EJERCICIOS DE DESIGUALDADES Y VALOR ABSOLUTO

1) $2x - 7 < 4x - 2$

Despejamos x:

$$-2x < 5$$

$$x > -\frac{5}{2}$$

Conjunto solución: $S = \left(-\frac{5}{2}, \infty\right)$

2) $-5 \leq 2x + 6 < 4$

Despejamos x: $-\frac{11}{2} \leq x < -1$

$$S = \left[-\frac{11}{2}, -1\right)$$

3) $x^2 - x < 6$

Pasamos todos los términos al 1º miembro: $x^2 - x - 6 < 0$

Factoreamos: $(x+2)(x-3) < 0$

y hacemos la tabla:

	-2	3	
(x+2)	-	+	+
(x--3)	-	-	+
$(x+2)(x-3)$	+	-	+

$$S = (-2{,}3)$$

4) $\dfrac{1}{3x-7} \geq \dfrac{4}{3-2x}$

Escribimos todos los términos en el primer miembro:

$$\frac{1}{3x-7} - \frac{4}{3-2x} \geq 0$$

Sumamos las dos fracciones y factoreamos:

$$\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)+6\left(x-\frac{7}{3}\right)}{3\left(x-\frac{7}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)} \geq 0$$

$$\frac{7\left(x-\frac{31}{14}\right)}{3\left(x-\frac{7}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)} \geq 0$$

Construimos una tabla

		$3/2$	$31/14$	$7/3$
(x-31/14)	-	-	+	+
(x-7/3)	-	-	-	+
(x-3/2)	-	+	+	+
$\frac{7\left(x-\frac{31}{14}\right)}{3\left(x-\frac{7}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)} \geq 0$	-	+	-	+

Entonces el conjunto solución es

$$S=\left(\frac{3}{2},\frac{31}{14}\right]\cup\left(\frac{7}{3},\infty\right)$$

5) $\frac{x-1}{x+2}\geq 0$

Pasamos todos los términos al 1º miembro, sumamos las fracciones, factoreamos y hacemos la tabla (en este caso solo falta hacer la tabla):

$$S=(-\infty,-2)\cup[1,\infty).$$

6) $\frac{2x-5}{x-2}\leq 1$

Pasamos todos los términos al 1º miembro, sumamos las fracciones, factoreamos y hacemos la tabla.

$$S=(2,3]$$

7) $|x-2|=3$

Aplicamos la definición de valor absoluto:

$$x-2=3 \qquad \text{ó} \qquad x-2=-3$$

El conjunto solución es la unión de las dos soluciones.

$$S = \{-1{,}5\}$$

8) $|x-2| = |x-3|$

Aplicamos la definición de valor absoluto:

$$x - 2 = x - 3 \qquad \text{ó} \qquad x - 2 = -x + 3$$

El conjunto solución es la unión de las dos soluciones (una de ellas es el conjunto vacío).

$$S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$$

9) $|x-4| < \frac{3}{2}$

Aplicamos una de las propiedades del valor absoluto:

$$x - 4 < \tfrac{3}{2} \qquad \text{y} \qquad x - 4 > -\tfrac{3}{2}$$

Resolvemos cada desigualdad y hallamos un conjunto solución por cada una. El conjunto solución es la intersección de las dos soluciones:

$$S = \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$$

10) $|3x-5| \geq 1$

Aplicamos una de las propiedades del valor absoluto:

$$3x - 5 \geq 1 \qquad \text{ó} \qquad 3x - 5 \leq -1$$

El conjunto solución es la unión de las dos soluciones:

$$S = \left(-\infty, \frac{4}{3}\right] \cup [2, \infty)$$

11) $|3x+1| < 2|x-6|$

Aplicamos las siguientes propiedades:

Si $a \geq 0 \ y \ \ b \geq 0$, se tiene que las siguientes desigualdades son equivalentes (si se cumple una, entonces se cumple la otra):

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a^2 \leq b^2 \qquad (1)$$

Por otra parte: $\quad a^2 = |a|^2 \quad y \quad b^2 = |b|^2 \qquad (2)$

Entonces si tenemos una expresión como la que sigue:

$$|a| \quad \leq \quad |b|$$

Como los valores absolutos son mayores o iguales a 0, se puede aplicar la propiedad (1), por lo que se cumple:

$$|a|^2 \leq |b|^2$$

Teniendo en cuenta las igualdades (2), se puede escribir:

$$a^2 \leq b^2$$

En definitiva, en el ejercicio planteado se puede eliminar el valor absoluto elevando al cuadrado:

$$|3x+1| < 2|x-6|$$

$$(3x+1)^2 < 4(x-6)^2$$

Resolviendo: $$9x^2 + 6x + 1 < 4x^2 - 48x + 144$$

Pasamos todo al 1º miembro, hallamos las raíces y factoreamos:

$$5\left(x - \frac{11}{5}\right)(x+13) < 0$$

Hacemos la tabla de los signos y obtenemos: $S = \left(-13, \frac{11}{5}\right)$.