Práctico 6: Determinantes

Definición de Determinante de una matriz

Sea $A \in \Re^{nxn}$

Se llama determinante a la función

$\det : \Re^{nxn} \to \Re;\ A \mapsto \det A$

que asigna a cada matriz cuadrada *nxn* un único número real, denotado *det A* (determinante de *A*) que se obtiene de la siguiente manera:

- Si *n=1*;

$A = [a]$, entonces $\det A = a$

- Si *n=2*;

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, entonces $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}\ a_{21}$

- Si *n>2*;

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, entonces

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + \cdots + a_{in}C_{in} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}C_{ir}$$

Es decir, el determinante de *A* es la sumatoria de los elementos de una fila cualquiera, cada uno multiplicado por el cofactor correspondiente (se explicará en seguida). Esto se conoce como desarrollo por cofactores a lo largo de la fila *i.*

Es indistinto calcular el determinante mediante el desarrollo por cofactores a lo largo de una columna cualquiera, *j.*

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + \cdots + a_{nj}\, C_{nj} = \sum_{r=1}^{n} a_{rj}C_{rj}$$

El cofactor de orden *ij* es

$$\mathrm{C}_{\mathrm{ij}} = (-1)^{\mathrm{i+j}} \det \mathrm{A}_{\mathrm{ij}}$$

donde A_{ij} es la submatriz que se obtiene suprimiendo en la matriz *A*, la fila *i* y la columna *j.*

Ejemplo 1:

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

Para calcular su determinante se pueden tomar los elementos de una fila cualquiera o de una columna cualquiera.

Lo más conveniente a efectos de reducir la cantidad de operaciones, es elegir la tercera columna ya que en ella tenemos dos elementos nulos y el restante es *-1*. Sin embargo, para ilustrar el modo en que se calculan los cofactores y la forma de operar, tomaremos los elementos de la fila *2*.

$$\det A = 2C_{21} + 4C_{22} + (-1)C_{23}$$

Los cofactores son

$C_{21} = (-1)^{2+1} \det A_{21}$

La matriz A_{21} es $A_{21} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, matriz *2x2*, cuyo determinante, según la definición, es $\det A_{21} = 5.0 - (-2)0 = 0$

$C_{21} = (-1).0 = 0$

$C_{22} = (-1)^{2+2} \det A_{22} = \det A_{22} = 1.0 - 0.0 = 0$

$C_{23} = (-1)^{2+3} \det A_{23} = (-1)[1(-2) - 5.0] = 2$

Por lo que el *det A es*

$\det A = 2.0 + 4.0 + (-1)2 = -2$

Ejercicio 1:

Compruebe que se obtiene el mismo resultado mediante el desarrollo por cofactores a lo largo de la segunda columna de la matriz.

Ejercicio 2:

Obtenga el determinante de la siguiente matriz realizando el desarrollo por cofactores a lo largo de la fila o columna que crea más conveniente.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ -5 & -8 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Respuesta: *32*.

Pregunta 1:

¿Cuántas operaciones requiere, en general, hallar el determinante de una matriz *3x3*? ¿El de una matriz *4x4*? ¿Y el de una matriz *nxn*?

Pregunta 2:

Con qué criterio elegiría una fila o columna para el desarrollo por cofactores de una matriz.

Pregunta 3:

¿Conoce otro método para calcular determinantes? Seguramente en la escuela secundaria aprendió el método llamado de Sarrus. ¿Puede aplicarse este procedimiento a cualquier matriz?. Pruebe resolver los ejercicios anteriores con la regla de Sarrus.

El contenido que sigue a continuación no se exigirá pues se verá en Álgebra Lineal, no obstante su conocimiento resulta útil e interesante para el alumno.

Propiedades de los determinantes

Las propiedades de los determinantes se irán deduciendo una por una.

Práctico 6: Determinantes

Ejercicio 3:

Sean E_1, E_2, E_3, matrices elementales *2x2*, que se obtienen realizando operaciones elementales de filas de tipo *I*, *II* y *III* respectivamente. Escoja usted operaciones elementales cualesquiera de tipo *I*, *II* y *III* y con ellas halle las matrices elementales. Calcule los determinantes de dichas matrices elementales. ¿Puede enunciar reglas que permitan predecir los determinantes de las matrices elementales?

Ejercicio 4:

Sean *B*, *C*, *D* matrices *2x2*, que se obtienen a partir de una matriz *A 2x2* a la que se le aplican operaciones elementales de filas de tipo *I*, *II* y *III*, respectivamente. ¿Qué relación hay entre los determinantes de las matrices *B*, *C* y *D*, con el determinante de la matriz *A*? ¿Es la misma relación que halló anteriormente para las matrices elementales?

El siguiente teorema responde a los ejercicios 3 y 4.

Teorema 2

Sean $A, B, C, D \in \Re^{nxn}$, B, C, D matrices que se obtienen a partir de A mediante operaciones elementales de filas $e_i^{(k)}$, $e_{ij}^{(k)}$ y e_{ij}, respectivamente.

Entonces

1) $\det B = k \det A$

2) $\det C = \det A$

3) $\det D = -\det A$

Matriz triangular:

Una matriz triangular es aquella matriz cuadrada cuyos elementos que están por debajo, o por arriba, de la diagonal principal son todos nulos.

Ejemplo 2:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ es una matriz triangular.

Calcule el determinante de la matriz *A*. ¿Se puede obtener el determinante de *A* a partir de los elementos de la diagonal principal exclusivamente?

Enuncie una regla para obtener el determinante de una matriz triangular.

Ejercicio 5:

Sea la matriz del ejemplo 1. Aplique el teorema anterior para hallar el determinante de la matriz dada.

Ayuda: mediante operaciones elementales de filas transforme la matriz en una matriz triangular. Calcule el determinante de la matriz triangular. Obtenga el determinante pedido, teniendo en consideración el determinante de la matriz triangular y cómo afectó cada una de las operaciones elementales practicadas al determinante de la matriz original.

Pregunta 4:

Estime la cantidad de operaciones necesarias para obtener el determinante de una matriz 3x3, el de una matriz 4x4 y el de una matriz nxn, transformando la matriz dada en una matriz triangular. En qué casos aplicaría un procedimiento y en qué casos el otro.

Teorema 3

Una matriz cuadrada es inversible si y solo si su determinante es distinto de 0.

Ejercicio 6:

Demuestre que si una matriz A es inversible, entonces su determinante es distinto de 0.

Ayuda:

Suponga que tiene una matriz A inversible cualquiera.

Si A es inversible, entonces es equivalente por filas a la matriz identidad.

Práctico 6: Determinantes

Si a la matriz *A* le aplica operaciones elementales de filas para reducirla por filas, obtiene finalmente la matriz identidad.

Siendo el determinante de la identidad (matriz triangular) *1*…¿ es posible que el determinante de *A* sea *0*?.

Ejercicio 7:

Suponga el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ -x + ky = -2 \end{cases}$$

Hallar el, o los valores de *k*, para que el sistema tenga única solución.

Matriz transpuesta:

Sea $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ matriz *mxn*.

Se llama matriz transpuesta de *A* a la matriz $A^t = \left[a_{ji} \right]$

Ejemplo 3:

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 7 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$

Entonces $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

Vale decir, por ejemplo, el elemento a_{12} de A es igual al elemento a_{21} de A^t. O bien que la fila 1 de la matriz dada es la columna 1 de la transpuesta. La fila 2 de la matriz dada es la columna 2 de la transpuesta. La fila 3 de la matriz dada es la columna 3 de la transpuesta.

No olvide que el determinante solo está definido para las matrices cuadradas.

Teorema 4

Si A es una matriz nxn, entonces $\det A = \det A^t$

Ejercicio 8:

Demuestre el teorema anterior.

Ayuda: recuerde que al definir determinante dijimos que era equivalente tomar los elementos de una fila o de una columna cualquiera.

Teorema 5

Sean A y B matrices nxn. Entonces *det (AB)= (det A) (det B).*

Pregunta 5:

¿Es cierto que *det (A+B)= (det A) + (det B)?*

Ayuda: si la respuesta fuera negativa, un contraejemplo sería suficiente demostración. Trate de inventar un contraejemplo (ejemplo que demuestra la falsedad de una afirmación).

Ejercicio 9:

Invente matrices 2x2 para ejemplificar el teorema 5.

Ejercicio 10:

Aplique el teorema 5 para demostrar el teorema 2.

Ejercicio 11:

Haga un listado con las propiedades de los determinantes.

Ayuda: las propiedades se enunciaron en los teoremas 2, 3, 4 y 5.