

El descubrimiento del neutrón por Chadwick, en 1932, interpretando el resultado de experiencias en las cuales se irradiaban elementos ligeros con partículas  $\alpha$ , hizo concebir el núcleo como formado por protones y neutrones, lo que satisfacía todas las propiedades conocidas de aquél. A partir de este momento, las investigaciones se dirigieron al estudio de las propiedades nucleares, su estabilidad, reacciones nucleares, modelos, etc., lo que dio lugar al nacimiento de la física nuclear moderna.

### 53.2 Unidad de masa atómica

Hasta 1961 se tomaba como referencia para la medida de masas la del oxígeno, a la cual se le daba el valor de 16 unidades. Esto era interesante desde el punto de vista químico, ya que el oxígeno forma parte de un gran número de compuestos.

Los métodos físicos de espectrometría de masas, que permiten comparar masas atómicas con una precisión de 1 en  $10^6$ , tomaron como elemento de referencia al carbono, asignando a la masa de su isótopo natural más abundante el valor de 12 unidades de masa atómica (u), con lo cual la masa de todos los isótopos de cualquier elemento se expresa por un número entero con un error menor del 1 por 100. Quedó, pues, definida la *unidad de masa atómica* de la forma:

$$1 \text{ u} = \frac{1}{12} \text{ masa átomo } ^{12}\text{C}$$

Un kilomol de un elemento, cantidad en kilos igual a su masa atómica, será para el  $^{12}\text{C}$  de 12 kg. Por tanto, la masa de un átomo de este isótopo del carbono es:

$$m = \frac{M}{N_A} = \frac{12}{6,022142 \times 10^{26}} = 1,992\,646\,47 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

Con lo que, la unidad de masa atómica, expresada en kilos, es:

$$1 \text{ u} = \frac{m}{12} = 1,660539 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Usando la ecuación de Einstein,  $E = mc^2$ , podemos calcular la energía equivalente a la unidad de masa:

$$E = 1,660539 \times 10^{-27} \text{ (kg)} \times 299\,792\,458^2 \text{ (m/s)}^2 = 1,492418 \times 10^{-10} \text{ J}$$

Lo cual, expresado en eV es:

$$E = \frac{1,492418 \times 10^{-10}}{1,602176 \times 10^{-19}} = 0,931\,494\,4 \times 10^9 \text{ eV} = 931,4944 \text{ MeV}$$

Por tanto, la unidad de masa atómica se puede expresar de la forma:

$$1 \text{ u} = \frac{m}{12} = 1,660539 \times 10^{-27} \text{ kg} = 931,4944 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

Unidad de masa atómica

El estudio mediante espectrometría de masas dio lugar al descubrimiento de isótopos de numerosos elementos. Así, para el C existen otros dos isótopos naturales,  $^{13}\text{C}$  y  $^{14}\text{C}$ , de masas 13,00335 y 14,00324, respectivamente, siendo este último radiactivo. El 98,89 por 100 del carbono está en forma de  $^{12}\text{C}$  y la masa atómica del carbono, en su composición isotópica natural, es 12,01115 u.

Del hidrógeno se encontraron tres isótopos:  ${}^1_1\text{H}$ , de masa 1,007825 u;  ${}^2_1\text{H}$ , de masa 2,014102 u, y el  ${}^3_1\text{H}$ , de masa 3,016050 u, denominándose, respectivamente, protio, deuterio y tritio. El 99,985 por 100 del hidrógeno está en forma de protio, siendo la masa atómica del hidrógeno, en su composición isotópica natural, 1,0080 u.

El núcleo del protio es el protón y la masa de éste se ha evaluado como se indicó en el Capítulo 28, pudiendo expresarse de la forma:

$$m_p = 1,007\,276\,3\,u = 1,672622 \times 10^{-27}\,kg = 938,272\,232\,7 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

Masa del protón

La masa del electrón es útil expresarla también en  $\text{MeV}/c^2$ , resultando:

$$m_e = 9,109\,381\,88 \times 10^{-31}\,kg = 5,485\,798\,2 \times 10^{-4}\,u = 0,510\,999\,032 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

Masa del electrón

### 53.3 El neutrón

En 1930, Bothe y Becker, irradiando berilio y boro con partículas  $\alpha$  encontraron una radiación mucho más penetrante que los rayos X. En 1931, Irene Curie y su esposo estudiaron algunas propiedades de esa radiación, pero siguieron en la suposición de su naturaleza electromagnética. Observaron que al interponer entre el material bombardeado y la cámara de detección finas láminas de Al, Cu, Pb y Ag, la intensidad de ionización en la cámara prácticamente no variaba; pero si se interponía un material como parafina o agua, rico en hidrógeno, se producía un aumento en la ionización de aproximadamente el doble, lo que pensaron era debido a protones que eran expulsados de la parafina por la radiación. Para eliminar la presencia de protones en la cámara colocaron una lámina de aluminio interpuesta, cuyo espesor estrictamente suficiente para ello resultó ser de 0,2 mm, lo que indicaba que el protón tenía una energía de unos 4,5 MeV.

Si la misteriosa radiación era electromagnética, la producción del protón debía interpretarse como un efecto análogo al Compton, aunque aquí sería el choque de un fotón incidente con un núcleo con producción de un nuevo fotón y un protón. De acuerdo con la teoría del efecto Compton, para que el protón salga con una energía de 4,5 MeV es necesario que el fotón incidente tenga una energía de unos 50 MeV. Además de la necesidad de esta altísima energía, se observó que el número de protones producidos era mucho mayor del que cabía esperar del proceso de dispersión.

Chadwick, en 1932, demostró que el proceso podía interpretarse como un choque elástico de una partícula material contra un protón. Esta partícula material no tenía carga, pues no era desviada por campos eléctricos ni magnéticos, y fue denominada *neutrón*.

La energía máxima de los protones era de 5,7 MeV y ésta debía ser la energía de los neutrones emitidos por el Be, pues en un choque elástico de dos masas aproximadamente iguales, una de ellas, inicialmente en reposo, se transfieren sus energías. Chadwick sugirió que la reacción era:



La ecuación no servía para determinar la masa del neutrón, pues en aquel entonces no se conocía la masa del Be, pero sí las del B y N, con lo cual, en la reacción:



puede determinarse la masa del neutrón, resultando el valor 1,0067 u.

El valor más exacto determinado para la masa del neutrón es:

$$\text{Masa del neutrón} \quad m_n = 1,674\,927\,16 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1,008\,664\,573 \text{ u} = 939,565\,568\,7 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

la cual resulta ser muy próxima a la del protón. En la Tabla 53.1 se han recogido los valores de las masas del electrón, protón y neutrón expresadas en diferentes unidades.

**Tabla 53.1.** Masas del electrón, protón y neutrón.

Partícula	kg	u	$\frac{\text{MeV}}{c^2}$
Electrón	$9,109\,381\,88 \times 10^{-31}$	$5,485\,798\,2 \times 10^{-4}$	0,510 999 032
Protón	$1,672\,62\,2 \times 10^{-27}$	1,007 276 3	938,272 232 7
Neutrón	$1,674\,927\,16 \times 10^{-27}$	1,008 664 753	939,565 568 7

Aparece así el neutrón como parte constituyente del núcleo, y el hecho de suponer al núcleo formado por  $Z$  protones y  $N$  neutrones permitirá explicar satisfactoriamente muchas de las propiedades conocidas de aquél. Recordemos que el número másico de un elemento,  $A$ , se define como la suma del número de protones y neutrones en su núcleo,  $A = Z + N$ . Un núclido se representa con el símbolo del elemento, al que se añade, como supraíndice izquierdo, el número másico,  $A$ , y como subíndice izquierdo el número atómico,  $Z$ , es decir,  ${}^A_Z E$ . Los núclidos se clasifican según los valores de  $Z$  y  $A$  de la siguiente forma:

- Isótopos: igual  $Z$ , distinto  $A$ , por tanto, distinto  $N$ .
- Isótonos: distinto  $Z$ , distinto  $A$ , pero, igual  $N = Z_1 - A_1 = Z_2 - A_2$ .
- Isóbaros: distinto  $Z$ , igual  $A$ , por tanto, distinto  $N$ .
- Isómeros: igual  $Z$ , igual  $A$ , por tanto igual  $N$ .

## 53.4 Algunas propiedades del núcleo

Además de las propiedades nucleares a las que ya nos hemos referido, como la masa o la carga, nos referimos ahora sucintamente a otras propiedades, todas ellas muy importantes, como son: el tamaño, la distribución de la carga, el espín, el momento magnético, la estadística, la paridad y el momento cuadrupolar eléctrico.

### Tamaño

Desde las experiencias de Rutherford de dispersión de partículas  $\alpha$ , se han realizado otras muchas con el objeto de determinar el radio del núcleo, la densidad nucleónica del mismo y su distribución de carga eléctrica. El núcleo es la zona central del átomo, espacio limitado por una superficie esférica imaginaria, dentro del cual están confinados los nucleones y con una cierta distribución de carga debida a sus protones.

La dispersión de neutrones por los núcleos es un método de medida del radio de éstos. Puesto que el neutrón no se ve afectado por los campos electromagnéticos, su dispersión por el núcleo tiene que ser debida a fuerzas de otro tipo. El radio del núcleo se toma como la distancia a la cual cambian bruscamente esas fuerzas. Este radio así determinado obedece a la expresión general:

$$R = R_0 A^{1/3} \quad [53.3]$$

Expresión en la que  $A$  es el número másico y  $R_0$  una constante cuyo valor es del orden de  $1,2 \times 10^{-15}$  m.

**EJEMPLO 53.1** Radio del núcleo del uranio

Determinemos el radio del núcleo del  $^{238}\text{U}$ .

**Solución:**

La simple aplicación de la expresión [53.3] nos proporciona directamente el radio buscado:

$$R(\text{U}) = 1,2 \times 10^{-15} \times 238^{1/3} = 7,4366 \times 10^{-15} \text{ m}$$

El volumen del núcleo resulta proporcional al número másico, ya que es:

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} R_0^3 A$$

A cada nucleón le corresponde un volumen constante, *volumen por nucleón*, cuyo valor es:

$$\frac{V}{A} = \frac{4}{3} \pi R_0^3 = 7,238 \times 10^{-45} \text{ m}^3/\text{nucleón}$$

Por tanto, cada nucleón ocupa un volumen de radio  $R_0$ .

La densidad de los nucleones, en esta concepción esférica de los mismos, tiene para el protón el valor:

$$\rho_p = \frac{1,672622 \times 10^{-27}}{7,238 \times 10^{-45}} = 2,311 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$$

Este valor para el neutrón es:

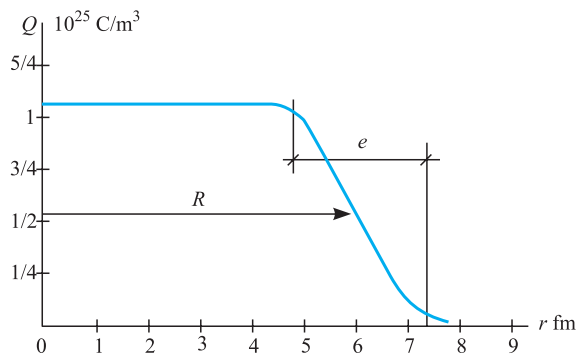
$$\rho_n = \frac{1,674\,927\,6 \times 10^{-27}}{7,238 \times 10^{-45}} = 2,314 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$$

Densidades altísimas, que dan idea de la compacidad de la materia nucleónica.

**Distribución de la carga**

La distribución de la carga dentro del núcleo puede determinarse bombardeando a éste con partículas cargadas. Una partícula muy útil a tal efecto es el electrón, ya que, al no tener prácticamente masa, la fuerza nuclear fuerte tiene muy poco efecto sobre él y sí únicamente las de origen electromagnético.

Robert Hofstadter realizó, en 1953, una serie de experiencias bombardeando elementos pesados con electrones altamente energéticos, de unos 500 MeV. La longitud de onda asociada a éstos es de unos  $2,5 \times 10^{-15}$  m, más pequeña que el radio del núcleo, y puede deducirse de la dispersión de ellos, cual es la distribución radial de carga dentro del núcleo, lo que se ha representado en la Figura 53.1.



**Figura 53.1.** Distribución de carga dentro del núcleo.

También el método permite la determinación del radio del núcleo, que coincide con el valor ya indicado. Asimismo, se determinó en estas experiencias el «espesor superficial» o «espesor de capa» del núcleo, que es la distancia radial desde que la carga empieza a disminuir hasta que se anula. Este valor resultó ser constante para todos los átomos con  $A > 10$  y su valor es de  $2,4 \times 10^{-15}$ .

### Espín nuclear

Protones y neutrones, igual que los electrones, tienen espín  $1/2$ ; además, dentro del núcleo los nucleones se mueven y poseen un momento cinético. Como resultante vectorial de todos ellos, el núcleo tiene un espín que simbolizaremos con  $I$ . Este vector estará cuantizado, siguiendo las mismas reglas de la mecánica cuántica vistas para los momentos cinéticos atómicos. Su módulo será  $\hbar[I(I + 1)]^{1/2}$  y su componente en una dirección está dada por  $m\hbar$ , siendo:

$$m = I, I - 1, \dots, -I + 1, -I$$

La medida de  $I$  ha sido posible a partir de los espectros de estructura fina de moléculas homomoleculares. Experimentalmente se ha encontrado que un núcleo con  $A$  par tiene  $I$  entero o nulo, y si  $A$  es par y  $Z$  también,  $I$  siempre es nulo en su estado base, lo que parece indicar que protones y neutrones acoplan sus momentos angulares en sentidos opuestos. Asimismo, se ha encontrado que si  $A$  es impar,  $I$  es semientero.

### Estadística

Si la función de onda que describe el estado de dos partículas idénticas, al intercambiar las coordenadas espaciales de esas partículas, no cambia de signo, se dice que es simétrica respecto al cambio de esas partículas y que éstas obedecen a la estadística de  $B-E$ . Por el contrario, si la función cambia de signo al intercambiar espacialmente las partículas, la función es antisimétrica respecto a éstas y las partículas obedecerán a la estadística de  $F-D$ .

Se ha comprobado experimentalmente, según ya hemos indicado, que las partículas de espín entero o nulo, como los fotones, obedecen a la estadística de  $B-E$ , mientras que aquellas de espín semientero, como electrones, protones y neutrones, obedecen a la estadística de  $F-D$ . El núcleo, según acabamos de ver, si  $A$  es par tiene espín entero o nulo y obedecerá a la estadística de  $B-E$ , mientras que si  $A$  es impar, tendrán un espín semientero y obedecerá a la estadística de  $F-D$ .

### Paridad

Ya indicamos el concepto de paridad al estudiar el pozo de potencial cuadrado. En general, si al pasar de un punto  $(x, y, z)$  a su simétrico respecto al origen  $(-x, -y, -z)$ , la función potencial no cambia,  $V(x, y, z) = V(-x, -y, -z)$ , la función de onda puede ser la misma o puede cambiar de signo. En el primer caso se dice que presenta paridad par y en el segundo paridad impar.

El núcleo, en cada uno de sus posibles estados, presenta una paridad concreta y, en los estudios sobre interacciones y reacciones nucleares, la conservación de la paridad puede jugar un papel importantísimo.



## Momento dipolar magnético

El protón, en su movimiento dentro del núcleo, tendrá un momento dipolar magnético,  $\mathbf{M}_1$  proporcional al momento cinético,  $\mathbf{L}$ , análogamente a lo visto para el electrón, siendo ahora:

$$\mathbf{M}_1 = \frac{e}{2m_p} \mathbf{L}$$

La componente de este en dirección del eje  $z$  es:

$$M_{1z} = \frac{e}{2m_p} L_z = \frac{e\hbar}{2m_p} m_1 = \mu_n m_1$$

A la constante  $\mu$  se la denomina *magnetón nuclear de Bohr*, y su valor numérico es:

$$\mu_n = \frac{e\hbar}{4\pi m_p} = \frac{1,602176 \times 10^{-19} \times 6,626\,068\,76 \times 10^{-34}}{4\pi \times 1,672622 \times 10^{-27}} = 5,05077 \times 10^{-26} \text{ J/T}$$

Magnetón nuclear

El neutrón, al no tener carga, no tendrá momento magnético orbital.

Además, tanto protones como neutrones presentan momento dipolar magnético de espín, cuya expresión para el protón es:

$$\mathbf{M}_s = \frac{g_p e}{2m_p} \mathbf{S} = g_p \frac{\mu_n}{\hbar} \mathbf{S}$$

A la constante  $g$  se la denomina *factor giromagnético de espín*, que para el protón tiene el valor  $g = 5,5855$ .

Para el neutrón la expresión es análoga, pero el factor giromagnético de espín es  $g_n = -3,8263$ , lo que indica que en este  $\mathbf{M}_s$  y  $\mathbf{S}$  son antiparalelos.

El hecho de que protones y neutrones presenten momento dipolar magnético de espín indica la existencia de una cierta estructura interna, al menos en cuanto a distribución de carga, así el neutrón, a pesar de que su carga neta sea nula, parece que internamente debe presentar distribuciones de cargas positivas y negativas.

En su conjunto, el núcleo, como resultante de los momentos magnéticos de sus nucleones, presenta un momento magnético nuclear  $\mathbf{M}_N$ , que estará relacionado con el espín nuclear por la expresión:

$$\mathbf{M}_N = g_N \frac{e}{2m_p} \mathbf{I} = g_N \frac{\mu_n}{\hbar} \mathbf{I}$$

siendo  $g_N$  el *factor giromagnético nuclear*.

El momento dipolar magnético del núcleo crea un campo magnético, al cual están sometidos los electrones, que provoca un desdoblamiento en los niveles de energía permitidos para los electrones, lo que da lugar a la denominada estructura hiperfina.

## Momento cuadrupolar eléctrico

Consideremos una pequeña distribución espacial de carga eléctrica de densidad  $\rho(x, y, z)$ , sometida a un potencial electrostático  $V(x, y, z)$ . La energía de esa carga es:

$$W = \int_v \rho V dV$$

siendo  $v$  el volumen ocupado por la carga.

El potencial puede desarrollarse en serie en un entorno del punto central de la carga, en el cual tomaremos el origen de potenciales, con lo cual la energía se expresa:

$$\begin{aligned} W = & \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 \int x\rho \, dv + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 \int \rho y \, dv + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 \int z\rho \, dv + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 \int x^2\rho \, dv + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 \int y^2\rho \, dv + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_0 \int z^2\rho \, dv + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\right)_0 \int xy\rho \, dv + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z}\right)_0 \int xz\rho \, dv + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z}\right)_0 \int yz\rho \, dv + \dots \end{aligned}$$

Si la distribución de carga presenta forma de elipsoide de revolución, lo que es usual en física nuclear, las tres primeras integrales son todas nulas, por la simetría de la distribución de carga, y lo mismo sucede con las tres últimas, expresándose la energía:

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 Q_{xx} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 Q_{yy} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_0 Q_{zz}$$

Si, además, tomamos el eje del elipsoide como eje de las zetas, será  $Q_{xx} = Q_{yy}$  y, por tanto,

$$W = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 \right] Q_{xx} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_0 Q_{zz}$$

Puesto que también debe verificarse la ecuación de Laplace, admitiendo que es  $\rho(0, 0, 0) = 0$ , será:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_0 = 0$$

Con lo cual, es:

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_0 (Q_{zz} - Q_{xx})$$

Haciendo  $Q = \frac{2}{e} (Q_{zz} - Q_{xx})$ , resulta:

$$W = \frac{eQ}{4} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_0 \quad [53.4]$$

Al factor  $Q$  se le denomina *momento cuadrupolar eléctrico*. Evidentemente, si la carga presenta simetría esférica sería  $Q_{xx} = Q_{zz}$  y, por tanto,  $Q = 0$ . En consecuencia, el hecho de que los núcleos presenten momento cuadrupolar eléctrico, denota que su carga no tiene simetría esférica. Por otra parte, si la distribución de carga no tiene ningún tipo de simetría, la cantidad  $Q$  tendrá nueve componentes, que se simbolizan  $Q_{ij}$  para  $i = 1, 2, 3$ , y  $j = 1, 2, 3$ , y, por tanto, es de naturaleza tensorial.

## 53.5 Masas y energía de enlace

Puede comprobarse fácilmente que la masa de un átomo es menor que la suma de la masa de su núcleo más la de sus electrones, y este defecto de masa aparece como energía de enlace de los electrones con el átomo. Así, hemos visto que para

ionizar al hidrógeno hacen falta 13,6 eV, que es la energía que liga al electrón con el átomo. En general, la energía total de enlace de todos los electrones es:

$$E_e = (m_N + Zm_e - m_A)c^2 \quad [53.5]$$

Expresión en la que son:  $m_N$ , la masa del núcleo;  $m_e$ , la masa del electrón, y  $m_A$ , la masa del átomo.

Análogamente se puede comprobar, para cualquier núcleo estable, que su masa es menor que la suma de las masas de sus nucleones. Este defecto de masa aparece en forma de energía de enlace de los nucleones, de acuerdo con la expresión de Einstein,  $E = c^2\Delta m$ .

La energía de enlace nuclear puede expresarse, de forma general, para un átomo de número atómico  $Z$  y número másico  $A$ , mediante:

$$E_{BN} = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_N]c^2 \quad [53.6]$$

La energía de enlace de los electrones es, a lo sumo, del orden de los keV, mientras que la energía de enlace de los nucleones es del orden de los MeV, por lo cual puede admitirse, despreciando la energía de enlace electrónica, que la masa del átomo es igual a la masa de su núcleo más la de sus electrones, con lo cual es:

$$E_{BN} = [Zm_p + (A - Z)m_n - Zm_e]c^2 = [Zm_H + (A - Z)m_n - m_A]c^2 \quad [53.7] \quad \text{Energía de enlace nuclear}$$

Esta ecuación, puesto que son conocidas las masas del átomo de hidrógeno y del neutrón, nos permite, una vez conocida la masa atómica del elemento en cuestión, determinar su energía de enlace nuclear.

### EJEMPLO 53.2 Energía de enlace de los nucleones en el átomo de deuterio

Tomando para la masa del deuterio el valor 2,014102 u y para la masa del átomo de hidrógeno el valor 1,007825 u, determinemos la energía que mantiene unidos en su núcleo al protón y al neutrón.

#### Solución:

La Ecuación [53.7], en este caso particular, se escribe:

$$\begin{aligned} E_{BN} &= [m_H + m_n - m(^2\text{H})]c^2 = \\ &= (1,007825 + 1,008665 - 2,014102)c^2 = \\ &= 0,002388 \text{ u} \cdot 1,660565 \cdot 10^{-27} \frac{\text{kg}}{\text{u}} \cdot 9 \cdot 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2 = \\ &= 3,56889 \cdot 10^{-13} \text{ J} \cdot \frac{1}{1,602 \cdot 10^{-19}} \text{ eV/J} = 2,22777 \text{ MeV} \end{aligned}$$

### EJEMPLO 53.3 Energía de enlace de los nucleones en el átomo de uranio

Tomando para la masa del  $^{238}_{92}\text{U}$  el valor 238,050770 u, determinemos la energía de enlace que mantiene unidos en su núcleo a protones y neutrones.

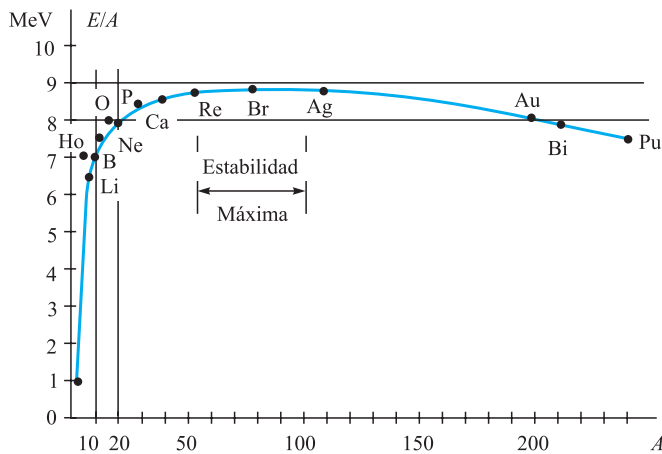
**Solución:**

La Ecuación [53.7] permite ahora escribir:

$$\begin{aligned}
 E_{BN} &= [92m_H + (238 - 92)m_n - m_A]c^2 = \\
 &= (92 \times 1,007825 + 146 \times 1,008665 - 238,050770)c^2 = \\
 &= 1,93422 \text{ u} \cdot 1,660565 \cdot 10^{-27} \frac{\text{kg}}{\text{u}} \cdot 9 \cdot 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2 = \\
 &= 2,8907082 \cdot 10^{-10} \text{ J} \cdot \frac{1}{1,602 \cdot 10^{-19}} \text{ eV/J} = 1,804437 \text{ MeV}
 \end{aligned}$$

Por tanto, la energía de enlace entre nucleones en el átomo de uranio es unas 810 veces superior a la del deuterio.

Es interesante analizar la energía de ligadura nuclear por nucleón, encontrando que, a partir de  $Z = 20$ , es prácticamente constante, pasando por un máximo de 8,8 MeV/nucleón en  $Z = 60$  y cayendo a 7,6 MeV/nucleón para los elementos pesados. En la Figura 53.2 se representa la energía de ligadura por nucleón  $E_{BN}/A$ , en función del número másico.



**Figura 53.2.** Energía de ligadura por nucleón en función de  $A$ .

El hecho de que la energía de enlace por nucleón sea prácticamente constante indica que existe una saturación de las fuerzas nucleares, es decir, es como si cada nucleón fuera únicamente atraído por los contiguos.

Weizsacker propuso una fórmula semiempírica para la energía de ligadura nuclear, cuya expresión es:

$$\begin{aligned}
 E_{BN} &= a_1A - a_2A^{2/3} - \\
 &- a_3Z^2A^{-1/3} - a_4(A - 2Z)^2A^{-1} + a_5A^{-1/2}
 \end{aligned} \quad [53.8]$$

La energía de ligadura por nucleón, según hemos visto, es prácticamente constante, por lo cual la energía de ligadura de un núcleo debe ser proporcional al número de nucleones, es decir, al número másico  $A$ , de ahí el primer sumando de la expresión. Los nucleones de la superficie nuclear no tienen sus ligaduras saturadas, ya que no son atraídos por el exterior, por ello se disminuye la energía mediante el segundo término, que es proporcional al cuadrado del radio, ya que es un efecto que se produce en la superficie del núcleo. Además, debemos tener en cuenta la repulsión coulombiana entre protones, que también disminuye las fuerzas de enlace y es proporcional a  $Z^2/r$ , por ello se incluye el tercer término, ya que  $R$  es proporcional a  $A^{1/3}$ . El cuarto término es debido a un efecto cuántico, según el cual la energía aumenta cuando  $N \neq Z$ , independientemente de si es  $N \geq Z$  y que debe ser mínima cuando sea  $N = Z$ ; su expresión es un tanto empírica. Finalmente se añade el quinto término  $\delta(A)$  para tener en cuenta el efecto de apareamiento de los nucleones, que es nulo si  $A$  es impar, y que siendo  $A$  par, puede ser positivo o negativo según que sean  $N$  y  $Z$  ambos pares o impares, respectivamente. Ajustando la Ecuación [53.8] a diferentes medidas experimentales, se pueden evaluar las cinco constantes, resultando los siguientes valores en MeV:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 15,75 & a_2 &= 17,8 & a_3 &= 0,711 \\
 a_4 &= 23,7 & a_5 &= 11,18
 \end{aligned}$$

### EJEMPLO 53.4 Cálculo de la energía de enlace de nucleones en el uranio por aplicación de la ecuación de Weizsacker

Para los valores del uranio  ${}^{238}_{92}\text{U}$ , la Ecuación [53.8] se escribe:

$$\begin{aligned} E_{BN} &= 15,75 \times 238 - 17,8 \times 238^{2/3} - 0,711 \times 92^2 \times 238^{-1/3} - \\ &\quad - 23,7(238 - 184)^2 238^{-1} + 11,18 \times 238^{-1/2} = 3748,5 - \\ &\quad - 683,604071 - 971,075364 - 290,374790 + 0,724692 = 1804,170467 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Lo que se ajusta perfectamente al valor encontrado en el Ejemplo 53.3, ya que el error es del orden del 0,15 por mil.

Si de la Ecuación [53.7] despejamos la masa atómica del elemento, es:

$$m_A = Zm_H + (A - Z)m_n - \frac{E_{BN}}{c^2}$$

Teniendo en cuenta la [53.8], resulta:

$$\begin{aligned} m_A &= Zm_H + (A - Z)m_n - a'_1 A + a'_2 A^{2/3} + a'_3 Z^2 A^{-1/3} + \\ &\quad + a'_4 (A - 2Z)^2 A^{-1} - a'_5 A^{-1/2} \end{aligned} \quad [53.9]$$

Expresión que da la masa atómica con buena precisión y en la cual las constantes verifican  $a'_i = \frac{a_i}{c^2}$ .

## 53.6 Fuerzas nucleares

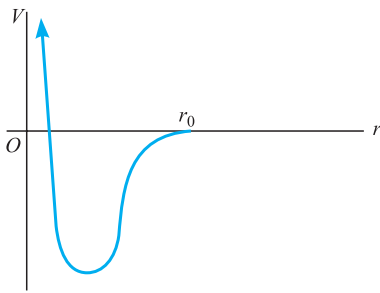
Las fuerzas nucleares que mantienen unidos a los nucleones dentro del núcleo tienen que ser mucho más fuertes que las repulsivas coulombianas existentes entre los protones, de aquí que se las denomine *interacciones fuertes*. La energía potencial electrostática de dos protones separados la distancia  $10^{-15}$  m es:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \simeq 1,44 \text{ MeV}$$

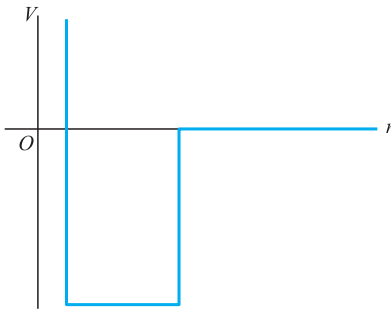
Mucho menor que la energía necesaria para arrancar un protón del núcleo del helio, que es del orden de 20 MeV.

La acción de las fuerzas nucleares es de muy corto alcance, habiéndose puesto de manifiesto que la interacción entre nucleones disminuye muy rápidamente con la distancia, anulándose para valores de  $1,5$  a  $2 \times 10^{-15}$  m. Si la interacción fuerte alcanzara a distancias del orden del espaciamiento de los núcleos, intervendría en la formación de las moléculas, cosa que no sucede, ya que en éstas actúan las interacciones electromagnéticas. En las interacciones nucleón-nucleón, dentro del núcleo, existe un efecto de saturación, ya que en un núcleo hay  $A(A - 1)/2$  parejas de nucleones y la energía total de enlace entre ellos sería proporcional a  $A^2$  y no a  $A$ . Por tanto, únicamente interactúan cada nucleón con los contiguos, ignorando a los restantes.

Por otra parte, la fuerza nuclear es independiente de la carga, lo que se ha comprobado en experimentos de dispersión protón-protón y neutrón-protón, es decir, ellas no distinguen entre protones y neutrones. En el deuterón, formado por un protón y un neutrón, prácticamente la fuerza atractiva entre éstos es la única existente y la responsable de su estabilidad. El estudio del deuterón ha permitido



**Figura 53.3.** Función potencial de Yukawa.



**Figura 53.4.** Pozo de potencial de Yukawa.

obtener información de este tipo de interacciones, habiéndose encontrado que no puede obedecer exactamente al modelo de fuerzas centrales y que dependen fuertemente del momento cinético de los nucleones interactuantes. No obstante, al objeto de estudios teóricos, el japonés Hideki Yukawa propuso una función potencial de la que podían derivarse las fuerzas nucleares, cuya expresión es:

$$V(r) = -E_0 r_0 \frac{e^{-r/r_0}}{r} \quad [53.10]$$

en la cual  $r_0$  es el alcance de las fuerzas nucleares. Esta función tiende a infinito cuando  $r$  tiende a cero, es decir, para valores muy pequeños de  $r$  se vuelve repulsiva, lo que explica la separación media de los nucleones (Figura 53.3).

Usando esta función potencial se puede emplear la ecuación de Schrödinger para estudiar las interacciones  $n-p$  y  $n-n$ . En algunos casos la función potencial podrá simplificarse y sustituirse por un pozo rectangular de potencial (Figura 53.4).

Una interpretación mecanocuántica formal de la dispersión  $n-p$  conduce a que el potencial nucleónico puede ser descrito aproximadamente por el llamado potencial de Serber, cuya expresión es:

$$V = \frac{[1 + (-1)^l]}{2} V(r) \quad [53.11]$$

En la que  $l$  es el número cuántico orbital, lo que nos indica que el potencial de las fuerzas nucleares depende fuertemente del momento cinético orbital y se anula para  $l$  impar.

## 53.7 Estabilidad

La condición más general de estabilidad atómica es que la masa en reposo del átomo en cuestión sea menor o igual que la masa total en reposo de cualquier nueva configuración que pueda hacerse con sus componentes. Si existen configuraciones con los  $A$  nucleones que presenten menor energía, el núcleo puede desintegrarse espontáneamente y transformarse en esta nueva configuración, apareciendo una energía igual al defecto de masa, de acuerdo con la ecuación de Einstein. Esta transformación posible puede estar impedida por la existencia de barreras de potencial u otros condicionantes, como las reglas de selección.

Así, si se verifica  $M(Z, A) > M(Z-1, A-1) + M_H$ , el átomo es inestable y pasará a la nueva configuración emitiendo protones.

Análogamente, si es  $M(Z, A) > M(Z, A-1) + M_n$ , el átomo es inestable y puede desintegrarse con emisión de neutrones.

Igualmente, si es  $M(Z, A) > M(Z-2, A-4) + M_{He}$ , el átomo es inestable y puede desintegrarse emitiendo partículas  $\alpha$ .

Si se verifica  $M(Z, A) > M(Z+1, A) + M_e$ , el átomo es inestable frente a la emisión de electrones o emisión  $\beta^-$ .

En general, si es  $M(Z, A) > M(Z', A') + M(Z-Z', A-A')$ , el átomo es inestable frente a la fisión y puede escindirse en los que verifiquen la relación. Todos los núcleos con  $A$  en torno a 100 son inestables frente a su fisión en dos núcleos aproximadamente de igual masa; sin embargo, la existencia de fuerte barrera de potencial hace que ello no se produzca de forma espontánea.

La energía de enlace disminuye al aumentar al número másico a partir de  $A = 60$  y llega un momento que el núcleo se hace inestable. Las causas de esta inestabilidad son dos: por una parte, la interacción nuclear fuerte es de muy corto alcance, mientras que las fuerzas coulombianas lo son de largo alcance, y por otra

parte, protones y neutrones deben cumplir independientemente el principio de exclusión.

Como hemos indicado, la interacción nuclear fuerte solamente se producirá entre un nucleón y los de su entorno, mientras que la acción coulombiana repulsiva se produce entre un protón y todos los demás del núcleo. Por ello, al aumentar el número atómico las fuerzas coulombianas sobre un protón llegarán a ser superiores a las interacciones nucleares fuertes sobre éste y el núcleo se desestabiliza. Así sucede que a partir de  $Z = 83$  todos los núcleos son inestables.

Por otra parte, si dos protones con sus espines opuestos ocupan ya los niveles de menor energía y se añade un nuevo protón, por el principio de exclusión, debe pasar a ocupar un estado de energía mayor. Si seguimos añadiendo protones seguirá aumentando el nivel de energía ocupado y cuando éste supere el valor de la energía de enlace, el núcleo se hará inestable. En consecuencia, tanto el principio de exclusión, como la repulsión debida a las fuerzas coulombianas, limitan el número de protones que puede haber en un núcleo sin que éste se haga inestable. Todos los núcleos con  $A > 210$  son inestables, desintegrándose de diversas formas que estudiaremos.

El núcleo se muestra fuertemente estable cuando el número de sus protones y/o de sus neutrones coincide con los valores 2, 8, 14, 20, 28, 50, 82 ó 126, llamados *números mágicos*. Esto puede interpretarse pensando que para esos valores los nucleones forman capas completamente saturadas, análogamente a lo que sucede con los electrones corticales en los gases nobles. Ello está confirmado por la gran estabilidad de los núcleos  ${}^4\text{He}$ ,  ${}^{16}\text{O}$ ,  ${}^{28}\text{Si}$ , etc. Lo que hace concebir al núcleo compuesto por capas de nucleones que se van saturando cuando el número de ellos coincide con los valores de los números mágicos indicados.

## 53.8 Modelos nucleares

Todas las propiedades de los núcleos que han sido estudiadas deben interpretarse dentro de un modelo nuclear, o dicho de otra forma, han servido para ir haciéndonos una idea de la verdadera estructura nuclear. Cualquier resultado experimental ha servido para conformar el modelo o para producir un ajuste en éste. No existe actualmente un modelo de estructura nuclear capaz de dar explicación a todas las propiedades nucleares conocidas. Un modelo se puede mostrar muy útil para explicar algunas de ellas, pero completamente inútil para otras. Analicemos algunos de los modelos más importantes.

### Modelo de gota líquida

El corto alcance de las fuerzas nucleares, la saturación de las fuerzas entre nucleones de forma que no interactúan más que con los contiguos, la existencia de unas fuerzas superficiales sin saturar, el hecho de que exista a muy cortas distancias un efecto repulsivo entre nucleones que los hace mantenerse a una distancia media constante y disponer de un volumen por nucleón también constante ha inducido a proponer un modelo nuclear análogo a una gota de líquido. El núcleo retendría en su interior a los nucleones de forma análoga a como una gota de líquido retiene en su interior las moléculas de éste. La emisión de partículas nucleares se asemejaría a la emisión de moléculas por la superficie de un líquido. En éste se suministra energía (calor de vaporización) para que la molécula rompa sus enlaces y quede libre; en aquél se suministra energía cinética que liberará los enlaces de los nucleones.

Este modelo se mostró rápidamente inconsistente para explicar muchas de las propiedades nucleares que fueron apareciendo, pero, sin embargo, es útil en la explicación de un fenómeno tan importante como la fisión nuclear.

## Modelo de capas

Este modelo establece que los nucleones se agrupan por capas de forma análoga a como lo hacen los electrones en la corteza atómica. Esta hipótesis está basada en la periodicidad de las propiedades nucleares, fundamentalmente su estabilidad, que presenta máximos en aquellos núcleos cuyo número de nucleones coincide con los números mágicos. Parece que para estos valores hay capas cerradas, siendo muy difícil que se adquiera o pierda un nucleón, análogamente a lo que sucede con los electrones en los gases nobles. Si se consigue añadir un nucleón, éste queda muy débilmente ligado, de forma análoga a lo que sucede con los electrones de valencia.

Desde el  ${}^4\text{He}$  al  ${}^{16}\text{O}$ , la periodicidad en la composición nuclear sigue la ley  ${}^4\text{He} + n + p + n + p + \dots$ . Desde el  ${}^{16}\text{O}$  al  ${}^{36}\text{Ar}$ , la periodicidad es  ${}^{16}\text{O} + n + n + p + p + n + n + \dots$ . Estos cambios pueden asociarse con la estructura de capas nucleares. La gran estabilidad de los núcleos para valores de  $Z$  o  $N$ , coincidentes con los números mágicos, se comprueba por la abundancia de isótopos para estos valores. Así, para  $Z = 20$  hay seis isótopos, mientras que en el entorno de  $Z = 20$ , la media es de dos. También la energía de enlace es máxima para estos valores, así para  $N=Z=2$ ,  ${}^3_2\text{He}$ , la energía necesaria para arrancar un neutrón es de unos 20 MeV, que es enormemente alta, pues ese valor puede bajar a 6 MeV para el  ${}^{236}_{92}\text{U}$ .

Cada nucleón tiene un espín de  $\pm 1/2$  y obedece al principio de exclusión, por lo que no puede haber otro en su mismo estado cuántico. Cada nucleón en su movimiento orbital tiene momento cinético cuantizado por el número  $l$ , al cual se le asigna la misma notación espectroscópica del electrón. Se ha podido comprobar experimentalmente el gran acoplamiento espín-órbita, pudiendo ser los vectores  $L$  y  $S$  paralelos o antiparalelos. El momento cinético total del nucleón será  $J = L + S$ . Cada estado energético en cada nucleón estará definido por los números cuánticos  $n, l, j$ , siendo los valores de  $j = l \pm 1/2$ .

Parece que las interacciones espín-órbita no pueden ser de origen electromagnético, ya que, en contra de lo que sucede con los electrones corticales, aquí el estado con  $j = l - 1/2$  es más energético que el mismo con  $j = l + 1/2$ .

La primera capa  $n = 1, l = 0$  (capa  $s$ ),  $j = \pm 1/2$  puede llevar dos neutrones y dos protones, ya que el principio de exclusión se aplica independientemente, será pues un núcleo doblemente mágico, que corresponde al  ${}^4_2\text{He}$ .

La segunda capa  $n = 2, l = 1$  (capa  $p$ ),  $j = 2l \pm 1/2$ , para  $j = 1/2$  puede tener como máximo dos protones y dos neutrones, y para  $j = 3/2$ , cuatro protones y cuatro neutrones. Un núcleo con las capas  $s$  y  $p$  saturadas tendrá ocho protones y ocho neutrones, lo que coincide con el  ${}^{16}_8\text{O}$  doblemente mágico.

La tercera capa se saturaría para el  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$  ( $Z = N = 20$ ) y así hasta el  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$  ( $Z = 82, N = 126$ ).

Este modelo de capas se ha mostrado eficaz en la explicación de muchas propiedades nucleares, pero no ha podido explicar otras, como, por ejemplo, el momento cuadrupolar eléctrico y el momento dipolar.

Realmente, la analogía no existe en cuanto a que sobre los electrones la acción importante es desde el centro del átomo, mientras que sobre los nucleones la interacción es debida a los demás nucleones, no pudiendo decirse que sea central. Más bien cabe pensar que la trayectoria del nucleón debiera ser errática y no orbital.

## 53.9 Radiactividad natural

La radiactividad es una propiedad del núcleo por la cual éste emite radiaciones, transformándose en otro estado o en otro núcleo más ligero. Fue descubierta por Becquerel (1852-1908), en 1896 al comprobar que el sulfato de potasio y uranio, que él utilizaba como material fosforescente, emitía una radiación que impresionaba



las placas fotográficas, aun cuando estuviesen envueltas en papeles. Este efecto, denominado «radiactividad» por Marie Sklodowska (1867-1934), era independiente de la temperatura y proporcional al contenido de uranio en la sal.

La búsqueda de nuevos elementos radiactivos naturales dio lugar, en 1898, al descubrimiento por el matrimonio Marie Sklodowska y Pierre Curie (1859-1906) del polonio y el radio; la denominación del primero se hizo en recuerdo del país natal de Marie, la cual también descubrió posteriormente el talio.

Analizada la radiación emitida por las sustancias radiactivas naturales, se encontró que era de tres tipos: una radiación, a la que se denominó  $\alpha$ , poco penetrante, que sólo era capaz de recorrer unos centímetros en el aire o atravesar una hoja de papel y que al ser desviada por un campo magnético manifestaba estar cargada positivamente; otra, a la que se denominó radiación  $\beta$ , más penetrante que la anterior, capaz de atravesar finas láminas metálicas o de recorrer decenas de centímetros en el aire, y que al ser desviada por un campo magnético manifestaba estar cargada negativamente, y, finalmente, una tercera denominada radiación  $\gamma$ , muy penetrante, capaz de atravesar espesores metálicos considerables (más de 1 cm de plomo) y que no era desviada por los campos eléctricos ni magnéticos.

Estudios realizados por Becquerel y por Kaufmann, aplicando los métodos de Thomson de desviación de partículas cargadas por campos eléctricos y magnéticos, determinaron el valor de  $e/m$  para la radiación  $\beta$ , encontrando que estaba formada por electrones, los cuales habían sido recientemente descubiertos por el propio Thomson en los rayos catódicos. La diferencia era que ahora eran mucho más energéticos, llegando Kaufman a encontrar en ellos velocidades de hasta 0,96 c.

Rutherford obtuvo para las partículas  $\alpha$  del  $^{214}\text{Po}$  la relación  $e/m = 6 \times 10^7 \text{ C/kg}$  y la velocidad  $v = 2,5 \times 10^7 \text{ m/s}$ , y en colaboración con Geiger, la carga  $3,1 \times 10^{-19} \text{ C}$ , la cual corresponde al doble de la carga elemental. La sospecha de que las partículas eran núcleos de helio fue confirmada por Rutherford y Poyds, en 1909, al recogerlas en una vasija cerrada y detectar en ella el espectro del helio.

El gran poder de penetración de la radiación  $\gamma$ , el no ser desviada por campos eléctricos ni magnéticos, su gran poder de ionización y la fluorescencia que produce en muchos cristales, puso de manifiesto su naturaleza de radiación electromagnética, completamente análoga a los rayos X, lo que quedó comprobado al conseguir difractarla en cristales.

Experimentalmente se ha comprobado que la radiactividad es independiente del estado físico o químico del elemento radiactivo, lo que confirma que es una propiedad nuclear.

Los núclidos radiactivos emisores  $\alpha$  dan lugar a nuevos núclidos, de acuerdo con la ecuación:



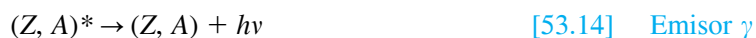
por tanto, su carga disminuye en dos unidades y su masa en cuatro.

Los núclidos radiactivos emisores  $\beta$ , dan lugar a nuevos núclidos de acuerdo con la ecuación:



por tanto, el nuevo núclido tiene la misma masa y la carga aumenta en una unidad.

Los núclidos emisores  $\gamma$ , emiten fotones, por tanto, ni la carga ni la masa del mismo varían, únicamente su estado energético, dando lugar a un nuevo núclido con la misma masa y carga de acuerdo con la ecuación:



en la cual hemos simbolizado con el asterisco un estado excitado del núclido  $(Z, A)$ .

La masa de los núclidos únicamente varía por emisión de partículas  $\alpha$ , y por tanto, de cuatro en cuatro unidades. Cada núclido emisor está ligado con su predecesor por la ecuación:

$$A = A_0 - 4n$$

En la que  $n$  es el número de partículas  $\alpha$  emitidas. De las posibilidades para  $A_0$  se deduce que pueden existir cuatro series, que son:  $A = 4n$ ,  $A = 4n + 1$ ,  $A = 4n + 2$  y  $A = 4n + 3$ . Tres de ellas se encuentran en la naturaleza, pero la  $A = 4n + 1$  no ha sido encontrada hasta el momento, pudiendo producirse artificialmente. Estas series se conocen con el nombre del elemento origen, así la  $4n$  es la del torio  $^{232}_{90}\text{Th}$ ; la  $4n + 1$ , la del neptunio  $^{237}_{93}\text{Np}$ ; la  $4n + 2$ , la del uranio  $^{238}_{92}\text{U}$ , y la  $4n + 3$ , la del actinio  $^{235}_{92}\text{U}$ .

En la Figura 53.5 se representa la serie radiactiva del actinio.

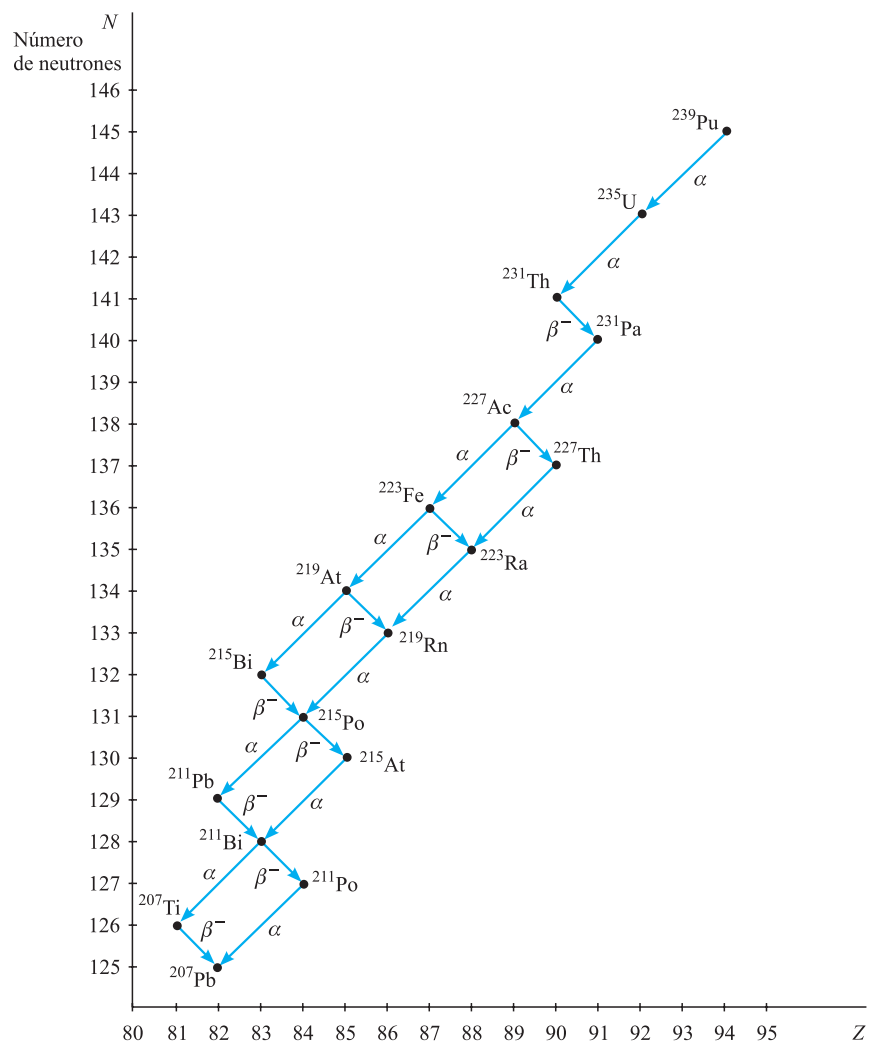
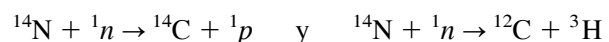


Figura 53.5. Serie radiactiva del actinio.

Existen también en la naturaleza otros elementos radiactivos que no pertenecen a ninguna de las series citadas y que se forman continuamente por bombardeo de neutrones cósmicos sobre el nitrógeno atmosférico, éstos son el  $^{14}\text{C}$  y el  $^3\text{H}$ , de acuerdo con las ecuaciones



### 53.10 Ley general de la emisión radiactiva. Actividad, media vida y vida media

La *actividad* de una sustancia radiactiva se define como el número de desintegraciones por segundo. Desde las primeras investigaciones de Rutherford y Soddy con el gas radón, se observó que la actividad de una muestra radiactiva disminuye con el tiempo siguiendo una ley exponencial. Esta ley puede obtenerse teóricamente suponiendo que la desintegración radiactiva es un fenómeno aleatorio sujeto a las leyes estadísticas. Así, si admitimos que cada núcleo sin desintegrar tiene una probabilidad  $\lambda$  por unidad de tiempo de desintegrarse, la probabilidad de que un núcleo se desintegre en un tiempo  $dt$  es  $\lambda dt$ , y el número de núcleos que se desintegran en una muestra de  $N$  átomos y durante un tiempo  $dt$ , será:

$$dN = -N\lambda dt \quad [53.15]$$

El signo menos se debe a que  $N$  disminuye al crecer  $t$ . A la constante  $\lambda$  se la denomina *constante radiactiva* o *constante de decaimiento*.

La Ecuación [53.15] puede escribirse de la forma:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt \quad \text{Constante radiactiva}$$

La cual se integra de forma inmediata, dando:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad [53.16]$$

En la que  $N_0$  es el número de átomos en el instante inicial  $t = 0$ .

La *actividad*,  $A$ , o número de desintegraciones en unidad de tiempo, es:

$$A = \left| \frac{dN}{dt} \right| = N_0 \lambda e^{-\lambda t} = \lambda N \quad [53.17] \quad \text{Actividad}$$

Por tanto, la actividad es igual al producto de la constante radiactiva por el número de átomos de la muestra. Inicialmente será  $A_0 = \lambda N_0$  y multiplicando por  $\lambda$  la [53.16] resulta:

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \quad [53.18]$$

Lo que demuestra el decrecimiento exponencial de la actividad radiactiva de una sustancia.

La actividad radiactiva usualmente se mide en curios (Ci), que es igual a  $3,7 \times 10^{10}$  desintegraciones por segundo. Esta unidad resulta demasiado grande y se usa el milicurio (mCi) o el microcurio ( $\mu$ Ci). En el Sistema Internacional de unidades, se toma como unidad de la actividad radiactiva al *becquerel* (Bq), que es la actividad correspondiente a una desintegración por segundo. Esta unidad resulta ser demasiado pequeña y se suelen emplear el *kilobecquerel* (kBq) o el *megabecquerel* (MBq). Obviamente, la equivalencia del curio y el becquerel es:

$$1 \text{ Ci} = 3,7 \times 10^{10} \text{ Bq}$$

La *media vida* o *periodo de semidesintegración*,  $T$ , se define como el tiempo necesario para que el número de átomos se reduzca a la mitad. La [53.16] se expresa:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T} \quad \text{o} \quad e^{\lambda T} = 2$$

De donde  $\lambda T = \ln 2$ :

$$\text{Media vida} \quad T = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad [53.19]$$

El periodo de semidesintegración o media vida,  $T$ , no debe confundirse con la *vida media*,  $\tau$ , que es el tiempo promedio de la vida de todos los átomos presentes en la muestra, cuyo valor es la suma de las vidas de todos y cada uno de los átomos de la muestra dividida por el número de éstos:

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty t dN = \int_0^\infty \lambda t e^{-\lambda t} dt$$

Integración que realizada por partes,  $u = t$  y  $dv = e^{-\lambda t} dt$ , da:

$$\text{Vida media} \quad \tau = \frac{1}{\lambda} \quad [53.20]$$

Es decir, el valor de la vida media es la inversa de la constante radiactiva.

En la Tabla 53.2 se recogen las cuatro series radiactivas naturales con indicación de su vida media y del núclido estable final.

**Tabla 53.2.** Series radiactivas naturales.

Serie	Nombre	Símbolo	Media vida	Producto final
$4n$	Thorio	$^{232}\text{Th}$	$1,39 \times 10^{10}$ años	$^{208}\text{Pb}$
$4n + 1$	Neptunio	$^{237}\text{Np}$	$2,25 \times 10^6$ años	$^{209}\text{Bi}$
$4n + 2$	Uranio	$^{238}\text{U}$	$4,51 \times 10^9$ años	$^{206}\text{Pb}$
$4n + 3$	Actinio	$^{235}\text{U}$	$7,07 \times 10^8$ años	$^{207}\text{Pb}$

### EJEMPLO 53.5

El radio,  $^{226}\text{Ra}$ , tiene una media vida  $T = 1600$  años. Calculemos:

- La actividad de una muestra de un gramo de radio puro.
- La actividad de esa muestra una vez transcurridos 1000 años.

#### Solución:

- El número de núcleos en la muestra es:

$$N_0 = \frac{6,022 \times 10^{23} \text{ núcleos/mol}}{226 \text{ g/mol}} = 2,6646 \times 10^{21} \text{ núcleos}$$

La constante radiactiva se obtiene de la Ecuación [53.19]:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0,69315}{1600 \text{ años} \times 365,25 \times 24 \times 60 \times 60 \text{ s/año}} = 1,373 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1}$$

La actividad de la muestra de acuerdo con [53.17] es:

$$A_0 = \lambda N_0 = 1,373 \times 10^{-11} \times 2,6646 \times 10^{21} = 3,6585 \times 10^{10} \text{ Bq} = 0,9888 \text{ Ci}$$

- La actividad de la muestra al cabo de 1000 años está dado por la Ecuación [53.16]:

$$\begin{aligned} A_{1000} &= A_0 e^{-1000\lambda} = 0,9888 \times e^{-1,373 \times 10^{-11} \times 1000 \times 365,25 \times 24 \times 60 \times 60} = \\ &= 0,9888 \times e^{-0,433285} = 0,6411 \text{ Ci} \end{aligned}$$

Debemos recordar la necesidad de tener en cuenta los efectos relativistas para las partículas que se mueven a muy altas velocidades. La vida media de una partícula se define para partículas en reposo, por tanto, la vida media observada en una partícula en movimiento será mayor que la correspondiente a esa partícula en reposo y estarán relacionadas por el factor  $\gamma$ ,  $\Delta t' = \gamma \Delta \tau$ .

### 53.11 Datación radioactiva

La existencia en la naturaleza de materiales radiactivos es una prueba evidente de que ésta no existe desde el infinito, ha sido creada en un cierto instante, desde cuyo momento no ha dado tiempo a que se desintegren todos los elementos radiactivos. Llama la atención la no existencia en la naturaleza de la serie radiactiva  $4n + 1$ , y cabe pensar que ello es debido a que la Tierra tiene una edad bastante superior al doble de la vida media del neptunio 237, es decir, superior a  $4,5 \times 10^6$  años, puesto que es lógico suponer que este elemento fue también creado, igual que los otros tres cabezas de serie.

El  $^{14}\text{C}$  y el  $^3\text{H}$  son formados en las altas capas de la atmósfera, entre los 10 y los 15 km de altitud, por acción de los rayos cósmicos y según reacciones que ya hemos indicado. Ellos se oxidan inmediatamente y dan  $^{14}\text{CO}_2$  y  $^3\text{HOH}$ , respectivamente, los cuales participan en la naturaleza de los mismos ciclos que el  $\text{CO}_2$  y  $\text{H}_2\text{O}$ , respectivamente. El primero es absorbido por las plantas, pasando de éstas a los seres vivos, y el segundo es arrastrado a la superficie terrestre por las lluvias, entrando en el ciclo hidrológico. La relación  $\frac{^{14}\text{C}}{^{12}\text{C}} \cong 1,2 \times 10^{-12}$  permanece constante en la atmósfera, porque la producción de  $^{14}\text{C}$  de la forma indicada se equilibra con su desaparición debida a su desintegración radiactiva. En cada ser vivo, la proporción de carbono radiactivo a carbono normal es igualmente constante. Cuando un ser vivo muere, cesa el aporte de carbono y a partir de ese momento, el carbono radiactivo atrapado en el organismo muerto se desintegra con una media vida de cinco mil setecientos treinta años (5730 años), disminuyendo la actividad de la muestra y la relación  $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$  en función del tiempo que lleve sin participar del ciclo de la naturaleza. Ello permite, midiendo la actividad de una muestra o bien la relación  $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$  en ella, determinar el instante de su muerte. Midiendo la relación  $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$  en los distintos anillos de los troncos de los árboles se ha podido establecer que la relación  $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$  ha sufrido alteraciones en el pasado y se toma como valor para los cálculos la llamada *vida media del carbono 14* ( $^{14}\text{C}$ ) de *Lobby* cuyo valor es de cinco mil quinientos sesenta y ocho años (5568 años). A partir de 1980 se desarrolló una técnica más sensible y que puede realizarse con muy pequeñas cantidades de muestra, del orden de 1 mg. El  $\text{CO}_2$  procedente de la combustión de la muestra se pasa por un ciclotrón que separa el isótopo  $^{14}\text{C}$  del  $^{12}\text{C}$ . Por este método se han llegado a datar antigüedades de hasta sesenta mil años.

Similar procedimiento se aplica al tritio, cuya media vida es de 12,46 años y cuya máxima aplicación se encuentra en hidrología, meteorología y producciones agrícolas.

En su decaimiento radiactivo desde que el  $^{238}\text{U}$  fue formado como mineral, ha venido emitiendo ocho partículas por cada átomo desintegrado. Si inicialmente el número de átomos de uranio era  $N_0$ , y en el momento presente es  $N$ , el número de partículas emitidas ha sido:

$$N' = 8(N_0 - N) = 8N_0(1 - e^{-\lambda t}) = 8N(e^{\lambda t} - 1)$$

En la que  $\lambda$  es la constante de desintegración del uranio. Todas las partículas a haber quedado atrapadas en la roca de uranio, luego si ahora medimos la relación del contenido de helio a uranio  $N'/N$ , podemos determinar  $t$ , tiempo en el que fue

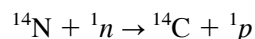
creado el mineral de  $^{238}\text{U}$ . Éste ha sido el procedimiento seguido para establecer la edad del granito, momento en el cual se solidificó, hace unos  $2 \times 10^9$  años.

Los isótopos del uranio  $^{238}\text{U}$  y  $^{235}\text{U}$  presentan una abundancia relativa constante,  $^{238}\text{U}/^{235}\text{U}$  igual a 138,5. Los plomos  $^{206}\text{Pb}$  y  $^{207}\text{Pb}$  que, respectivamente, se producen por desintegración de aquéllos, guardarán también una relación que dependerá de la edad de la muestra debido a la diferente constante de desintegración de los uranios. Según esto, se ha determinado la edad de varios minerales y de meteoritos, habiéndose encontrado como edad más antigua la de  $4,6 \times 10^9$  años, la cual puede considerarse como la edad de la Tierra.

### 53.12 Reacciones nucleares

Las reacciones nucleares se producen al bombardear un núcleo con un proyectil nuclear, que normalmente es un nucleón (neutrón o protón), un núcleo ligero (partícula  $\alpha$  o deuterón) o un fotón.

En general, una reacción nuclear se designa simbólicamente  $E_i(p_i, p_s)E_s$ , siendo  $E_i$ , el núcleo inicial que es bombardeado;  $p_i$ , la partícula incidente o proyectil;  $p_s$ , la partícula emergente o final de la reacción, y  $E_s$ , el nucleón final resultante de la reacción. Así, por ejemplo, la reacción:



se expresa:  $^{14}\text{N}(n, p) ^{14}\text{C}$ .

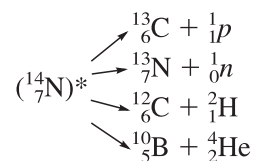
Analicemos algunos tipos de reacciones:

#### Dispersión

Si la partícula entrante y saliente de la reacción es la misma, se dice que se ha producido una dispersión. Ésta tiene lugar para bajas energías de la partícula incidente, denominándose *elástica* cuando se conserva la energía cinética de la partícula, por lo que el núcleo bombardeado no es excitado. La dispersión elástica se produce al interaccionar la carga eléctrica de la partícula incidente con la del núcleo bombardeado. La dispersión se llama *inelástica* cuando la partícula proyectil no conserva su energía cinética y el núcleo bombardeado resultará en un estado excitado. En este caso, la interacción se produce entre el campo eléctrico de la partícula incidente y los momentos dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico del núcleo bombardeado.

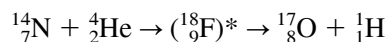
#### Formación de núcleo compuesto

Cuando la partícula incidente tiene energía adecuada para superar las barreras de potencial superficiales del núcleo, pero no excesiva ( $< 30$  MeV), reacciona con el núcleo formando un núcleo compuesto, cuya masa y carga son la suma de las correspondientes, respectivamente, al núcleo inicial y a la partícula incidente. Este núcleo compuesto resulta estar en un estado sumamente excitado y acaba desintegrándose, produciendo un nuevo núcleo y partículas emergentes. La desintegración puede realizarse por diferentes caminos, con distintas probabilidades para cada uno de aquellos. Así, el  $^{14}\text{N}$  puede producir las siguientes desintegraciones:



El asterisco se usa para indicar el estado excitado de un núclido.

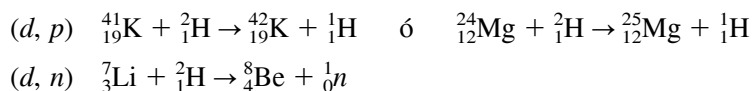
La primera reacción nuclear conocida fue de este tipo, siendo su ecuación:



Asimismo, a este tipo de reacción pertenece la que supuso el descubrimiento del neutrón [53.1].

### Reacciones de cesión y captación (*stripping* y *pickup*)

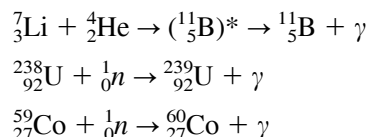
La cesión (*stripping*) se produce cuando la partícula o núcleo incidente cede al núcleo blanco un nucleón. Reacciones características de este tipo son las (*d, p*) y (*d, n*), como, por ejemplo:



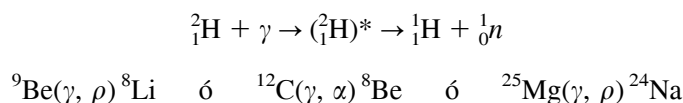
Las reacciones inversas a las de cesión son denominadas de captación (*pickup*), cuyos tipos principales son (*p, d*) y (*n, d*).

### Reacciones de captura radiactiva y fotonucleares

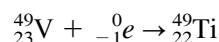
Algunas reacciones nucleares se producen capturando la partícula incidente y emitiendo un fotón gamma, serán fundamentalmente de la forma ( ${}^4_2\text{He}, \gamma$ ) y ( $n, \gamma$ ), como, por ejemplo:



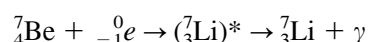
Tanto el  ${}^{239}\text{U}$  como el  ${}^{60}\text{Co}$  son inestables y se desintegran según ecuaciones que posteriormente se estudiarán. El proceso inverso a la captura radiactiva se denomina *reacción fotonuclear* y en él un núcleo es excitado por un fotón  $\gamma$ , dando lugar a su desintegración. Reacciones de este tipo son:



Un caso singular de captura radiactiva es la captura por el núcleo de un electrón de la capa *K* del propio átomo, lo que normalmente se denomina *captura K*. Así sucede, por ejemplo, con el vanadio, el cual, al capturar un electrón *K*, se transforma en titanio:



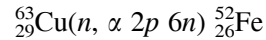
Por el mismo procedimiento se produce la reacción:



### Reacciones de alta energía

Cuando en el bombardeo nuclear se emplean partículas de alta energía ( $> 50 \text{ MeV}$ ), aparecen como productos de la reacción varias partículas (protones, neutrones,

partículas  $\alpha$ ) cuyo proceso se conoce con la palabra inglesa *spallation*. Así, bombardeando Cu con neutrones de alta energía puede producirse la reacción



En la cual, además de formarse hierro, aparecen una partícula  $\alpha$ , dos protones y seis neutrones.

Cuando las energías de las partículas incidentes llegan al orden de 150 MeV aparecen como productos finales, además de los indicados, un nuevo tipo de partícula, los mesones- $\pi$ , que posteriormente estudiaremos. Si la energía de las partículas incidentes llega a los 500 MeV, hacen su aparición un nuevo conjunto de partículas, que se conocen con la denominación genérica de *partículas extrañas*. Cuando la energía de las partículas incidentes llega a las 6000 MeV, aparecen como productos de las reacciones los antinucleones.

Al estudio de las *partículas elementales* le dedicaremos un epígrafe especial.

### Leyes de conservación

Las reacciones y desintegraciones nucleares se rigen por leyes de conservación, como son:

1. Conservación del momento lineal.
2. Conservación del momento cinético.
3. Conservación de la masa-energía.
4. Conservación de la carga.
5. Conservación de los nucleones.

Otras leyes de conservación, como la conservación de la paridad o del número bariónico, se añadirán posteriormente.

Si una partícula  $(Z_i, A_i)$ , moviéndose con cantidad de movimiento  $\mathbf{P}_i$  y energía  $E_i$ , impacta sobre un núcleo estático  $(Z_0, A_0)$  y forma un núcleo compuesto  $(Z, A)^*$ , que se mueve con cantidad de movimiento  $\mathbf{P}$  y energía cinética  $E$  (Figura 53.6); el cual se desintegra dando un núcleo residual  $(Z_1, A_1)$ , que se mueve con cantidad de movimiento  $\mathbf{P}_1$  y energía  $E_1$  y una partícula  $(Z_f, A_f)$ , que emerge con cantidad de movimiento  $\mathbf{P}_f$  y energía  $E_f$ , deben verificarse las siguientes leyes de conservación:

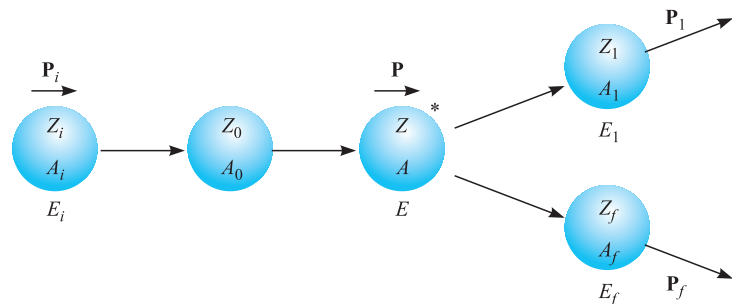


Figura 53.6.

a) Conservación de la cantidad de movimiento:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f + \mathbf{P}_1 \quad [53.21]$$

b) Conservación de la masa-energía:

$$W = E + M^* = E_i + M_i + M_0 = E_1 + M_1 + E_f + M_f \quad [53.22]$$

En esta ecuación las masas deben expresarse en unidades energéticas.



c) Conservación de la carga:

$$Z = Z_i + Z_0 = Z_f + Z_1 \quad [53.23]$$

d) Conservación de los nucleones:

$$A = A_i + A_0 = A_f + A_1 \quad [53.24]$$

La energía de excitación del núcleo compuesto,  $E_{\text{ex}}$ , será  $E_{\text{ex}} = M^* - M$ , siendo  $M^*$  la masa del núcleo compuesto en su estado excitado y  $M$  la del mismo en el estado base. Usando la segunda igualdad b), podemos eliminar  $M^*$ :

$$E_{\text{ex}} = E_i - E + M_i + M_0 - M$$

Teniendo en cuenta el valor  $Q$  de la reacción:



cuyo valor es  $Q = M_i + M_0 - M$ , se escribe:

$$E_{\text{ex}} = E_i - E + Q \quad [53.25]$$

La energía cinética del núcleo compuesto se expresa:

$$E = \frac{p^2}{2M^*} = \frac{p_i^2}{2M^*} = \frac{M_i E_i}{M^*}$$

puesto que son  $E \ll M^*$  y  $E_i \ll M_i$ , de la [53.22] se deduce que es  $M^* \approx M_i + M_0$ , con lo cual la anterior se expresa:

$$E \cong \frac{M_i E_i}{M_i + M_0}$$

Con ello, la [53.25] se escribe:

$$E_{\text{ex}} = E_i - \frac{M_i E_i}{M_i + M_0} + Q = Q + \frac{E_i M_0}{M_i + M_0} \quad [53.26]$$

El valor de  $Q$  de una reacción nuclear puede expresarse en función de las energías cinéticas y de excitación de los elementos reaccionantes. Así, para la formación del núcleo compuesto se obtiene despejando de [53.25]:

$$Q = E + E_{\text{ex}} - E_i$$

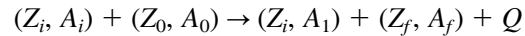
Si es  $Q > 0$ , la reacción se denomina *exoenergética* y las energías cinéticas y de excitación de los núcleos finales son superiores a las energías cinéticas de las iniciales. Todas las desintegraciones radiactivas espontáneas pertenecen a este tipo.

Si es  $Q < 0$ , la reacción se denomina *endoenergética* y las energías cinéticas y de excitación de los núcleos finales son inferiores a las energías cinéticas de las iniciales. En este caso será necesario suministrar energía para que tenga lugar la reacción. La reacción únicamente se producirá para valores de  $E_i$  superiores a un cierto valor denominado *umbral mínimo*.

La energía de excitación del núcleo residual puede obtenerse de forma análoga a como se ha realizado para el núcleo compuesto. La conservación de la energía entre los productos iniciales y los finales es:

$$E_i + M_i + M_0 = E_1 + M_1^* + E_f + M_f$$

El valor de  $Q$  de la reacción:



es:

$$Q = M_i + M_0 - M_1 - M_f \quad [53.27]$$

La energía de excitación del núcleo residual se expresa:

$$E_{1\text{ex}} = M_1^* - M_1 = E_i + M_i + M_0 - E_f - M_f - M_1 = E_i + Q - E_1 - E_f$$

La conservación de la cantidad de movimiento nos permite escribir las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} p_i &= p_f \cos \varphi + p_1 \cos \theta \\ 0 &= p_f \sin \varphi - p_1 \sin \theta \end{aligned} \right\} \circ \left. \begin{aligned} p_1 \cos \theta &= p_i - p_f \cos \varphi \\ p_1 \sin \theta &= p_f \sin \varphi \end{aligned} \right\}$$

Si elevamos al cuadrado ambas ecuaciones y las sumamos, resulta:

$$p_1^2 = p_i^2 + p_f^2 - 2p_i p_f \cos \varphi$$

Esta expresión, puesto que es  $p^2 = 2ME$ , se escribe:

$$M_1^* E_1 = M_i E_i + M_f E_f - (M_i M_f E_i E_f)^{1/2} \cos \varphi$$

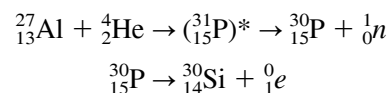
Puesto que siempre es  $E \ll M$ , tomaremos para el valor  $M_1^*$  el valor  $M_1^* \approx M_i + M_0 - M_f$ . Con todo ello la energía de excitación del núcleo residual es:

$$\begin{aligned} E_{1\text{ex}} &= Q + E_i - E_f - \frac{M_i E_i + M_f E_f - (M_i M_f E_i E_f)^{1/2} \cos \varphi}{M_i + M_0 - M_f} = \\ &= Q + \frac{E_i(M_0 - M_f) - E_f(M_i + M_0) + (M_i M_f E_i E_f)^{1/2} \cos \varphi}{M_i + M_0 - M_f} \quad [53.28] \end{aligned}$$

Si el núcleo residual no está en un estado excitado, es  $E_{1\text{ex}} = 0$  y la Ecuación [53.28] sirve para determinar de forma muy aproximada al valor de  $Q$  en función de las masas y energías de los núclidos reaccionantes y finales. Conocido  $Q$ , la [53.27] puede darnos el valor de  $M_1$ , masa del núcleo residual.

### 53.13 Radiactividad artificial

La radiactividad artificial fue descubierta, en 1934, por Irene Curie (1897-1956) y su marido Joliot, al exponer láminas de aluminio a la radiación  $\alpha$  del polonio y comprobar la actividad inducida después de retirar la fuente de partículas  $\alpha$ . Estudiada la radiación inducida resultó ser de positrones o electrones positivos  $e^+$  o  ${}^0_1e$ , cuya formación se producía por las reacciones:



La radiactividad artificial sigue las mismas leyes que la natural y en función de la partícula emitida se clasifica, al igual que aquella, en desintegración  $\alpha$ , desintegración  $\beta$  o desintegración  $\gamma$ .

## Desintegración $\alpha$

La desintegración  $\alpha$  se denomina así porque el núcleo que se desintegra o *núcleo padre* emite partículas  $\alpha$ , dando lugar a la producción de un nuevo núcleo, al que se denomina *núcleo hijo*. Este fenómeno por el cual el núcleo padre desaparece y da lugar a un núcleo nuevo se llama *transmutación*. La partícula  $\alpha$ , núcleo del átomo de helio, lleva carga  $+2e$  y número másico 4, por tanto, las reacciones de producción o de desintegración  $\alpha$  son de la forma:



Un ejemplo típico es la desintegración del  ${}^{238}_{92}\text{U}$  según la ecuación:



La desintegración  $\alpha$  es debida a que la fuerza nuclear fuerte, que es de corto alcance y sólo actúa entre nucleones contiguos, no puede equilibrar la fuerza coulombiana repulsiva entre protones, que es de largo alcance y actúa entre todos estos, lo que tiene lugar para valores de  $Z$  superiores a 83.

La partícula  $\alpha$  es sumamente estable, no en vano es un núcleo doblemente mágico; además, puesto que no tienen existencia como tales dentro de los núcleos, deben formarse en el instante de su emisión. Éstas son emitidas con una energía cinética definida para cada núcleo, que emplean en ionizar al medio en el cual son producidas. En la reacción de producción se conserva la energía y la cantidad de movimiento, es decir, si el núcleo inicial está en reposo es:

$$0 = \mathbf{p}_y + \mathbf{p}_\alpha \quad \text{y} \quad Q = E_y + E_\alpha \quad [53.31]$$

en la que es  $Q = m_x - m_y - m_\alpha$ . De la primera se obtiene  $\mathbf{p}_y = -\mathbf{p}_\alpha$  y en módulo  $p_y = p_\alpha$ ; el módulo de la cantidad de movimiento del núcleo producido y de la partícula  $\alpha$  emitida son iguales, las velocidades respectivas serán inversamente proporcionales a sus masas. Puesto que son:

$$p_y^2 = 2m_y E_y \quad \text{y} \quad p_\alpha^2 = 2m_\alpha E_\alpha$$

Debe ser  $m_y E_y = m_\alpha E_\alpha$ , la cual, junto con la segunda [53.31], permite calcular  $E_\alpha$  y  $E_y$  en función de las masas y de  $Q$ , obteniéndose:

$$E_\alpha = \frac{m_y Q}{m_y + m_\alpha} = \frac{m_y Q}{m_y + 4} \quad \text{y} \quad E_y = \frac{m_\alpha Q}{m_y + m_\alpha} = \frac{4Q}{m_y + 4} \quad [53.32]$$

### EJEMPLO 53.6

En la reacción expresada en la [53.30], calculemos:

- El valor de  $Q$ .
- La energía con que son emitidas las partículas  $\alpha$ .

#### Solución:

- Para obtener el valor de  $Q$  en la Ecuación [53.30], tomamos los siguientes valores másicos:

$${}^{238}_{92}\text{U} = 238,050784 \text{ u}$$

$${}^{234}_{90}\text{Th} = 234,043593 \text{ u}$$

$${}^4_2\text{He} = 4,002603 \text{ u}$$

Aplicando la [53.27] en la cual es  $M_0 = 0$ , resulta:

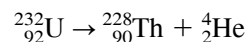
$$Q = 238,050784 - 234,043593 - 4,002603 = 0,004588 \text{ u} = \\ = 0,004588 \text{ u} \times 931,4944 \text{ MeV/u} = 4,2737 \text{ MeV}$$

- b) Con ello, la aplicación de la [53.32] nos da la energía cinética de la partícula  $\alpha$ , en el momento de ser creada:

$$E_\alpha = \frac{234,043593}{238,043593} \times 4,2737 = 4,202 \text{ MeV}$$

### EJEMPLO 53.7

El uranio  ${}^{232}_{92}\text{U}$  se desintegra según la ecuación:



Tomando para las masas los valores:

$${}^{232}_{92}\text{U} = 232,037146 \text{ u} \quad ; \quad {}^{228}_{90}\text{Th} = 228,028731 \text{ u} \quad \text{y} \quad {}^4_2\text{He} = 4,002603 \text{ u}$$

Calculemos:

- El valor de  $Q$ .
- La energía de la partícula  $\alpha$  emitida.
- La energía cinética del núcleo de torio formado.

#### Solución:

- a) El valor de  $Q$  es:

$$Q = (232,037146 - 228,028731 - 4,002603) \text{ u} = \\ = 5,812 \times 10^{-3} \text{ u} = 5,41385 \text{ MeV}$$

- b) La aplicación de la primera [53.32] nos da la energía de la partícula  $\alpha$  emitida:

$$E_\alpha = \frac{228,028731}{232,028731} \times 5,41385 = 5,32052 \text{ MeV}$$

- c) La aplicación de la segunda [53.32] nos da la energía cinética del núcleo de torio formado:

$$E_y = \frac{4 \times 5,32052}{232,028731} \times 5,41385 = 0,09333 \text{ MeV}$$

Fácilmente se comprueba la conservación de la energía  $Q = E_\alpha + E_y$ .

En la superficie del núcleo del torio, la partícula  $\alpha$  tiene que superar, si quiere salir de aquél, un potencial electrostático, cuyo valor es:

$$V = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{2 \times 90(1,602 \times 10^{-19})^2}{4 \times \frac{10^{-19}}{36} \times 8 \times 10^{-15}} = 519,69681 \times 10^{-14} \text{ J} = 32,4405 \text{ MeV}$$

Evidentemente, según la mecánica clásica, las partículas  $\alpha$  no tienen energía para superar la barrera coulombiana de la superficie y quedarían atrapadas en el núcleo. Pero la realidad es que esto no es así, pues el  $^{238}\text{U}$  es un emisor  $\alpha$ , lo que pone de manifiesto que interviene en la emisión un proceso mecanocuántico de perforación de la barrera de potencial (efecto túnel). La probabilidad de la penetración de la barrera es función del ancho de ésta y de la diferencia entre su energía potencial y la cinética de la partícula. En el caso del  $^{238}\text{U}$ , la probabilidad es muy pequeña. lo que explica su gran periodo de desintegración  $4,5 \times 10^{11}$  años.

Cabe preguntarse por qué se emite una partícula  $\alpha$  y no de forma independiente los nucleones que la componen, obviamente ello es debido a que la configuración de los cuatro nucleones como partícula  $\alpha$  tienen una energía inferior a la correspondiente a los cuatro nucleones como entidades independientes.

Una prueba evidente de la existencia de niveles energéticos en el núcleo es que los emisores  $\alpha$  suelen emitir partículas  $\alpha$  con energías diferentes, dejando al núcleo, en alguna de esas emisiones, en un estado excitado, que luego abandona emitiendo un fotón y pasando al estado fundamental. La energía del fotón deberá ser la diferencia de las energías cinéticas de las partículas  $\alpha$  emitidas. Un ejemplo típico corresponde al  $^{236}\text{Ra}$ , el cual emite partículas con dos energías, unas con 4,59 MeV y otras con 4,78 MeV, que corresponden a las energías de desintegración aproximadas de 4,673 MeV y 4,866 MeV, respectivamente, por lo que el fotón emitido deberá llevar la energía 0,193 MeV, que efectivamente se corresponde con la medida experimental.

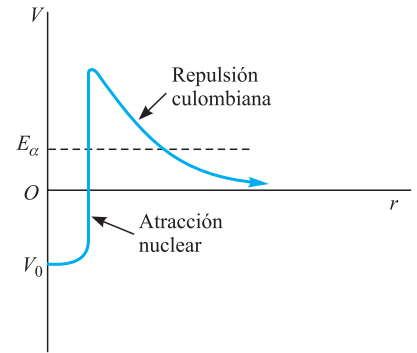


Figura 53.7. Potencial en la superficie del torio

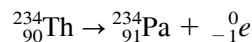
### 53.14 Desintegración $\beta$

Dentro de la denominación general desintegración  $\beta$ , estudiaremos tres procesos diferentes: la *desintegración  $\beta^-$* , la *desintegración  $\beta^+$*  y la *captura electrónica*.

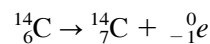
En el proceso de desintegración  $\beta^-$ , se emiten electrones obedeciendo a la ecuación general:



Un ejemplo típico es la transformación radiactiva de torio en paladio, según la ecuación:



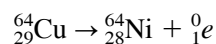
o del carbono en nitrógeno:



En el proceso de desintegración  $\beta^+$  se emiten electrones positivos o positrones, obedeciendo a la ecuación general:



De la que es un ejemplo típico la transformación del cobre en níquel, según la ecuación:



El electrón positivo o *positrón* es la antipartícula del electrón.

En el proceso de captura electrónica, el núcleo origen captura un electrón de la capa cortical interna, y como resultado de la reacción con un protón produce un neutrón y una nueva partícula llamado *neutrino*:

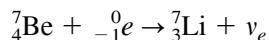


Como posteriormente estudiaremos, existen distintos tipos de neutrinos, al relacionado con la desintegración  $\beta$  se le denomina *neutrino electrón*,  $\nu_e$ .

La desintegración por captura electrónica obedece a la ecuación general

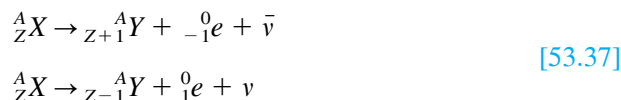


Un ejemplo típico de este tipo de desintegración es la del berilio en litio



De la Ecuación [53.35] pueden deducirse algunas propiedades del neutrino. Evidentemente, la conservación de la carga exige que la carga de neutrino sea nula; además, puesto que los espines del protón, el electrón y el neutrino pueden valer  $\pm 1/2$ , la conservación del momento cinético, solamente es posible si existe el neutrino y además tiene espín  $1/2$ . Vemos así la necesidad de su existencia, que fue comprobada experimentalmente, en 1956, por Cowan y Reines, que además determinaron el valor de su espín.

Por otra parte, los electrones y positrones emitidos en la desintegración  $\beta$  presentan un espectro continuo de energías, mientras que el proceso, expresado en las Ecuaciones [53.33] y [53.34] es análogo a la emisión  $\alpha$ , y la energía del núcleo original debe repartirse entre las partículas finales en una proporción fija. Esta contradicción le llevó a Paulí, en 1930, a postular la necesidad de la existencia de otra partícula que debía intervenir en las Ecuaciones [53.33] y [53.34], y que son el *neutrino* en la desintegración  $\beta^+$  y el *antineutrino* en la  $\beta^-$ ; con lo cual las citadas ecuaciones son, respectivamente:



La conservación de la energía y la cantidad de movimiento entre las tres partículas finales puede hacerse de infinitas maneras, de forma que puede así explicarse el espectro continuo de energías para electrones y positrones.

Parece, pues, que el núcleo trata de estabilizarse transformando un neutrón en un protón, en los emisores  $\beta^-$ , según la ecuación:



Debe quedar claro que el electrón emitido no es un electrón orbital, sino que es producido en el núcleo según la Ecuación [53.38].

En los emisores  $\beta^+$ , se transforma un protón en un neutrón, según la ecuación:



La [53.38] es exógena, ya que el valor de su  $Q$  es:

$$Q = 931,4944[m_n - (m_p + m_e)] = 0,7824 \text{ MeV}$$

Por ello, el neutrón libre no es estable y se desintegra, según la Ecuación [53.38], con una vida media de, aproximadamente, dieciocho minutos. La fuerza que interviene en el proceso es la *interacción nuclear débil*, cuyo valor ha sido estimado en  $10^{-13}$  en relación con la interacción nuclear fuerte y en  $10^{-11}$  en relación a la interacción electromagnética.

La Ecuación [53.39] es endógena, siendo su  $Q = -1,804 \text{ MeV}$ , por lo cual, el protón libre es estable, lo que está corroborado por la abundancia del hidrógeno.

### 53.15 Desintegración $\gamma$

La desintegración  $\gamma$  es el proceso por el cual un núcleo pasa de un estado excitado a otro de menor energía con emisión de radiación electromagnética en la banda gamma.

El espectro de radiación  $\gamma$  emitido por los núcleos demuestra la existencia en ellos de niveles energéticos discretos, siendo el espectro de radiación el resultado de un reajuste de nucleones entre los distintos estados estacionarios del núcleo.

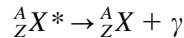
La naturaleza ondulatoria de la radiación  $\gamma$  se ha demostrado por medio de experiencias de difracción. La energía del fotón emitido está comprendida entre 100 keV y 10 MeV, y esa será la diferencia entre los niveles energéticos nucleares, ya que se debe verificar

$$E_i - E_f = h\nu$$

En la emisión  $\beta$  suelen producirse núcleos en estados excitados que emiten radiación  $\gamma$  al pasar a su estado base, pero hay otras formas de excitar a un núcleo de forma que se convierta en un emisor  $\gamma$ , una de ellas es el bombardeo con neutrones lentos.

La probabilidad de transición entre estados nucleares aumenta con la diferencia de energía entre esos estados y disminuye con la diferencia de momento cinético total entre ambos estados. El análisis de las emisiones y de los núcleos es el método principal para conocer los estados energéticos del mismo. Algunos núcleos pueden permanecer un tiempo considerable en su estado excitado, no pudiendo distinguirse químicamente entre ellos y su estado fundamental.

La radiación  $\gamma$  se produce mediante reacciones del tipo:



Un ejemplo típico de desintegración  $\gamma$  es la del  ${}^{60}\text{Co}$ , el cual emite radiación  $\beta^-$  de 0,31 MeV y da  ${}^{60}\text{Ni}$  en estado excitado, el cual a su vez emite dos tipos de radiaciones cuyas energías son 1,17 y 1,33 MeV (Figura 53.8).

Otro ejemplo usual es la desintegración  $\beta^-$  del boro, que puede realizarla siguiendo dos caminos representados en la Figura 53.9. Puede dar directamente carbono en su estado fundamental con emisión  $\beta^-$  de energía 13,4 MeV, o bien puede dar carbono en estado excitado emitiendo radiación  $\beta^-$  de energía 9,0 MeV, el cual a su vez pasa al su estado fundamental emitiendo radiación  $\gamma$  de 4,4 MeV.

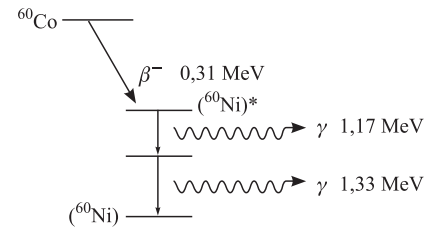


Figura 53.8. Desintegración del cobalto.

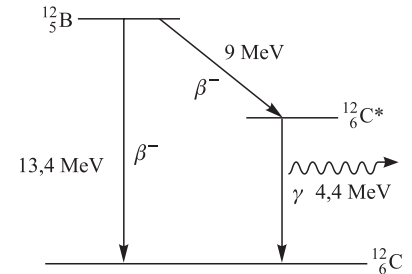
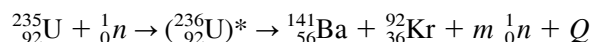


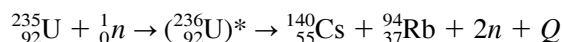
Figura 53.9. Desintegración del boro

### 53.16 Fisión nuclear

En 1939, Otto Hahn y Fritz Strassman, bombardeando uranio con neutrones térmicos ( $E \simeq 0,04$  eV), encontraron, mediante análisis químico, que en la muestra bombardeada aparecía un nuevo elemento no existente antes, el bario ( $Z = 56$ ). Meitner y Frisch establecieron que el proceso consistía en la absorción de un neutrón por el núcleo de uranio, con desdoblamiento de aquél en dos núclidos nuevos de números atómicos próximos a la mitad del primitivo. Este proceso fue denominado *fisión* y puede expresarse mediante la ecuación:



La fisión del  ${}^{235}\text{U}$  puede adoptar otras múltiples formas, como por ejemplo:



El proceso puede explicarse usando el modelo de núcleo de gota líquida: el núcleo de uranio 235 absorbe un neutrón y forma un núcleo de uranio 236 en estado

Fisión del  ${}^{235}\text{U}$





según una serie geométrica. No obstante, muchos neutrones son absorbidos por impurezas no fisionables y otros escapan del material si éste no tiene tamaño suficiente. En una pieza pura de  $^{235}\text{U}$  o  $^{239}\text{Pu}$ , que tenga tamaño suficiente, la reacción en cadena se produce de forma instantánea con liberación de enorme cantidad de energía y radiación  $\beta$  y  $\gamma$ , constituyendo la denominada *bomba atómica*. La masa mínima de uranio para automantener la reacción en cadena se denomina *masa crítica* y su valor puede ser de muy pocos kilogramos.

El control de la reacción en cadena permite aprovechar la enorme energía liberada en el proceso de fisión y ello se realiza en los *reactores nucleares*. Para controlar los neutrones producidos en la fisión se rodea el material fisionable con un *moderador*, contra el cual chocan aquellos sufriendo una dispersión elástica, el proceso ocurre fuera del material fisionable y el moderador, que rodea a éste, es en general grafito o agua pesada ( $\text{D}_2\text{O}$ ). Además, para controlar los procesos en el reactor se disponen unas barras de Cd o B, sustancias que son fuertemente absorbentes de neutrones, las cuales al ser más o menos introducidas permiten regular el proceso y la energía producida. El primer reactor comenzó a funcionar en diciembre de 1942 en la Universidad de Chicago y fue dirigido por Fermi, empleaba bloques de grafito como elementos moderadores. El esquema de funcionamiento de una central nuclear es el indicado en la Figura 53.12.

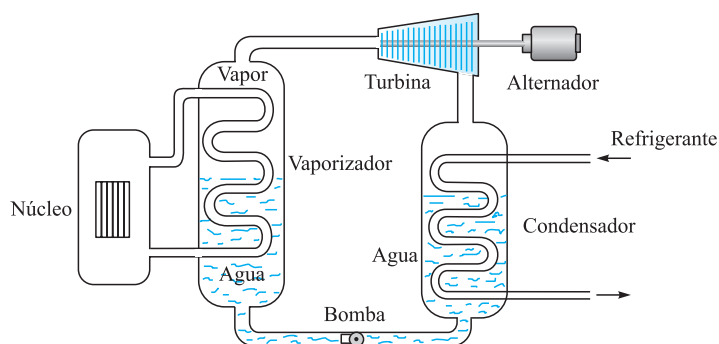


Figura 53.12. Esquema de central nuclear.

La energía producida en la fisión de un núcleo, según hemos visto, es del orden de 211,5 MeV, lo que equivale a:

$$211,5 \times 10^6 \text{ eV} \times 1,602 \times 10^{-19} \text{ J/eV} = 338,8 \times 10^{-13} \text{ J}$$

Para producir la potencia de 1 W deberán producirse  $3 \times 10^{10}$  fisiones por segundo y para 1 MW,  $3 \times 10^{16}$  fisiones/s. En un día de funcionamiento a la potencia constante de 1 MW se producen  $2592 \times 10^{18}$  fisiones. Puesto que en un mol grammo, 235 g de  $^{235}\text{U}$ , hay  $6,02 \times 10^{23}$  átomos, se podrán producir ese mismo número de fisiones y, por tanto, la cantidad de  $^{235}\text{U}$  que debe fisionarse al día para funcionar con la potencia de 1 MW es:

$$\frac{235 \times 2592 \times 10^{18}}{6,02 \times 10^{23}} \simeq 1 \text{ g}$$

La primera utilización de la energía nuclear se realizó en la Segunda Guerra Mundial. Un grupo de físicos de los Estados Unidos, enterados de que los alemanes, utilizando uranio de las minas checas, podían estar intentando la fabricación de una bomba atómica, consideraron necesario avisar de ello al gobierno y recurrieron a la autoridad de Einstein, instándole a que advirtiera del peligro al presidente Roosevelt. La famosa carta de Einstein, fechada el 2 de agosto de 1939, le

fue entregada en mano al presidente por medio del banquero judío Sachs, amigo personal de él. En principio el presidente no concedió urgencia al asunto y, además de la insistencia de Sacs, fue necesaria una segunda carta de Einstein en marzo de 1940, para que se creara el Proyecto Manhattan, que se encargaría del desarrollo de la bomba atómica en unos laboratorios en Los Álamos bajo la dirección de Robert Oppenheimer (1904-1967). La primera bomba de fisión de uranio fue probada en el desierto de Nuevo Mexico en julio de 1945. El 3 de agosto, siendo ya presidente Truman, autorizó la utilización de bombas atómicas sobre Hiroshima, Kokura, Niigata y Nagasaki. El 6 de agosto, a las 8:15, el B-29 «Enola Gay» arrojaba sobre Hiroshima una bomba de fisión de uranio, arrasando la ciudad. Una segunda bomba, esta vez de fisión de plutonio, fue lanzada, el 9 de agosto a las 11:02, sobre Nagasaki. Ante ello el emperador del Japón anunció su rendición el 15 de agosto.

### 53.17 Fusión

La fusión es la unión de dos núcleos dando lugar a uno nuevo. Debido a la carga nuclear positiva, la fusión de los núcleos debe producirse tras vencer la barrera de repulsión culombiana entre los protones de ambos, de forma que, una vez puestos en contacto los nucleones de ambos, las fuerzas nucleares puedan entrar en acción y consolidar la unión.

El potencial culombiano que deben vencer dos núcleos de números atómicos  $Z_1$  y  $Z_2$  al aproximarse es:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$$

En el caso más favorable sería  $Z_1 = Z_2 = 1$  y, como es necesario aproximar los núcleos a la distancia de  $2 \times 10^{-15}$  m para que puedan actuar las fuerzas nucleares, el potencial que es necesario vencer es:

$$V = \frac{1,6^2 \times 10^{-38}}{4\pi \times \frac{10^{-19}}{36\pi} \times 2 \times 10^{-15}} = 11,52 \times 10^{-14} \text{ J} = 0,7191 \text{ MeV}$$

Cada uno de los núcleos puede llevar la energía de 0,36 MeV, y puesto que la energía cinética media de una partícula en equilibrio a la temperatura  $T$  está dada por:

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} kT \quad [53.40]$$

Tomando para la constante de Boltzmann el valor  $k = 8,6172 \times 10^{-5}$  MeV/K, resulta para  $T$  el valor  $2,785 \times 10^9$  K. De hecho, la fusión ocurre a temperaturas bastante inferiores, debido a que la [53.40] nos da la energía media, pero hay núcleos con energía superior, y además, la fusión puede producirse por efecto túnel, perforando la barrera culombiana nuclear con energía inferior a la de aquélla.

La fusión de núcleos con  $A < 20$  es siempre una reacción que libera enormes cantidades de energía, pues la energía de enlace por nucleón  $E_{B/A}$ , desde  $A = 1$  hasta  $A \simeq 60$ , aumenta con el número másico. Por tanto, el núcleo formado en la fusión tiene una energía de enlace por nucleón mayor que los primitivos, será mayor la energía total de enlace y menor la masa en reposo, con lo cual el defecto másico debe aparecer en forma de energía.

La energía podía ser suministrada a uno de los núcleos mediante un acelerador adecuado, tipo ciclotrón, pero únicamente serviría para producir la fusión entre un cierto número de núcleos, nunca en el conjunto de dos masas. Parece, pues, que la

forma de producir la fusión es por agitación térmica de los núcleos, llevándolos a las temperaturas de unos  $10^7$  K, lo que se conoce con el nombre de *fusión termonuclear*.

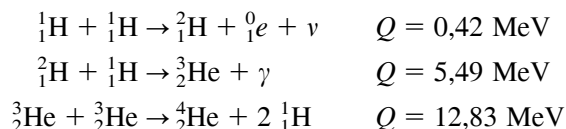
El proceso de fusión más sencillo es el producido en la unión de un protón y un neutrón, formando un deuterón, según la ecuación:



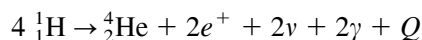
La producción de energía en el Sol y en otras estrellas es debido a procesos de fusión, que son la fuente de energía en el universo. Los procesos de fusión, según si la estrella es joven o antigua, obedecen a los llamados ciclos protón-protón o al ciclo de Bethe, también llamado del carbono, respectivamente.

El ciclo protón-protón, que es el actualmente preponderante en nuestro Sol, obedece a las siguientes ecuaciones:

### Ciclo protón-protón



En el conjunto de las reacciones, cuatro protones han dado lugar a un núcleo de helio, emitiéndose dos positrones, dos neutrinos y dos rayos  $\gamma$ :



El valor de  $Q$  será:

$$Q = 2Q_1 + 2Q_2 + Q_3 = 2 \times 0,42 + 2 \times 5,49 + 12,86 = 24,68 \text{ MeV}$$

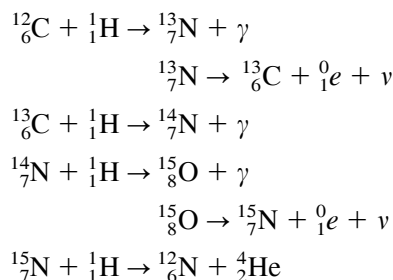
Además, los dos positrones emitidos encuentran inmediatamente a los dos electrones con los cuales se aniquilan, produciendo radiación y la energía correspondiente a la desaparición de sus masas, es decir  $2 m_e c^2 = 1,02 \text{ MeV}$ , con lo cual, la energía total liberada es:

$$Q = 24,68 + 2 \times 1,02 = 26,72 \text{ MeV}$$

Este ciclo se realiza en el Sol de forma muy lenta, ya que la probabilidad de que al chocar dos protones se forme un núcleo de deuterio es muy baja, del orden de 1 en  $10^{26}$  choques, gracias a lo cual el Sol no explota. No obstante, y a pesar de la lentitud, al existir tan enorme cantidad de hidrógeno en el Sol, parece ser que unos  $5 \times 10^{11}$  kg de hidrógeno se forman por segundo, lo que libera una energía del orden de  $2,5 \times 10^{19}$  MW, de los cuales únicamente llegan a la Tierra  $1,8 \times 10^8$  MW en forma de radiación electromagnética casi exclusivamente.

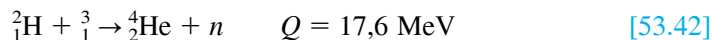
El ciclo del carbono, propuesto por Bethe, como realizado en la producción de energía por las estrellas a partir de una cierta edad de éstas, obedece a las reacciones:

### Ciclo del carbono



El balance de las ecuaciones establece, al igual que en el ciclo protón-protón, el consumo de cuatro núcleos de hidrógeno con la producción de uno de helio y dos positrones. La energía producida es la misma que en el ciclo anterior. Aquí el carbono hace únicamente papel de catalizador.

Una reacción de fusión de extraordinaria importancia es la unión del deuterio y el tritio, la cual puede producirse en cadena a temperaturas de  $10^8$  K liberando una enorme cantidad de energía:



Esta reacción es la causante de la bomba de hidrógeno, en la cual, para iniciar la fusión es necesario explosionar una bomba de fisión, que será la encargada de producir la temperatura indicada y desencadenar el proceso de fusión. La energía liberada en esta fusión por nucleón es 3,52 MeV, muy superior a la liberada en la fisión, que es 0,9, es decir, casi cuatro veces más. La primera bomba-H fue explosionada experimentalmente en noviembre de 1952, en un islote del atolón de Eniwetok, que desapareció de la superficie de la Tierra.

El tratar de producir una reacción termonuclear controlada ofrece serias dificultades, pero ello sería una solución prácticamente definitiva al problema de producción de energía, pues el combustible deuterio es prácticamente inagotable y su extracción del agua es relativamente barata. Su abundancia es enorme, de cada 6500 átomos de hidrógeno, uno es de deuterio o, lo que es igual, un gramo de deuterio en aproximadamente 60 litros de agua.

Para conseguir la fusión termonuclear controlada sería necesario crear una enorme densidad de núcleos de deuterio, a temperaturas del orden de  $10^8$  K, confinados durante un tiempo suficientemente grande para que pueda producirse la reacción de fusión. La densidad de núcleos y el tiempo de confinamiento deben verificar el criterio de Lawson:

$$n\tau \ 10^{14} \text{ s/cm}^3$$

El confinamiento a temperaturas de  $10^8$  K hace que no pueda pensarse en paredes materiales, ya que se vaporizarían y enfriarían al plasma reaccionante por debajo de las temperaturas de fusión. Evidentemente el mejor método de confinamiento es el gravitacional, que es el que actúa en el Sol, pero que es imposible de aplicar en la Tierra. Los métodos posibles de confinamiento son magnéticos o inerciales, en el primero se pretenden tiempos de confinamiento grandes, mientras que en el segundo se buscan grandes concentraciones de núcleos interactuantes. El confinamiento por campos magnéticos está basado en la fuerza que éstos ejercen sobre las partículas cargadas que se mueven dentro de ellos y fue analizado en el Capítulo 32. Una forma especial de confinamiento del plasma mediante campos magnéticos adecuados es el dispositivo *Tokamak*, de origen ruso y cuyo nombre es el acrónimo de *Toroidalnaya Kamera Maknetitaya*, cámara toroidal magnética, el cual, como indica su nombre, emplea una cámara de vacío toroidal y campos magnéticos creados por arrollamientos sobre la misma (Figura 53.13).

Con este dispositivo se han conseguido temperaturas muy próximas a los  $10^8$  K y tiempos de confinamiento de 100 ms. Actualmente se investiga con gran intensidad en este campo habiéndose creado el Proyecto ITER (*Internacional Termonuclear Experimental Reactor*), formado por un consorcio, creado en 1986, entre la Unión Europea, Estados Unidos, Rusia, Japón, China, India y Corea del Sur, para construir un Tokamak en Cadarache (Francia) y establecer la posibilidad de producir electricidad mediante fusión controlada.

La fusión mediante confinamiento inercial emplea grandes concentraciones de núcleos, una especie de píldora de éstos, y debe realizarse en un tiempo extremadamente corto, antes de que las partículas puedan moverse de su posición inicial. Así actúa la bomba termonuclear o de hidrógeno, una vez que la bomba de fisión explota, se produce la fusión antes de que los núcleos se dispersen.

La fusión mediante láser usa precisamente el confinamiento inercial. Un láser capaz de emitir un pulso de unos  $10^{14}$  W incide sobre una pequeña gota de

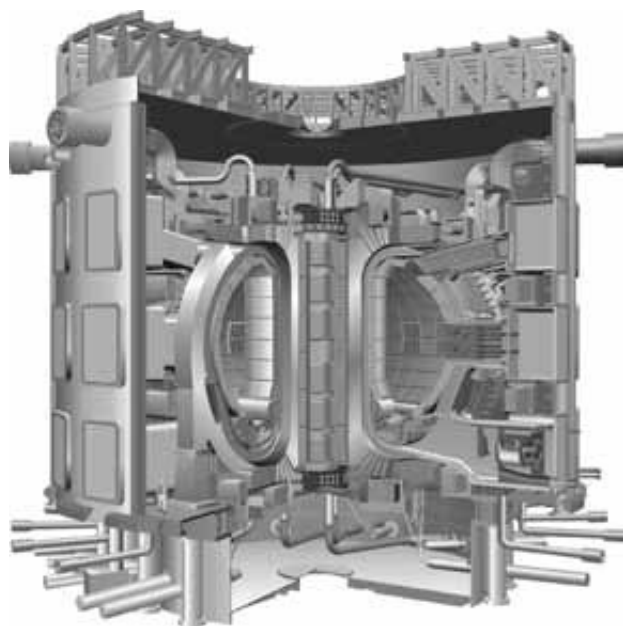


Figura 53.13. Dispositivo Tokamak.

deuterio-tritio, ionizándola a plasma y elevando su temperatura a  $10^8$  K, aumentando enormemente la densidad en el centro de la gota, debido a la evaporación superficial. Allí comienza la fusión. En el fondo, esta gota de deuterio-tritio es una pequeña bomba termonuclear.

La forma de aprovechar la energía liberada en el proceso [53.42] sería absorbiéndola en litio, que se fundiría con ello, esta energía sería cedida por el litio fundido a un generador de vapor.

### 53.18 Partículas fundamentales

Desde la antigua Grecia, en la cual se consideró al átomo constituyente fundamental de la materia como la partícula indivisible, de ahí su nombre *a* = sin, *tomos* = división, han ido apareciendo toda una serie de nuevas partículas constituyentes de aquél.

Inicialmente se consideraron como partículas fundamentales el electrón, el protón y el neutrón, de las cuales recogemos a continuación algunas de sus propiedades:

El *electrón* fue descubierto por Thomson, en 1897, sus propiedades son:

Electrón

$$\begin{aligned} \text{Masa: } m_e &= 9,109\,381\,88(72) \times 10^{-31} \text{ kg} = 5,485\,798\,2 \times 10^{-4} \text{ u} = \\ &= 0,510\,999\,032 \text{ MeV}/c^2. \end{aligned}$$

$$\text{Carga: } e = 1,602\,176\,462(63) \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$\text{Spin} = 1/2$$

Tiempo de vida = estable

El *protón*, núcleo del átomo de hidrógeno, fue descubierta por Rutherford, en 1911, es la partícula más abundante en la naturaleza y aporta la inmensa mayoría de la masa de ésta. Sus propiedades son:

Protón

$$\begin{aligned} \text{Masa: } m_p &= 1,672\,621\,58(13) \times 10^{-27} \text{ kg} = 1,007\,276\,3 \text{ u} = \\ &= 938,272\,232\,7 \text{ MeV}/c^2 \end{aligned}$$

$$\text{Carga: } q = +e$$

Espín =  $1/2$

Momento magnético =  $1,410\ 617\ 1 \times 10^{-26}$  J/T

Tiempo de vida = estable

### Neutrón

El *neutrón*, partícula constituyente junto con el protón del núcleo atómico, fue descubierta por Chadwick, en 1932, según ya hemos indicado. Sus propiedades son las siguientes:

Masa:  $m_n = 1,674\ 927\ 16 \times 10^{-27}$  kg = 1,008 664 753 u =  
= 939,565 568 7 MeV/c<sup>2</sup>

Carga:  $q = 0$

Espín =  $1/2$

Tiempo de vida =  $\tau = 1,11 \times 10^3$  s

### Fotón

El *fotón* fue establecido por Einstein, en 1905, como la partícula constituyente de la radiación electromagnética. Sus propiedades son:

Masa = 0

Carga = 0

Spin = 1

Momento magnético = 0

Tiempo de vida = estable

Posteriormente se ha demostrado que el protón y el neutrón no son partículas elementales, ya que, como veremos, están compuestas de otras partículas.

## Antimateria

La ecuación de Schrödinger no contempla los efectos relativistas y, como ya hemos indicado, no es invariante en una transformación de Lorentz. Por ello, en 1928, Paul M. Dirac (1902-1984) estableció la teoría cuántica relativista, según la cual, la energía de una partícula está dada por la ecuación:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 \quad [53.43]$$

Con lo que la energía tiene dos posibles valores iguales pero de distinto signo:

$$E = \pm (m_0^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2} \quad [53.44]$$

Dirac se dio cuenta de que no podía prescindirse de la solución negativa, con el simple pretexto de no tener sentido físico, él consideró la posibilidad de que existieran electrones de energía negativa y obvió la posibilidad de que todos los electrones caigan a esos estados de energía mínima, admitiendo que esos estados están todos ocupados de acuerdo con el principio de exclusión de Pauli. Lo que siempre es posible es comunicar energía a un electrón negativo, el cual aparecerá en el mundo real, dejando un hueco positivo, lo que se manifiesta como una partícula de masa  $m_e$  y carga  $+e$ , a la que llamó *electrón positivo*, *positrón* o *antielectrón*. En general, a estas partículas que son exactamente iguales a otras partículas materiales reales, pero en las cuales cambia el signo de la carga, se las denomina antipartículas y constituyen la *antimateria*.

La antipartícula del electrón, el positrón, fue descubierto en la radiación cósmica por Anderson, en 1932. Tiene exactamente las mismas propiedades del electrón, salvo el signo de la carga. Presenta una gran avidez por el electrón, con el que se fusiona desapareciendo ambos y dando lugar a un fotón, proceso llamado de *aniquilación*. Puede presumirse que, en ausencia de electrones, el positrón debe ser

estable. Antes de aniquilarse, la unión electrón-positrón forma una partícula llamada *positronio* cuya vida media como máximo puede ser de  $10^{-6}$  s, estas partículas de vida tan efímera se denominan *partículas virtuales*.

Dirac también predijo la existencia de la antipartícula del protón, que es el *protón negativo o antiprotón*, que fue visto por vez primera en 1955, por Segre y Chamberlain, como resultado de sus investigaciones en reacciones de alta energía en el acelerador de la Universidad de Berkeley (California).

La antipartícula del neutrón es el antineutrón, con el cual el neutrón se aniquila, pero también se ha observado que el neutrón se aniquila con el antiprotón, así como que el antineutrón se aniquila con el protón. El antineutrón difiere del neutrón en el sentido de su momento magnético, en el antineutrón tiene el sentido del momento angular, y en el neutrón, el contrario.

Todas y cada una de las partículas que irán apareciendo conllevarán su correspondiente partícula de antimateria, confirmándose la hipótesis de Dirac. Para las partículas de antimateria usaremos el mismo símbolo de la partícula con una barra encima,  $\bar{p}$ .

## Partículas transmisoras

### Piones

Yukawa, en 1935, estableció una teoría sobre las interacciones nucleares fuertes, postulando que tal interacción era debida al intercambio de una partícula elemental que llamó *mesón*, que actúa de forma análoga a como lo hace el fotón en las interacciones electromagnéticas. Una partícula cargada actúa mediante un campo electromagnético, que puede representarse por un conjunto de fotones, que continuamente son absorbidos y emitidos por la partícula. Su acción sobre otra partícula cargada se debe a la absorción por ésta de un fotón emitido por la primera. El campo en torno a la primera partícula puede expresarse mediante:

$$A^- \rightleftharpoons A^- + h\nu$$

Esto, evidentemente, viola el principio de conservación de la energía. Pero de acuerdo con el principio de incertidumbre puede no existir tal violación, siempre que las fluctuaciones de energía del sistema  $\Delta E$  duren un tiempo  $\Delta t$  que verifique:

$$\Delta E \cdot \Delta t < \hbar$$

Por tanto, si una partícula emite un fotón y es absorbido por otra en un tiempo  $\Delta t$ :

$$\Delta t < \frac{\hbar}{h\nu} = \frac{1}{\omega}$$

no puede detectarse la violación de la conservación de la energía. Durante este tiempo el fotón puede viajar hasta otra partícula situada a la distancia:

$$e_{\text{máx}} = \frac{c}{\omega_{\text{mín}}}$$

Puesto que la frecuencia puede ser tan pequeña como se desee, el alcance es ilimitado. Los mesones serían continuamente emitidos y absorbidos por los nucleones y las interacciones entre éstos serían debidas al intercambio de aquéllos. Puesto que el mesón es una partícula con masa, su alcance no será infinito. Ahora serán:

$$\Delta t < \frac{\hbar}{mc^2} \quad \text{y} \quad e < \frac{\hbar}{mc}$$

Admitiendo que el mesón se desplace a velocidad de la luz, y puesto que al menos su alcance debe ser el de las fuerzas nucleares,  $2 \times 10^{-15}$  m, la masa mínima del mesón debe ser del orden:

$$m = \frac{6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{2\pi \times 2 \times 10^{-15} \times 3 \times 10^8 \text{ m}^2/\text{s}} = 0,175866 \times 10^{-27} \text{ kg} = 0,1059 \text{ u} = 98,66 \text{ MeV} \simeq 19 m_e$$

En 1937, Anderson y Neddermeyer encontraron en los rayos cósmicos una partícula de masa unas  $207 m_e$  y pensaron que se trataba de los mesones postulados por Yukawa. Sin embargo, en 1945, Conversi, Paucini y Piccioni demostraron que estos mesones interactuaban muy débilmente con los nucleones y no podía sustentarse en base a ellos la teoría de Yukawa. Finalmente, en 1947, Lattes, Occhiaini y Powell encontraron, también en la radiación cósmica, un nuevo tipo de mesón que sí interactuaba fuertemente con los nucleones, cumpliendo todas las hipótesis de la teoría de Yukawa. A éstos se los denominó mesones- $\pi$  o *piones*, simbolizados por  $\pi$ , mientras que los anteriores fueron denominados *mesón- $\mu$*  o *muones* y simbolizados con  $\mu$ .

Hay tres tipos de mesones- $\pi$  o piones, los  $\pi^+$ , con carga  $+e$ ; los  $\pi^-$ , con carga  $-e$ , y los  $\pi^0$ , neutros. Los dos primeros son de igual masa,  $139,566 \text{ MeV}/c^2$ , y la masa del neutro es  $134,962 \text{ MeV}/c^2$ . Todos ellos tienen espín nulo y son inestables. El mesón- $\pi^+$  es la antipartícula del  $\pi^-$  y el neutro es su propia antipartícula.

Los mesones- $\mu$  o muones, tienen de carga  $-e$  y su masa es  $105,659 \text{ MeV}/c^2$ , son semejantes en todo al electrón, pero de masa mayor, su antipartícula es el muón  $\mu^+$  con la misma masa, pero con carga  $+e$ . El espín es siempre  $1/2$  y son inestables. No parece existir el muón neutro.

### Neutrino

En la desintegración  $\beta$ , Chadwick comprobó que los electrones emitidos tienen energía variable. Pauli sugirió la posibilidad de que en la desintegración  $\beta$  fuera también emitida una partícula, que sería la encargada de que se cumpliera la conservación de la energía. Fermi, en 1934, desarrolló su teoría de la interacción nuclear débil en base a la existencia de esta partícula, la cual actuaría como transmisora de esa acción, análogamente a como lo hacen los fotones en la interacción electromagnética o los piones en la interacción nuclear fuerte. La partícula no debía poseer ni carga, ni masa y Fermi la denominó *neutrino*. Por tanto, el neutrino únicamente participaría de la interacción débil, no estando sometido a las interacciones fuertes, ni electromagnéticas. Como ya indicamos en las desintegraciones  $\beta^+$  y  $\beta^-$  también se emiten neutrinos y antineutrinos, según las Ecuaciones [53.37]. Las características del neutrino son:

Masa = 0

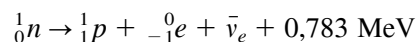
Carga = 0

Spin =  $1/2$

Momento magnético = 0

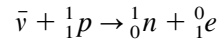
Tiempo de vida = estable

El neutrón fuera del núcleo es inestable, su tiempo de vida es aproximadamente de 18,5 minutos y se desintegra según la Ecuación [53.38]:

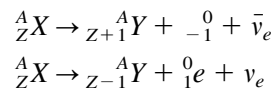




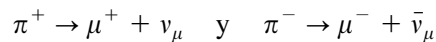
La nueva partícula que aparece es el antineutrino,  $\bar{\nu}$ , tanto este como el neutrino no interactúan con la materia, pudiendo atravesar bloques de plomo de años luz de espesor, de aquí lo difícil de su detección. Sin embargo, en 1956, Reines y Cowen observaron el antineutrino en el flujo de ellos que sale de un reactor nuclear, verificando la reacción:



Loderman y Schwartz demostraron experimentalmente, en 1962, la existencia de dos tipos de neutrinos: el neutrino electrón,  $\nu_e$ , y el neutrino muón,  $\nu_\mu$ , según que se produzcan asociados con un electrón o con un muón. En las Expresiones [53.37] aparecen el neutrino electrón,  $\nu_e$  y su antipartícula, el antineutrino,  $\bar{\nu}_e$ .



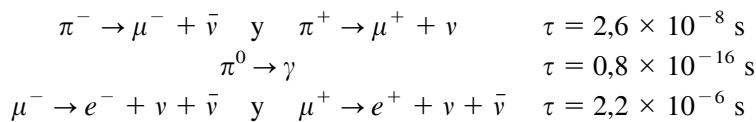
En el decaimiento del mesón- $\pi$  aparecen mesones- $\mu$  o muones y neutrinos muón, según las ecuaciones:



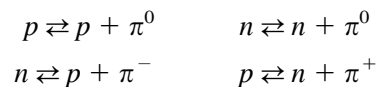
Si el neutrino tiene masa nula, carga nula y momento magnético nulo, cabe preguntarse en qué difiere de su antipartícula. Pues bien, esa diferencia radica en una nueva propiedad llamada *helicidad*, definiéndose ésta como positiva cuando la cantidad de movimiento y el espín tienen el mismo sentido, y como negativa si tienen sentido contrario. Es obvio que la helicidad queda definida por el signo del producto escalar  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{P}$ , es decir,  $h = \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{S} \cdot \mathbf{P}|}$ .

Se ha puesto de manifiesto que la helicidad del neutrino es siempre negativa y la del antineutrino positiva. Además, se demuestra en base a la teoría de Yang y Lee que, tanto en unos como en otros, la dirección de  $\mathbf{P}$  y la de  $\mathbf{S}$  coinciden (Figura 53.14).

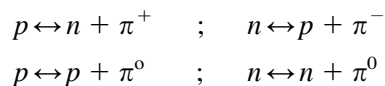
Los decaimientos fundamentales son:



Las interacciones entre nucleones se realizarían mediante los procesos siguientes:



Parece existir una gran interconvertibilidad entre protones y neutrones, en las cuales se producen siempre mesones- $\pi$  y que obedecen a las reacciones:



El protón emite un pión positivo y se transforma en un neutrón y neutrones próximos pueden captar al pión positivo y transformarse en un protón. Análogamente, un neutrón emite un pión negativo y se transforma en protón y protones próximos pueden absorber el pión negativo y transformarse en un neutrón. El mesón  $\pi$  neutro no transfiere carga al interactuar con los nucleones, únicamente intercambia momento.



Figura 53.14. Cantidad de movimiento y espín.

De acuerdo con ello, puede explicarse la existencia de momento magnético en el neutrón, ya que éste pasa parte de su vida en la forma virtual ( $p + \pi^-$ ), igualmente puede explicarse el momento magnético del protón, ya que éste presenta en parte de su vida el estado virtual ( $n + \pi^+$ ).

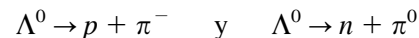
### Partículas extrañas

Rochester y Butler, en 1947, encontraron en sus experiencias con radiación cósmica trazas en forma de V, que atribuyeron a la desintegración de una partícula neutra, que no deja rastro y aparece en el punto en que se desintegra, dando dos partículas que sí son detectadas (Figura 53.15).

En 1950, Anderson, trabajando en un laboratorio en la cumbre de la White Mountain (California), detectó en la radiación cósmica la misma partícula a la que denominó *mesón-K<sup>0</sup>* o *kaón*, sin carga y cuya masa en reposo es de  $497,7 \text{ MeV}/c^2$ . Se han encontrado dos mesones  $K^0$ , ambos de igual masa y ambos con espín nulo. Uno de ellos,  $K_1^0$ , con una vida media de  $8,92 \times 10^{-11} \text{ s}$ , que decae de la forma  $K_1^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ . El otro,  $K_2^0$ , con una vida media de  $5,18 \times 10^{-8} \text{ s}$  y que tiene múltiples formas de desintegración. El  $K_2^0$  parece ser la antipartícula del  $K_1^0$ .

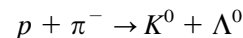
Además, utilizando ya aceleradores de alta energía, se han encontrado otros dos mesones-K: el  $K^+$ , con carga  $+e$ , y el  $K^-$ , con carga  $-e$ , ambos con espín nulo y con masa de  $493,7 \text{ MeV}/c^2$ . También son inestables y con una vida media de  $1,24 \times 10^{-8} \text{ s}$ . El mesón  $K^-$  parece ser la antipartícula del  $K^+$ .

También en la radiación cósmica se puso en evidencia la existencia de una nueva partícula, cuya masa era superior a la del protón y que se denominó *lambda neutro*  $\Lambda^0$ . Experimentalmente se ha determinado su masa en  $1116 \text{ MeV}/c^2$ , superior a la del neutrón, por lo cual se las dio la denominación de *hyperón*. Su espín es  $1/2$ , es inestable con vida media igual a  $2,63 \times 10^{-10} \text{ s}$  y sus desintegraciones más frecuentes son:



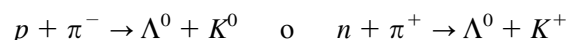
Sucesivamente fueron apareciendo partículas, todas ellas de masa superior a la del protón. Además del lambda neutro,  $\Lambda^0$ , aparecieron las partículas denominadas sigma,  $\Sigma$ ; Xi,  $\Xi$ , y omega,  $\Omega$ , todas ellas de espín  $1/2$ , salvo la  $\Omega$  de espín  $3/2$  y todas ellas inestables, decayendo en un tiempo de unos  $10^{-10} \text{ s}$ .

A todas estas partículas se las denominó *partículas extrañas*, ya que son producidas mediante una interacción fuerte, pero decaen mediante interacciones débiles, con tiempos de desintegración grandes, del orden de  $10^{-10}$  a  $10^{-8} \text{ s}$ , frente a los que son característicos, del orden de  $10^{-23} \text{ s}$ . Como ejemplo, una reacción de producción es:



Decayendo posteriormente  $\Lambda^0$  y  $K^0$  como se ha indicado.

El hecho de que siempre se produzcan por pares hizo pensar a Gell-Mann y Nishijima que alguna ley de conservación debía existir que prohibiera la aparición de una sola partícula extraña. Ello les llevó, en 1954, a introducir un nuevo número cuántico: *la extrañeza*,  $S$ . *La extrañeza se conserva en las interacciones fuertes y electromagnéticas, pero no en las débiles*. A los hyperones  $K^0$  y  $K^+$  se les asignó el valor  $S = 1$  y a  $\Lambda^0$  y  $\Sigma^0$ , el valor  $S = -1$ . Las correspondientes antipartículas tienen extrañeza de signo contrario  $\bar{K}^0$  y  $K^-$ ,  $S = -1$ , y  $\bar{\Lambda}^0$  y  $\bar{\Sigma}^0$ ,  $S = 1$ . Podemos comprobar que en las reacciones de producción la extrañeza se conserva, por ejemplo,



Sin embargo, en los procesos de su desintegración la extrañeza no se conserva, por ejemplo  $K^- \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ .

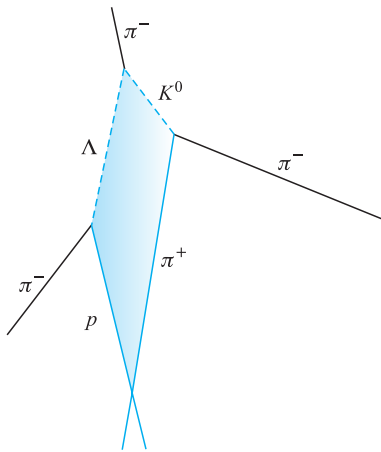


Figura 53.15. Partículas extrañas.

## Resonancia

Actualmente, además de las partículas citadas se han encontrado otras partículas, de vida tan sumamente corta que pareció necesario distinguir entre a qué se denomina partícula y a qué se considera una resonancia. El límite se estableció en el tiempo de vida, diciéndose que es una partícula cuando sea estable frente a las interacciones fuertes, pero pueda desintegrarse frente a interacciones débiles (duración de vida  $10^{-10}$  s) o frente a interacciones electromagnéticas (duración de vida de  $10^{-15}$  a  $10^{-20}$  s). Si la duración de vida es inferior a  $10^{-21}$  s se dice que es un estado excitado o *resonancia*, simbolizándose con la letra  $\Delta$ . Recientemente se ha abandonado esta terminología y todas se encuadran bajo la denominación de partículas.

## Leyes de conservación

Las leyes de conservación se establecen en base a las observaciones de los fenómenos naturales, tal y como se producen en la realidad. En las interacciones de partículas elementales o en la desintegración de ellas se ha comprobado que siempre se conservan las siguientes magnitudes:

1. Conservación de la energía total (cinética + reposo).
2. Conservación de la cantidad de movimiento.
3. Conservación del momento cinético total (orbital + espín).
4. Conservación de la carga eléctrica.
5. Conservación del número bariónico.

Se ha comprobado que el *número bariónico*,  $B$ , se conserva: la suma del número bariónico de las partículas iniciales debe ser igual a la suma del número bariónico de las partículas resultantes. Su valor en todos los bariones es  $+1$ , en todas sus antipartículas, antibariones,  $-1$ , y el número bariónico es nulo en los leptones, mesones y en el fotón. La necesidad de conservación del número bariónico explica la no desintegración del protón. La reacción  $p \rightarrow e^+ + \nu + \bar{\nu}$  verifica todas las leyes de la física general y sería posible, con lo cual la materia sería inestable; pero no verifica la conservación del número bariónico, ya que en el primer miembro es  $+1$  y en el segundo nulo, por tanto, el proceso no es posible.

6. Conservación del número leptónico.

El *número leptónico*,  $L$ , también debe conservarse, de forma análoga a como lo hace el número bariónico. Su valor en los leptones es  $+1$  y en sus antipartículas, antileptones, es  $-1$ , y es nulo en todos los hadrones y en el fotón. Debido a la conservación del número leptónico, es necesario que en la desintegración del neutrón se emita un antineutrino y no un neutrino; la reacción es la [53.38]:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$L = 0 = 0 + 1 - 1$$

En la cual, el número leptónico del primer miembro es nulo, también lo es el del protón, y puesto que el electrón tiene número leptónico  $+1$ , la otra partícula emitida debe tenerlo igual a  $-1$ , de forma que el número leptónico del segundo miembro también sea nulo, así pues debe emitirse un antineutrino y no un neutrino, que daría número leptónico  $+2$  para el segundo miembro. El número leptónico asociado al electrón se simboliza,  $L_e$ .

En las desintegraciones con emisión de muones que aparece el neutrino muón, debe usarse el número leptónico muón,  $L_\mu$ . Su valor es  $+1$  para el neutrino muón,  $\nu_\mu$ ,

y el muón menos,  $\mu^-$ ; tiene valor  $-1$  para el muón más,  $\mu^+$ , y el antineutrino muón,  $\bar{\nu}_\mu$  y nulo para todas las demás partículas. Un ejemplo puede ser el decaimiento del muón:

$$\begin{aligned}\mu &\rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \\ L &= 1 = 1 - 1 + 1 \\ L_e &= 0 = 1 - 1 + 0 \\ L_\mu &= 1 = 0 + 0 + 1\end{aligned}$$

En 1976 se descubrió el *leptón tau*,  $\tau^-$ , y su neutrino,  $\nu_\tau$ , a los que va asociado un nuevo número leptónico,  $L_\tau$ , el cual también debe ser conservado. Este nuevo número leptónico toma como valor  $+1$ , para el leptón  $\tau^-$  y su neutrino,  $\nu_\tau$ ; valor  $-1$ , para el  $\tau^+$  y el antineutrino tau,  $\bar{\nu}_\tau$ , y nulo en las demás partículas.

#### 7. Conservación de la paridad.

Toda partícula está representada por una función de onda, si esta no cambia al cambiar de signo a la variable, la partícula tiene paridad positiva, en caso contrario la paridad es negativa. La paridad describe el comportamiento de la partícula en situaciones simétricas. Si el fenómeno presenta paridad positiva quiere decir que el fenómeno no cambia de verlo directamente a verlo girado  $\pi$  radianes. Por ejemplo, la letra x o la H tienen paridad positiva, no así las letras b o p, las cuales al girarlas  $\pi$  radianes se transforman en la d y la q, respectivamente. *La paridad se conserva en las interacciones fuertes y en las electromagnéticas, pero no en las débiles.* Todos los nucleones tienen paridad positiva, los neutrinos negativa y los antineutrinos positiva. En los mesones la paridad está dada por  $P = -(-1)^l = (-1)^{l+1}$ . En las partículas compuestas la paridad es suma de las paridades de las componentes.

#### 8. Conservación de la extrañeza, $S$ .

Ya hemos indicado que al asignar a esta nueva propiedad los valores  $+1$ , para  $K^0$  y  $K^+$ ;  $-1$ , para  $\Lambda^0$  y  $\Sigma$ , y el signo contrario para la correspondiente antipartícula, *la extrañeza se conserva en las interacciones fuertes y electromagnéticas, pero no en las débiles.* Así podemos comprobarlo en las reacciones:

$$\begin{aligned}p + \pi^- &\rightarrow \Lambda^0 + K^0 & \text{o} & \quad n + \pi^+ \rightarrow \Lambda^0 + K^+ \\ S = 0 + 0 &= -1 + 1 & & \quad S = 0 + 0 = -1 + 1\end{aligned}$$

#### 9. Conservación del isospín.

El concepto de isospin fue establecido por Heisenberg y hace referencia a que la interacción nuclear fuerte es independiente de la carga de las partículas interactuantes. Así, la interacción entre protones, entre neutrones o entre protones y neutrones obedece a la misma formulación independiente de la carga. *El isospin se conserva únicamente en las interacciones fuertes.* El protón y el neutrón forman un grupo con una cierta simetría, por eso se les da el nombre genérico de nucleones. Este grupo (doblete) tendría isospin  $1/2$ . Otro grupo de partículas con masas también muy próximas son los piones  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  y  $\pi^0$  que forman un triplete, el cual tiene de isospin  $1$ .

El isospin se simboliza con  $I$  y su proyección sobre el eje espín con  $I_3$ . Tanto el protón como el neutrón tienen  $I = 1/2$ , pero el protón tiene  $I_3 = +1/2$  y el neutrón  $I_3 = -1/2$ . Los piones  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  y  $\pi^0$  tienen, respectivamente  $I_3 = +1$ ,  $-1$  y  $0$ .

La componente del isoespin,  $I_3$ , está relacionada con la carga, la extrañeza y el número bariónico mediante la relación:

$$I_3 = Q - 1/2(S + B) \quad [53.45]$$

10. Hipercarga.

La hipercarga es un concepto introducido por Gell-Mann y Nishijima, simbolizado por  $Y$ , y que se relaciona con el isospin y la carga mediante su fórmula:

$$Y = 2(Q - I_3) \tag{53.46}$$

Como ya indicamos, la gran similitud entre protones y neutrones llevó a considerar al conjunto de ambas partículas constituyentes de un doblete. Otras partículas también constituyen multipletes y, en concreto, hemos citado el triplete formado por los piones y podemos citar otro triplete formado por los bariones  $\Sigma$ . Una característica de los multipletes es su carga media  $\langle Q \rangle$ , que es la media de las cargas de las partículas que le componen, medidas en unidades  $e$ . Puesto que esta media es con mucha frecuencia un número semientero, se estableció un nuevo número cuántico, denominado hipercarga,  $Y$ , cuyo valor es  $Y = 2 \langle Q \rangle$ . Expresión que no es más que el valor medio de la fórmula anterior, ya que en el multiplete siempre es  $\langle I_3 \rangle = 0$ .

La hipercarga también podemos relacionarla con la extrañeza, con solo sustituir en [53.46] el valor  $2(Q - I_3)$  obtenido de [53.45]:

$$Y = B + SK \tag{53.47}$$

**53.19 Clasificación de partículas**

Del conjunto de partículas se hizo una primera clasificación en función del tipo de interacción en la que participaban y de su espín, pudiendo establecerse tres categorías: *fotones*, *leptones* y *hadrones*.

Los *fotones* son partículas sometidas únicamente a interacciones electromagnéticas y de espín unidad.

Los *leptones* son todas las partículas sensibles a la interacción nuclear débil, aunque algunas también pueden sufrir interacciones electromagnética, todas ellas tienen de espín 1/2.

Los *hadrones* son todas las partículas afectadas por la interacción nuclear fuerte, aunque también pueden estar afectadas por la interacción nuclear débil y por la electromagnética. Dentro de estas cabe distinguir tres familias: los *mesones*, los *bariones* y los *hiperones*. Los mesones son hadrones de espín nulo o entero, mientras que los bariones son hadrones de espín 1/2 y los hiperones de espín semientero y más pesados que el neutrón.

**53.20 Los quarks**

La gran abundancia de partículas fundamentales llevó a pensar si habría otras, en número más reducido, que serían componentes básicas de las otras y a las que se denominaría partículas elementales al no estar compuestas por ninguna otra. En 1961, Gell-Mann y Neemann pensaron que, análogamente a las periodicidades encontradas en los elementos, también entre la gran cantidad de partículas descubiertas podían existir ciertas agrupaciones. Enseguida encontraron que, tomando en un eje el valor de la extrañeza y en otro eje, formando con el anterior un ángulo de 60°, el valor de la carga, se encontraban agrupaciones de aproximadamente igual masa, que en los mesones y bariones ligeros formaban octetes y en los bariones más pesados un decuplete (Figura 53.16). Análogamente a lo que pasó con la tabla periódica de los elementos, aquí también quedaron huecos, que sirvieron para predecir la existencia de partículas, como la  $\eta$  y la  $\Omega^-$ , que posteriormente fueron descubiertas.

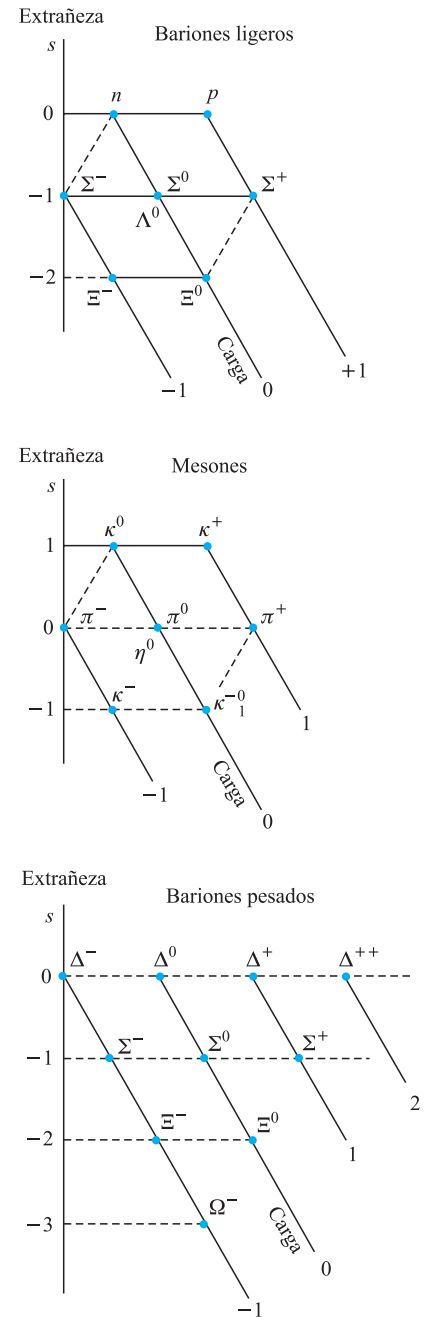
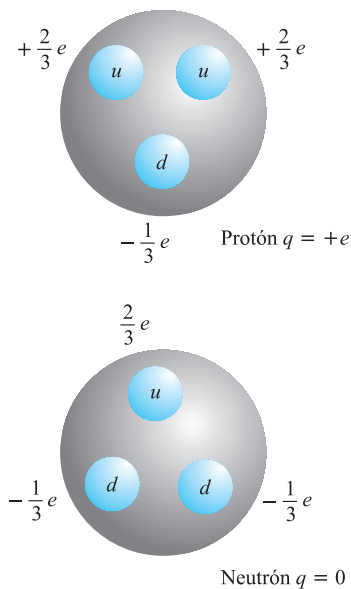


Figura 53.16. Agrupamiento de partículas fundamentales



**Figura 53.17.** Configuración de quarks en protones y neutrones.

A principios de 1964, Gell-Mann y Zweig, de forma independiente, se dieron cuenta de que las propiedades de las partículas conocidas y su comportamiento podía ser explicado suponiendo que estaban compuestas de otras partículas más elementales, a las que Gell-Mann denominó *quarks*. En un principio establecieron la necesidad de tres quarks, a los que denominaron: *up*, *u* (arriba); *down*, *d* (abajo), y *strange*, *s* (extraño), con sus correspondientes antiquarks. *Up* tiene su espín hacia arriba, *down*, hacia abajo, y *strange*, sería constituyente de las partículas extrañas y responsable de su anómalo comportamiento. Los mesones estarían formados por parejas quark-antiquark y los bariones por cualquier terna entre quarks y antiquarks. Así, por ejemplo, el protón estaría formado por dos quarks *up* y uno *down*, (*uud*), mientras que el neutrón estaría formado por un quark *up* y dos *down*, (*udd*) (Figura 53.17).

Para formar mesones sólo habría nueve configuraciones distintas, lo que casaba muy bien con el octete más un singlete encontrado; lo mismo sucedía con los bariones, sólo se pueden formar 27 grupos de tres entre las seis partículas quark y antiquark, que serían los dos octetes, un decuplete y un singlete encontrados. Los quarks debían tener carga fraccionaria de la del electrón: los *u*,  $2/3$  de *e* y los *d*, y *s*,  $-1/3$  de *e*. Con ello, la carga del protón sería  $2/3e + 2/3e - 1/3e = e$  y la del neutrón  $2/3e - 1/3e - 1/3e = 0$ .

Los quarks no tienen existencia libre solamente dentro de los hadrones. La mayor objeción fue que los quarks debían tener espín semientero, es decir, debían ser fermiones y obedecer al principio de exclusión, lo que hacía imposible construir bariones con dos quarks iguales. Greenberg propuso obviar la dificultad estableciendo una nueva estadística y admitiendo que los quarks no obedecían ni a la estadística de Fermi, ni a la de Bose. Otra propuesta, que ha prevalecido, fue realizada, en 1965, por Moo-Young Han y Yoichiro Nambu, según la cual, en los quarks había que considerar una nueva propiedad, que denominaron *color*, la cual se presentaba en tres estados: *rojo*, *amarillo* y *azul*. Los antiquarks serían portadores de los anticolores: *antirrojo*, *antiamarillo* y *antiazul*. El principio de exclusión de Pauli se aplicaría a los colores.

En 1968 comenzaron a realizarse en Stanford, y a partir de 1970 en el CERN, experiencias encaminadas a descubrir la estructura interna de los protones, para ello se les bombardeaba con haces de electrones de alta energía y posteriormente con haces de neutrinos. La dispersión puso de manifiesto la existencia dentro del protón de pequeñísimos corpúsculos que actuaban como centros de dispersión, con radio inferior a  $10^{-19}$  m, de espín semientero y carga fraccionaria de la del electrón.

En 1974, dos grupos de investigadores, uno del MIT y otro de Stanford, de forma independiente descubrieron la misma partícula, su espín era 1, se trataba de un mesón, que los primeros la denominaron *J* y los segundos  $\Psi$ , por lo que durante mucho tiempo se la denominó *J/Ψ* y actualmente sólo  $\Psi$ . La nueva partícula no tiene carga, su masa es unas tres veces la del protón, su extrañeza es nula y su vida media del orden de  $10^{-20}$  s. Para explicar su existencia fue necesario postular la existencia de un nuevo quark, el *charm* (encanto), *c*, de carga  $2/3 e$ ; la partícula  $\Psi$  estaría formada por el quark *c* y su antiquark  $\bar{c}$ ,  $\Psi(c \bar{c})$ , por lo cual su encanto sería nulo.

También en el acelerador lineal de Stanford (SLAC), en 1976, apareció una nueva partícula, que denominaron,  $D^0$ , compuesta por un quark *u* y un antiquark  $\bar{c}$ ,  $D^0(u \bar{c})$ , se trataba del primer mesón con encanto; inmediatamente se encontró al mesón  $D^+$  y su antipartícula  $D^-$ . Este mismo año y en el mismo laboratorio fue descubierto el leptón tau,  $\tau$ , con carga  $-e$  y masa  $1777 \text{ MeV}/c^2$ . En 1977, aparecieron los mesones  $F^0$  y  $F^+$ , con masas aproximadas de  $2,03$  y  $2,14 \text{ GeV}/c^2$ , y el grupo de Lederman, en el Fermilab, descubría un quinto quark, el *bottom* (fondo, base o belleza), *b*, de carga  $-1/3 e$ , así como una nueva partícula, que denominaron

Ípsilon  $\Upsilon$ , que estaba formada por el quark belleza y su antiquark,  $\Upsilon(b\bar{b})$ , la cual no poseería belleza. Sería necesario esperar hasta marzo de 1995, para que en el Tevatrón del Fermilab apareciera el sexto quark, el *top* (cima), *t*, con carga  $2/3e$  y una masa del orden de  $175 \text{ GeV}/c^2$ . Quedaba así completado el Modelo Standard propuesto por Gell-Mann y Fritsch, en 1974. En la Tabla 53.3 se presentan los seis quarks indicando alguna de sus propiedades

En la Tabla 53.4 se relacionan las partículas elementales con indicación de sus propiedades más importantes y los quarks que los componen.

**Tabla 53.3.** Quarks.

Quark	Símbolo	Masa ( $\text{GeV}/c^2$ )	Carga $e$	espín	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>t</i>	<i>B</i>
<i>Up</i> (arriba)	<i>u</i>	0,0036	2/3	1/2	0	0	0	0	1/3
<i>Down</i> (abajo)	<i>d</i>	0,006	-1/3	1/2	0	0	0	0	1/3
<i>Charm</i> (encanto)	<i>c</i>	1,25	2/3	1/2	0	1	0	0	1/3
<i>Strange</i> (extraño)	<i>s</i>	0,15	-1/3	1/2	-1	0	0	0	1/3
<i>Top</i> (cima)	<i>t</i>	175	2/3	1/2	0	0	0	1	1/3
<i>Bottom</i> (fondo)	<i>b</i>	4,2	-1/3	1/2	0	0	1	0	1/3

**Tabla 53.4.** Partículas fundamentales.

Clase	Partícula	Símbolo	Masa $\text{MeV}/c^2$	Carga/ $e$	Antipartícula	Spin	<i>B</i>	<i>S</i>	Vida media	Quarks
<b>FOTÓN</b>										
	Fotón	$\gamma$	0	0	$\gamma$	1	0	0	estable	
<b>LEPTONES</b>										
	Electrón	$e^-$	0,511	-1	$e^+$	1/2		0	estable	
	Neutrino- <i>e</i>	$\nu_e$	$<7 \times 10^{-9}$	0	$\bar{\nu}_e$	1/2	0	0	estable	
	Muón	$\mu^-$	105,8	-1	$\mu^+$	1/2	0	0	$2,20 \times 10^{-6}$	
	Neutrino- $\mu$	$\nu_\mu$	$<0,2$	0	$\bar{\nu}_\mu$	1/2	0	0	estable	
	Tau	$\tau^-$	1777	-1	$\tau^+$	1/2	0	0	$2,91 \times 10^{-13}$	
	Neutrino- $\tau$	$\nu_\tau$	$<20$	0	$\bar{\nu}_\tau$	1/2	0	0	estable	
<b>HADRONES</b>										
<b>Mesones</b>										
	PiÓN $\pi^+$	$\pi^+$	139,6	1	$\pi^-$	0	0	0	$2,60 \times 10^{-8}$	$u\bar{d}$
	PiÓN $\pi^0$	$\pi^0$	135	0	$\pi^0$	0	0	0	$0,84 \times 10^{-16}$	
	Kaón mas	$K^+$	493,7	1	$K^-$	0	0	1	$1,24 \times 10^{-8}$	$u\bar{s}$
	Kaón neutro	$K^0$	497,7	0	$\bar{K}^0$	0	0	1	$8,9 \times 10^{-11}$	$d\bar{s}$
	Eta neutro	$\eta^0$	548,8	0	$\eta^0$	0	0	0	$5 \times 10^{-19}$	
	Rho neutro	$\rho^0$	775,8	0	$\bar{\rho}^0$	1	0	0	$0,4 \times 10^{-23}$	$u\bar{u}$
	Rho mas	$\rho^+$	776	1	$\rho^-$	1	0	0	$0,4 \times 10^{-23}$	$u\bar{d}$
	Omega neutra	$\omega^0$	782,6	0	$\bar{\omega}^0$	0	0	0	$0,4 \times 10^{-23}$	$u\bar{u}$
	Phi	$\phi$	1019,5			1	0	0	$16 \times 10^{-23}$	$s\bar{s}$
	D neutro	$D^0$	1865	0	$\bar{D}^0$	0	0	0	$4 \times 10^{-23}$	$c\bar{u}$
	D mas	$D^+$	1869,5	1	$D^-$	0	0	0	$1,04 \times 10^{-12}$	$c\bar{d}$
	D extraño	$D_s^+$	1968,2	1	$D_s^-$	0	0	1	$4,9 \times 10^{-13}$	$c\bar{s}$
	Psi	$\psi$	3097	0	$\bar{\psi}$	1	0	0	$7,2 \times 10^{-13}$	$c\bar{c}$
	B mas	$B^+$	5279	1	$B^-$	0	0	0	$1,63 \times 10^{-12}$	$u\bar{b}$
	B neutro	$B^0$	5279,4	0	$\bar{B}^0$	0	0	0	$1,53 \times 10^{-12}$	$d\bar{b}$
	B extraño	$B_s^0$	5369,6	0	$\bar{B}_s^0$	0	1	-1	$1,46 \times 10^{-12}$	$s\bar{b}$
	B encantado	$B_c^+$	6400	1	$B_c^-$	0	1	0	$4,6 \times 10^{-13}$	$c\bar{b}$
	Ípsilon	$\Upsilon$	9460		$\Upsilon$	0	0	0	$1,3 \times 10^{-20}$	$b\bar{b}$

Tabla 53.4. Partículas fundamentales (continuación).

Clase	Partícula	Símbolo	Masa MeV/c <sup>2</sup>	Carga/e	Antipartícula	Spin	B	S	Vida media	Quarks
<b>Bariones</b>	Protón	$p$	938,28	1	$\bar{p}$	1/2	1	0	$> 10^{32}$	$uud$
	Neutrón	$n$	939,58	0	$\bar{n}$	1/2	1	0	898	$udd$
<b>Hiperones</b>	Delta ++	$\Delta^{++}$	1230	2		3/2	1	0	$6 \times 10^{-24}$	$uuu$
	Delta mas	$\Delta^+$	1230	1		3/2	0	0	$6 \times 10^{-24}$	$uud$
	Delta neutra	$\Delta^0$	1230	0		3/2	0	0	$6 \times 10^{-24}$	$udd$
	Delta menos	$\Delta^-$	1230	-1		3/2	0	0	$6 \times 10^{-24}$	$ddd$
	Lambda neutro	$\Lambda^0$	1116	0	$\Lambda^0$	1/2	1	-1	$2,63 \times 10^{-10}$	$uds$
	Lambda-c mas	$\Delta^+ c$	2285	1		1/2	1	0	$2 \times 10^{-13}$	$udc$
	Sigma mas	$\Sigma^+$	1189,5	1	$\Sigma^-$	1/2	1	-1	$8 \times 10^{-11}$	$uus$
	Sigma neutro	$\Sigma^0$	1192,5	0	$\Sigma^0$	1/2	1	-1	$7,4 \times 10^{-19}$	$uds$
	Sigma menos	$\Sigma^-$	1197,5	-1	$\Sigma^+$	1/2	1	-1	$1,48 \times 10^{-10}$	$dds$
	Xi neutro	$\Xi^0$	1315	0	$\Xi^0$	1/2	1	-2	$2,90 \times 10^{-10}$	$uss$
	Xi menos	$\Xi^-$	1321	-1	$\Xi^+$	1/2	1	-2	$1,64 \times 10^{-10}$	$dss$
	Xi mas c	$\Xi c^+$	2468	1		1/2	0	-1	$4,42 \times 10^{-13}$	$usc$
	Xi neutro c	$\Xi c^0$	2471	0		1/2	0	-1	$1,12 \times 10^{-13}$	$dsc$
	Omega menos	$\Omega^-$	1672,5	-1	$\Omega^+$	3/2	1	-3	$8,22 \times 10^{-11}$	$sss$
Omega neutro c	$\Omega c^0$	2697,5	0		1/2	0	-2	$6,9 \times 10^{-14}$	$ssc$	

### 53.21 Interacciones

Ante el cúmulo de partículas y fenómenos observados se hizo necesario desarrollar teorías que dieran explicación racional a los hechos experimentales. A comienzos del siglo XX, Dirac unificó el electromagnetismo de Maxwell y la Mecánica cuántica, en una teoría conocida como Electrodinámica cuántica (QED), que fue posteriormente desarrollada por Feynman, la cual describe las interacciones entre partículas cargadas, siendo el fotón la partícula encargada de transmitir las acciones.

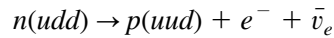
#### Interacción fuerte

Ya en 1956, Chen Puig Yang y Robert Mills establecieron que la interacción nuclear fuerte era independiente de la carga de los nucleones. La teoría conocida como Cromodinámica cuántica (QCD) establece que la interacción fuerte sólo actúa entre quarks y antiquarks que tengan color y la acción únicamente depende de esta propiedad. La partícula transmisora, que haría el papel análogo al fotón en la (QED) se denominó *gluón*, el cual también es sensible a la interacción fuerte, lo que indica que también tiene color. Ninguna otra partícula es sensible a esta interacción. Todo gluón tiene un color y un anticolor, pero sólo hay seis tipos de gluones distintos, ya que un color y su anticolor da color neutro y no sería un gluón, ya que estos deben tener color. La QCD fue desarrollada por Politzer, Wilczek y Gross, por lo que recibieron el Premio Nobel de Física de 2004. La interacción fuerte es responsable de mantener unidos a los quarks dentro de los hadrones, pero al no tener estos color no actúa sobre ellos. La fuerza nuclear fuerte que mantiene unidos a protones dentro del núcleo es considerada como una interacción fuerte residual. Quedaba así superada la vieja teoría de Yukawa de 1935.

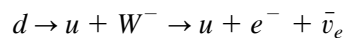


## Interacción débil

La interacción débil es una fuerza de cortísimo alcance que se estableció como necesaria para explicar la desintegración  $\beta$  y que actúa mediante partículas, denominadas *bosones*, las cuales ejercen una función análoga a los fotones en la interacción electromagnética. En la desintegración  $\beta$  un neutrón decae en un protón, un electrón y un antineutrino:



En el fondo lo que ha sucedido es que un quark  $d$  se ha transformado en uno  $u$  con emisión de un boson  $W$ , el cual luego decae en un electrón y un antineutrino:



En general, cualquier quark puede convertirse en otro absorbiendo o emitiendo un boson  $W$ .

## Interacción electrodébil

La teoría electrodébil fue desarrollada por Weinberg, Glashow y Salam, por lo que recibieron el Premio Nobel de 1979. Esta teoría unifica la electrodinámica cuántica y la teoría de la interacción débil. El hecho de que esta fuerza electrodébil aparezca en la naturaleza desdoblada en dos se denomina *ruptura de la simetría electrodébil*. Las partículas que actúan como transmisoras de la interacción débil son los bosones  $W^+$  y  $W^-$ , además, la teoría predice la existencia de un boson neutro,  $Z^0$  y de otro boson, de masa relativamente alta, denominado de Higgs, el cual puede explicar la elevada masa de los bosones  $W$ . Cuando una partícula choca con su antipartícula ambas se aniquilan, es decir, desaparecen las dos, pero su energía debe aparecer en forma de fotones, bosones o gluones. Cuando un quark choca con su antiquark ambos desaparecen dando lugar a un boson  $W$ . Los bosones  $W$  y  $Z$  han sido ampliamente estudiados por Carlos Rubbia y Van der Meer en el CERN, lo que les valió el Premio Nobel de 1984. El boson de Higgs aún no ha sido detectado. En la Tabla 53.5 se recogen los bosones con algunas de sus propiedades.

**Tabla 53.5.** Bosones.

Boson	Símbolo	Masa (GeV/c <sup>2</sup> )	Carga ( $e$ )	Espín	Color	Vida media
Fotón	$\gamma$	0	0	1	0	estable
Boson	$W^+$	81,8	+1	1	0	$3 \times 10^{-25}$
Boson	$W^-$	81,8	-1	1	0	$3 \times 10^{-25}$
Boson	$Z^0$	92,6	0	1	0	$3 \times 10^{-25}$
Gluón	$g$	0	0	1	1	estable

## 53.22 Modelo Standard

Este modelo fue expuesto por primera vez, en 1974, en una conferencia por John Lliopoulos. En él se establece que las únicas partículas elementales, es decir, que no están compuestas por ninguna otra, son solamente los seis leptones y los seis quarks, con sus correspondientes antipartículas. A ellas hay que añadir las partículas que ejercen la función de transmisión de las fuerzas, es decir, los cuatro bosones. Todas ellas han sido recogidas en la Tabla 53.6.

**Tabla 53.6.** Partículas elementales.

<b>Leptones</b>			
Electrón, $e$	Muón, $\mu$	Tau, $\tau$	
Neutrino electrón, $\nu_e$	Neutrino muón, $\nu_\mu$	Neutrino tau, $\nu_\tau$	
<b>Quarks</b>			
Arriba, $u$	Encanto, $c$	Cima, $t$	
Abajo, $d$	Extraño, $s$	Fondo, $b$	
<b>Partículas transmisoras de fuerzas</b>			
Fotón, $\gamma$	Gluón, $g$	Boson, $W$	Boson, $Z^0$

Con estas partículas elementales se puede construir toda la materia. Para completar el Modelo Standard únicamente nos quedaría considerar las acciones que se ejercen las distintas partículas y quienes son las partículas transmisoras de las distintas interacciones, las cuales permiten mantener la estabilidad de las estructuras materiales. Las distintas interacciones, las partículas sensibles y las transmisoras han sido recogidas en la Tabla 53.7.

**Tabla 53.7.** Interacciones y sus propiedades.

	<b>Fuerte</b>		<b>Electrodébil</b>		<b>Gravitacional</b>
	<b>Fundamental</b>	<b>Residual</b>	<b>Electromagnética</b>	<b>Débil</b>	
Partículas sensibles	Quarks y gluones	Hadrones	Partículas cargadas	Quarks y leptones	Todas
Partículas transmisoras	Gluones	Mesones	Fotones	Bosones	Gravitones
Fuerza relativa	25	20	1	0,8	$10^{-41}$
Alcance	$10^{-15}$	$10^{-10}$	infinito	$10^{-16}$	infinito

# Sistema Internacional de Unidades (SI)

APÉNDICE

# A

- A.1. Magnitudes fundamentales y sus unidades
- A.2. Símbolos de los múltiplos y submúltiplos de la unidad
- A.3. Unidades derivadas directamente de las fundamentales, sin símbolo propio
- A.4. Otras unidades con nombre propio, sus símbolos y relaciones
- A.5. Otras unidades derivadas sin símbolo propio
- A.6. Otras unidades que no pertenecen al SI

## A.1 Magnitudes fundamentales y sus unidades

Magnitud	Unidad	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente eléctrica	amperio	A
Temperatura	grado	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

### Definiciones de las unidades fundamentales

#### Metro:

Longitud recorrida por la luz en el vacío durante el tiempo de 1/299 792 458 segundos.

#### Kilogramo:

Es la masa del prototipo internacional.

#### Segundo:

Duración de 9 192 631 770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre dos niveles hiperfinos del estado base del átomo de cesio 133.

#### Amperio:

Es la intensidad de la corriente eléctrica, que mantenida constante en dos conductores rectilíneos, paralelos, de longitud infinita, con sección recta circular despreciable y colocados en el vacío a la distancia entre sí de un metro, produce entre ambos conductores la fuerza de  $2 \times 10^{-7}$  newtons por metro de longitud.

#### Grado de temperatura:

Es la fracción 1/273,16 de la temperatura del punto triple del agua.

**Mol:**

Es la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos hay en 0,012 kilogramos de carbono 12.

**Candela:**

Es la intensidad luminosa, en una dirección, de una fuente que emite radiación monocromática de frecuencia  $540 \times 10^{12}$  hercios y que tiene una intensidad radiante en esa dirección de 1/683 vatios por estereadian.

**A.2****Símbolos de los múltiplos y submúltiplos de la unidad**

Nombre	Símbolo	Factor
Yotta	Y	$10^{24}$
Zetta	Z	$10^{21}$
Exa	E	$10^{18}$
Peta	P	$10^{15}$
Tera	T	$10^{12}$
Giga	G	$10^9$
Mega	M	$10^6$
Kilo	K	$10^3$
Hecto	H	$10^2$
Deca	D	10
deci	d	$10^{-1}$
centi	c	$10^{-2}$
mili	m	$10^{-3}$
micro	$\mu$	$10^{-6}$
nano	n	$10^{-9}$
pico	p	$10^{-12}$
femto	f	$10^{-15}$
atto	a	$10^{-18}$
zepto	z	$10^{-21}$
yocto	y	$10^{-24}$

**A.3****Unidades derivadas directamente de las fundamentales, sin símbolo propio**

Magnitud	Unidad	Relación
Área	metro cuadrado	$m^2$
Volumen	metro cúbico	$m^3$
Velocidad	metro por segundo	m/s
Aceleración	metro por segundo cuadrado	$m/s^2$
Número de onda	inversa del metro	$m^{-1}$
Densidad	kilogramo por metro cúbico	$kg/m^3$
Volumen específico	metro cúbico por kilogramo	$m^3/kg$
Densidad de corriente	amperio por metro cuadrado	$A/m^2$
Concentración	mol por metro cúbico	$mol/m^3$
Luminancia	candela por metro cuadrado	$cd/m^2$

### A.4 Otras unidades con nombre propio, sus símbolos y relaciones

Magnitud	Unidad	Símbolo	Relación
Ángulo plano	radian	rad	
Ángulo sólido	esterradián	sr	
Frecuencia	hertz	Hz	$s^{-1}$
Fuerza	newton	N	$m \cdot kg \cdot s^{-1}$
Presión, tensión	pascal	Pa	$N \cdot m^{-2} = kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$
Energía, trabajo	joule	J	$N \cdot m = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$
Potencia	vatio	W	$J \cdot s^{-1} = kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$
Grado Celsius	grado	°C	K
Cantidad de electricidad	culombio	C	$A \cdot s$
Potencial eléctrico	voltio	V	$W \cdot A = kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Capacidad	faradio	F	$C/V = kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Conductancia eléctrica	siemens	S	$A/V = kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^3 \cdot A^2$
Resistencia eléctrica	ohmio	$\Omega$	$V/A = kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Flujo magnético	weber	Wb	$V \cdot s = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Densidad de flujo magnético	tesla	T	$Wb \cdot m^{-2} = kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Inductancia	henrio	H	$Wb \cdot A^{-1} = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
Flujo luminoso	lumen	lm	$cd \cdot sr$
Illuminación	lux	lx	$lm \cdot m^{-2} = cd \cdot sr \cdot m^{-2}$
Actividad radiactiva	becquerel	Bq	$s^{-1}$
Dosis absorbida	gray	Gy	$J \cdot kg^{-1} = m^2 \cdot s^{-2}$
Dosis equivalente	sievert	Sv	$J \cdot kg^{-1} = m^2 \cdot s^{-2}$

### A.5 Otras unidades derivadas sin símbolo propio

Magnitud	Unidad	Relación
Velocidad angular	radian por segundo	rad/s
Aceleración angular	radian por segundo cuadrado	rad/s <sup>2</sup>
Momento de una fuerza	newton metro	N · m
Tensión superficial	newton por metro	N/m
Viscosidad cinemática	metro cuadrado por segundo	m <sup>2</sup> /s
Viscosidad dinámica	pascal segundo	Pa · s
Densidad de energía	julio por metro cúbico	J/m <sup>3</sup>
Irradiancia	vatio por metro cuadrado	W/m <sup>2</sup>
Intensidad de energía radiante	vatio por esteradian	W/sr
Entropía	julio por grado	J/K
Densidad superficial de carga	culombio por metro cuadrado	C/m <sup>2</sup>
Densidad espacial de carga	culombio por metro cúbico	C/m <sup>3</sup>
Permitividad	faradio por metro	F/m
Permeabilidad	henrio por metro	H/m

## A.6 Otras unidades que no pertenecen al SI

Nombre	Símbolo	Valor
Minuto	min	60 s
Hora	h	60 min = 3600 s
Grado (ángulo)	°	$(\pi/180)$ rad
Minuto (ángulo)	'	$(1/60)^\circ = (\pi/10\ 800)$ rad
Segundo (ángulo)	"	$(1/60)^\circ = (\pi/648\ 000)$ rad
Milla náutica		1852 m
Nudo	'	milla/h = 1852/3600 m/s
Ángstrom	Å	$10^{-10}$ m
Unidad astronómica	ua	$1,49598 \times 10^{11}$ m
Área	a	100 m <sup>2</sup>
Hectárea	ha	100 a = 10 000 m <sup>2</sup>
Litro	L	1 dm <sup>3</sup> = $10^{-3}$ m <sup>3</sup>
Tonelada métrica	t	10 <sup>3</sup> kg
Unidad de masa atómica	u	$1,660\ 54 \times 10^{-27}$ kg
Bar	bar	10 <sup>5</sup> Pa
Electrón voltio	eV	$1,602\ 18 \times 10^{-19}$ J
Curio	Ci	$3,7 \times 10^{10}$ Bq
Roentgen	R	$2,58 \times 10^{-4}$ C/kg
Rad	rad	10 <sup>-2</sup> Gy
Rem	rem	10 <sup>-2</sup> Sv

# Constantes físicas fundamentales

APÉNDICE

B

A continuación damos los valores de las constantes físicas fundamentales recomendados por CODATA (Comité de Datos para la Ciencia y la Tecnología), denominados «CODATA-2006», que a partir de Marzo de 2007 remplazan a los valores «CODATA-2002».

Constante	Símbolo	Valor	Unidad	Incertidumbre
Velocidad de la luz en el vacío	$c$	299 792 458	m/s	exacto
Constante magnética	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7}$	$\text{N} \cdot \text{A}^{-2}$	exacto
Constante eléctrica	$\epsilon_0$	$(\mu_0 c^2)^{-1}$	$\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$	exacto
Constante de la gravitación	$G$	$6,674\ 28 \times 10^{-11}$	$\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	$67 \times 10^{-16}$
Unidad de masa atómica	$u$	$1,660\ 538\ 782 \times 10^{-27}$	kg	$83 \times 10^{-36}$
Constante de los gases perfectos	$R$	8,314 472	$\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	$15 \times 10^{-6}$
Carga elemental	$e$	$1,602\ 176\ 487 \times 10^{-19}$	C	$40 \times 10^{-28}$
Masa del electrón	$m_e$	$9,109\ 382\ 15 \times 10^{-31}$	kg	$45 \times 10^{-39}$
Masa del neutrón	$m_n$	$1,674\ 927\ 211 \times 10^{-27}$	kg	$84 \times 10^{-36}$
Masa del protón	$m_p$	$1,672\ 621\ 637 \times 10^{-27}$	kg	$83 \times 10^{-36}$
Constante de Planck	$\hbar$	$6,626\ 068\ 96 \times 10^{-34}$	$\text{J} \cdot \text{s}$	$33 \times 10^{-42}$
Constante de Planck ( $\hbar/2\pi$ )	$h$	$1,054\ 571\ 628 \times 10^{-34}$	$\text{J} \cdot \text{s}$	$53 \times 10^{-43}$
Número de Avogadro	$N_A$	$6,022\ 141\ 79 \times 10^{23}$	$\text{mol}^{-1}$	$30 \times 10^{15}$
Constante de Faraday	$F$	96 485,339 9	$\text{C} \cdot \text{mol}^{-1}$	$24 \times 10^{-4}$
Constante de Boltzmann	$k$	$1,380\ 650\ 4 \times 10^{-23}$	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$	$24 \times 10^{-30}$
Constante de Stefan – Boltzmann	$\sigma$	$5,670\ 400 \times 10^{-8}$	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	$40 \times 10^{-14}$





- C.1. Coordenadas cartesianas
- C.2. Coordenadas cilíndricas

### C.1 Coordenadas cartesianas:

Vector «nabla»

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

Gradiente de una función escalar  $\phi = \phi(x, y, z)$

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \mathbf{k}$$

Divergencia de una función vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Rotacional de una función vectorial

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Laplaciano de una función escalar

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

Laplaciano de una función vectorial

$$\nabla^2\mathbf{F} = \nabla^2 F_x \mathbf{i} + \nabla^2 F_y \mathbf{j} + \nabla^2 F_z \mathbf{k}$$

**C.2** Coordenadas cilíndricas

Gradiente

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \mathbf{k}$$

Divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Rotacional

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_\theta & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix}$$

Laplaciano

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

# Coordenadas esféricas

## APÉNDICE

# D

- D.1. Relación con las coordenadas cartesianas
- D.2. Elemento de volumen
- D.3. Gradiente
- D.4. Divergencia
- D.5. Rotacional
- D.6. Laplaciano
- D.7. Operadores cuánticos

### D.1 Relación con las coordenadas cartesianas

---

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{z}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

### D.2 Elemento de volumen

---

$$dV = r^2 \operatorname{sen} \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

### D.3 Gradiente

---

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \mathbf{u}_\phi$$

### D.4 Divergencia

---

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial(F_\theta \operatorname{sen} \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$$

### D.5 Rotacional

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r\mathbf{u}_\theta & r \operatorname{sen} \theta \mathbf{u}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r & rF_\theta & r \operatorname{sen} \theta F_\varphi \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \left[ \frac{\partial(F_\varphi \operatorname{sen} \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} \right] \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rF_\varphi)}{\partial r} \right] \mathbf{u}_\theta + \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{u}_\varphi \end{aligned}$$

### D.6 Laplaciano

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \operatorname{sen} \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

### D.7 Operadores cuánticos

Operador  $L(L_x, L_y, L_z)$

$$L_x = -i h \left( \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$L_y = -i h \left( -\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$L_z = -i h \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Operador  $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 =$

$$= -h^2 \left[ \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

**A**

Aberraciones  
 cromática, 302  
 esférica, 299  
 geométrica, 299  
 Absorción, 428  
 de la radiación, 503  
 Actividad, 561  
 óptica, 342  
 Admitancia compleja, 184  
 Aerogeneradores, 198  
 Agujeros negros, 409, 412  
 Aisladores, 4  
 Alternador, 196  
 Ámbar, 3  
 Ampère, 124, 144  
 Amperio, 141, 593  
 Amundsen, 217  
 Analizador, 337  
 Analogías electromecánicas, 171  
 Anderson, 126  
 Ångstrom, 596  
 Ángulo  
 de desviación, 264, 323  
 de incidencia, 254  
 de reflexión, 264  
 de refracción, 254  
 límite, 245  
 sólido, 21  
 Anillos  
 de Einstein, 410  
 de Newton, 314  
 Aniquilación, 580  
 Ánodo, 419  
 Antiferromagnéticas, 215  
 Antimateria, 580  
 Antineutrino, 572, 582

Antiprotón, 581  
 Antiquarks, 588  
 Aplanatismo, 252  
 Área, 596  
 Armadura, 46  
 Asociación  
 de condensadores, 50  
 de generadores, 116  
 Astigmatismo, 300  
 Aumento  
 angular, 274  
 lateral, 273  
 Auroras boreales, 218  
 Autoinducción, 162, 175  
 Avogadro, 7

**B**

Bar, 596  
 Bariones, 587  
 Barrera de potencial, 456  
 Becquerel, 545, 595  
 Bednorz, 92  
 Bethe, 577  
 Biáxicos, 333  
 Biot, 124  
 Biprisma, 305  
 Birrefringencia, 333, 334  
 Blanco patrón, 354  
 Bobina toroidal, 145  
 Bohr, 428  
 Boltzmann, 513  
 Bomba atómica, 575  
 Bombeo óptico, 509  
 Bombilla incandescente, 103  
 Born, 424  
 Bose, 498

Bosones, 498, 591  
 Botella magnética, 127  
 Brackett, 431  
 Bragg, 419  
 Bremsstrahlung, 419  
 Brewster, 332  
 Brillo, 351

## C

Cable coaxial, 96, 148  
 Cambio de fase, 330  
 Camino óptico, 246  
 Campo  
   eléctrico, 11, 72, 131  
   imanador, 199  
   magnético, 124, 131, 199  
 Candela, 348, 593  
 Capa, 489  
 Capacidad, 43  
 Captura radiactiva, 565  
 Carga  
   eléctrica, 5  
   elemental, 8, 597  
   equivalente, 200  
 Cargas de polarización, 69  
 Cátodo, 419  
 Central hidroeléctrica, 196  
 Centrales  
   eólicas, 197  
   fototérmicas, 197  
   fotovoltáicas, 197  
   geotérmicas, 197  
   nucleares, 197  
   solares, 197  
   térmicas, 196  
 Chadwick, 9, 546  
 Ciclo  
   de histéresis, 207  
   del carbono, 577  
   protón-protón, 577  
 Ciclotrón, 127  
 Cinturones de Van Allen, 127  
 Circuito  
   eléctrico, 86  
   magnético, 210  
 Circulación de un campo, 22  
 Coeficiente de autoinducción, 162  
 Coeficientes tricromáticos, 355  
 Coercitividad, 207  
 Colón, 216  
 Color, 345  
 Colores primarios, 353  
   aditivos, 354  
   sustractivos, 354  
 Colorimetría, 353  
 Coma, 300  
 Compensador de Babinet, 339  
 Compton, 415, 420  
 Condensado Bose-Einstein, 512  
 Condensador, 46  
   equivalente, 50  
 Condición  
   de Bragg, 419  
   de coherencia, 303  
   de normalización, 445  
   de ortonormalidad, 471  
 Condiciones de contorno, 72, 226  
 Conducción, 92  
 Conductancia, 184  
 Conductividad eléctrica, 88  
 Conductores, 4  
 Confinamiento, 578  
   inercial, 578  
 Conservación  
   de la energía, 196  
   de la masa-energía, 388  
 Constante  
   de Boltzmann, 518, 597  
   de Curie, 206  
   de decaimiento, 561  
   de estructura fina, 434  
   de Faraday, 597  
   de Hubble, 369  
   de la gravitación, 597  
   de los gases perfectos, 597  
   de Planck, 417, 597  
   ( $h/2\pi$ ), 597  
   de Rydberg, 431  
   de Stefan-Boltzmann, 597  
   de tiempo, 120  
   eléctrica, 597  
   Hall, 132  
   magnética, 597  
   radiactiva, 561  
 Contracción de longitudes, 364  
 Corriente  
   alterna, 173  
   continua, 86  
   de desplazamiento, 223  
   de Foucault, 159  
   derivada, 114  
   eléctrica, 85  
   equivalente, 200  
 Corrimiento gravitacional, 411  
   hacia el rojo, 409  
 Coulomb, 5  
 Crecimiento epitaxial, 511  
 Cristal uniáxico, 333  
 Cromaticidad, 353  
 Cromodinámica cuántica, 590  
 Cuadrivectores, 374  
   cantidad de movimiento, 381  
   fuerza, 385  
 Cuantización espacial, 489

Cuantos, 416  
 Culombio, 5, 595  
 Curie, 559, 568  
 Curio, 596  
 Curva de imanación, 207  
 Curvatura del campo, 301

## D

Datación radioactiva, 563  
 Davisson, 440  
 De Broglie, 415, 439  
 De Sitter, 360  
 Debye, 541  
 Declinación, 216  
 Degeneración, 480  
 Delta de Kronecker, 471  
 Densidad
 

- de corriente, 87, 93, 221, 451
- de energía, 59, 228
- de flujo, 154
- de probabilidad, 451, 466
- espacial de carga, 36
- lineal de carga, 25
- superficial de carga, 32

 Desplazamiento eléctrico, 71  
 Desviación de la luz por campos gravitacionales, 409  
 Diagrama de cromaticidad, 356  
 Diamagnetismo, 203  
 Dicroísmo, 337  
 Dieléctrico, 67, 75  
 Difracción, 316
 

- de neutrones, 442

 Dinámica relativista, 385  
 Diodo túnel, 459  
 Dioptría, 292  
 Dióptrico, 251
 

- esférico, 268
- plano, 254

 Dipolo, 33
 

- magnético, 143, 490

 Dirac, 126, 470  
 Dispersión, 266, 323, 340  
 Distancia focal, 288  
 Distinguibilidad, 515  
 Distorsión, 301  
 Distribución más probable, 515  
 Divergencia, 36, 599  
 Döbereiner, 503  
 Doppler, 369  
 Du Fay, 3  
 Dualidad onda-partícula, 423

## E

Ecuación
 

- de continuidad, 221
- de Lagrange-Helmholtz, 286
- de Schrödinger, 443, 464

Efecto
 

- de puntas, 33
- Doppler, 367
- Faraday, 343
- fotoeléctrico, 416
- Hall, 132
- Joule, 99
- Kerr, 335
- túnel, 457
- Zeeman, 491

 Einstein, 360  
 Eje
 

- geomagnético, 216
- óptico, 251

 Electrodinámica
 

- clásica, 239
- cuántica, 239, 590

 Electromagnetismo, 124  
 Electrón
 

- positivo, 571
- voltio, 63, 596

 Electroscopio, 5  
 Elemento de volumen, 485  
 Emisión, 428
 

- espontánea, 505
- estimulada, 508
- termoiónica, 537

 Emisores
 

- $\alpha$ , 559
- $\beta$ , 559
- $\gamma$ , 559

 Emitancia, 351  
 Energía, 468
 

- almacenada, 121
- cinética, 390
- de enlace, 430, 506
  - nuclear, 553
  - por nucleón, 554
- de excitación, 567
- de Fermí, 529
- de ionización, 506
- de las mareas, 198
- de las olas, 198
- del gradiente térmico, 198
- electrostática, 54
- interna, 514
- liberada, 121
- libre, 525
- magnética, 208
- media, 516
- total, 389

 Entalpía, 525
 

- libre, 525

 Entropía, 517
 

- en la estadística de Bose-Einstein, 533
- en la estadística de Fermi-Dirac, 532

Escalón de potencial, 452  
 Espectro, 239  
   continuo, 420  
   de líneas, 431  
 Espectrógrafo de masas, 128  
 Espejo, 251, 278  
   esférico, 280  
   plano, 278  
 Estabilidad atómica, 556  
 Estado  
   fundamental, 485, 509  
   metastable, 509  
 Estados  
   estacionarios, 428  
   metastables, 505  
 Estator, 196  
 Esterradián, 595  
 Estigmático, 252, 269  
 Estructura fina, 434  
 Éter, 359

## F

Factor  
   de amplitud, 174  
   de forma, 174  
   de potencia, 192  
   de visibilidad, 347  
   giromagnético de espín, 551  
   giromagnético nuclear, 551  
 Faraday, 7, 124  
 Faradio, 43, 595  
 Fase, 173  
   inicial, 173  
 Fermi, 498  
 Fermiones, 498  
 Ferrimagnéticos, 215  
 Ferromagnetismo, 206  
 Feynman, 590  
 Fibra óptica, 245  
 Filtro  
   paso alto, 189  
   paso bajo, 189  
 Fisión, 573  
 Fitzgerald, 364  
 Flujo, 21  
   energético, 346  
   luminoso, 353  
   propio, 162  
 Foco  
   imagen, 271, 287  
   objeto, 271, 287  
 Fonón, 541  
 Fórmula  
   de Debye, 543  
   de Newton, 273  
 Fórmulas de Gauss, 290

Fotoelasticidad, 341  
 Fotoelectrones, 416  
 Fotometría, 345  
 Fotones, 587  
 Foucault, 158  
 Franck, 435  
 Franklin, 10  
 Fraunhofer, 316  
 Frecuencia  
   de ciclotrón, 126  
   de corte, 417  
   de Larmor, 491  
 Frente de onda, 239  
 Fresnel, 305, 316  
 Fuentes  
   de energía, 196  
   no renovables, 196  
   renovables, 196  
 Fuerza  
   coercitiva, 207  
   contraelectromotriz, 103  
   de Lorentz, 125  
   electromotriz, 101  
   inducida, 153  
   magnetizante, 207  
   magnetomotriz, 210  
 Fuerzas nucleares, 555  
 Función  
   de Gibbs, 526  
   de onda, 444, 488  
   de partición, 516  
   de trabajo, 417  
   densidad de probabilidad, 445  
 Funciones propias, 471  
 Fusión, 576  
   termonuclear, 577

## G

Galileo, 360  
 Gas  
   de fotones, 539  
   ideal, 520  
 Gell-Mann, 584  
 Generador eléctrico, 86  
 Germer, 440  
 Gibbs, 525  
 Gilbert, 3, 123, 216  
 Gluón, 590  
 Goudsmit, 491  
 Gradiente, 70, 599  
 Grado, 593, 595, 596  
   de ocupación, 529  
   de polarización, 338  
 Gray, 3, 595  
 Grimaldi, 316  
 Grupo, 503



**H**

Hadrones, 587  
 Hectárea, 596  
 Heisenberg, 446  
 Helicidad, 583  
 Henrio, 160, 595  
 Henry, 124  
 Herapatita, 337  
 Hertz, 124, 435, 595  
 Heterocromática, 352  
 Hilbert, 409  
 Hipercarga, 587  
 Hiperones, 587  
 Holografía, 512  
 Hora, 596  
 Hubble, 369  
 Hyperón, 584

**I**

Iluminación, 348  
 Imagen  
   real, 253  
   virtual, 253  
 Imanación, 199  
 Impedancia, 178  
   compleja, 183  
   equivalente, 185  
 Inclinación, 216  
 Indicatriz, 346  
 Índices de refracción, 243  
 Indistinguibles, 530  
 Inducción, 153  
   eléctrica, 71  
   magnética, 125  
   mutua, 160  
 Inducido, 196  
 Inductor, 196  
 Infrarrojo, 240  
 Intensidad, 104, 217  
   de corriente eléctrica, 86  
   eficaz, 175  
   luminosa, 348  
 Interacción  
   débil, 591  
   nuclear débil, 572  
 Interacciones fuertes, 555  
 Interferencias, 303  
 Interferómetro, 315  
 Intervalo espacio-temporal, 373  
 Invariante, 244  
   de Helmholtz, 274  
   fundamental, 269, 373  
 Invarianza de la carga eléctrica, 406  
 Isóbaros, 10, 548  
 Isoclinas, 217  
 Isodinámicas, 217

Isógonas, 217  
 Isómeros, 548  
 Isospin, 586  
 Isótonos, 10, 548  
 Isótopos, 10, 548

**J**

Joule, 595

**K**

Kaón, 584  
 Kilogramo, 593  
 Kirchhoff, 110

**L**

La extrañeza, 584  
 Lagrange, 515  
 Laguerre, 479  
 Lámina  
   de caras planas, 256  
   polaroide, 337  
 Laplace, 37, 124  
 Laplaciano, 37, 599  
 Láser, 305  
   atómico, 512  
   de CO<sub>2</sub>, 511  
   de helio-neón, 510  
   de rubí, 509  
 LASER, 508  
 Láseres de semiconductores, 511  
 Lente, 292  
   delgada, 296, 297  
 Lentas  
   convergentes, 296  
   divergentes, 296  
 Lenz, 156  
 Leptones, 587  
 Levitación magnética, 92  
 Ley  
   de Ampère, 143  
   de Biot y Savart, 137, 162  
   de Brewster, 332  
   de distribución de Bose-Einstein, 531  
   de distribución de Fermi-Dirac, 529  
   de distribución de Maxwell-Boltzmann, 516  
   de Dulong y Petit, 541  
   de Faraday, 155  
   de Gauss, 70  
   de Joule, 99  
   de la radiación del cuerpo negro de Planck, 541  
   de Lambert, 349  
   de las mallas, 108  
   de Lenz, 157  
   de los nudos, 107  
   de Malus, 337

de Ohm, 88, 94  
de Snell, 262  
Leyes  
de conservación, 566  
de Kirchhoff, 107  
para circuitos magnéticos, 212  
Líneas del campo, 24  
eléctrico, 20  
Litro, 596  
Lliapoulos, 591  
Longitud de onda, 244  
Lumen, 348 595  
Luminancia, 349  
Lux, 348, 595  
Luz, 239  
coherente, 305  
monocromática, 352  
Lyman, 431

## M

Magnéticos, 578  
Magnetón  
de Bohr, 490  
nuclear de Bohr, 551  
Maiman, 509  
Maricourt, 216  
Masa  
crítica, 575  
del electrón, 8, 548, 597  
del neutrón, 9, 548, 597  
del protón, 8, 597  
Materiales  
diamagnéticos, 201  
ferromagnéticos, 202  
magnéticos, 199  
paramagnéticos, 201  
Matriz, 353  
de transferencia, 255  
Maxwell, 124, 219  
Mayer, 503  
Mecánica  
cuántica, 590  
estadística, 513  
Media vida, 561  
Mendeléiev, 503  
Mesón, 581  
Mesones, 587  
Metámeros, 352  
Metro, 593  
Mezcla aditiva, 353  
Microondas, 240  
Microscopio de efecto túnel, 459  
Michelson, 315  
Michell, 124  
Milla náutica, 596  
Millikan, 8, 415

Minuto, 596  
Modelo  
de capas, 558  
nuclear, 557  
Standard, 589  
Moderador, 575  
Mol, 593  
Moléculas  
no polares, 68  
polares, 68  
Momento  
cinético, 488  
cuadrupolar eléctrico, 552  
del dipolo, 33, 34  
dipolar, 200  
magnético, 200, 551  
magnético del circuito, 134  
Moseley, 435, 497  
Motor  
de corriente continua, 103  
eléctrico, 102-103  
iónico, 150  
monofásico, 194  
Movimiento browniano, 428  
Müller, 92  
Muones, 582

## N

Neckam, 216  
Neutrino, 571, 582  
electrón, 572, 583  
muón, 583  
Neutrón, 9  
Newlands, 503  
Newton, 359, 595  
Niveles energéticos, 514  
Norman, 216  
Notación espectroscópica, 489  
Núcleo, 10  
compuesto, 564  
hijo, 569  
padre, 569  
Nudo, 596  
Número  
atómico, 9  
bariónico, 585  
cuántico, 428  
magnético, 477  
orbital, 478  
principal, 479  
de Avogadro, 419, 597  
leptónico, 585  
másico, 10  
Números  
cuánticos, 488  
mágicos, 557

## O

Objeto  
 real, 253  
 virtual, 253  
 Oersted, 124  
 Ohmio, 89, 595  
 Ondas  
 de materia, 439  
 electromagnéticas, 229, 239  
 gravitacionales, 408, 413  
 Opaco, 251  
 Operadores, 467  
 adjunto, 470  
 cantidad de movimiento, 468  
 diferencial, 449  
 energía, 468  
 cinética, 468  
 hermítico, 470  
 momento cinético, 469  
 Oppenheimer, 576  
 Óptica  
 física, 239  
 geométrica, 239  
 paraxial, 253  
 Oscilador armónico, 463

## P

Paralelo, 50  
 Paramagnetismo, 206  
 Paridad, 462  
 Partículas  
 $\alpha$ , 9  
 elementales, 566  
 extrañas, 566  
 virtuales, 581  
 Pascal, 595  
 Paschen, 431  
 Pauli, 497  
 Perihelio, 409  
 de Mercurio, 409  
 Periodo, 173, 503  
 de semidesintegración, 561  
 Permeabilidad magnética, 138, 202  
 Permitividad, 6  
 relativa, 6  
 Pfund, 431  
 Phot, 348  
 Piones, 582  
 Planck, 415  
 Planos  
 nodales, 290  
 principales, 286  
 Poder  
 de resolución, 319  
 rotatorio, 342  
 Poincare, 359

Poisson, 36  
 Polarización, 68, 325  
 circular, 325  
 cromática, 341  
 elíptica, 325  
 lineal, 325  
 Polarizador, 336  
 Polinomios  
 de Hermite, 464  
 de Laguerre, 479  
 Polos magnéticos, 137  
 Positrón, 126, 571  
 Positronio, 581  
 Potencia, 99  
 activa, 192  
 aparente, 192  
 de emisión, 346  
 de radiación, 346  
 instantánea, 191  
 media, 191  
 reactiva, 192  
 Potencial, 23  
 de contacto, 537  
 del dipolo, 34  
 Hall, 132  
 Precesión  
 de Larmor, 491  
 del perihelio de Mercurio, 409  
 Presión  
 de radiación, 234  
 electrostática, 32  
 Principio  
 de causalidad, 367  
 de complementariedad, 423  
 de correspondencia, 378, 432  
 de equivalencia, 408  
 de exclusión, 497  
 de Fermat, 246  
 de incertidumbre, 446  
 de Heisenberg, 473  
 de relatividad, 360  
 de superposición, 13  
 Prisma  
 de Nicol, 334  
 óptico, 262  
 Protón negativo, 581  
 Proyecto  
 ITER, 578  
 Manhattan, 576  
 Puente de Wheatstone, 116  
 Pulsación, 173  
 Punto  
 de Curie, 206  
 de Neel, 215  
 Puntos  
 conjugados, 252  
 nodales, 290  
 principales, 286  
 Pureza, 353

## Q

Quarks, 9, 588

## R

Rad, 596

Radiación

cósmica, 584

de ondas gravitacionales, 409

$\gamma$ , 559

láser, 509

Radiactividad, 545

artificial, 568

Radian, 595

Radiancia, 351

Radio

de Bohr, 429, 479

del núcleo, 427

Radiofrecuencia, 240

Radiometría, 345

Rayas espectrales, 419

Rayo

de luz, 239

emergente, 263

extraordinario, 333

Rayos

catódicos, 130

paraxiales, 271

X, 241

Reacción

en cadena, 574

endoenergética, 567

exoenergética, 567

fotonuclear, 565

Reacciones nucleares, 564

Reactancia, 179

capacitiva, 176

inductiva, 176

Reactores nucleares, 575

Receptor, 102

Red de difracción, 323

Reflectancia, 331

Reflexión total, 245, 264

Reglas de selección, 508

Relatividad

del campo electromagnético, 401

especial, 360

general, 408

Reluctancia, 210

Rem, 596

Remanencia, 207

Rendimiento del motor, 103

Resistencia, 94

equivalente, 97

interna, 101

Resistencias

en paralelo, 98

en serie, 97

Resistividad, 90

Resonancia, 188, 585

Retentividad, 207

Reversibilidad, 263

Rigidez dieléctrica, 84

Roentgen, 418, 596

Ross, 217

Rotacional, 599

Rotor, 196

Rutherford, 8, 427

Rydberg, 431

## S

Savart, 124

Schrödinger, 442

Schwarzschild, 409

Segre, 581

Segundo, 593, 596

Semiconductores, 5

Serie, 50

Balmer, 431

Lyman, 431

Paschen, 431

Brackett, 431

Shunt, 115

Siemens, 89, 595

Sievert, 595

Simultáneos, 367

Sistema

catadióptrico, 251

catóptrico, 251

óptico, 251

Sistemas ópticos centrados, 253

Skłodowska, 559

Solenoido cilíndrico, 147

Sommerfeld, 434

Stirling, 528

Subcapa, 489

Superconductividad, 91

Superconductores, 91

Susceptancia, 184

Susceptibilidad

eléctrica, 72

magnética, 202

paramagnética, 538

## T

Tabla periódica, 503

Temperatura

de Debye, 542

de Fermí, 529

Tempestades magnéticas, 218

Teorema  
  de Coulomb, 32  
  de Gauss, 22, 39  
  de la divergencia, 39  
Teoría electrodébil, 591  
Tesla, 125, 595  
Thales, 3  
Thomson, 8, 130  
Tiempo  
  de confinamiento, 578  
  de relajación, 122  
  propio, 365  
Tinte, 356  
Tokamak, 578  
Tonelada métrica, 596  
Transformaciones  
  de la cantidad de movimiento, 394  
  de las densidades de carga y de corriente, 405  
  de Lorentz, 361  
  de los campos electromagnéticos, 404  
  del cuadvivector fuerza, 397  
Transiciones, 428  
Transmitancia, 331  
Transmutación, 569  
Transparente, 251  
Transrapid, 92  
Tubo de radiación, 345  
Turbina, 196  
Turmalina, 337

## U

Ultravioleta, 241  
Unidad  
  astronómica, 596  
  de masa atómica, 546, 596, 597

## V

Valor  
  eficaz, 174  
  esperado, 448  
  más probable, 448  
Valores propios, 471, 488  
Vatio, 595  
Vector  
  «nabla», 599  
  de color, 355  
  de Poynting, 233  
  polarización, 68  
Velocidad  
  de Fermi, 536  
  de la luz, 241  
  en el vacío, 597  
  límite, 364  
Vergencia, 292  
Vida media, 562  
Volta, 86  
Voltio, 595  
Von Laue, 419

## W

Weber, 154, 595  
Weinberg, 591  
Weizsacker, 554

## Y

Yamanashi, 92  
Young, 305