Práctico 15: Métodos de Derivación

MÉTODOS DE DERIVACIÓN

Tabla de derivadas

Para hacer los ejercicios de derivación, el alumno deberá conocer las derivadas de las funciones elementales.

Función	Función derivada
$y = k$	$y` = 0$
$y = x$	$y` = 1$
$y = x^m$	$y` = mx^{m-1}$
$y = a^x$	$y` = a^x Ln\, a$
$y = e^x$	$y` = e^x$
$y = \log_a x$	$y` = \frac{1}{x \ \ln a}$
$y = \ln x$	$y` = \frac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y` = \cos x$
$y = \cos x$	$y` = -\sin x$
$y = \tan x$	$y` = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = arc\ \sin x$	$y` = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = arc\ \tan x$	$y` = \frac{1}{1+x^2}$

Ejercicios de derivación inmediata

Se deben aplicar las reglas de derivación que se encuentran en la tabla de derivadas.

1)	$y = 3$	$y` = 0$
2)	$y = x$	$y` = 1$
3)	$y = \sqrt{x}$	$y` = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4)	$y = 2^x$	$y` = 2^x Ln\ 2$
5)	$y = e^x$	$y` = e^x$

6)	$y = \log x$	$y` = \dfrac{1}{x\ \ln 10}$
7)	$y = \ln x$	$y` = \dfrac{1}{x}$
8)	$y = \sin x$	$y` = \cos x$
9)	$y = \cos x$	$y` = -\sin x$
10)	$y = \tan x$	$y` = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
11)	$y = arc\ \sin x$	$y` = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12)	$y = arc\ \tan x$	$y` = \dfrac{1}{1+x^2}$

Álgebra de derivadas

Se aplicarán las siguientes reglas:

Sean u, v funciones derivables.

$y = u + v$	$y` = u` + v`$
$y = ku$	$y` = ku$
$y = uv$	$y` = u`v + uv`$
$y = \dfrac{1}{u}$	$y` = -\dfrac{u`}{u^2}$
$y = \dfrac{u}{v}$	$y` = \dfrac{u`v - uv`}{v^2}$

Ejercicios de álgebra de derivadas:

13)	$y = 3 + 2x$	$y` = 2$
14)	$y = -x$	$y` = -1$
15)	$y = \sqrt{x} + e^x$	$y` = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + e^x$
16)	$y = (\sin x)2^x$	$y` = (\cos x)\ 2^x + (\sin x)\ 2^x Ln\ 2$
17)	$y = \dfrac{e^x}{2x}$	$y` = \dfrac{e^x 2x - 2e^x}{4x^2}$

18)	$y = 4\log x$	$y\grave{} = \dfrac{4}{x\ \ln 10}$
19)	$y = 2\tan x \ln x$	$y\grave{} = \dfrac{2\ln x}{cos^2 x} + \dfrac{2\tan x}{x}$
20)	$y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$	$y\grave{} = \dfrac{-sen^2x - cos^2x}{sin^2x} = -\dfrac{1}{sin^2x}$
21)	$y = 3x^2 \cos x$	$y\grave{} = 6x\cos x - 3x^2 \sin x$
22)	$y = \sqrt{x}\tan x$	$y\grave{} = \dfrac{\tan x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{\cos^2 x}$
23)	$y = \dfrac{e^x}{arc\ \sin x}$	$y\grave{} = \dfrac{e^x arc\ \sin x - e^x \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{(arcsen\ x)^2}$
24)	$y = \ln x\ \ arc\ \tan x$	$y\grave{} = \dfrac{1}{x} arc\tan x + \dfrac{\ln x}{1+x^2}$

<u>Derivada de la función compuesta</u>

Sea $y = f(u)$ entonces $y\grave{} = f\grave{}(u)u\grave{}$

<u>Ejercicios de derivada de la función compuesta:</u>

En la primera columna está el ejercicio propuesto. En la tercera columna se identifica la función u. En la segunda columna se expresa la función dada en función de u. En la última columna está el resultado final.

25)	$y = \sqrt{x^2-1}$	$y = u^{\frac{1}{2}}$ $y\grave{} = \dfrac{u^{-\frac{1}{2}}}{2}u\grave{}$	$u = x^2 + 1$ $u\grave{} = 2x$	$y\grave{} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
26)	$y = \dfrac{1}{(3x)^2}$	$y = u^{-2}$ $y\grave{} = -2u^{-3}\,u\grave{}$	$u = 3x$ $u\grave{} = 3$	$y\grave{} = \dfrac{-6}{(3x)^3}$
27)	$y = (\tan x)^2$	$y = u^2$ $y\grave{} = 2u\,u\grave{}$	$u = \tan x$ $u\grave{} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y\grave{} = 2\tan x\,\dfrac{1}{\cos^2 x}$
28)	$y = 3^{\sqrt{x}}$	$y = 3^u$ $y\grave{} = 3^u \ln 3\ u\grave{}$	$u = x^{\frac{1}{2}}$ $u\grave{} = \dfrac{x^{-\frac{1}{2}}}{2}$	$y\grave{} = 3^{\sqrt{x}}\ln 3\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
29)	$y = e^{\cos x}$	$y = e^u$ $y\grave{} = e^u\,u\grave{}$	$u = \cos x$ $u\grave{} = -\sin x$	$y\grave{} = -e^{\cos x}\sin x$

30)	$y = \log\left(\frac{1}{x}\right)$	$y = \log u$ $y` = \frac{1}{u\ \ln 10}\ u`$	$u = \frac{1}{x}$ $u` = \frac{-1}{x^2}$	$y` = \frac{-1}{x\ \ln 10}$
31)	$y = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$	$y = \ln u$ $y` = \frac{1}{u}\ u`$	$u = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $u` = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$	$y` = -\frac{1}{2x}$
32)	$y = \sin\left(\frac{3}{x}\right)$	$y = \sin u$ $y` = \cos u\ u`$	$u = \frac{3}{x}$ $u` = \frac{-3}{x^2}$	$y` = \frac{-3\cos\left(\frac{3}{x}\right)}{x^2}$
33)	$y = \cos\left(\frac{x}{e^x}\right)$	$y = \cos u$ $y` = -sen\ u\ u`$	$u = \frac{x}{e^x}$ $u` = \frac{1-x}{e^x}$	$y` = \left[-\sin\left(\frac{x}{e^x}\right)\right]\left(\frac{1-x}{e^x}\right)$
34)	$y = \tan(4x^2 + 3x)$	$y = \tan u$ $y` = \frac{1}{\cos^2 u}\ u`$	$u = (4x^2 + 3x)$ $u` = 8x + 3$	$y` = \frac{8x+3}{\cos^2(4x^2+3x)}$
35)	$y = arc\ \sin\sqrt{x}$	$y = arc\ \sin u$ $y` = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\ u`$	$u = \sqrt{x}$ $u` = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y` = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$
36)	$y = arc\ \tan\left(\frac{1}{x+1}\right)$	$y = arc\tan u$ $y` = \frac{1}{1+u^2}\ u`$	$u = \frac{1}{x+1}$ $u` = \frac{-1}{(x+1)^2}$	$y` = -\frac{1}{(1+x)^2\cos^2\left(\frac{1}{1+x}\right)}$

La regla de la cadena se puede aplicar repetidas veces. Es el caso de una función $y = f(u)$, donde $u = g(v)$, $v = h(w)$, ……, siendo *u*, *v*, *w*, … funciones.

37) $y = \sqrt{\ln(sen\ x)}$	$y = u^{\frac{1}{2}}$	$u = \ln v$	$v = sen\ x$
	$y' = \frac{1}{2}u^{\frac{-1}{2}}u'$	$u' = \frac{v}{v'}$ $u' = \frac{sen\ x}{\cos x}$	$v' = \cos x$

$$y´ = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\ln(sen\,x)}}\frac{sen\,x}{\cos x}$$

38) $y = \left(\tan\sqrt{x}\right)^2$ $\quad y = u^2 \quad u = \tan v \quad v = x^{\frac{1}{2}}$

$$y´ = 2uu´ \qquad u´ = \frac{1}{cos^2 v}v´ \qquad v´ = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$u´ = \frac{1}{cos^2\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y´ = 2\ \tan\sqrt{x}\frac{1}{cos^2\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Se pueden combinar el álgebra de derivadas con la derivada de la función compuesta:

39) $y = \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{\sqrt{\tan(x+sen\,x)}}$ $\quad y = \frac{u}{v} \quad u = fg \quad v = \sqrt{w} \quad w = \tan z \quad z = x + sen\,x$

$$y´ = \frac{u´v - uv´}{v^2} \qquad u´ = f'g + fg´ \qquad v´ = \frac{1}{2\sqrt{w}}w´ \qquad w´ = \frac{1}{cos^2 z}z´ \qquad z´ = 1 + \cos x$$

$$f´ = 2x \qquad v´ = \frac{1+\cos x}{2\sqrt{\tan(x+sen\,x)}cos^2(x+sen\,x)} \qquad w´ = \frac{1+\cos x}{cos^2(x+sen\,x)}$$

$$g´ = \cos x$$

$$u´ = 2x\ sen\,x + \ x^2 \cos x$$

$$y´ = \frac{[2x\ sen\,x + \ x^2\cos x]\sqrt{\tan(x+sen\,x)} - x^2 \operatorname{sen} x\frac{(1+\cos x)}{2\sqrt{\tan(x+sen\,x)}\,cos^2(x+sen\,x)}}{\tan(x+sen\,x)}$$

Derivación logaritmica

Sea $y = f^g$ una función expopotencial. f, g funciones derivables.

No se pueden aplicar las reglas de la tabla de derivadas que ya hemos visto:

$$y = x^m \qquad y` = mx^{m-1}$$

$$y = a^x \qquad y` = a^x Ln\,a$$

$$y = e^x \qquad y` = e^x$$

Por el contrario, estas reglas se deducen con el método de derivación logarítmica.

Derivaremos con el método de derivación logarítmica.

1. Tomamos el logaritmo en ambos miembros de la igualdad:

$$\ln y = \ln f^g$$

2. Escribimos el exponente del argumento del logaritmo multiplicando al logaritmo:

$$\ln y = g \ln f$$

3. Derivamos ambos miembros. Recordemos que $[\ln u]` = \frac{u`}{u}$

$$\frac{y`}{y} = g` \ln f + g \frac{f`}{f}$$

4. Despejamos $y`$.

$$y` = f^g \left( g` \ln f + g \frac{f`}{f} \right)$$

40) $y = (sen\ x)^x$ $\qquad$ $y` = (sen\ x)^x \left[\ln(sen\ x) + x \frac{\cos x}{sen\ x} \right]$

41) $y = (\ln x)^{\frac{1}{x^2}}$ $\qquad$ $y` = (\ln x)^{\frac{1}{x^2}} \left[\frac{-2}{x^3} \ln(\ln x) + \frac{1}{x^3 \ln x} \right]$