OPERACIONES CON MATRICES

Suma de matrices

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$;

$a_{ij} \in A$; $b_{ij} \in B$.

$$A + B = C$$

tal que $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$

con $c_{ij} \in C$

y $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Ejemplo

Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{C}$$

Propiedades

Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$ Asociatividad

2. $A + B = B + A$ Conmutatividad

3. $A + O = A$ Existe elemento neutro, la matriz nula, O

4. $A + (-A) = O$ Para cada matriz A, existe la matriz opuesta, $-A$

Ejemplo

Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$. Halle X tal que $A + X = B$.

Sumamos en ambos miembros la matriz opuesta de A:

$$A + X - A = B - A$$

Aplicamos las propiedades 2, 3 y 4:

$$X = B - A$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Producto de una matriz por un escalar

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$,

$k \in \mathbb{R}$, $a_{ij} \in A$.

$kA = C$ tal que

$C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $c_{ij} = k\,a_{ij}$,

con $c_{ij} \in C$.

Ejemplo

Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ y $k = 2$.

$$kA = 2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Propiedades

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$; $k, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

1. $k(A+B) = kA + kB$ Distributividad con respecto a la suma de matrices
2. $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$ Distributividad con respecto a la suma de escalares
3. $k_1(k_2A) = k_2(k_1A) = (k_1k_2)A$ Homogeneidad
4. $1\,A = A$ El escalar 1 es el elemento identidad

Ejemplo

Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$. Halle X tal que $3(A+X)=B$.

Aplicamos la propiedad 1: $3A + 3X = B$

Sumamos la opuesta de $3A$ en ambos miembros: $3X = B - 3A$

Multiplicamos por $\frac{1}{3}$ ambos miembros: $X = \frac{1}{3}(B - 3A)$

$$X = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ -2 & 2 \\ -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Combinación lineal de matrices

Sean $A_1, A_2, \ldots,\ A_r \in \mathbb{R}^{m\times n}$;

$k_1, k_2, \ldots, k_r\ \in \mathbb{R}$.

La matriz

$$M = k_1A_1 + k_2A_2 + \cdots + k_rA_r$$

es una combinación lineal de las matrices $A_1, A_2, \ldots, A_r$ según los escalares $k_1, k_2, \ldots, k_r$.

Ejemplo Sean

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = 2, k_2 = -1, k_3 = 1$$

Halle M, combinación lineal de A, B, C; según k_1, k_2, k_3.

$$M = k_1A + k_2\mathrm{B} + k_3\mathrm{C}$$

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo Sea un sistema de dos ecuaciones lineales con cuatro incógnitas cuyo sistema resolvente es $\begin{cases} x_1 = 2 - 3t + k \\ x_2 = 1 + 3k \end{cases}$

donde $x_3 = t; x_4 = k$ y t y k son parámetros.

La solución del sistema es

$$S = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (2 - 3t + k, 1 + 3k, t, k)$$

Exprese la solución como combinación lineal de n-uplas.

$$S = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (2,1,0,0) + t(-3,0,1,0) + k(1,3,0,1)$$

Multiplicación de matrices

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

$A\,B = C$

tal que $C \epsilon \mathbb{R}^{m\times p}$ y

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}\ b_{rj}$$

con $c_{ij} \in C$.

Ejemplo

Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Halle el producto AB.

Por ejemplo:

$$c_{11} = \sum_{r=1}^{2} a_{1r}\ b_{r1} = 2x1 + 1x0 = 2$$

$$\begin{array}{c|l} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \end{bmatrix} = \mathrm{C} \end{array}$$

Propiedades

Si las operaciones indicadas en los primeros miembros de las siguientes igualdades están definidas, entonces las operaciones indicadas en los segundos miembros también lo están, y se cumplen las siguientes igualdades:

Sean A, B, C matrices. $k \in \mathbb{R}$.

1. $A(BC)=(AB)C$ Asociatividad
2. $(A+B)C=AC+BC$ Distributividad

   $F(G+H)=FG+FH$
3. $k(AB)=(kA)B=A(kB)$ Homogeneidad

Ejemplo

Sea la igualdad de matrices: $A = B + C$.

Supongamos que se multiplican ambos miembros por una matriz P de dimensiones adecuadas para realizar los productos indicados.

Señale si los siguientes productos son válidos, o no, y por qué.

- $AP = B + CP$
- $AP = (B + C)P$
- $AP = P(B + C)$
- $PA = P(B + C)$

Continúa

continuación

- $AP = B + CP$ No es válido. P no multiplica al 2° miembro, solo multiplica a C.
- $AP = (B + C)P$ Es válido. P multiplica ambos miembros a la derecha.
- $AP = P(B + C)$ No es válido. El producto de matrices no tiene conmutatividad. P debe multiplicar ambos miembros a la derecha o ambos miembros a la izquierda.
- $PA = P(B + C)$ Es válido. P multiplica ambos miembros a la izquierda.

Observaciones

1. $A\,m\times n\,0\,n\times p\ =\ 0\,m\times p$; $0\,k\times m\,A\,m\times n\ =\ 0\,k\times n$
2. $A\,m\times n\,In\ =\ A\,m\times n$; $I_m\,A\,m\times n\ =\ A\,m\times n$
3. $AX = H$ expresa un sistema de ecuaciones lineales.
4. $AB \neq BA$ el producto no tiene conmutatividad.
5. $AB = AC \ \nRightarrow\ B = C$ (no es válido simplificar).
6. $AB = 0 \ \nRightarrow\ A = 0\ o\ B = 0$.
7. Sea $AB = C$ La fila i de C es una comb. lineal de las filas de B según los escalares de la fila i de A. La col. j de C es una comb. lineal de las col. de A según los escalares de la col. j de B.
8. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, el producto $AA \ldots A$, p veces, está definido y se denota: $AA \ldots A = Ap$.

Ejemplo

Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. El producto $AB = C$.

La fila 1 de C es una combinación lineal de las filas de B según los escalares de la fila 1 de A: $[2 \quad 5 \quad 6] = 2[1 \quad 3 \quad 2] + 1[0 \quad -1 \quad 2]$

La columna 2 de C es una combinación lineal de las columnas de A según los escalares de la columna 2 de B:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = B \\ \hline A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \end{bmatrix} = C \end{array}$$

Ejemplo

Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

La expresión matricial del sistema es: $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Justifique la expresión matricial.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & \left.\begin{matrix} x_1 - 2x_2 = 3 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{matrix}\right\} \end{array}$$

Sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo Sean $A,\ B,\ C\ \in \mathbb{R}^{n\times n}$, matrices cuadradas.

1. Suponga la siguiente igualdad: $AB + 2B = C$.
   Escriba el primer miembro de la igualdad como un producto de dos factores (factorizar).
   $(A + 2I)B = C$; donde I es la matriz identidad de orden n.
2. Para sacar B como factor común en la expresión $BA + 2B = C$; debe escribirse B a la izquierda: $B(A + 2I) = C$
3. En la expresión $AB + BC = D$; no es posible sacar B como factor común, pues es factor derecho en un término e izquierdo en otro.