NÚMEROS REALES

Conjuntos de números

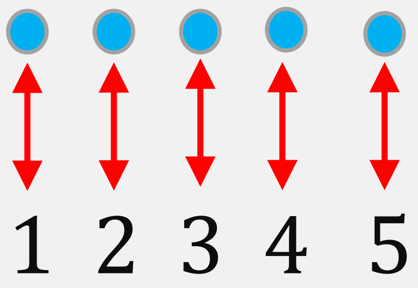
Para contar:

Conjunto de los números naturales.

$$\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$$

Ejemplo

Para contar bolitas:



Correspondencia biunívoca entre bolitas y números

Para resolver $x + a = b$

con $b \leq a$:

Conjunto de los números enteros

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Ejemplo

Para resolver $x + 4 = 2$

debe existir el número -2.

Para resolver $ax = b$

con $a \neq 0$:

Conjunto de los números racionales

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0 \right\}$$

Ejemplo

Para resolver $2x = 7$

debe existir el número $\mathrm{x} = \frac{7}{2}$.

Los números enteros son racionales:

$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2}$; $0 = \frac{0}{7}$

Los números racionales se pueden expresar como decimales ilimitados periódicos:

$$\mathbb{Q} = \{x/x \text{ es un número decimal ilimitado periódico}\}$$

Ejemplo

Los números racionales son decimales ilimitados periódicos:

$$2 = 2{,}0000\ \underbrace{0}_{\text{período}} \ldots$$

$$\frac{2}{7} = 0{,}285714\ \underbrace{285714}_{\text{período}} \ldots$$

Existen números que no se pueden expresar como cocientes de dos enteros (no son decimales ilimitados periódicos).

Conjunto de los números irracionales

$$\mathbb{I} = \{x / x \text{ es un decimal ilimitado no periódico}\}$$

Ejemplo

$$\pi \neq \frac{p}{q} \quad ; \quad p, q \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad q \neq 0$$

$\pi = 3{,}1415 \ldots$ es un decimal ilimitado no periódico.

Los números que no se pueden expresar como el cociente de dos enteros son decimales ilimitados no periódicos.

$\sqrt{2} = 1{,}4142 \ldots ; \; e = 2{,}7182 \ldots$

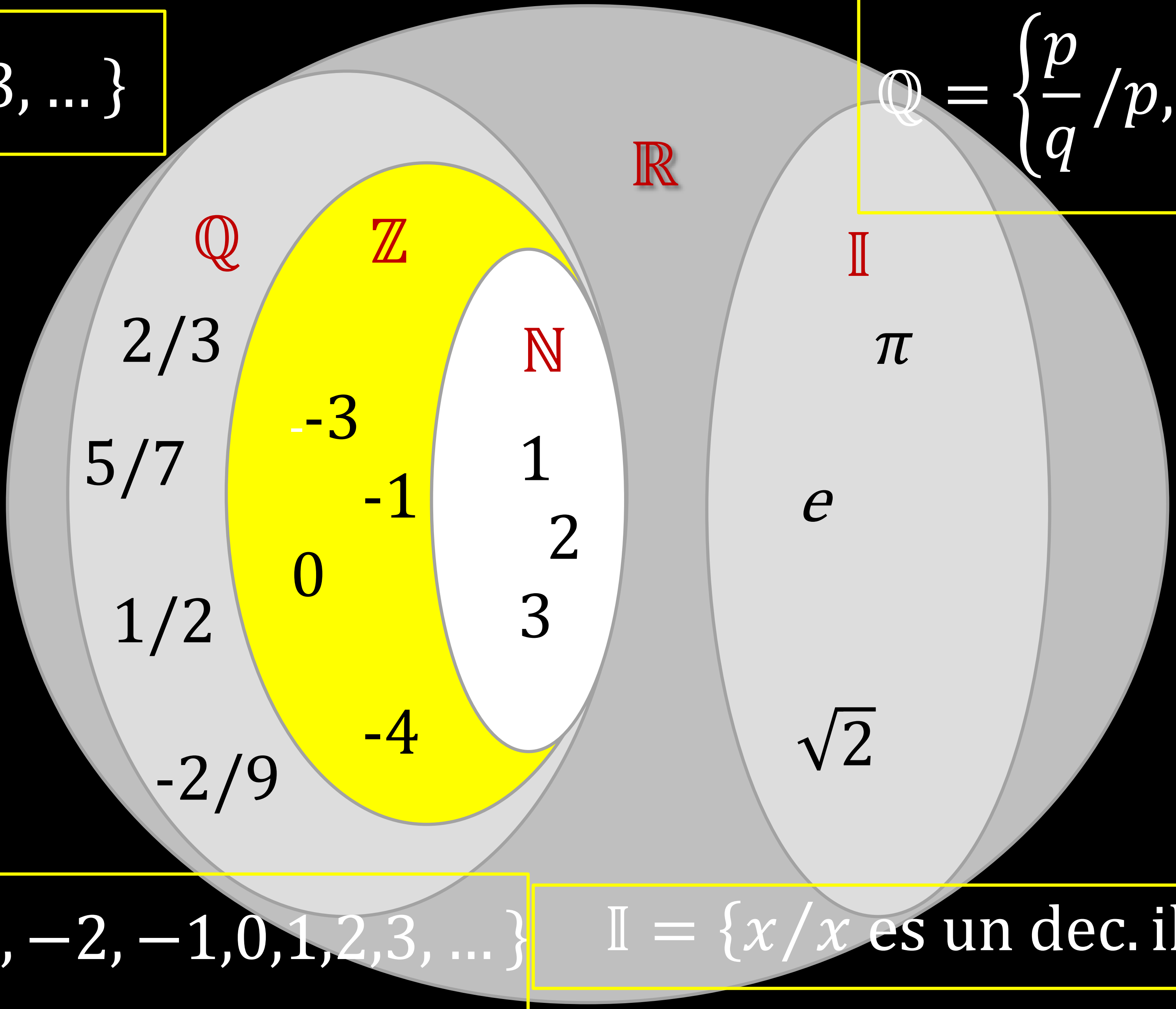
La unión de estos dos últimos conjuntos es el conjunto de los números reales.

Conjunto de los números reales

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} / p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\right\}$$



$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$$\mathbb{I} = \{x / x \text{ es un dec. ilim. no per.}\}$$

Operaciones - Propiedades

En $\mathbb{R}$ se definen las operaciones suma y multiplicación, $+$ y $\cdot$, de forma tal que se cumplen los siguientes **axiomas algebraicos**:

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$A_0)\ a + b \in \mathbb{R}$	Ley de Cierre
$A_1)\ a + (b + c) = (a + b) + c$	Asociatividad
$A_2)\ a + b = b + a$	Conmutatividad
$A_3)\ a + 0 = a$	$\exists$ elemento neutro, 0
$A_4)\ a + (-a) = 0$	$\forall a \in \mathbb{R}: \exists$ elemento opuesto, $-a$

continúa…

continuación

$M_0)$	$ab \in \mathbb{R}$	Ley de Cierre
$M_1)$	$a(bc) = (ab)c$	Asociatividad
$M_2)$	$ab = ba$	Conmutatividad
$M_3)$	$a1 = a$	$\exists$ elemento neutro, 1
$M_4)$	$aa^{-1} = 1$	$\forall a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$: $\exists$ elemento inverso, a^{-1}
$D)$	$a(b + c) = ab + ac$	Distributividad

Cuerpo

Conjunto no vacío con dos operaciones definidas de tal manera que se cumplen los axiomas algebraicos.

Escalar

Elemento de un cuerpo.

Ejemplo

El conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ es un cuerpo.

$\mathbb{R}$ es un cuerpo.

$\mathbb{Q}$ es un cuerpo.

¿Por qué?

$\mathbb{Z}$ no es un cuerpo.

$\mathbb{N}$ no es un cuerpo.

En $\mathbb{R}$ se define una relación de orden (la relación menor que, $<$) de tal forma que se cumplen los siguientes **axiomas de orden**:

$$\text{Sean } a, b, c \in \mathbb{R}$$

$O_1)$ Se cumple una y solo una de las siguientes alternativas:

$$a < b;\ a = b, b < a.$$

$O_2)$ $a < b \quad \wedge \quad b < c \quad \Rightarrow \quad a < c$

$O_3)$ $a < b \quad \Rightarrow \quad a + c < b + c$

$O_4)$ $a < b \quad \wedge \quad 0 < c \quad \Rightarrow \quad ac < bc \quad ;$

$a < b \quad \wedge \quad c < 0 \quad \Rightarrow \quad bc < ac$

Ejemplo

O_3: Si en una desigualdad se suma en ambos miembros el mismo número, se mantiene la desigualdad:

$3 < 5$; $3 + 2 < 5 + 2$

O_4: Si en una desigualdad se multiplican ambos miembros por el mismo número, c, mayor que 0, se mantiene la desigualdad:

$3 < 5$; $3 \cdot 2 < 5 \cdot 2$

Si c es menor que 0, cambia el sentido de la desigualdad:

$5(-2) < 3(-2)$

Cuerpo ordenado

Se dice que un cuerpo es un cuerpo ordenado si es un cuerpo que cumple con los axiomas de orden.

Otras relaciones de orden

Mayor que, >: $a > b \quad si \quad b < a.$

Mayor o igual que ≥: $a \geq b \quad si \quad b < a$ ó $a = b$

Menor o igual que ≤: $a \leq b \quad si \quad a < b$ ó $a = b$

Ejemplo

El conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ no es un cuerpo ordenado.

$\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado.

$\mathbb{Q}$ es un cuerpo ordenado. ¿Por qué?

Ejemplo Resuelva la siguiente desigualdad:

$$\frac{2}{x-3} \geq 2$$

1. Escribimos todos los términos en el primer miembro:

$$\frac{2}{x-3} - 2 \geq 0 \qquad \text{(propiedad } O_3\text{)}$$

2. Sumamos los términos:

$$\frac{2-2(x-3)}{x-3} \geq 0 \qquad ; \qquad \frac{-2x+8}{x-3} \geq 0$$

Continúa

continuación

3) Factoreamos el numerador y el denominador:

$$\frac{-2(x-4)}{x-3} \geq 0$$

4) Hacemos una tabla para aplicar la regla de los signos de la multiplicación y de la división:

		3	4
$(x-4)$	-	-	+
$(x-3)$	-	+	+
$\frac{-2(x-4)}{x-3}$	-	+	-

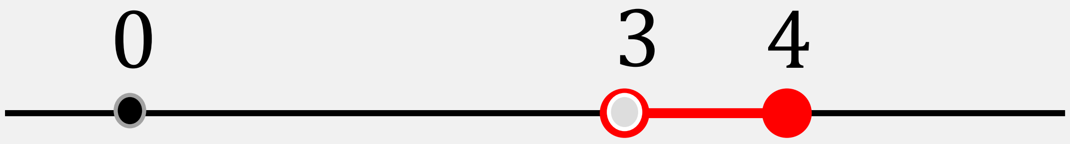
Continúa

continuación

5) El conjunto solución es el intervalo en el que se cumple la desigualdad (está resaltado en rojo):

$$\frac{-2(x-4)}{x-3} \geq 0$$

Conjunto solución: $\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} / 3 < x \leq 4\} = (3, 4]}$



El conjunto solución no incluye $x = 3$ porque 3 anula el denominador.

Ejemplo Resuelva la siguiente desigualdad:

$$-x^2 + 3x - 2 < 0$$

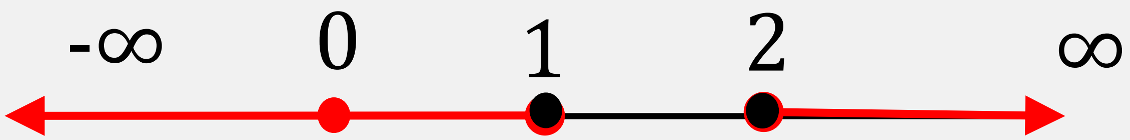
1. Calculamos la raíces y factoreamos:

$$-(x-2)(x-1) < 0$$

2. Construimos la tabla:

		1	2
$(x-2)$	-	-	+
$(x-1)$	-	+	+
$-(x-2)(x-1)$	-	+	-

3. Solución: $S = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$



Valor absoluto

Valor absoluto. Sea $a \in \mathbb{R}$.

El valor absoluto de a se denota $|a|$

y es igual a $\begin{cases} a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}$

Propiedades. Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

1. $|a+b| \leq |a| + |b|$
2. $|ab| = |a||b|$
3. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \qquad (a \geq 0)$
4. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ ó $x \geq a \quad (a \geq 0)$

Ejemplo

$$|3| = 3$$

$$|-2| = 2$$

Ejemplo Resuelva: $|x| \leq 4$

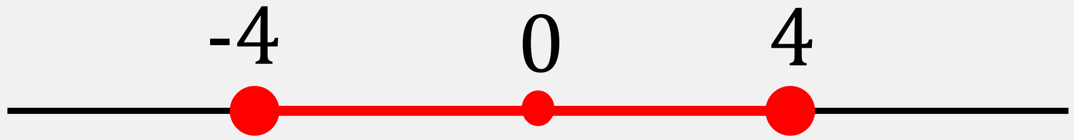
Propiedad 3:

$$|x| \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad -4 \leq x \leq 4$$

Conjunto solución:

$$S_I = [-4, \infty) \quad ; \quad S_{II} = (-\infty, 4]$$

$$S = S_I \cap S_{II} = [-4,4]$$



Ejemplo Resuelva: $|x| \geq 4$

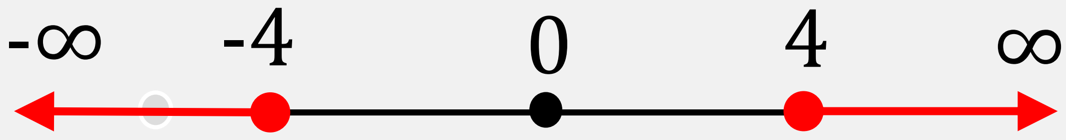
Propiedad 4:

$$|x| \geq 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -4 \ \text{ó} \ x \geq 4$$

Conjunto solución:

$$S_I = (-\infty, -4] \quad ; \quad S_{II} = [4, \infty)$$

$$S = S_I \cup S_{II} = \left(-\infty, -4\right] \cup [4, \infty)$$



Ejemplo Resuelva la siguiente desigualdad:

$$\left|\frac{2}{x-3}\right| \geq 2$$

1. Aplicamos la propiedad 3 o la 4, según el caso, de valor absoluto:

$$\left|\frac{2}{x-3}\right| \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{2}{x-3} \leq -2}_{I} \quad \text{ó} \quad \underbrace{\frac{2}{x-3} \geq 2}_{II}$$

2. Resolvemos las desigualdades I y II como en el ejemplo de la filmina 15.

Continúa

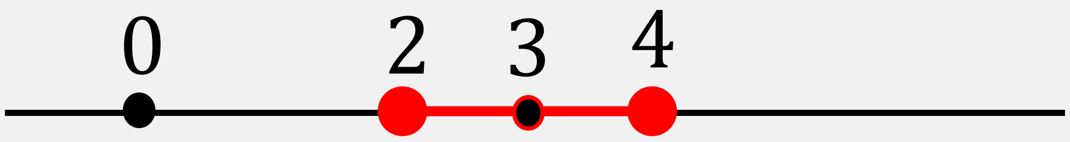
Continuación

$$S_I = [2,3) \qquad\qquad S_{II} = (3,4]$$

3. La solución es la unión, o la intersección, de las soluciones I y II;

según la propiedad del valor absoluto que se haya aplicado.

$$\boxed{S = S_I \cup S_{II} = [2,3) \cup (3,4]}$$



Distancia

Definición

Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

La distancia de a a b,

denotada $d(a, b)$,

es igual a $|b - a|$.

$$d(a, b) = |b - a|$$

Ejemplo

Sean $a = -3$; $b = -1$.

Halle la distancia entre a y b.

$$d(-3, -1) = |-1 - (-3)| = 2$$

Propiedades

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. $d(a,b) \geq 0$

   y

   $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$

2. $d(a,b) = d(b,a)$

3. $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$

Ejemplo

Sean $a = -3;\ b = -1$ y $c = 4$.

Aplique la propiedad 3.

$$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$$

$$d(-3,-1) \leq d(-3,4) + d(4,-1)$$

$$|-1-(-3)| \leq |4-(-3)| + |-1-4|$$

$$2 \leq 7 + 5$$

$$2 \leq 12$$