Preguntas teóricas típicas

1. Defina “Relación entre dos conjuntos”, “Función”, “Conjunto de Partida”, “Dominio”, “Conjunto de llegada”, “Conjunto imagen”, “Regla de asignación”.
2. Defina "Restricción del dominio de una función". Ejemplifique.
3. Defina “Suma de funciones” y “Producto de funciones”. Enuncie las propiedades de ambas operaciones. En cada caso indique el conjunto dominio.
4. Defina “Recíproca de una función” y “Cociente de funciones”. En cada caso indique el conjunto dominio.
5. Defina “Función compuesta”. Indique el conjunto dominio. Enuncie las propiedades. Ejemplifique.
6. Defina “Función inyectiva”, “Función suryectiva” y “Función biyectiva”. Ejemplifique.
7. Defina “Función inversa”. Ejemplifique.
8. Defina “Función par” y “Función impar”. Grafique. Ejemplifique.
9. Defina “Función periódica”. Ejemplifique.
10. Defina “Función logaritmo”. Grafique los distintos casos según la base del logaritmo. Indique el dominio. Determine la función inversa.
11. Defina las funciones trigonométricas “Seno”, “Coseno” y “Tangente”. Indique los dominios y las funciones inversas. Grafique.
12. Defina "Límite de una función en un punto de acumulación de su dominio". Interprete gráficamente. Ejemplifique.
13. Enuncie y demuestre el “Teorema de la unicidad del límite”.
14. Enuncie el “Teorema del encaje de límites”. Grafique.
15. Demuestre que $\boldsymbol{\lim_{o} \frac{sen\ x}{x} = 1}$.
16. Enuncie el “Teorema del límite de la suma de funciones” y el “Teorema del límite de un producto de funciones”.
17. Enuncie y demuestre el teorema del límite de una suma de funciones.
18. Defina "Límites infinitos de una función". Ejemplifique.
19. Defina "Límites de una función en el infinito". Ejemplifique.
20. Enuncie las propiedades del álgebra de límites de funciones.
21. Defina "Función continua en un punto". Ejemplifique y grafique tres casos de funciones discontinuas en un punto.
22. Defina "Función continua en un intervalo abierto", “Función continua en un intervalo cerrado” y "Función continua".
23. Enuncie el “Teorema de la continuidad de la suma, del producto y del cociente de funciones continuas”.
24. Enuncie el “Teorema que relaciona el valor de la una función continua en un punto con el valor de la función en un entorno reducido de ese punto”. Grafique.
25. Enuncie el Corolario del teorema anterior. Grafique.
26. Defina “Conjunto acotado superiormente”, “Cota superior de un conjunto”, “Conjunto acotado inferiormente”, “Cota inferior de un conjunto” y “Conjunto acotado”. Grafique.
27. Defina “Supremo de un conjunto”, “Ínfimo de un conjunto”, “Mínimo de un conjunto” y “Máximo de un conjunto”. Grafique.

28. Defina "Función acotada superiormente", "Función acotada inferiormente", "Función acotada", "Supremo de una función en un conjunto", "Ínfimo de una función en un conjunto", "Máximo de una función en un conjunto" y "Mínimo de una función en un conjunto". Grafique.

29. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique gráficamente la respuesta.

    a. Si una función es continua en un intervalo $[a,b]$, entonces la función es acotada en $[a,b]$.

    b. Si una función es acotada en un intervalo $[a,b]$, entonces la función es continua en $[a,b]$.

    c. Si una función es continua en un intervalo (a,b), entonces la función es acotada en (a,b).

    d. Si una función es continua en un intervalo $[a,b]$, entonces la función tiene supremo e ínfimo en $[a,b]$.

    e. Si una función es continua en un intervalo (a,b), entonces la función tiene Máximo y Mínimo en (a,b).

30. Enuncie y grafique el "Teorema del valor intermedio". Aplíquelo a las funciones $y=\frac{1}{2}e^{x}$ e $y=\frac{1}{x}$, en el intervalo $[0,2]$, en ambos casos para el valor $t=1$.

31. Enuncie el teorema de Bolzano-Weierstrass. Ejemplifique y Grafique.

32. Enuncie el teorema del valor intermedio. Aplique el teorema a la función *f(x) = 2* ^{x} en el intervalo [0,2]. Grafique.

33. Defina "Derivada de una función en un punto". Interprete gráficamente.

34. Demuestre "*Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en dicho punto*".

35. Demuestre "*Si una función es continua en un punto, no implica que es derivable en dicho punto*".

36. Deduzca la derivada de la función constante.

37. Deduzca la derivada de la función $y=x^2$.

38. Deduzca la derivada de la función seno.

39. Deduzca la derivada de la función logaritmo.

40. Enuncie el "Teorema del Álgebra de derivadas".

41. Enuncie el "Teorema de la Regla de la Cadena, o de la derivada de la función compuesta".

42. Deduzca la derivada de un producto de funciones.

43. Derivación logarítmica: invente un ejemplo y explique cómo se resuelve.

44. Defina "Derivada segunda de una función".

<u>Ejercicios prácticos</u>

1. a) Halle la regla de asignación de las funciones $g \circ f$, *g+f* y *gf.*

   $f(x) = Ln\left(x^2-4\right)$ $\qquad\qquad g(x)=\sqrt{x}$

   b) Indique el dominio y conjunto imagen para que la función $g \circ f$ sea biyectiva.

2. Halle el dominio y regla de asignación de las funciones $f \circ g$ y f^{-1}

   $f(x) = Ln\,(2x+1)$ $\qquad\qquad g(x)=\sqrt{x}$

3. Calcule los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+1}{(x-1)^2}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x(x+1)}{3x^2}$

c) $\lim_{x\to \infty} \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+4}-2}$

e) $\lim_{x\to 1} \frac{2(x^2-1)}{x+1}$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{sen\ 3x}{tg\ 4x}$

h) $\lim_{x\to \infty} \left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}$

i) $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2-x+2}{-(x+2)^2}$

$j)$ $\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}$

4. Grafique las siguientes funciones. Indique dominio, puntos de discontinuidad (clasifíquelos), raíces, corte con el eje y, signo en cada intervalo y asíntotas verticales y horizontales.

a) $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-2}$

b) $g(x)=\frac{2x-1}{x-2}$

c) $h(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$

5. Sea la función $f(x)=\begin{cases} 1 & si\ \ x<0 \\ a & si\ \ 0\le x<1 \\ (x-1)^2 & si\ \ x\ge 1 \end{cases}$

a) Para qué valor de *a* la función es continua en *x = 0.*

b) Para el valor anteriormente calculado de *a* ¿es la función continua en *x = 1* ?. Si no fuera continua especificar el tipo de discontinuidad.

6. Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; x<0 \\ ax+b & si \;\; 0 \le x < 1 \\ (x-1)^2 & si \;\; x \ge 1 \end{cases}$

Para qué valores de *a* y de *b* la función es continua en *x = 0* y $x = 1$.

7. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 \, sen\dfrac{1}{x} & si \;\; x \neq 0 \\ k & si \;\; x = 0 \end{cases}$

determine el valor de *k* para que la función sea continua en *x = 0.*

9. Halle los puntos de discontinuidad y grafique la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-3)(x+1)}{2x^2-2} & si \quad x \neq 1 \quad y \quad x \neq -1 \\ 1 & si \;\; x = -1 \\ 0 & si \;\; x = 1 \end{cases}$$

10. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \mathrm{x}+1 & \mathrm{si} \;\; \mathrm{x} < -1 \\ \mathrm{x}^2 & \mathrm{si} \;\; -1 \le \mathrm{x} < 1 \\ 2 & \mathrm{si} \;\; \mathrm{x} = 1 \\ \mathrm{x} & \mathrm{si} \;\; \mathrm{x} > 1 \end{cases}$

a) Grafique.

b) Halle los límites de la función en *x = -1* y *x = 1*; si existen.

c) Halle los puntos de discontinuidad y clasifíquelos.

d) Indique el Dominio y el Conjunto imagen.

e) Señale si *f* es inyectiva, suryectiva y biyectiva.

11. Sea la función $f(x) = \begin{cases} -\mathrm{x}-1 & \mathrm{si} \;\; \mathrm{x} < -1 \\ -\mathrm{x}^2 & \mathrm{si} \;\; -1 \le \mathrm{x} < 1 \\ -2 & \mathrm{si} \;\; \mathrm{x} = 1 \\ -\mathrm{x} & \mathrm{si} \;\; \mathrm{x} > 1 \end{cases}$

a) Grafique.

b) Halle los límites de la función en x = -1 y x = 1; si existen.

c) Halle los puntos de discontinuidad y clasifíquelos.

d) Indique el Dominio y el Conjunto imagen.

12. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < -1 \\ 0 & \text{si} \quad x = -1 \\ -x^2 & \text{si} \quad -1 < x \leq 1 \\ x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

a) Grafique.

b) Halle los límites de la función en $x = -1$ y $x = 1$; si existen.

c) Halle los puntos de discontinuidad y clasifiquelos.

d) Indique el Dominio y el Conjunto imagen.

e) Señale si *f* es inyectiva, suryectiva y biyectiva.

13. Derive las siguientes funciones

a) $y = \sqrt{\dfrac{e^{senx} Ln(x-2)}{2^x}}$.

b) $y = \dfrac{2x}{e^{\frac{1}{x}} + x}$

c) $y = \left(\cos\sqrt{Ln\, x}\right)^{\frac{1}{sen\ x}}$

d) $f(x) = \left(\sqrt{\dfrac{1}{2\ x}}\right)^{\cos\ X}$

e) $f(x) = sen\ \sqrt{x+1}\ \ Ln\ \ e^{x}$

f) $f(x) = \dfrac{sen\ \sqrt{x+1}}{Ln\ \ e^{x}}$

g) $f(x) = \left(sen\sqrt{x+1}\right)^{Ln\, e^{X}}$

14. ¿Para qué valores de *x* la recta tangente a la función $y = e^{sen\, x}$ es paralela al eje *X*? Considere únicamente el intervalo *[0, π]*.

15. ¿Para qué valores de *x* la recta tangente a la función $y = \sqrt{x-3}$ es paralela al eje *Y*?

16. Halle una ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la función $y = \sqrt{e^{x}}$ en $x = 2$.

17. Dada la función $f(x) = (x+2)^2$; halle la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto x=2.

18. Dada la función $f(x) = (x-2)^2$; halle la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto x=2.