Práctico 3: Conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales

CONJUNTO SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Los sistemas de ecuaciones lineales se clasifican en:

- Sistemas incompatibles: La solución es el conjunto vacío, el sistema no tiene solución. Solamente un sistema no homogéneo puede ser incompatible. Todo sistema homogéneo tiene solución. Al menos la n -upla nula es solución (solución trivial) de los sistemas homogéneos.
- Sistemas compatibles determinados: Tienen una única solución.

En los sistemas homogéneos compatibles determinados la n -upla nula es la única solución.

- Sistemas compatibles indeterminados: Tienen infinitas soluciones.

Los sistemas homogéneos compatibles indeterminados tienen otras soluciones (infinitas) además de la trivial.

Veremos cómo reconocer cada caso:

Sea $AX=H$ un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, $[AH]$ la matriz aumentada del sistema a resolver y $[RH \ ']$ la matriz aumentada del sistema resolvente, con R la matriz escalón reducida por filas de A .

$r=r(A)$ es el rango de fila de A : número de filas no nulas de su escalón reducida por filas, R .

$r(AH)$ es el rango de fila de la matriz aumentada: número de filas no nulas de su matriz escalón reducida por filas.

Práctico 3: Conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo 1:

Supongamos que a partir de la matriz aumentada $[AH]$ se obtiene la siguiente matriz $[RH']$:

	Matriz aumentada del sistema resolvente	Sistema resolvente
	$[RH']$	$RX = H'$
$r(AH)=3$	$r(A)=2$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 = -1 \\ x_3 - x_4 = 2 \\ 0 = 3 \end{cases}$ Ecuac. incompatible

No es necesario terminar de reducir por filas la matriz $[AH]$. Al obtener la matriz escalón reducida por filas de A , la matriz R , es claro que $r(A) \neq r(AH)$, lo que implica que el sistema no tiene solución (Teorema de Rouché-Frobenius).

El sistema es incompatible porque tiene una ecuación incompatible.

Conjunto solución: $S = \emptyset$ (el conjunto vacío).

Ejemplo 2:

Supongamos que a partir de la matriz aumentada $[AH]$ se obtiene la siguiente matriz $[RH']$:

Práctico 3: Conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales

	Matriz aumentada del sistema resolvente	Sistema resolvente
$r(AH) = r(A) = 3$	$[RH]$ $\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$	$RX = H'$ $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$
	$\underbrace{\hspace{10em}}$ Columnas Principales x_1, x_2, x_3 : Incógnitas principales	

$r(A) = r(AH)$, lo que implica que el sistema tiene solución (Teorema de Rouché-Frobenius).

En cualquier sistema lineal se tiene

$r(A) = \text{número de columnas principales} = \text{número de incógnitas principales}$.

En este caso, además $r(A) = 3$ y 3 es el número total de incógnitas. En consecuencia no hay incógnitas no principales.

Se tienen tres elementos conductores, tres incógnitas principales y ninguna no principal.

El sistema es compatible determinado.

Conjunto solución: $S = (x_1, x_2, x_3) = (-1, 2, 0)$.

Ejemplo 3:

Supongamos que a partir de la matriz aumentada $[AH]$ se obtiene la siguiente matriz $[RH']$:

Práctico 3: Conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales

	Matriz aumentada del sistema resolvente	Sistema resolvente
$r(AH)=2= r(A)$	$[RH]$ $\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$ <div style="text-align: center; margin-top: 10px;"> $\downarrow \qquad \downarrow$ Columns Principales </div> <div style="text-align: center; margin-top: 10px;"> $x_1, x_3:$ Incógnitas principales </div> <div style="text-align: center; margin-top: 10px;"> $x_2, x_4, x_5:$ Incógnitas no principales </div>	$RX = H'$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_5 = 1 \\ x_3 + 2x_5 = -2 \end{cases}$

$r(A)=r(AH)$, lo que implica que el sistema tiene solución (Teorema de Rouché-Frobenius).

Las incógnitas no principales ya no son incógnitas, sabemos que pueden adoptar, si el problema a resolver no nos impone restricciones, cualquier número real. Como existen infinitos números reales tendremos infinitas soluciones. Para cada juego de valores que se asigne a x_2, x_4, x_5 , se tendrá un valor para cada incógnita principal. Por esta razón, a partir de este momento, en este sistema, llamaremos parámetros a las incógnitas no principales y los representaremos con letras: $a, b, c, k, l, m, n, t, r, s, \lambda, \alpha, \beta$ (ya que las últimas letras del abecedario las reservamos para las incógnitas: x, y, z, v, w).

En síntesis el conjunto solución tendrá infinitas soluciones. Toda vez que un sistema compatible contenga incógnitas no principales, tendrá infinitas soluciones. El sistema será compatible indeterminado.

Práctico 3: Conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales

Cambiamos la representación de las incógnitas no principales por letras que nos indiquen que son parámetros:

$$x_2 = r \quad ; \quad x_4 = t \quad ; \quad x_5 = k$$

A partir del sistema resolvente escribimos las incógnitas principales en función de los parámetros:

$$x_1 = 1 - 2r + k$$

$$x_3 = -2 + 2k$$

Solución general:

$$x_1 = 1 - 2r + k$$

$$x_3 = -2 + 2k$$

$S = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1 - 2r + k, r, -2 + 2k, t, k)$ Esta es la solución general.

Escribiremos la solución como combinación lineal de n-uplas porque nos resultará útil en Álgebra Lineal.

Una combinación lineal de n-uplas es una n-upla expresada como una suma de n-uplas, cada una multiplicada por un escalar. En este caso, los elementos de las n-uplas serán los términos independientes y los coeficientes de los parámetros. Los escalares serán los parámetros.

A los fines de aclarar los conceptos volveremos a escribir las incógnitas principales en términos de los parámetros, explicitando todos los coeficientes, términos independientes y parámetros aunque se obtengan términos nulos.

En la práctica se puede obviar este paso.

Práctico 3: Conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales

$$x_1 = 1 - 2r + 0t + 1k$$
$$x_3 = -2 + 0r + 0t + 2k$$

Conjunto solución:

Solución General

$$S = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \underbrace{(1, -2, 0, 0, 0)}_{\text{Términos independientes}} + r \underbrace{(-2, 1, 0, 0, 0)}_{\text{Coeficientes de } r} + t \underbrace{(0, 0, 0, 1, 0)}_{\text{Coeficientes de } t} + k \underbrace{(1, 0, 2, 0, 1)}_{\text{Coeficientes de } k}$$

Si se realizaran las operaciones indicadas como se verá más adelante en este curso, es decir, si se multiplicaran los escalares por las n-uplas y luego se sumaran los resultados, se obtendría nuevamente la solución general como se había escrito anteriormente.

Para cada asignación de valores a los parámetros se tendrá una solución particular:

Solución particular:

$$r = 1 \quad ; \quad t = 3; \quad k = -2$$

$$S = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, -2, 0, 0, 0) + 1(-2, 1, 0, 0, 0) + 3(0, 0, 0, 1, 0) + (-2)(1, 0, 2, 0, 1) = (-3, -1, -4, 3, -2)$$