Análisis Matemático I
Sucesiones y Series - Guía de Trabajos Prácticos 2012

1. Calcule los diez primeros términos de las sucesiones:

a) $n \to (-1)^n$

b) $n \to \dfrac{\cos(n®)}{n}$

c) $n \to 2^n sen\left(n \frac{®}{2}\right)$

d) $n \to \dfrac{n}{n+2}$

e) $a_n = 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

f) $b_n = \dfrac{n}{n!}$

g) $c_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}$

h) $a_n = 1 + (-1)^n$

i) $a_n = (1 + \dfrac{1}{2n})^n$

2. Determine si las sucesiones del ejercicio 1 son o no convergentes.

3. Una sucesión $\{a_n\}$ está definida por **recurrencia**, si dados los primeros k términos, los valores de los a_n para $n \geq k$, se expresan como una función de los términos anteriores. Se llama relación de recurrencia a la expresión mediante la cual a_n se calcula mediante los términos anteriores .

Escriba en cada los cinco primeros términos de las sucesiones

a) $a_1 = 1 \qquad a_n = a_{n-1} + 2$

b) $a_1 = a_2 = 1 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

c) $a_1 = 2 \qquad a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}$

4. Si q es un número real no nulo y se define $\{S_n\}$ como la sucesión de las siguientes sumas

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + q$$
$$S_3 = 1 + q + q^2$$
$$\vdots$$
$$S_n = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1}$$

a) ¿Qué interpretación daría a S_n?

b) ¿Podría calcular S_n sin hacer explícitamente la suma?. (Ayuda: Calcule $S_n - qS_n$)

5. Si K es un número positivo, la sucesión definida por $a_1 = 1$, $\quad a_n = \dfrac{1}{2}(a_{n-1} + \dfrac{K}{a_{n-1}})$ $con\ n \geq 2$ brinda aproximaciones de $\sqrt{K}$ .Utilice los primeros 5 términos de la sucesión para obtener una aproximación de $\sqrt{5}$.¿Con cuántos términos se logra una aproximación a tres cifras decimales?

6. Una sucesión se denomina **aritmética** si cada término de la misma , se obtiene del término anterior sumándole un número constante, que se denomina razón.

Así si se denomina r, entonces el término general de la sucesión aritmética es $a_n = a_1 + (n-1)\,r$

Escriba en cada uno de los siguientes casos los cinco primeros términos de la sucesión

a) $a_{22} = 1$ y $r = \frac{1}{2}$

b) $a_1 = -1$ y $r = 2$

c) $a_1 = 2$ y $r = \frac{1}{3}$

d) $a_1 = 7$ y $r = 2$

7. . Sabiendo que la suma de los "n "primeros términos de una sucesión aritmética es $S_n = n\frac{a + (a + (n-1)r)}{2}$ donde n es el número de términos r es la razón y a es el primer término ¿Cuál es la suma de todos los números de tres cifras que terminan en 3?

8. Calcule $\sum_{k=0}^{200}(1+3k)$

9. Calcule la suma de todos los números impares menores que 100.

10. Una sucesión se denomina **geométrica** si cada término de la misma , se obtiene del término anterior **multiplicado** por un número constante, que se denomina razón.

Así si se denomina r a la razón , entonces el término general de la sucesión geométrica es $a_n = a\,r^{n-1}$

Escriba en cada uno de los siguientes casos los cinco primeros términos de la sucesión

a) $a_1 = 1$ y $r = \frac{1}{2}$

b) $a_1 = 3$ y $r = 2$

c) $a_1 = 5$ y $r = \frac{1}{2}$

d) $a_1 = -1$ y $r = -1$

11. Sabiendo que la suma de los "n "primeros términos de una sucesión geométrica es $S_n = a\,\frac{1-r^n}{1-r}$ donde ***n*** es el número de términos ***r*** es la razón y ***a*** es el primer término , calcule las siguientes sumas:

a) $\sum_{k=1}^{100} 3.2^{k-1}$ b) $\sum_{k=-1}^{100}\frac{1}{3^{k+2}}$ c) $\sum_{k=4}^{50}\frac{1+2^k}{3^{k+2}}$

12. Demuestre que si $|r| < 1$, entonces la sucesión $\{nr^n\}$ converge a cero.

13. 13.Si la sucesión $\{a_n\}$ es divergente, ¿es necesariamente el $\lim a_n = \infty$?Justifique claramente.

14. a) Determine si la sucesión definida por $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ es convergente.

b) Indique a partir de que valor de n los a_n se encuentran del $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ a una distancia mayor de $£ = 0{,}1$.

15. Considerando que para valores muy grandes de *n,* puede afirmarse que
$\ln(n) < n^{\sim} < a^n < n! < n^n$ si $\sim > 0$ y $a > 1$, Calcule

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{2n!}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{3^n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{100^n}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n\sqrt{2n}}{5^n}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^5}{\ln(n^5)}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{2n}}{n^n}$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!+n^3}{2\,n^n}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\, e^{-n}$

16. Determine si las siguientes sucesiones convergen o no, en caso de convergencia encuentre el límite:

a) $a_n = \frac{n+1}{2n+3}$

b) $a_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n+1}$

c) $a_n = sen\ (n®)$

d) $a_n = \sin\ (n®)$

e) $a_n = \sqrt{n^2} - n$

f) $a_n = \frac{n^2-1}{2+n^2+\sqrt{n}}$

g) $a_n = \frac{2^n}{3^n+1}$

h) $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{3n^2+10}}$

i) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^4+n+2}}{n^2}$

j) $a_n = \dfrac{sen\,(n®)}{n}$

k) $a_n = \sqrt[n]{n}$

l) $a_n = 2^{-1/n^3}$

m) $a_n = \left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n$

n) $a_n = \sqrt[n]{n^3+1}$

o) $a_n = n\ sen(2n)$

p) $a_n = (\sqrt{n^2+2n-1}-n)$

q) $a_n = \dfrac{3^n}{5^n+10^6}$

r) $a_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$

s) $a_n = \dfrac{sen(n)}{\sqrt[3]{n}}$

t) $a_n = \dfrac{\sqrt{1+n}-1}{n}$

u) $a_n = \dfrac{n-\ln(n)+\cos(n)}{n-\sqrt{n}\ln(n^2)}$

17. Demuestre que las sucesiones $\left\{\dfrac{n^2}{n+3}\right\}$ y $\left\{\dfrac{n^2}{n+4}\right\}$ son ambas divergentes, pero que la sucesión $\left\{\dfrac{n^2}{n+3}-\dfrac{n^2}{n+4}\right\}$ converge.

18. Determine para que valores de la constante c la sucesión $\left\{\dfrac{n}{c^n}\right\}$ resulta convergente.

19. 10. Determine si las siguientes series convergen o no

a) $\sum \dfrac{k}{k^4+3}$

b) $\sum \dfrac{1}{k+3}$

c) $\sum \dfrac{\ln k}{k^3}$

d) $\sum \dfrac{1}{\sqrt{k^2-k}}$

e) $\sum \dfrac{(2)^{-k}}{3}$

f) $\sum \dfrac{1}{k\ln k}$

g) $\sum \dfrac{1}{(k+3)(k+2)(k+1)}$

h) $\sum \dfrac{\ln\sqrt{k}}{k}$

i) $\sum \dfrac{2}{k(\ln k)^2}$

j) $\sum \dfrac{7k+2}{2k^5+7}$

k) $\sum k e^{-k^2}$

l) $\sum k^2 2^{-k^2}$

m) $\sum \dfrac{3^k}{k!}$

n) $\sum \dfrac{k!}{100^k}$

o) $\sum \dfrac{1}{k2^k}$

p) $\sum \left(\dfrac{k}{3k+1} \right)^k$

q) $\sum \dfrac{(\ln k)^2}{k}$

r) $\sum k \left(\dfrac{3}{2} \right)^{-k}$

s) $\sum \dfrac{1}{(\ln k)^k}$

t) $\sum \dfrac{3}{2+\sqrt[3]{k}}$

u) $\sum \dfrac{1}{\sqrt{k^3-1}}$

v) $\sum \dfrac{3^k}{k^k} k!$

w) $\sum \dfrac{\ln k}{e^k}$

x) $\sum \dfrac{\ln(k)}{k^2}$

y) $\sum \dfrac{k^k}{k!}$

z) $\sum \dfrac{k!}{k^k}$

20. Determine si las siguientes series convergen o no. En caso afirmativo indique si lo hacen en forma absoluta o condicional.

a) $\sum \dfrac{(-1)^k \ln k}{k}$

b) $\sum \dfrac{\cos(n®)\, 2^k}{3^{k+1}}$

c) $\sum \dfrac{(-1)^k}{3k+1}$

d) $\sum (-1)^k \dfrac{3^k}{k}$

e) $\sum (-1)^k \dfrac{3^k}{k}$

f) $\sum (-1)^k \dfrac{k^2}{2^k}$

g) $\sum (-1)^k \dfrac{k!}{2^k}$

h) $\sum sen\left(\dfrac{k®}{4} \right)$

i) $\sum sen\left(\dfrac{®}{4k^2} \right)$

j) $\sum (-1)^k \dfrac{4^{k-2}}{e^k}$

k) $\sum (-1)^k k e^{-k}$

l) $\sum (-1)^k \dfrac{1}{k-3\sqrt{k}}$

m) $\sum (-1)^k \dfrac{k+5}{k^2+k}$

ñ) $\sum (-1)^k \left(\dfrac{2}{5} \right)^{2k}$

o) $\sum (-1)^k \dfrac{k}{k^4-5}$

p) $\sum \dfrac{\sqrt{k}+5}{k^2+k+2}$

q) $\sum \dfrac{1}{®^k-2}$

r) $\sum \dfrac{k^2}{1+k\sqrt{k}}$

s) $\sum \frac{k^{100} 5^k}{\sqrt{k!}}$

t) $\sum \frac{k!}{k^2 e^k}$

u) $\sum \left(-1\right)^k \frac{\sqrt{k}}{\ln(k)}$

v) $\sum \frac{\left(-1\right)^{k-1}}{k^2 + \ln(k)}$

w) $\sum \frac{(-1)^k (k^2 - 1)}{k^2 + 1}$

21. Determine cuales de las siguientes series converge y cuales divergen. Para cada serie convergente estudie si lo hace en forma absoluta o condicional

a) $\sum \left(-1\right)^{n+1} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$

b) $\sum \left(-1\right)^{n-1} \frac{\sqrt{n} + 1}{n + 1}$

c) $\sum_{2}^{\infty} (-1)^n \log_n(2)$

d) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \;\; sen(\frac{1}{n})$

e) $\sum_{2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n)}$

f) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{2n-1} \frac{10^n}{n^{10}}$

g) $\sum_{2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{\ln(n^3)}$

h) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \ln(1 + \frac{3}{n})$

i) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n (0.1)^{n+1}$

j) $\sum_{2}^{\infty} (-1)^n \frac{2 + n}{7 + n}$

k) $\sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n + 1}$

l) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$

m) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n + 1}$

n) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)}{n^2 + 2n + 1}$

ñ) $\sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{100^n}{n!}$

o) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right]$

p) $\sum_{0}^{\infty} \frac{\cos(n®)}{n\sqrt{n}}$

q) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{sen(n)}{n^2}$

r) $\sum_{2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n^3}$

s) $\sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n} + 1}$

t) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

u) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$

v) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\ \sqrt[n]{10}$

w) $\sum_{2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\ln(n)}$

x) $\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

y) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2-n+2}{6n^6+n^2}$

z) $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$

a1) $\sum_{2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(5n+3)^{\frac{3}{2}}}$

b1) $\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+10}$

c1) $\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$

d1) $\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$

e1) $\sum_{1}^{\infty}\frac{5n^2+2n}{3n(n^2+1)}$

22. Demuestre usando los criterios de convergencia para series Geométricas que

$$\frac{1}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n \qquad si \quad 0<t<1$$

23. Muestre con un ejemplo que $\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ puede ser divergente aun cuando $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ son ambas convergentes.

24. Encuentre el radio e intervalo de convergencia para las siguientes series de potencias. Si el radio de convergencia es finito verifique si la serie es o no convergente en los extremos del intervalo

a) $\sum_{0}^{\infty}x^n$

b) $\sum_{0}^{\infty}n^2x^n$

c) $\sum_{0}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n!}$

d) $\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

e) $\sum_{0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$

f) $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{n^2}$

g) $\sum_{0}^{\infty} \frac{e^n x^n}{(2n+1)}$

h) $\sum_{0}^{\infty} n^n x^n$

i) $\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

j) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n-1}}{n}$

k) $\sum_{o}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x+6)^n}{n!}$

l) $\sum_{0}^{\infty} \frac{(5)^n (x-3)^n}{n!}$

m) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(x+7)^n}{\sqrt{n}}$

n) $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}3^n}$

o) $\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$

p) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n(x+1)^n}{\sqrt{n}}$

q) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(x)^n}{\sqrt{n^2+3}}$

r) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n$

s) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1+3^n}{n!} x^n$

t) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{2n^2+2}$

u) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n$

25. Calcule la suma de la serie de potencias $\sum_{0}^{\infty} \frac{(5x+2)^n}{n!}$

26. Encuentre la serie de Taylor con centro en a=0 para las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x) = \cos(x)$

c) $f(x) = sen(x)$

d) $f(x) = \ln(1+x)$

e) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$

f) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \text{senh}(x)$

27. Encuentre el intervalo de convergencia de cada una de las series del ejercicio 16.

28. Encuentre el polinomio de Taylor de cuarto grado de $f(x)=e^{x^2}$ alrededor de a=1, y use este polinomio para aproximar $f(1{,}1)$. Encuentre una cota del error que se comete con tal aproximación.

29. Encuentre el polinomio de Taylor de cuarto grado de $f(x)=e^{-x}$ alrededor de a=1, y use este polinomio para aproximar $e^{-0.99}$. Encuentre una cota del error que se comete con tal aproximación.

30. Use un polinomio de Taylor centrado en $a=\frac{\text{®}}{4}$ para aproximar cos (42°) con una precisión de 10^{-6}..

31. a) Encuentre la serie de Taylor de la función $f(x)=\ln(x)$ centrada en $a=e$ y determine el intervalo de convergencia.

b) Determine de que grado debe ser el polinomio de Taylor centrado en para $a=e$ obtener una aproximación de ln(3) con una precisión de 10^{-4}.

32. Use un polinomio de Taylor de grado cuatro de la función $f(x)=\ln(1+x)$, para aproximar ln(1,1) y estime el error que comete con tal aproximación.

Derivación e integración de series de Potencias

Según este teorema las series de potencias se pueden derivar e integrar término a término dentro del intervalo de convergencia.

Teorema:

- Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias de radio R y supongamos que $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ para todo x $\in$ (-R, R). Entonces las serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, obtenida de derivar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ término a término, también tiene radio de convergencia R y además

  $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \forall x\in(-R,R)$.

Esto es, la serie derivada término a término converge a la derivada de f para todo x $\in$ (-R, R).

- Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias de radio R y supongamos que $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ para todo x $\in$ (-R, R). Entonces las serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$,, obtenida de integrar

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ término a término, también tiene radio de convergencia R y además

$\int f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad \forall x \in (-R,R)..$

Esto es la serie integrada término a término converge a la integral de f para todo x $\in$ (-R, R).

En particular, si $a,b \in (-R,R)$ se tiene que $\int_a^b f(x)dx = \sum_0^{\infty} a_n (\int_a^b x^n dx)$

33. a) Encuentre un desarrollo en serie de potencias de la función $f(x) = \frac{1}{1+x}$ y determine el intervalo de convergencia.

b) Derive término a término el desarrollo en serie obtenido en el inciso anterior para obtener un desarrollo en serie de la función $g(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ y especifique en que intervalo vale este desarrollo

c) A partir del desarrollo en serie de potencias de la función $f(x) = \frac{1}{1+x}$, determine un desarrollo en serie de potencias centrado en el origen de la función $f(x) = \ln(1+x)$ e indique en que intervalo es válida esta representación.

34. a) Encuentre un desarrollo en serie de potencias de la función $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ y a partir de éste determine un desarrollo en serie centrado en el origen para la función $f(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$.

Indique en que intervalo es válido este desarrollo.

35. a) Use la identidad $sen^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$,para obtener un representación en serie centrado en el origen para $sen^2(x)$

b) Diferencie la serie obtenida para obtener un desarrollo en serie para la función $2sen(x)\cos(x)$

c) Verifique que esta serie es el desarrollo en serie con centro en el origen de $sen(2x)$.

36. Partiendo de la representación de $\frac{1}{1+t} = 1 + t + t^2 + t^3 + ...$ si $0 < t < 1$ considere la representación en serie de las siguientes funciones

a) $\frac{1}{3-x}$

b) $\dfrac{1}{(3-x)^2}$

37. Determine una representación en serie de potencias de la función f(x) = ln(x) en potencias de (x-4).

38. Idem para la función de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$