

DERIVADA

Interpretación geométrica

Sean $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$; $x_0 \in D_f$.

r' : recta secante por P y Q .

r : recta tangente por P .

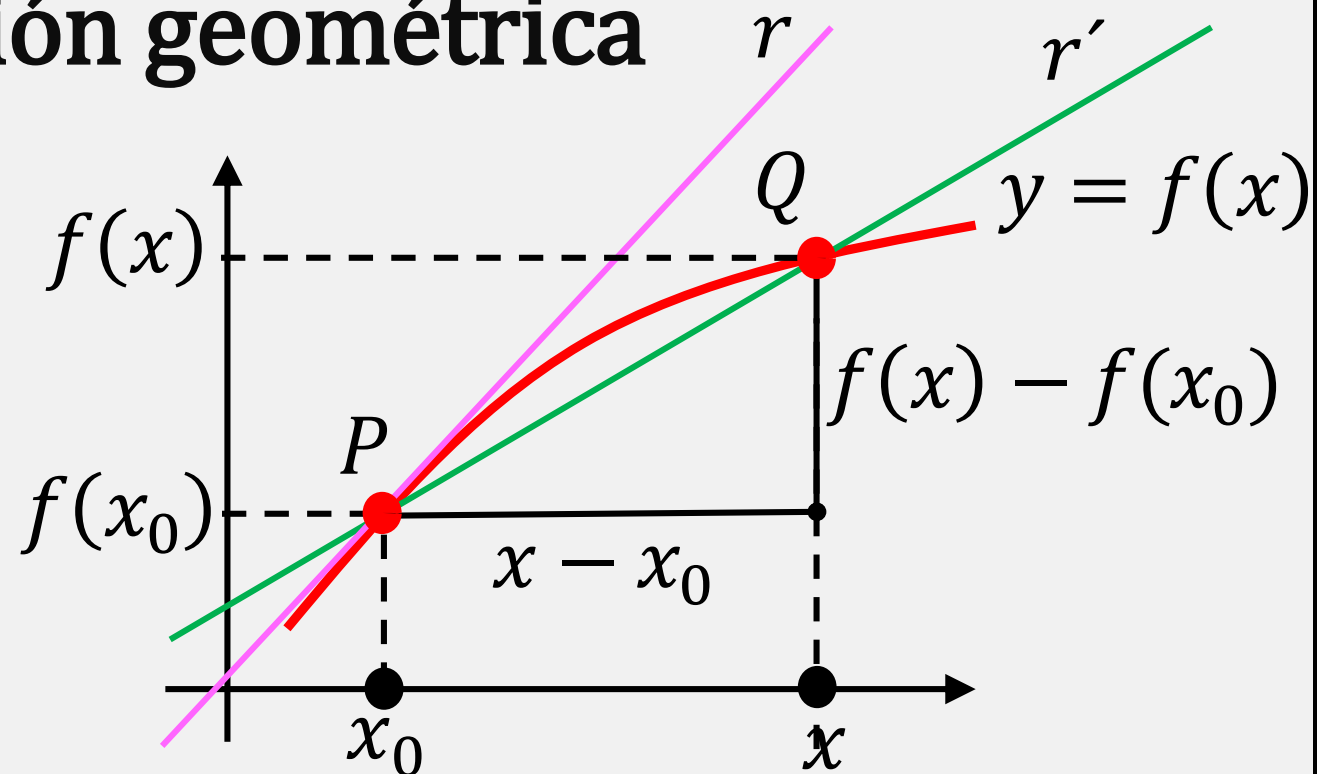
Si $P \rightarrow Q \Rightarrow r' \rightarrow r$

Pendiente de r' :

$$m' = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Pendiente de r :

$$m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$



$f'(x_0)$ es la derivada de f en x_0 .
Es la pendiente de la recta tangente a la curva de f en x_0 .

Derivada de una función en un punto

Definición

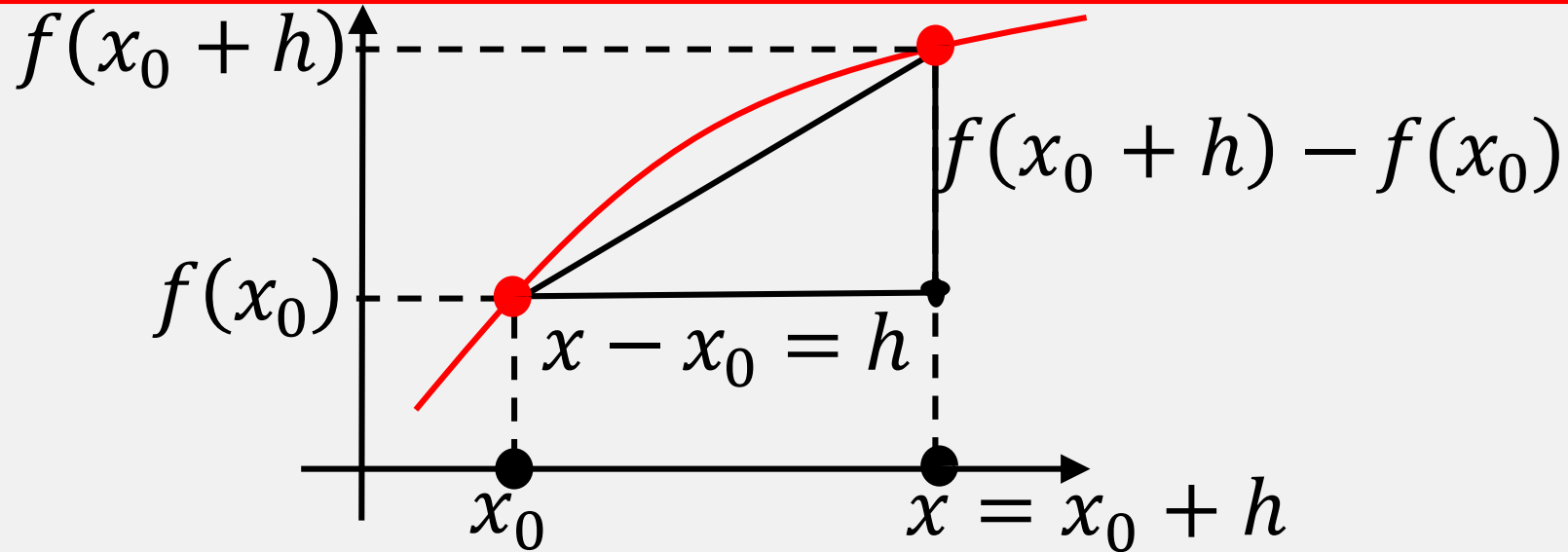
Sea f una función definida en un intervalo abierto J y $x_0 \in J$.

La derivada de f en x_0 es el número $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Si el límite existe se dice que f es derivable o diferenciable en x_0 .

Observaciones

$$1. f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



$$2. \text{Notación: Derivada de } f \text{ en } x_0: f'(x_0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = Df(x_0) = y'_{x_0}$$

$$\text{Función derivada de } f: f'(x) = \frac{dy}{dx} = Df(x) = y'$$

3. Si existe $f'(x_0)$, entonces las derivadas izquierda y derecha en x_0 son iguales:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

4. Si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \infty$, la función no es diferenciable en x_0 , pero se dice que la derivada de f en x_0 es ∞ . En ese caso la tangente a la curva de f es paralela al eje y .

5. Si $\exists f' \forall x \in (a, b)$, se dice que f es derivable sobre (a, b) .

Si además $\exists f'_+(a)$ y $f'_-(b)$, f es derivable sobre $[a, b]$.

Ejemplo

1. Sea $f(x) = k$. Aplicando la definición deduzca $f'(x)$.

$$f'(x) = \lim_0 \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_0 \frac{k - k}{h} = 0$$

La derivada de una constante es 0: $y = k \implies y' = 0$.

2. Sea $f(x) = x^2$. Aplicando la definición deduzca $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_0 \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_0 \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \\ &= \lim_0 \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_0 \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_0 \frac{2xh + h^2}{h} = \\ &= \lim_0 \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_0 2x + h = 2x \end{aligned}$$

De igual modo se demuestra que si $y = x^m \implies y' = mx^{m-1}$

Ejemplo 3. Sea $f(x) = \text{sen } x$. A partir de la definición deduzca $f'(x)$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\text{sen}\left(\frac{x+h-x}{2}\right) \cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \cos x$$

Entonces, si $y = \text{sen } x$, $y' = \cos x$.

Teorema que relaciona derivabilidad con continuidad

Si f es derivable en x_0 , entonces f es continua en x_0 .

Demostración:

Sea f derivable en x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) = f(x_0)$$

En consecuencia, f es continua en x_0 .

Continuidad no implica derivabilidad

Lo demostraremos con un ejemplo: Sea $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Las derivadas laterales en $x_0 = 0$ son

$$f'_-(0) = \lim_{0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{0^+} \frac{h}{h} = 1$$

Como las derivadas laterales son distintas, f no es derivable en 0.

Continúa

Ahora veremos si f es continua en 0:

$$f(0) = |0| = 0$$

$$\lim_{0^-} |x| = \lim_{0^-} -x = 0$$

$$\lim_{0^+} |x| = \lim_{0^+} x = 0$$

Como los límites laterales son iguales a 0, resulta

$$\lim_0 |x| = 0$$

Y como $f(0) = \lim_0 |x| = 0$ resulta que f es continua en 0.

En definitiva, siendo f continua, no es derivable.

Ejemplo 4. Sea $f(x) = \log_b x$. A partir de la definición deduzca $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_b(x+h) - \log_b(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_b \left(\frac{x+h}{x} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_b \left(1 + \frac{h}{x} \right) = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x}{h} \log_b \left(1 + \frac{h}{x} \right) = \\ &= \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \log_b \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x} \log_b \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x} \log_b e \end{aligned}$$

Entonces, si $y = \log_b x$; resulta $y' = \frac{1}{x} \log_b e$.

Si $b = e$: $y = \ln x$ entonces $y' = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$.

Álgebra de derivadas

Teorema: álgebra de derivadas

Sean f, g derivables en un intervalo abierto J . $k \in \mathbb{R}$.

Entonces $f + g$ es derivable en J y $[f + g]' = f' + g'$

kf es derivable en J y $[kf]' = kf'$

fg es derivable en J y $[fg]' = f'g + fg'$

$\frac{1}{g}$ es derivable en J y $\left[\frac{1}{g}\right]' = -\frac{g'}{g^2}$ si $g(x) \neq 0 \ \forall x \in J$

$\frac{f}{g}$ es derivable en J y $\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ si $g(x) \neq 0 \ \forall x \in J$

Demostración de la derivada del producto: Sean f, g derivables $\forall x \in J$.

$$\begin{aligned} [fg]'(x) &= \lim_0 \frac{[fg](x+h) - [fg](x)}{h} = \lim_0 \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_0 \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_0 \frac{g(x+h)[f(x+h) - f(x)] + f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h} = \\ &= \lim_0 \frac{g(x+h)[f(x+h) - f(x)]}{h} + \lim_0 \frac{f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h} = \\ &= \lim_0 g(x+h)f'(x) + f(x)g'(x) = \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \end{aligned}$$

Ejemplo Derive las siguientes funciones:

a) $y = \text{sen}(x) \ln(x)$

$$y' = \cos(x) \ln(x) + \text{sen}(x) \frac{1}{x}$$

b) $y = \frac{x^2}{\ln(x)}$

$$y' = \frac{2x \ln(x) - x^2 \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{2x \ln(x) - x}{(\ln(x))^2}$$

c) $y = 4(\text{sen}(x) + \sqrt{x})$

$$y' = 4 \left(\cos(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

Ejemplo

5. Sea $y = \tan x$, aplicando el álgebra de derivadas deduzca y' .

$$y = \tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

$$y' = \frac{\cos x \cos x - \text{sen } x (-\text{sen } x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Entonces si $y = \tan x$; resulta $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Teorema: Derivada de la función compuesta

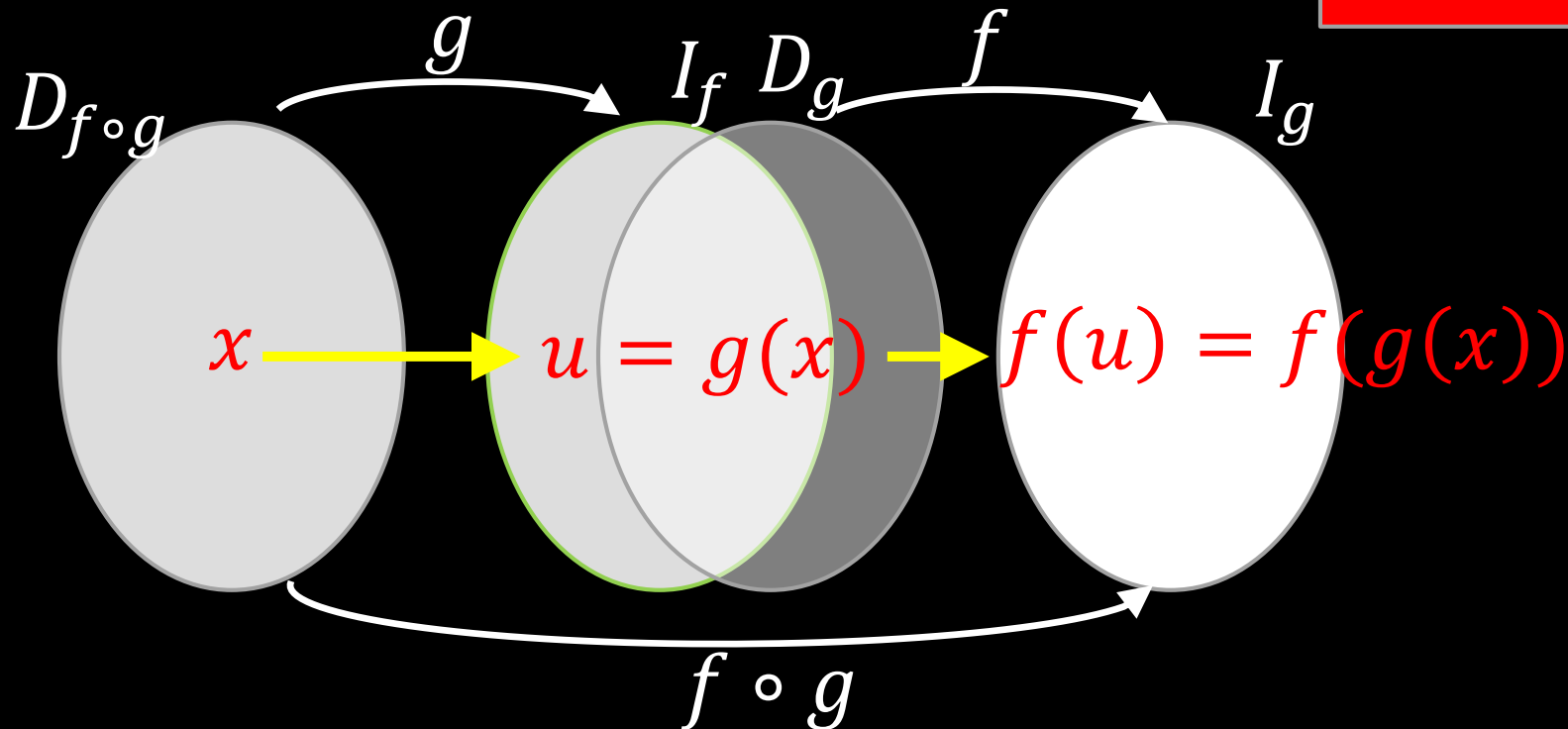
Sean g derivable en x y f derivable en $g(x)$.

Entonces $f \circ g$ es derivable en x

y $[f \circ g]'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

Nota: Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$; entonces

$$y' = f'(u)u'$$



Ejemplo Sea $y = \ln(x^2 + 3x)$

$$u = x^2 + 3x \quad ; \quad u' = 2x + 3$$

Entonces $y = f(u) = \ln u$

$$y' = f'(u) u' = \frac{1}{u} u'$$

$$y' = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x}$$

Ejemplo

6. Sea $f(x) = \cos x$. Con el teorema anterior deduzca $f'(x)$.

$$y = \cos x = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

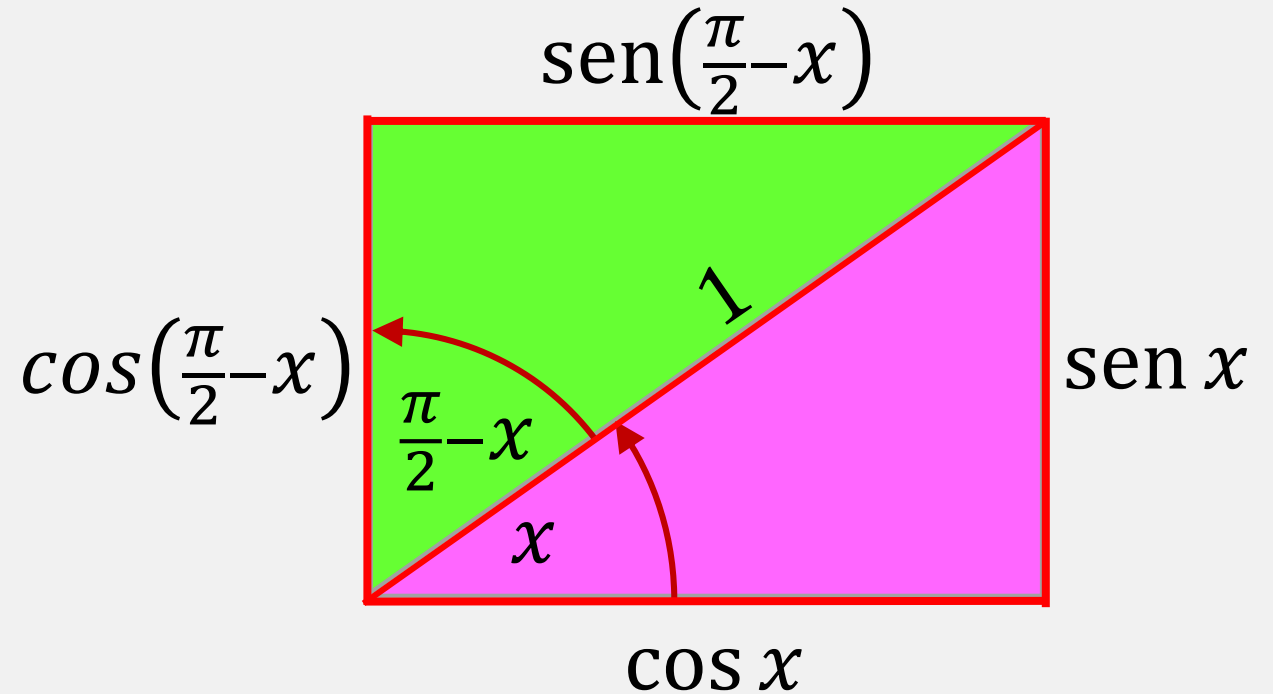
$$u = \frac{\pi}{2} - x; \quad u' = -1$$

$$y' = \cos u \quad u'$$

$$y' = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) (-1) = -\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$y' = -\operatorname{sen} x$$

En definitiva: si $y = \cos x$; entonces $y' = -\operatorname{sen} x$



Método logarítmico de derivación

Sea $y = f^g$ función expopotencial

$$\ln y = \ln f^g = g \ln f$$

$$\frac{y'}{y} = g' \ln f + g \frac{f'}{f}$$

$$y' = y \left(g' \ln f + g \frac{f'}{f} \right)$$

$$y' = f^g \left(g' \ln f + g \frac{f'}{f} \right)$$

Ejemplo 7. Sea $f(x) = e^x$. Aplicando el método logarítmico deduzca $f'(x)$.

$$y = e^x$$

$$\ln y = \ln e^x = x \ln e = x$$

$$\frac{y'}{y} = 1$$

$$y' = y$$

$$y' = e^x$$

Derivadas sucesivas

- Si f es una función derivable en un intervalo abierto J , entonces $f' = [f]'$ es la **derivada primera** de f en J .
- Si f' es derivable en un intervalo abierto J , entonces $f'' = [f']'$ es la **derivada segunda** de f en J .
- Si f'' es derivable en un intervalo abierto J , entonces $f''' = [f'']'$ es la **derivada tercera** de f en J .
- $\vdots$
- Si $f^{(n-1)}$ es derivable en un intervalo abierto J , entonces $f^{(n)} = [f^{(n-1)}]'$ es la **derivada enésima** de f en J .

Teorema: Derivada de la función inversa

Sea f una función biyectiva en un intervalo abierto J

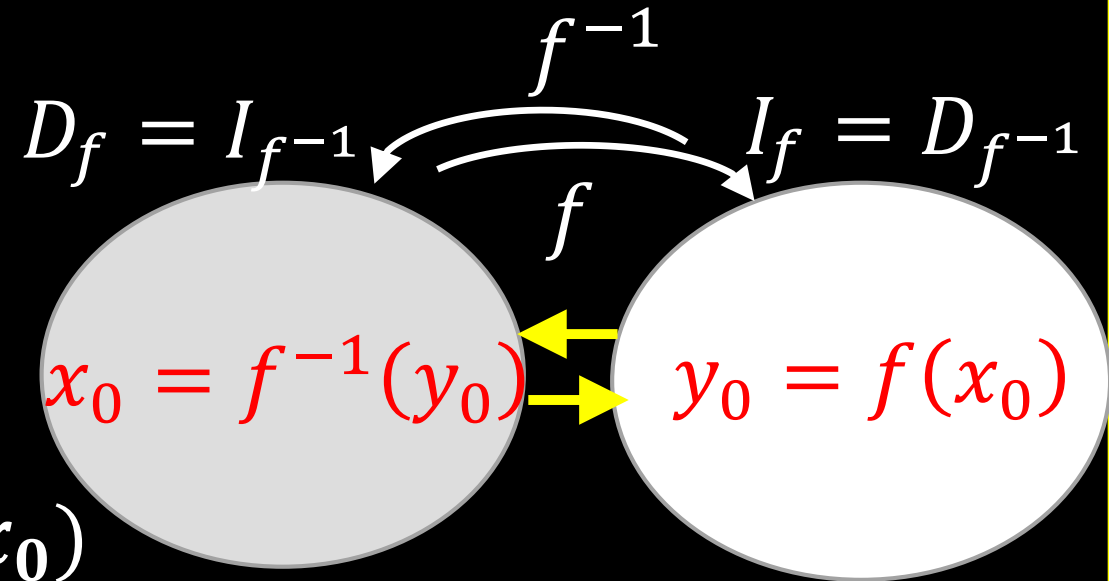
y f^{-1} su función inversa.

Si f es derivable en $x_0 \in J$

y $f'(x_0) \neq 0$,

entonces f^{-1} es derivable en $y_0 = f(x_0)$

y se cumple $[f^{-1}]'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.



Ejemplo 8. Deduzca la derivada de la función $\text{arc sen } x$.

Sea $y = f(x) = \text{sen } x$ definida en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

f es biyectiva en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. $f^{-1}(x) = \text{arc sen } x$.

Por el teorema anterior:

$$\begin{aligned} [\text{arc sen}]'(y_0) &= [f^{-1}]'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\cos x_0} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}} \end{aligned}$$

Cambiando y_0 por x_0 y si $y = \text{arc sen } x$, se tiene $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Tabla de derivadas

1. $y = k$

$$y' = 0$$

2. $y = x^m$

$$y' = mx^{m-1}$$

3. $y = e^x$

$$y' = e^x$$

4. $y = a^x$

$$y' = a^x \ln a$$

5. $y = \log_b x$

$$y' = \frac{1}{x} \log_b e$$

6. $y = \ln x$

$$y' = \frac{1}{x}$$

7. $y = \text{sen } x$

$$y' = \text{cos } x$$

8. $y = \text{cos } x$

$$y' = -\text{sen } x$$

9. $y = \text{tan } x$

$$y' = \frac{1}{\text{cos}^2 x}$$

10. $y = \text{arc sen } x$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

11. $y = \text{arc tan } x$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

Tabla de derivadas

1. $y = k$ $y' = 0$

2. $y = u^m$ $y' = mu^{m-1}u'$

3. $y = e^u$ $y' = e^u u'$

4. $y = a^u$ $y' = a^u \ln a u'$

5. $y = \log_b u$ $y' = \frac{1}{u} \log_b e u'$

6. $y = \ln u$ $y' = \frac{1}{u} u'$

7. $y = \text{sen } u$ $y' = \cos u u'$

8. $y = \cos u$ $y' = -\text{sen } u u'$

9. $y = \tan u$ $y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

10. $y = \text{arc sen } u$ $y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

11. $y = \text{arc tan } u$ $y' = \frac{u'}{1+u^2}$