

Colección

Tecnología de alimentos

**Operaciones
Unitarias en la
Ingeniería de
Alimentos**

Albert Ibarz

Gustavo V. Barbosa-Cánovas

MP

**OPERACIONES UNITARIAS
EN LA
INGENIERÍA DE ALIMENTOS**

ALBERT IBARZ

Catedrático de Tecnología de Alimentos
Universidad de Lleida

GUSTAVO V. BARBOSA-CÁNOVAS

Profesor de Ingeniería de Alimentos
Washington State University

OPERACIONES UNITARIAS EN LA INGENIERÍA DE ALIMENTOS



Ediciones Mundi-Prensa

Madrid • Barcelona • México

2005

Grupo Mundi-Prensa

- **Mundi-Prensa Libros, s. a.**

Castelló, 37 - 28001 Madrid
Tel. 914 36 37 00 - Fax 915 75 39 98
E-mail: libreria@mundiprensa.es

- **Internet: www.mundiprensa.com**

- **Mundi-Prensa Barcelona**

- **Editorial Aedos, s. a.**

Consell de Cent, 391 - 08009 Barcelona
Tel. 934 88 34 92 - Fax 934 87 76 59
E-mail: barcelona@mundiprensa.es

- **Mundi-Prensa México, s. a. de C. V.**

Río Pánuco, 141 - Col. Cuauhtémoc
06500 México, D. F.
Tel. 00 525 55 533 56 58 - Fax 00 525 55 514 67 99
E-mail: mundiprensa@mundiprensa.com.mx

© 2005, Albert Ibarz y Gustavo V. Barbosa-Cánovas

© 2005, Ediciones Mundi-Prensa

Depósito Legal: M. 4.505-2005

ISBN: 84-8476-163-0

No se permite la reproducción total o parcial de este libro ni el almacenamiento en un sistema informático, ni la transmisión de cualquier forma o cualquier medio, electrónico, mecánico, fotocopia, registro u otros medios sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

Artes Gráficas Cuesta, S. A. - Seseña, 13 - 28024 Madrid

A nuestras familias

Albert Ibarz Ribas es Licenciado y Doctor en Ciencias Químicas (Ingeniería Química) por la Universidad de Barcelona, Ingeniero Técnico Agrícola en Industrias Agroalimentarias por la Universidad Politécnica de Cataluña. En la actualidad es Catedrático de Tecnología de Alimentos en la Universidad de Lleida.

Gustavo V. Barbosa-Cánovas es Ingeniero Mecánico por la Universidad de Uruguay, posee los títulos de Maestría y Doctorado en Ingeniería de Alimentos por la Universidad de Massachusetts en Amherst. Actualmente es Profesor de Ingeniería de Alimentos y Director del Centro de Procesado No-térmico de Alimentos en la Washington State University.

Prólogo

Uno de los objetivos primordiales de las industrias alimentarias es realizar una serie de operaciones sobre las materias primas agrícolas, que las conviertan en alimentos aptos para el consumo humano. Estas operaciones se realizan de tal modo que cambian su composición y/o su nivel energético. Para realizar estas transformaciones se utilizan distintos aparatos, en las diferentes etapas de procesado, siendo imprescindible que cada una de estas etapas esté bien diseñada para que el producto sufra el mínimo de deterioro. El cálculo y diseño eficiente de cada una de estas etapas es el fin primordial de la Ingeniería Alimentaria, y en la que cada una de las etapas de proceso recibe el nombre de Operación Unitaria o Básica.

El estudio sistemático de las Operaciones Unitarias arranca de la Ingeniería Química, donde se desarrollaron las herramientas de cálculo de las mismas. Posteriormente, todos estos conocimientos se han ido aplicando a la Ingeniería Alimentaria, y al mismo tiempo se han adaptado a la naturaleza singular y distintiva de las materias primas sobre las que se deben aplicar estos mecanismos de cálculo. Siempre es importante resaltar que no sólo es necesario obtener el óptimo de producción, sino que el producto final de toda la serie de operaciones debe ser un alimento apto para el consumo y de máxima calidad. Ello hace que en la aplicación de las operaciones unitarias utilizadas en un determinado proceso alimentario, sea fundamental un cálculo exhaustivo y esmerado, con el fin de obtener unas etapas de procesado que impartan el mínimo deterioro en el alimento que se está elaborando.

Los estudios de Ingeniería Alimentaria son muy complejos, y junto a las enseñanzas básicas de química y bioquímica de alimentos, así como de los procesos, deben incluirse los estudios más ingenieriles de cálculo incluidos en la Operaciones Unitarias. Un análisis de lo expuesto indica la necesidad que se debe tener para comprender y utilizar los principios ingenieriles, y saber aplicarlos correctamente a los procesos industriales. El objetivo esencial de este libro es presentar, en forma progresiva y sistemática, la información necesaria para poder diseñar procesos alimentarios y los equipos necesarios para llevarlos a cabo. Para cumplir este objetivo es importante que el estudiante tenga una adecuada formación en matemática, física e ingeniería en general. Este libro es útil como herramienta de cálculo para las operaciones unitarias descritas, y está enfocado para alumnos del segundo ciclo universitario de Licenciatura e Ingeniería de Alimentos.

El conjunto de Operaciones Unitarias de la Ingeniería Alimentaria es muy amplio, y un estudio exhaustivo de las mismas daría como resultado un compendio amplísimo. Además, algunas de las operaciones unitarias son de poca aplicación, y en algunos casos en industrias alimentarias muy específicas. En el presente libro se ha intentado cubrir las que, a entender de los autores, son las de mayor relevancia para la Industria Alimentaria en general. En los primeros capítulos se dan las nociones básicas de los fenómenos de transporte que rigen todas las transferencias, de materia, energía y cantidad de movimiento, en las que se basan las distintas Operaciones Unitarias. Se incluyen un conjunto de operaciones basadas en el transporte de fluidos, resaltando la importancia del comportamiento no newtoniano de muchos de los alimentos fluidos y semilíquidos que se manejan en la industria. Se ha introducido un capítulo de balances macroscópicos de materia y energía, imprescindibles para el planteamiento del modelo matemático de cualquier operación unitaria. También se desarrollan las operaciones basadas en los tres mecanismos de transmisión de calor: conducción, convección y radiación. Se resalta la gran importancia de los aparatos utilizados en la transmisión de calor, así como las operaciones de pasteurización y esterilización, evaporación y deshidratación. Se incluyen también las siguientes operaciones basadas en la transferencia de materia: destilación, absorción, adsorción, intercambio iónico y extracción sólido-líquido. Las mismas cobran singular importancia para muchas industrias, aunque en otras puedan ser totalmente prescindibles. Para facilitar la comprensión de todas las operaciones estudiadas, cada capítulo finaliza con una serie de problemas resueltos, que sirven de ejemplo a la teoría desarrollada, y que pueden clarificar y comprender mejor los conceptos estudiados.

El deseo de los autores es el de que esta obra en español llene un hueco existente en los estudios de Ingeniería Alimentaria en los países de habla hispana, y sería una gran satisfacción que con ello ayudásemos a entender y poder diseñar muchas operaciones unitarias vitales en la Industria de Alimentos.

Albert Ibarz
Gustavo V. Barbosa-Cánovas

Agradecimientos

Los autores quieren expresar su agradecimiento a las siguientes instituciones y personas que de una forma u otra contribuyeron para que este libro se hiciese posible:

- Universidad de Lleida y Washington State University (WSU) por proveer la infraestructura y marco más que adecuado para la preparación de este libro.
- María Luisa Calderón (WSU) por su profesionalismo y dedicación en revisar el libro de principio a fin. Sus comentarios y sugerencias fueron muy valiosas.
- José Juan Rodríguez (WSU) y Federico Harte (WSU – Universidad de la República Oriental del Uruguay) por su decisiva participación en la revisión final del original y por hacer la impresión final. Ambos trabajaron con gran esmero, dedicación, entusiasmo y gran sentido profesional.
- Todos los estudiantes que tomaron nuestros cursos de Operaciones Unitarias en Ingeniería de Alimentos, los cuales fueron un estímulo constante para concebir, desarrollar y culminar esta obra.
- Albert por colaborar con esmero en la preparación de muchas de las figuras del libro y tanto a él como a Raquel por toda su invaluable ayuda y aliento para que este libro se convirtiese en una agradable realidad.

Contenido

Prólogo	9
Agradecimientos	11
1. Introducción a las Operaciones Unitarias. Conceptos fundamentales ...	25
1.1. Proceso	25
1.2. Ingeniería de los procesos alimentarios	25
1.3. Transformación y comercialización de productos agrícolas	26
1.4. Diagramas de flujo. Descripción de algunos procesos alimentarios ..	27
1.5. Régimen estacionario y no estacionario	27
1.6. Operaciones discontinuas, continuas y semicontinuas	29
1.7. Las Operaciones Unitarias. Clasificación	30
1.7.1. Operaciones Unitarias de transporte de cantidad de movi-	
miento	31
1.7.2. Operaciones Unitarias de transferencia de materia	32
1.7.3. Operaciones Unitarias de transmisión de calor	32
1.7.4. Operaciones Unitarias de transferencia simultánea de ma-	
teria-calor	32
1.7.5. Operaciones Unitarias complementarias	33
1.8. Planteamiento matemático de los problemas	33
2. Sistemas de unidades. Análisis dimensional y semejanza	35
2.1. Sistemas de magnitudes y unidades	35
2.1.1. Sistemas absolutos de unidades	35
2.1.2. Sistemas técnicos de unidades	36
2.1.3. Sistemas ingenieriles de unidades	36
2.1.4. Sistema Internacional de unidades (SI)	37
2.1.5. Unidades térmicas	38
2.1.6. Conversión de unidades	39
2.2. Análisis dimensional	41
2.2.1. Teorema π de Buckingham	43
2.2.2. Métodos de análisis dimensional	44
2.3. Teoría de la semejanza	46

2.3.1.	Semejanza geométrica	47
2.3.2.	Semejanza mecánica	48
	Problemas	53
3.	Introducción a los fenómenos de transporte	65
3.1.	Introducción histórica	65
3.2.	Fenómenos de transporte. Definición	66
3.3.	Regímenes de circulación. Experimento de Reynolds	67
3.4.	Mecanismos de los fenómenos de transporte	70
3.4.1.	Transferencia de materia	71
3.4.2.	Transmisión de energía	72
3.4.3.	Transporte de cantidad de movimiento	73
3.4.4.	Leyes de velocidad	73
3.4.5.	Fenómenos acoplados	73
4.	Transporte molecular de cantidad de movimiento, energía y materia ..	75
4.1.	Introducción	75
4.2.	Transporte de cantidad de movimiento. Ley de Newton de la viscosidad	75
4.3.	Transmisión de energía. Ley de Fourier de la conducción de calor ..	77
4.4.	Transferencia de materia. Ley de Fick de la difusión	78
4.5.	Ecuación general de velocidad	83
5.	Balances macroscópicos de materia y energía	85
5.1.	Introducción	85
5.2.	Balance macroscópico de materia	86
5.3.	Balance macroscópico de energía	89
	Problemas	96
6.	Interacción aire-agua	107
6.1.	Introducción	107
6.2.	Propiedades del aire húmedo	107
6.3.	Diagrama psicrométrico de Mollier para aire húmedo	111
6.3.1.	Diagrama psicrométrico \hat{s} T - X	111
6.3.2.	Diagrama psicrométrico X - T	115
6.4.	Temperatura de termómetro húmedo	116
6.5.	Saturación adiabática del aire	118
	Problemas	121
7.	Reología de productos alimentarios	129
7.1.	Introducción	129
7.2.	Esfuerzo y deformación	130
7.3.	Sólidos elásticos y fluidos newtonianos	132
7.4.	Funciones viscosimétricas	134

7.5.	Clasificación reológica de alimentos fluidos	135
7.6.	Flujo newtoniano	137
7.7.	Flujo no newtoniano	139
7.7.1.	Flujo independiente del tiempo	139
7.7.2.	Flujo dependiente del tiempo	142
7.8.	Viscoelasticidad	146
7.9.	Efecto de la temperatura	152
7.10.	Efecto de la concentración sobre la viscosidad	153
7.10.1.	Teorías estructurales de la viscosidad	153
7.10.2.	Viscosidad de soluciones	154
7.10.3.	Efecto combinado temperatura-concentración	156
7.11.	Modelos mecánicos	157
7.11.1.	Modelo de Hooke	157
7.11.2.	Modelo de Newton	158
7.11.3.	Modelo de Kelvin	158
7.11.4.	Modelo de Maxwell	159
7.11.5.	Modelo de Saint-Venant	160
7.11.6.	Modelo mecánico del cuerpo de Bingham	160
7.12.	Medidas reológicas en alimentos semilíquidos	161
7.12.1.	Métodos fundamentales	161
7.12.2.	Métodos empíricos	175
7.12.3.	Métodos imitativos	175
	Problemas	177
8.	Transporte de fluidos por tuberías	181
8.1.	Introducción	181
8.2.	Circulación de fluidos incompresibles	182
8.2.1.	Criterio para flujo laminar	182
8.2.2.	Distribución de velocidades	186
8.2.3.	Perfil universal de velocidades	194
8.3.	Balances macroscópicos en la circulación de fluidos	196
8.3.1.	Balance de materia	196
8.3.2.	Balance de cantidad de movimiento	198
8.3.3.	Balance de energía total	198
8.3.4.	Balance de energía mecánica	201
8.4.	Pérdidas de energía mecánica	202
8.4.1.	Factores de fricción	202
8.4.2.	Cálculo de factores de fricción	203
8.4.3.	Pérdidas menores de energía mecánica	213
8.5.	Diseño de tuberías	218
8.5.1.	Cálculo de la velocidad y flujo de circulación	218
8.5.2.	Cálculo del diámetro mínimo de tubería	219
8.5.3.	Redes de tuberías	221
8.6.	Bombas	225

8.6.1.	Características de una bomba	225
8.6.2.	Punto de instalación de una bomba	229
8.6.3.	Potencia de la bomba	229
8.6.4.	Rendimiento de una bomba	230
8.6.5.	Tipos de bombas	230
Problemas	233
9.	Circulación de fluidos a través de lechos porosos. Fluidización	243
9.1.	Introducción	243
9.2.	Ley de Darcy. Permeabilidad	243
9.3.	Definiciones previas	244
9.4.	Ecuaciones para el flujo a través de lechos porosos	248
9.4.1.	Régimen laminar. Ecuación de Kozeny-Carman	248
9.4.2.	Régimen turbulento. Ecuación de Burke-Plummer	249
9.4.3.	Flujo global laminar-turbulento. Ecuaciones de Ergun y de Chilton-Colburn	250
9.5.	Fluidización	254
9.5.1.	Velocidad mínima de fluidización	255
9.5.2.	Porosidad mínima de fluidización	256
9.5.3.	Altura del lecho	257
Problemas	259
10.	Filtración	271
10.1.	Introducción	271
10.2.	Fundamentos de la filtración	271
10.2.1.	Resistencia de la torta de filtración	272
10.2.2.	Resistencia del medio filtrante	275
10.2.3.	Resistencia total de filtración	275
10.2.4.	Tortas compresibles	276
10.3.	Filtración a caída de presión constante	277
10.4.	Filtración a caudal volumétrico constante	279
10.5.	Lavado de la torta	280
10.6.	Capacidad de filtración	283
10.7.	Condiciones óptimas de filtración a presión constante	283
10.8.	Filtros de vacío de discos rotativos	285
Problemas	287
11.	Procesos de separación por membranas	297
11.1.	Introducción	297
11.1.1.	Etapas en la transferencia de materia	300
11.1.2.	Polarización por concentración	301
11.2.	Modelos de transferencia a través de la membrana	301
11.2.1.	Modelo de solución-difusión	301
11.2.2.	Modelo simultáneo difusión y flujo capilar	302

11.2.3.	Modelo simultáneo flujo viscoso y de fricción	303
11.2.4.	Modelo de adsorción preferencial y flujo capilar	303
11.2.5.	Modelo basado en la termodinámica de procesos irre- versibles	304
11.3.	Modelos de transferencia a través de la capa de polarización ...	305
11.3.1.	Modelo hidráulico	306
11.3.2.	Modelo osmótico	309
11.4.	Ósmosis Inversa	311
11.4.1.	Modelo matemático	311
11.4.2.	Capa de polarización por concentración	314
11.4.3.	Influencia de distintos factores	315
11.5.	Ultrafiltración	318
11.5.1.	Modelo matemático	318
11.5.2.	Capa de polarización por concentración	319
11.5.3.	Influencia de diferentes factores	321
11.6.	Diseño de sistemas de ósmosis inversa y ultrafiltración	323
11.6.1.	Primer método de diseño	324
11.6.2.	Segundo método de diseño	326
11.7.	Disposición operativa de los módulos	327
11.7.1.	Etapas únicas	328
11.7.2.	Cascadas simples en serie	328
11.7.3.	Dos etapas con recirculación	329
	Problemas	331
12.	Propiedades térmicas de los alimentos	339
12.1.	Conductividad térmica	339
12.2.	Calor específico	340
12.3.	Densidad	343
12.4.	Difusividad térmica	347
	Problemas	350
13.	Transmisión de calor por conducción	353
13.1.	Ecuaciones fundamentales en la conducción de calor	353
13.1.1.	Coordenadas rectangulares	353
13.1.2.	Coordenadas cilíndricas	356
13.1.3.	Coordenadas esféricas	356
13.2.	Conducción de calor en régimen estacionario	357
13.2.1.	Conducción monodimensional de calor	358
13.2.2.	Conducción bidimensional de calor	364
13.2.3.	Conducción tridimensional de calor	368
13.3.	Conducción de calor en estado no estacionario	369
13.3.1.	Conducción monodimensional de calor	370
13.3.2.	Conducción bi- y tridimensional de calor. Regla de Newman	381
	Problemas	382

14. Transmisión de calor por convección	395
14.1. Introducción	395
14.2. Coeficientes de transmisión de calor	395
14.2.1. Coeficientes individuales	395
14.2.2. Coeficientes globales	401
14.3. Intercambiadores de calor de tubos concéntricos	405
14.3.1. Características de diseño	405
14.3.2. Cálculo de los coeficientes individuales	409
14.3.3. Cálculo de las pérdidas de carga	410
14.4. Intercambiadores de calor de carcasa y tubos	410
14.4.1. Características de diseño	413
14.4.2. Cálculo de la verdadera diferencia de temperatura me- dia logarítmica	414
14.4.3. Cálculo de los coeficientes individuales	417
14.4.4. Cálculo de las pérdidas de carga	421
14.5. Intercambiadores de calor de placas	422
14.5.1. Características de diseño	425
14.5.2. Número de unidades de transferencia	427
14.5.3. Cálculo de la verdadera diferencia de temperatura me- dia logarítmica	427
14.5.4. Cálculo de los coeficientes de transmisión de calor	428
14.5.5. Cálculo de las pérdidas de carga	432
14.5.6. Procedimiento de diseño	432
14.6. Intercambiadores de calor de superficie ampliada	434
14.6.1. Modelo matemático	435
14.6.2. Eficacia de una aleta	437
14.6.3. Cálculo de intercambiadores de calor de superficie am- pliada	439
14.7. Intercambiadores de calor de pared rascada	439
14.8. Depósitos agitados con camisa y serpentines	441
14.8.1. Coeficiente individual en el interior del depósito	441
14.8.2. Coeficiente individual en el interior del serpentín	442
14.8.3. Coeficiente individual en la camisa	442
14.9. Eficacia de intercambio de calor	443
Problemas	449
15. Transmisión de calor por radiación	483
15.1. Introducción	483
15.2. Leyes fundamentales	484
15.2.1. Ley de Planck	484
15.2.2. Ley de Wien	484
15.2.3. Ley de Stefan-Boltzmann	485
15.3. Propiedades de la radiación	485
15.3.1. Propiedades totales	485

15.3.2.	Propiedades monocromáticas. Ley de Kirchhoff	486
15.3.3.	Propiedades direccionales	488
15.4.	Factores de visión	489
15.4.1.	Definición y cálculo	490
15.4.2.	Propiedades de los factores de visión	492
15.5.	Intercambio de energía radiante entre superficies separadas por medios no absorbentes	493
15.5.1.	Radiación entre superficies negras	493
15.5.2.	Radiación entre una superficie y otra negra que la rodea completamente	494
15.5.3.	Radiación entre superficies negras en presencia de refractarias. Factor refractario	494
15.5.4.	Radiación entre superficies no negras. Factor gris	496
15.6.	Coefficiente de transmisión de calor por radiación	496
15.7.	Transmisión simultánea de calor por convección y radiación ...	497
	Problemas	500
16.	Procesado térmico de alimentos	505
16.1.	Introducción	505
16.2.	Cinética de destrucción térmica	505
16.2.1.	Tiempo de reducción decimal D	506
16.2.2.	Curvas de destrucción térmica	507
16.2.3.	Constante de tiempo de muerte térmica z	508
16.2.4.	Grado de reducción n	511
16.2.5.	Tiempo de muerte térmica F	511
16.2.6.	Valor de cocción C	514
16.2.7.	Efecto de la temperatura sobre los parámetros cinéticos y de tratamiento térmico	514
16.3.	Tratamiento de productos envasados	515
16.3.1.	Curva de penetración de calor	516
16.3.2.	Métodos para determinar la letalidad	518
16.4.	Tratamiento térmico en el procesado aséptico	520
16.4.1.	Tiempos de permanencia	523
16.4.2.	Dispersión de tiempos de permanencia	524
16.4.3.	Función de distribución E en el comportamiento ideal ..	527
16.4.4.	Función de distribución E en el comportamiento no ideal	529
16.4.5.	Aplicación de los modelos de distribución al tratamiento térmico en continuo	532
	Problemas	534
17.	Conservación de alimentos por frío	547
17.1.	Congelación	547
17.2.	Temperatura de congelación	549

17.2.1.	Agua no congelada	550
17.2.2.	Masa molecular equivalente de solutos	552
17.3.	Propiedades térmicas de los alimentos congelados	552
17.3.1.	Densidad	552
17.3.2.	Calor específico	553
17.3.3.	Conductividad térmica	553
17.4.	Tiempo de congelación	554
17.5.	Diseño de sistemas de congelación	559
17.6.	Refrigeración	560
17.7.	Sistemas mecánicos de refrigeración	563
17.8.	Refrigerantes	565
17.9.	Sistemas multipresión	567
17.9.1.	Sistemas de dos compresores y un evaporador	567
17.9.2.	Sistemas de dos compresores y dos evaporadores	571
	Problemas	574
18.	Deshidratación	583
18.1.	Introducción	583
18.2.	Mezcla de dos corrientes de aire	584
18.3.	Balances de materia y calor en secaderos ideales	585
18.3.1.	Secadero continuo sin recirculación	585
18.3.2.	Secadero continuo con recirculación	586
18.4.	Mecanismos de deshidratación	587
18.4.1.	Proceso de secado	587
18.4.2.	Período de secado a velocidad constante	590
18.4.3.	Período de secado a velocidad decreciente	592
18.5.	Secaderos de armario y lecho	594
18.5.1.	Componentes de un secadero	595
18.5.2.	Balances de materia y calor	596
18.6.	Secado por atomización	603
18.6.1.	Inyectores de presión	604
18.6.2.	Atomizadores rotatorios	605
18.6.3.	Atomizadores neumáticos. Dos fluidos	609
18.6.4.	Interacción entre las gotas y el aire de secado	610
18.6.5.	Balances de calor y materia	611
18.7.	Liofilización	612
18.7.1.	Etapas de congelación	615
18.7.2.	Etapas primaria y secundaria de secado	615
18.7.3.	Transferencia simultánea de calor y materia	616
18.8.	Otros tipos de secado	621
18.8.1.	Deshidratación osmótica	621
18.8.2.	Secado solar	622
18.8.3.	Secaderos de tambor	623

18.8.4.	Secado por microondas	624
18.8.5.	Secaderos de lecho fluidizado	624
Problemas	625
19.	Evaporacion	631
19.1.	Introducción	631
19.2.	Transmisión de calor en los evaporadores	632
19.2.1.	Entalpías de vapores y líquidos	633
19.2.2.	Aumento ebulloscópico	634
19.2.3.	Coeficientes de transmisión de calor	637
19.3.	Evaporador de simple efecto	638
19.4.	Aprovechamiento del vapor desprendido	639
19.4.1.	Recompresión del vapor desprendido	639
19.4.2.	Bomba térmica	642
19.4.3.	Múltiple efecto	644
19.5.	Evaporadores de múltiple efecto	645
19.5.1.	Sistemas de circulación de las corrientes	646
19.5.2.	Modelo matemático	648
19.5.3.	Resolución del modelo matemático	650
19.5.4.	Procedimiento de cálculo	651
19.6.	Equipos de evaporación	653
19.6.1.	Evaporadores de circulación natural	653
19.6.2.	Evaporadores de circulación forzada	656
19.6.3.	Evaporadores de tubos largos	657
19.6.4.	Evaporadores de placas	658
Problemas	659
20.	Destilación	673
20.1.	Introducción	673
20.2.	Equilibrio líquido-vapor	673
20.2.1.	Presiones parciales. Leyes de Dalton, Raoult y Henry ...	676
20.2.2.	Volatilidad relativa	678
20.2.3.	Diagrama entalpía-composición	679
20.3.	Destilación de mezclas binarias	680
20.3.1.	Destilación simple	680
20.3.2.	Destilación súbita	682
20.4.	Rectificación continua de mezclas binarias	684
20.4.1.	Cálculo del número de platos	685
20.4.2.	Relación de reflujo	691
20.4.3.	Alimentaciones múltiples y extracciones laterales	695
20.4.4.	Eficacia de platos	698
20.4.5.	Diámetro de la columna	699
20.4.6.	Columnas de agotamiento	701
20.5.	Rectificación discontinua	702

22 Operaciones Unitarias en la Ingeniería de Alimentos

20.5.1.	Operación con composición de destilado constante	703
20.5.2.	Operación a razón de reflujo constante	705
20.6.	Destilación por vapor directo	706
	Problemas	709
21.	Absorción	721
21.1.	Introducción	721
21.2.	Equilibrio líquido-gas	722
21.3.	Mecanismo de la absorción	724
21.3.1.	Teoría de la doble película	725
21.3.2.	Ecuaciones básicas de transferencia de materia	725
21.3.3.	Velocidad de absorción	727
21.4.	Columnas de relleno	730
21.4.1.	Selección del disolvente	730
21.4.2.	Obtención de datos de equilibrio	731
21.4.3.	Balance de materias	731
21.4.4.	Balance entálpico	734
21.4.5.	Elección del tipo de relleno. Cálculo del diámetro de la columna	735
21.4.6.	Cálculo de altura de la columna	743
21.5.	Columnas de platos	752
	Problemas.	755
22.	Extracción sólido-líquido	767
22.1.	Introducción	767
22.2.	Equilibrio sólido-líquido	768
22.2.1.	Retención de disolución y disolvente	770
22.2.2.	Diagramas triangular y rectangular	771
22.3.	Métodos de extracción	775
22.3.1.	Contacto simple único	776
22.3.2.	Contacto simple repetido	779
22.3.3.	Contacto múltiple en contracorriente	785
22.4.	Aparatos de extracción sólido-líquido	792
22.4.1.	Extractores de contacto simple	792
22.4.2.	Sistemas de múltiples contactos con lecho fijo	794
22.4.3.	Extractores continuos de lecho móvil	794
22.4.4.	Otros tipos de extractores	797
22.5.	Aplicaciones a la industria alimentaria	799
	Problemas	805
23.	Adsorción. Intercambio iónico	815
23.1.	Introducción	815
23.1.1.	Adsorción	815
23.1.2.	Intercambio iónico	815

23.2.	Equilibrio de los procesos	816
23.2.1.	Equilibrio de adsorción	816
23.2.2.	Equilibrio de intercambio iónico	818
23.3.	Cinética de los procesos	819
23.3.1.	Cinética de adsorción	819
23.3.2.	Cinética de intercambio iónico	820
23.4.	Operación por etapas	821
23.4.1.	Contacto simple único	821
23.4.2.	Contacto simple repetido	823
23.4.3.	Contacto múltiple en contracorriente	824
23.5.	Columnas de lecho móvil	826
23.6.	Columnas de lecho fijo	827
23.6.1.	Columnas de lecho fijo con equilibrio entre fases	828
23.6.2.	Método deductivo de Rosen	828
23.6.3.	Método de la zona de cambio	829
	Problemas	837
Bibliografía		845
Apéndice		855

Introducción a las Operaciones Unitarias. Conceptos fundamentales **1**

1.1. Proceso

Recibe el nombre de proceso el conjunto de actividades u operaciones industriales que tienden a modificar las propiedades de las materias primas, con el fin de obtener productos que sirvan para cubrir las necesidades de la sociedad. Estas modificaciones que se realizan a las materias primas naturales van encaminadas a la obtención de productos que tengan una mayor aceptación en el mercado, o bien que presenten mayores posibilidades de almacenamiento o transporte.

El conjunto de necesidades primarias que deben satisfacer al ser humano, individualmente o en sociedad no ha variado excesivamente a lo largo de la historia, pues tanto la alimentación, vestido y vivienda eran necesarios al hombre primitivo como lo son al actual para su supervivencia como individuo.

La satisfacción de estas necesidades se lleva a cabo empleando, transformando y consumiendo los medios de los que se dispone en el entorno natural. En un primer nivel, de escaso desarrollo social, eran utilizados los productos naturales directamente, o con sólo unas pequeñas modificaciones físicas artesanales.

Este sencillo esquema productivo fue cambiando a medida que se desarrolló la sociedad, de forma que actualmente ya no se utilizan directamente las materias primas para satisfacer las necesidades, sino que éstas son sometidas a transformaciones físicas y químicas, que las cambian en otros productos de propiedades diferentes.

De esta forma, no sólo las materias primas son las que cubren las necesidades del consumidor, sino también aquellos productos derivados de la manipulación de dichas materias primas.

1.2. Ingeniería de los Procesos Alimentarios

Por analogía con otras ramas de la ingeniería, se pueden dar distintas definiciones de la Ingeniería de los Procesos Alimentarios. Así, según una de estas definiciones, «la Ingeniería de los Procesos Alimentarios comprende la parte de la actividad humana en que los conocimientos de las ciencias físicas, naturales y

económicas, se aplican de forma que a los productos agrícolas se les hace experimentar una modificación en su composición, contenido energético o estado físico».

También puede definirse como «la ciencia de concebir, calcular, diseñar, hacer construir y hacer funcionar las instalaciones donde se efectúan, a escala industrial y del modo más económico posible, los procesos de transformación de los productos agrícolas».

Por tanto, el ingeniero de las industrias alimentarias deberá conocer los principios básicos de la Ingeniería de Procesos, y ser capaz de desarrollar nuevas técnicas para la elaboración de los productos agrícolas. Asimismo, debe tener suficiente capacidad para poder diseñar los aparatos que deben utilizarse en un proceso determinado.

El objeto fundamental de la Ingeniería de los Procesos Alimentarios es estudiar los principios y leyes que siguen las etapas físicas, químicas o bioquímicas de los distintos procesos, a fin de poder abordar el diseño de los aparatos en los que se llevan a cabo industrialmente dichas etapas de fabricación. Luego, se deben encaminar los estudios a los procesos de transformación de materias primas agrícolas en productos acabados, o que los conserven de tal modo que puedan permanecer sin cambio alguno por largos períodos de tiempo.

1.3. Transformación y comercialización de productos agrícolas

Para que exista un funcionamiento eficiente en la comercialización de los productos agrícolas deberá ser fácil su manipulación y colocación en el mercado.

Por regla general, los productos obtenidos directamente del campo no pueden comercializarse, sino que deben sufrir ciertas transformaciones. Incluso aquellos productos que se puedan utilizar directamente deben ser envasados adecuadamente, teniendo en cuenta las necesidades de mercado. Los productos agrícolas se utilizan, generalmente, para fines alimentarios, por lo que se deben adecuar convenientemente para su uso.

En la manipulación de los productos agrícolas uno de los problemas que se presenta es el transporte de los productos desde el campo al consumidor, pues muchos de ellos tienen una vida corta, y debe pensarse en métodos de tratamiento y conservación de dichos productos para su uso posterior. Como ya se ha indicado anteriormente, muchos de estos productos no pueden ser usados directamente para la alimentación, sino que sirven como materia prima para la obtención de alimentos.

En los países más avanzados se tiende a la elaboración de dichos productos en la zona de producción, evitando de este modo que aquellos productos perecederos se deterioren durante el transporte desde la zona de producción a la industria transformadora.

1.4. Diagramas de flujo. Descripción de algunos procesos alimentarios

Los procesos alimentarios suelen esquematizarse mediante los denominados diagramas de flujo. Estos son esquemas de todo el proceso que indican las diferentes etapas de fabricación, así como el flujo de materias o energía involucrados en dicho proceso.

Existen distintos tipos de diagramas de flujo, siendo el más utilizado el de **bloques** o **rectángulos**. En ellos cada etapa del proceso se representa por un rectángulo o bloque, que tiene entradas y salidas para indicar el sentido del flujo de materiales. Sobre el rectángulo se suele escribir la etapa que representa.

Otros tipos de diagramas de flujo son los de **equipo** y de **instrumentación**.

En las figuras 1.1, 1.2 y 1.3 se presentan diagramas de flujo para algunos procesos alimentarios.

1.5. Régimen estacionario y no estacionario

Se entiende que un sistema se encuentra en **régimen estacionario** cuando todas las variables físicas permanecen constantes e invariables con el tiempo, en cualquier punto del sistema, pero pueden ser distintas de unos puntos a otros.

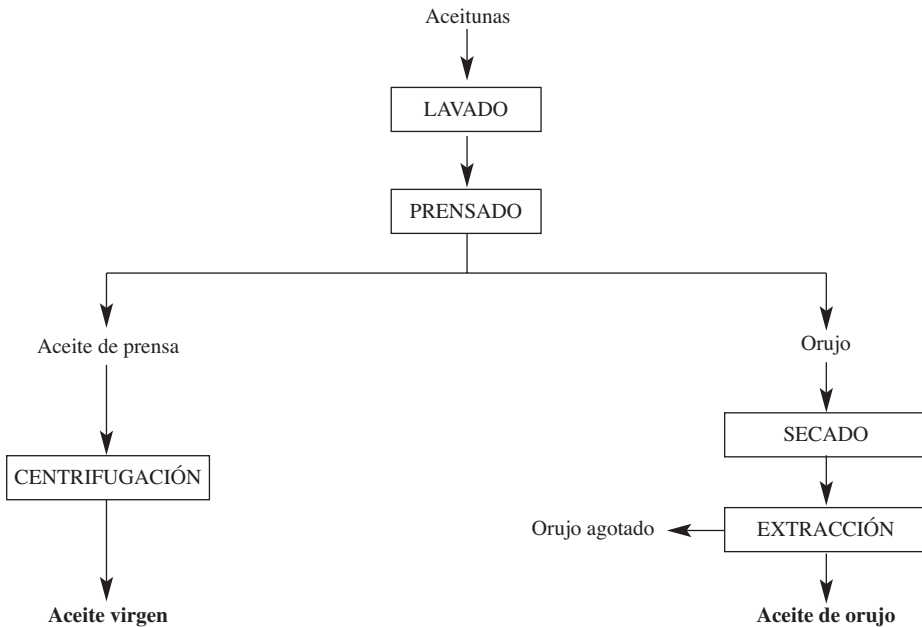


Figura 1.1. Obtención de aceite de oliva.

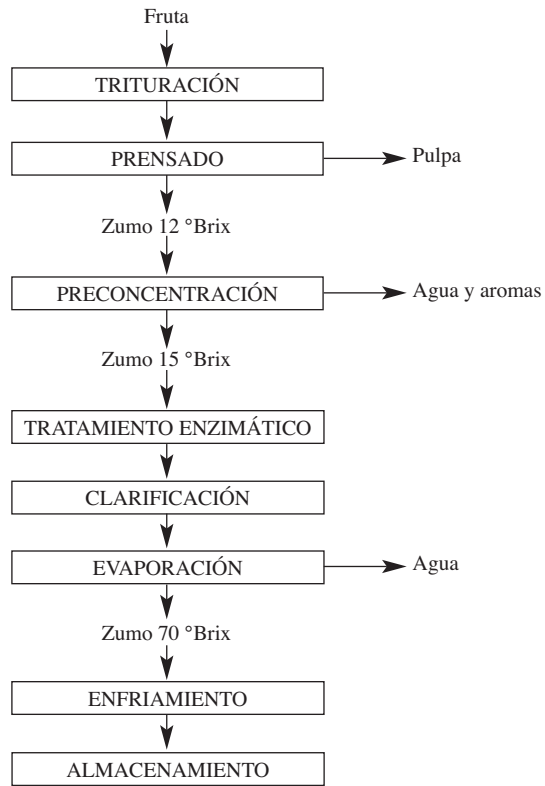


Figura 1.2. Elaboración de zumos concentrados de frutas.

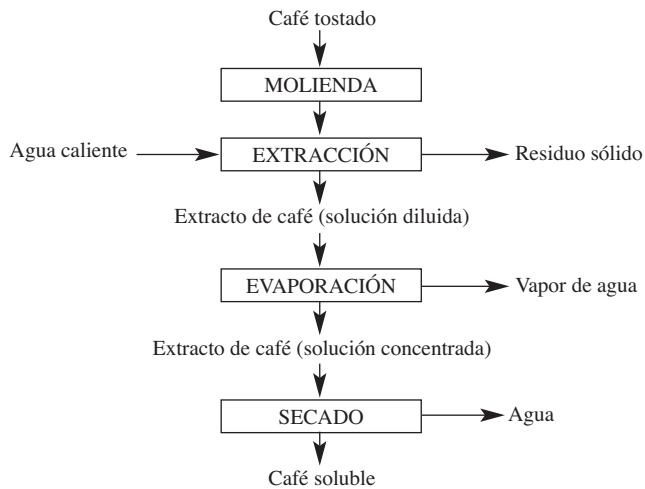


Figura 1.3. Elaboración de café soluble.

Por el contrario, cuando las variables intensivas características de la operación no sólo pueden variar a través del sistema en cada momento, sino que las correspondientes a cada punto del mismo varían con el tiempo, el régimen se denomina **no estacionario**.

Las variables físicas a considerar pueden ser mecánicas o termodinámicas. Entre las primeras cabe citar el caudal, velocidad, etc., mientras que las termodinámicas son la viscosidad, concentración, temperatura.

1.6. Operaciones discontinuas, continuas y semicontinuas

En los procesos de la industria, las operaciones llevadas a cabo pueden realizarse de diferentes modos. Se entiende como operación **discontinua** aquella en la que se carga la materia prima en el aparato, y después de realizarse la transformación requerida se descargan los productos obtenidos. Estas operaciones, llamadas también **por cargas** o **intermitentes**, se realizan en una serie sucesiva de etapas:

1. Carga del aparato con las materias primas.
2. Preparación de las condiciones para la transformación.
3. Transformación requerida.
4. Descarga de los productos.
5. Limpieza del aparato.

La operación en discontinuo se desarrolla en régimen no estacionario, pues sus propiedades intensivas varían con el tiempo. Un ejemplo de este modo de operar es el prensado de las semillas oleaginosas para obtener aceite.

Las operaciones **continuas** son aquellas en las que las etapas de carga, transformación y descarga se realizan simultáneamente. La limpieza del aparato se efectúa cada cierto tiempo, dependiendo de la naturaleza de la transformación y de las materias a tratar. Para realizar la limpieza debe pararse la producción. Las operaciones continuas se desarrollan en régimen estacionario, de modo que las variables intensivas características de la operación pueden variar en cada punto del sistema, pero las que se dan en cada punto no varían con el tiempo. En realidad es difícil que se llegue a un estado de régimen estacionario absoluto, pues puede haber ciertas fluctuaciones inevitables. Un ejemplo de operación en continuo puede ser la rectificación de mezclas de alcohol-agua.

En algunos casos es muy difícil llegar a operar en continuo, y sólo se llega de un modo aproximado. Esta forma de operar se denomina **semicontinua**. Puede ocurrir que algunos materiales se carguen en el aparato y permanezcan en él cierto tiempo, de forma discontinua, mientras que otros entran o salen continuamente. De vez en cuando se necesitará descargar aquellos materiales que se vayan acumulando. Así, en la extracción de aceite por disolventes, se carga la harina y se alimenta de forma continua el disolvente; al cabo de cierto tiempo la harina se agota de aceite y debe reemplazarse.

Las distintas formas de operar presentan ventajas y desventajas, citándose a continuación las correspondientes a operación en continuo.

Ventajas de operación en continuo:

1. Se eliminan las etapas de carga y descarga.
2. Permite automatizar la operación, reduciendo la mano de obra.
3. La composición de los productos es más uniforme.
4. Presenta un mejor aprovechamiento térmico.

Desventajas de operación en continuo:

1. Las materias primas deben poseer una composición uniforme para evitar las fluctuaciones de la operación.
2. La puesta en marcha de la operación suele ser costosa, por lo que deben evitarse las paradas.
3. Las fluctuaciones en la demanda de producto lleva consigo el que deba disponerse de cantidades considerables de materias primas y productos en almacén.
4. Debido a la automatización de la operación el equipo es más costoso y delicado.

En las puestas en marcha y en las paradas de la operación en continuo, ésta transcurre de forma no estacionaria, pero una vez alcanzado el pleno funcionamiento puede considerarse que se ha llegado a régimen estacionario. Aunque esto no es exactamente cierto pues puede haber fluctuaciones muchas veces debidas a las variaciones existentes en la composición de las materias primas y también a modificaciones de agentes externos.

Cuando se elige la forma de operación, deberán tenerse en cuenta las ventajas e inconvenientes de cada una de ellas. Sin embargo, cuando se requieran producciones bajas, se trabajará discontinuamente, y en caso que quieran obtenerse producciones elevadas resulta más rentable operar una instalación en continuo.

1.7. Las Operaciones Unitarias. Clasificación

Analizando los diagramas de flujo de los distintos procesos descritos en un apartado anterior, se observa que algunas de las etapas se repiten en todos ellos. Cada una de estas etapas se denomina Operación Básica o Unitaria, y son comunes a un gran número de procesos industriales. Las operaciones individuales tienen técnicas comunes y se basan en los mismos procesos científicos, esto hace que el estudio de estas operaciones se unifique y el tratamiento de todos los procesos resulte más sencillo.

Dentro de las Operaciones Unitarias pueden distinguirse diferentes tipos, dependiendo de la naturaleza de la transformación llevada a cabo, así cabe distinguir etapas físicas, químicas y bioquímicas.

- a) Etapas físicas: Molienda, Tamizado, Mezcla, Fluidización, Sedimentación, Flotación, Filtración, Rectificación, Absorción, Extracción, Adsorción, Intercambio de calor, Evaporación, Secado, etc.

- b) Etapas químicas: Refinado, Pelado químico.
- c) Etapas bioquímicas: Fermentación, Esterilización, Pasteurización, Pelado enzimático.

Por tanto, el conjunto de etapas físicas, químicas y bioquímicas que tienen lugar en los procesos de transformación de los productos agrícolas constituyen las denominadas Operaciones Unitarias de las Industrias Alimentarias. La finalidad de las Operaciones Unitarias es la separación de dos o más sustancias presentes en una mezcla, o bien el intercambio de una propiedad debido a un gradiente. La separación se logra mediante un agente separador, que es distinto dependiendo de la propiedad que se transfiera.

Según la propiedad transferida, las Operaciones Unitarias se pueden clasificar en distintos grupos, pues los cambios posibles que puede experimentar un cuerpo vienen definidos por la variación que experimenta en su masa, energía o su velocidad.

Así, las Operaciones Unitarias se clasifican según el esquema:

- Operaciones Unitarias de transferencia de materia.
- Operaciones Unitarias de transmisión de calor.
- Operaciones Unitarias de transporte de cantidad de movimiento.

Además de las Operaciones Unitarias englobadas en cada uno de los apartados mencionados, existen aquellas de transferencia simultánea de calor y materia, y otras Operaciones que no se pueden englobar en ninguno de estos apartados, y que reciben el nombre de complementarias.

Todas las Operaciones Unitarias que se engloban en estos apartados se encuentran en procesos físicos, pero se pueden considerar ciertas operaciones que incluyen también reacciones químicas.

1.7.1. Operaciones Unitarias de transporte de cantidad de movimiento

En estas operaciones se estudian los procesos en que se ponen en contacto dos fases, cuya velocidad es distinta. Las diferentes operaciones incluidas en este apartado se suelen dividir en tres grandes grupos: Circulación interna de fluidos, circulación externa y movimiento de sólidos en el seno de fluidos.

Circulación interna de fluidos: Estudio del movimiento de fluidos por el interior de tuberías. También se incluye el estudio de los aparatos utilizados en la impulsión de los fluidos (bombas, compresores, soplantes y ventiladores) y los mecanismos utilizados en la medición de las propiedades propias de los fluidos (diafragmas, venturímetros, rotámetros, etc.).

Circulación externa de fluidos: El fluido circula por el exterior de un sólido. Se incluyen las operaciones de flujo de fluidos a través de lechos porosos fijos, lechos fluidizados (Fluidización) y transporte neumático.

Movimiento de sólidos en el seno de fluidos: Es la base de la separación de un sólido que se halla en el seno de un fluido. Dentro de este tipo de separaciones se incluyen las siguientes operaciones: Sedimentación, Filtración y Ultrafiltración, entre otras.

1.7.2. Operaciones Unitarias de transferencia de materia

Estas operaciones están controladas por la difusión de un componente en el seno de una mezcla. A continuación se realiza una breve exposición de las distintas operaciones incluidas en este grupo.

Destilación: Separación de dos o más componentes aprovechando la diferencia de presiones.

Absorción: de un componente de una mezcla gaseosa por un líquido, según la solubilidad del gas en el líquido: puede ser con o sin reacción química. El proceso contrario es la **desorción**.

Extracción: Se basa en la disolución de una mezcla (líquida o sólida) en un disolvente selectivo. Puede ser: **Líquido-Líquido** o **Sólido-Líquido**. Esta última también se la denomina, Lavado, Lixiviación, etc.

Adsorción: También denominada **Sorción**. Consiste en la eliminación de uno o más componentes de un fluido (líquido o gas) por retención en la superficie de un sólido.

Intercambio Iónico: Sustitución de uno o varios iones de una disolución por otros del agente intercambiador.

1.7.3. Operaciones Unitarias de transmisión de calor

Estas Operaciones están controladas por los gradientes de temperatura. Dependen del mecanismo con que se transfiere el calor, distinguiéndose transmisión de calor por conducción, convección y radiación.

Conducción: En medios materiales continuos, el calor fluye en sentido decreciente de temperaturas, y no existe movimiento macroscópico de materia.

Convección: El flujo entálpico asociado a un fluido en movimiento se le denomina flujo convectivo de calor. La convección puede ser natural o forzada.

Radiación: Transmisión de energía mediante ondas electromagnéticas. No se necesita un medio material para su transmisión.

Basados en estos mecanismos de transmisión de calor se estudian los Tratamientos Térmicos (Esterilización y Pasteurización), Evaporación, Intercambiadores de Calor, Hornos, Placas solares, etc.

1.7.4. Operaciones Unitarias de transferencia simultánea de materia-calor

En estas operaciones existe a la vez un gradiente de concentración y de temperatura.

Humidificación y Deshumidificación: Tienen tres finalidades: Humidificación y deshumidificación de un gas y enfriamiento de líquidos.

Cristalización: Formación de partículas sólidas cristalinas en el seno de una fase homogénea líquida.

Deshidratación: Eliminación de un líquido contenido en el seno de un sólido. La aplicación de calor hace pasar el líquido, contenido en el sólido, a fase vapor. La **liofilización** se basa en eliminar el líquido, que se encuentra en fase sólida, por sublimación a estado vapor.

1.7.5. Operaciones Unitarias complementarias

Existen una serie de operaciones que no se incluyen en esta clasificación, por no basarse en ninguno de los fenómenos de transporte citados anteriormente. Así, dentro de este grupo se incluyen la **Trituración**, **Molienda**, **Tamizado** y **Mezclado** de sólidos y pastas, etc.

1.8. Planteamiento matemático de los problemas

Los problemas que se plantean en el estudio de las Operaciones Unitarias son muy diversos, aunque en todas ellas se cumplen las leyes de conservación (materia, energía, cantidad de movimiento y estequiométricas) en las reacciones químicas.

El aplicar las leyes de conservación a un problema determinado es efectuar un balance de la «propiedad» a estudiar en dicho problema. De forma general, la expresión de los balances de materia, energía y cantidad de movimiento, referidos a la unidad de tiempo, se pueden expresar como:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Propiedad que} \\ \text{entra al sistema} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Propiedad que} \\ \text{sale del sistema} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Propiedad que} \\ \text{se acumula} \end{array} \right)$$

Es decir, la entrada al sistema de la propiedad considerada es igual a la que sale más la que se acumula. De forma esquemática:

$$E = S + A$$

En los casos que exista reacción química, al realizar un balance para un componente, puede aparecer un término adicional de generación. En estos casos la expresión del balance será:

$$E + G = S + A$$

Al resolver un problema dado se presentan cierto número de incógnitas o variables (**S**), y de los balances se obtienen un conjunto de relaciones o ecuaciones (**R**). Según sea el valor de **S** y **R** se pueden presentar los siguientes casos:

- Si **S < R** El problema está mal planteado o se repite alguna ecuación.
- Si **S = R** El problema presenta una sola solución.
- Si **S > R** Se pueden dar varias soluciones, encontrándose la mejor solución optimizando el proceso.

Existen **F = S - R** variables de diseño.

Los diferentes tipos de problemas que se presentan dependen del tipo de ecuaciones que se obtengan al efectuar los balances correspondientes. Así, se tienen:

- **Ecuaciones algebraicas:** De fácil solución matemática, obteniéndose la solución por métodos analíticos.
- **Ecuaciones diferenciales:** Que suelen obtenerse en procesos continuos no estacionarios. La resolución del modelo matemático planteado con los balances puede realizarse mediante métodos analíticos o aproximados. En algunos casos las ecuaciones diferenciales planteadas presentan solución analítica. Sin embargo, en aquellos casos que no es posible solucionar analíticamente el modelo matemático, es necesario recurrir a métodos aproximados de integración numérica (cálculo digital) o gráfica (cálculo analógico).
- **Ecuaciones en diferencias finitas:** Se resuelven mediante computadoras analógicas, dándose el resultado en forma gráfica. En algunos casos puede obtenerse la solución exacta por métodos numéricos.

Sistemas de unidades. **2** *Análisis dimensional y semejanza*

2.1. Sistemas de magnitudes y unidades

El valor de cualquier magnitud física se expresa como el producto de dos factores, siendo uno de ellos el valor de la unidad y el otro el número de unidades.

Las propiedades físicas de un sistema están relacionadas entre sí mediante una serie de leyes físicas y mecánicas. Algunas magnitudes pueden considerarse como fundamentales y otras como derivadas. Las magnitudes fundamentales varían de un sistema a otro.

Generalmente, se toman como fundamentales el tiempo y la longitud. Los sistemas de unidades necesitan una tercera magnitud fundamental, que puede ser la masa o la fuerza. Aquellos sistemas de unidades que tienen como tercera magnitud fundamental la masa reciben el nombre de sistemas **absolutos** de unidades, mientras que los que tienen la fuerza como unidad fundamental se les denomina sistemas **técnicos** de unidades. Además, existen los llamados sistemas **ingenieriles** de unidades, que consideran como magnitudes fundamentales la longitud, el tiempo, la masa y la fuerza.

2.1.1. Sistemas absolutos de unidades

Se consideran tres sistemas absolutos de unidades: el cegesimal (CGS), el Giorgi (MKS) y el Inglés (FPS). En todos ellos, las magnitudes fundamentales son longitud, masa y tiempo. En la tabla 2.1 se observan las distintas unidades para los tres sistemas mencionados. En estos tres sistemas la fuerza es una unidad derivada. A partir de las tres unidades fundamentales se definen las derivadas. En la tabla 2.2 se detallan las unidades de fuerza y energía.

Tabla 2.1. Sistemas absolutos de unidades

Magnitud	SISTEMA		
	Cegesimal (CGS)	Giorgi (MKS)	Inglés (FPS)
Longitud (L)	1 centímetro (cm)	1 metro (m)	1 pie (ft)
Masa (M)	1 gramo (g)	1 kilogramo (kg)	1 libra masa (lb)
Tiempo (T)	1 segundo (s)	1 segundo (s)	1 segundo (s)

Tabla 2.2. Unidades derivadas de sistemas absolutos

Magnitud	SISTEMA		
	Cegesimal (CGS)	Giorgi (MKS)	Inglés (FPS)
Fuerza	1 dina	1 Newton (N)	1 poundal
Energía	1 ergio	1 Julio (J)	1 (libra) (pie)

Cuando se trabaja con magnitudes caloríficas, es conveniente definir la unidad de temperatura. Para los sistemas CGS y MKS la unidad de temperatura es el grado centígrado ($^{\circ}\text{C}$), mientras que para el inglés, el grado Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$).

Conviene resaltar que las unidades de calor se definen independientemente de las de trabajo. Más adelante se verá que para relacionar el trabajo con el calor es necesario un factor denominado **equivalente mecánico del calor**.

2.1.2. Sistemas técnicos de unidades

Entre los sistemas técnicos más utilizados se encuentran el métrico y el inglés. En ambos, se toman como magnitudes fundamentales la longitud, la fuerza y el tiempo. Con respecto a la temperatura, la unidad del sistema métrico es el grado centígrado, y la del inglés el Fahrenheit. En la tabla 2.3 se muestran las unidades fundamentales de los sistemas técnicos mencionados.

En los sistemas técnicos la masa es una magnitud derivada, que en cada uno de los sistemas será:

- Sistema métrico: 1 UTM (unidad técnica de masa).
- Sistema inglés: 1 slug.

Tabla 2.3. Sistemas técnicos de unidades

Magnitud	SISTEMA	
	Métrico	Inglés
Longitud (L)	1 metro (m)	1 pie (ft)
Fuerza (F)	1 kilogramo fuerza (kp o kgf)	1 libra fuerza (lbf)
Tiempo (T)	1 segundo (s)	1 segundo (s)
Temperatura (θ)	1 grado centígrado ($^{\circ}\text{C}$)	1 grado Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$)

2.1.3. Sistemas ingenieriles de unidades

Hasta ahora se han visto sistemas de unidades en los que se consideran tres magnitudes fundamentales. Sin embargo, en los sistemas ingenieriles se toman cuatro: longitud, tiempo, masa y fuerza. En la tabla 2.4 se recogen las distintas unidades para los sistemas ingenieriles métrico e inglés.

Tabla 2.4. Sistemas ingenieriles de unidades

Magnitud	SISTEMA	
	Métrico	Inglés
Longitud (L)	1 metro (m)	1 pie (ft)
Masa (M)	1 kilogramo (kg)	1 libra masa (lb)
Fuerza (F)	1 kilogramo fuerza (kp o kgf)	1 libra fuerza (lbf)
Tiempo (T)	1 segundo (s)	1 segundo (s)
Temperatura (θ)	1 grado centígrado (°C)	1 grado Fahrenheit (°F)

Al definirse como fundamentales la masa y la fuerza, se podría llegar a una incongruencia, pues estas magnitudes se hallan relacionadas por el principio fundamental de la dinámica. Para evitar esta incompatibilidad, debe introducirse un factor de proporcionalidad o corrección (g_C). De forma que la ecuación de dicho principio será:

$$g_C \times \text{Fuerza} = \text{Masa} \times \text{Aceleración}$$

Obsérvese que g_C posee unidades de Masa · Aceleración/Fuerza. El valor de este factor de corrección en los sistemas ingenieriles es:

$$\text{Sistema métrico: } g_C = 9,81 \frac{(\text{kgmasa}) (\text{metro})}{(\text{kgfuerza}) (\text{segundo})^2} = 9,81 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{kgf} \cdot \text{s}^2}$$

$$\text{Sistema inglés: } g_C = 32,17 \frac{(\text{lbmasa}) (\text{pie})}{(\text{lbfuerza}) (\text{segundo})^2} = 32,17 \frac{\text{lb} \cdot \text{ft}}{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}$$

2.1.4. Sistema Internacional de unidades (SI)

Al incorporarse los países anglosajones al sistema métrico decimal, resultó conveniente unificar el uso de los sistemas de unidades. Para ello, se adoptó como sistema internacional el MKS, que pasó a denominarse SI. Aunque es un sistema cuya obligatoriedad es reconocida, aún se siguen utilizando otros; pero ya muchas revistas y libros de Ingeniería se editan sólo en SI, esto hace que cada vez se vaya imponiendo en mayor medida sobre los otros sistemas de unidades. En la tabla 2.5

Tabla 2.5. Sistema internacional de unidades

Magnitud	Unidad	Abreviatura	Dimensión
Longitud	metro	m	L
Masa	kilogramo	kg	M
Tiempo	segundo	s	T
Fuerza	Newton	N	MLT ⁻²
Energía	Julio	J	ML ² T ⁻²
Potencia	Vatio	W	ML ² T ⁻³
Presión	Pascal	Pa	ML ⁻¹ T ⁻²
Frecuencia	Hertzio	Hz	T ⁻¹

se dan las unidades fundamentales de este sistema, y también algunas suplementarias y derivadas.

A veces, la unidad elegida resulta demasiado grande o demasiado pequeña, por lo que es necesario adoptar prefijos que indiquen los múltiplos y submúltiplos de la unidad fundamental. Generalmente, se aconseja que estos múltiplos o submúltiplos se utilicen en forma de potencias de 10^3 . A continuación se da una relación de los múltiplos y submúltiplos más utilizados, así como el nombre y símbolo respectivo de cada uno de ellos.

Prefijo	Factor de multiplicación	Símbolo SI
tera	10^{12}	T
giga	10^9	G
mega	10^6	M
kilo	10^3	k
hecto	10^2	h
deca	10^1	da
deci	10^{-1}	d
centi	10^{-2}	c
mili	10^{-3}	m
micro	10^{-6}	μ
nano	10^{-9}	n
pico	10^{-12}	p
femto	10^{-15}	f
atto	10^{-18}	a

Debe remarcarse el kilo (10^3) como múltiplo, que hace que la unidad fundamental de masa —el kilogramo— resulte de nombre inadecuado, ya que en español, la palabra kilo se suele utilizar para designar el kilogramo.

Es interesante resaltar que en muchos problemas se utilizan unidades molares para expresar la concentración. La unidad molar más utilizada es el **mol**, que se define como la cantidad de sustancia cuya masa en gramos es numéricamente igual a su masa molecular.

2.1.5. Unidades térmicas

Como es sabido, el calor es una forma de energía, de este modo la dimensión de ambos es ML^2T^{-2} . Sin embargo, en algunos sistemas se introduce la temperatura como dimensión. En estos casos, la energía calorífica se puede expresar como proporcional al producto de la masa por la temperatura. La constante de proporcionalidad es el calor específico, que depende del material, y varía de unos a otros. Esto hace que se defina la cantidad de calor en función del material. Se toma como referencia el agua, y el calor específico resulta la unidad, con lo que:

$$\text{Calor} = \text{Masa} \times \text{Calor específico} \times \text{Temperatura}$$

Según el sistema de unidades adoptado, la unidad de calor es distinta. Así:

- *Sistema métrico:*
 - **Caloría:** calor necesario para elevar la temperatura de un gramo de agua de 14,5 °C hasta 15,5 °C.
- *Sistemas ingleses:*
 - **Btu** (British thermal unit): cantidad de calor necesario para elevar la temperatura de una libra de agua en un grado Fahrenheit (de 60 °F a 61 °F).
 - **Chu** (Centigrad heat unit o libra caloría): cantidad de calor necesario para elevar la temperatura de una libra de agua en un grado centígrado.
- *Sistema Internacional:*
 - Al ser el calor una forma de energía, su unidad es el julio.
 - La caloría puede definirse en función del Julio, resultando:

$$1 \text{ caloría} = 4,185 \text{ julios}$$

Al ser el calor y trabajo dos formas de energía, es necesario definir un factor que los relacione. Para esto se adopta el denominado **equivalente mecánico del calor** (Q), de forma que:

$$Q \times \text{Energía calorífica} = \text{Energía mecánica}$$

con lo que:

$$Q = \frac{\text{Energía mecánica}}{\text{Energía calorífica}} = \frac{\text{MLT}^{-2} \text{ L}}{\text{M}\theta} = \text{L}^2\text{T}^{-2}\theta^{-1}$$

2.1.6. Conversión de unidades

La conversión de unidades de un sistema a otro se realiza fácilmente si las cantidades se expresan en función de las unidades fundamentales de masa, longitud, tiempo y temperatura. Para la conversión de las distintas unidades se utilizan los llamados **factores de conversión**. El factor de conversión es el número de unidades de un cierto sistema, contenido en una unidad de la magnitud correspondiente de otro sistema. Los factores de conversión más comunes para las distintas magnitudes se dan en la tabla 2.6.

En la conversión de unidades debe distinguirse los casos en que se convierte únicamente valores numéricos de aquellos en los que la conversión debe ser de una fórmula.

- a) **Conversión de valores numéricos.** Cuando se requiere convertir valores numéricos de una unidad a otra, se utilizan directamente las equivalencias entre ellas, dadas por los factores de conversión.
- b) **Conversión de unidades de una fórmula.** En estos casos, las constantes que aparecen en la fórmula suelen tener dimensiones. Para poder aplicar la fórmula en otras unidades distintas a las dadas, sólo debe convertirse la constante de la fórmula. En aquellos casos en que la constante sea adimensional, la fórmula puede aplicarse directamente en cualquier sistema de unidades.

Tabla 2.6. Factores de conversión

Masa:	
1 lb	0,4536 kg (1/32,2) slug
Longitud:	
1 pulgada (inch)	2,54 cm
1 pie (ft)	0,3048 m
1 milla	1.609 m
Superficie:	
1 pulgada cuadrada (sq inch)	645,2 mm ²
1 pie cuadrado (sq ft)	0,09290 m ²
Volumen y capacidad:	
1 pie cúbico (cu ft)	0,02832 m ³
1 galón (imperial)	4,546 litros
1 galón (USA)	3,786 litros
1 barril	159,241 litros
Tiempo:	
1 min	60 s
1 h	3.600 s
1 día	86.400 s
Diferencia de temperaturas:	
1 °C = 1 K	1,8 °F
Fuerza:	
1 poundal (pdl)	0,138 N
1 lbf	4,44 N 4,44 × 10 ⁵ dina
1 dina	32,2 pdl 10 ⁻⁵ N
Presión:	
1 atmósfera técnica (at)	1 kgf/cm ² 14,22 psi
1 bar	100 kPa
1 mm Hg (tor)	133 Pa 13,59 kgf/cm ²
1 psi (lb/sq inch)	703 kgf/m ²
Energía, calor y potencia:	
1 kilocaloría (kcal)	4.185 J 426,7 kgm
1 erg	10 ⁻⁷ J
1 Btu	1.055 J
1 Chu	0,454 kcal 1,8 Btu
1 caballo de vapor (CV)	0,736 kW 75 kgm/s
1 caballo de vapor (<i>horse power</i> , HP)	0,746 kW 33.000 ft lb/min 76,04 kgm/s

Tabla 2.6. Factores de conversión (*continuación*)

Energía, calor y potencia:	
1 kilovatio (kW)	1,000 J/s 1,359 CV
1 kilovatio hora (kW·h)	$3,6 \times 10^6$ J 860 kcal
1 atm.litro	0,0242 kcal 10,333 kgm
Viscosidad:	
1 poise (P)	0,1 Pa·s
1 libra/(ft·h)	0,414 mPa·s
1 stoke (St)	10^{-4} m ² /s
Flujo másico:	
1 lb/h	0,126 g/s
1 ton/h	0,282 kg/s
1 lb/(ft ² ·h)	1,356 g/(s·m ²)
Magnitudes térmicas:	
1 Btu/(h·ft ²)	3,155 W/m ²
1 Btu/(h·ft ² ·°F)	5,678 W/(m ² ·K)
1 Btu/lb	2,326 kJ/kg
1 Btu/(lb·°F)	4,187 kJ/(kg·K)
1 Btu/(h·ft ² ·°F)	1,731 W/(m ² ·K)

2.2. Análisis dimensional

La aplicación de ecuaciones deducidas de las leyes físicas, es uno de los métodos que pueden utilizarse en la resolución de un problema determinado. Sin embargo, puede ocurrir que el obtener ecuaciones de tal tipo sea difícil, por lo que en algunos casos se requerirá la utilización de ecuaciones obtenidas de forma empírica.

En el primer caso, las ecuaciones son homogéneas desde el punto de vista dimensional. Es decir, sus términos poseen las mismas dimensiones, y además, las posibles constantes que puedan aparecer serán adimensionales. Este tipo de ecuaciones pueden utilizarse en cualquier sistema de unidades, siempre que se usen unidades coherentes para las mismas magnitudes. Por el contrario, las ecuaciones obtenidas experimentalmente pueden no resultar homogéneas dimensionalmente, siendo normal la utilización de distintas unidades para una misma magnitud.

El objetivo del análisis dimensional es relacionar las distintas variables que intervienen en los procesos físicos. Por ello se agrupan las variables en grupos o razones adimensionales, que permiten encontrar una relación entre las diferentes variables. En la tabla 2.7 se dan los módulos adimensionales que usualmente se encuentran en problemas ingenieriles. El análisis dimensional es un método analítico en el que, conocidas las variables que intervienen en un fenómeno físico, se establece una ecuación que las ligue. Es decir, el análisis dimensional proporciona una relación general entre las variables, que debe completarse con la ayuda de la experimentación para llegar a obtener la ecuación final que liga todas las variables.

Tabla 2.7. Módulos adimensionales

Módulo		Expresión	Equivalencia
Biot	(Bi)	$\frac{h d}{k}$	
Bodenstein	(Bo)	$\frac{v d}{D}$	(Re) (Sc)
Euler	(Eu)	$\frac{\Delta P}{\rho v^2}$	
Froude	(Fr)	$\frac{d_p N}{g}$	
Graetz	(Gz)	$\frac{\rho v d^2 \hat{C}_p}{k L}$	(Re) (Pr) (d/L)
Grashof	(Gr)	$\frac{g \beta d^3 \Delta T \rho^2}{\eta^2}$	
Hedstrom	(He)	$\frac{d \sigma_0 \rho}{\eta'}$	
Nusselt	(Nu)	$\frac{h d}{k}$	
Peclet	(Pe)	$\frac{\rho v d \hat{C}_p}{k}$	(Re) (Pr)
Potencia	(Po)	$\frac{P}{d_p N^5 \rho}$	
Prandtl	(Pr)	$\frac{\hat{C}_p \eta}{k}$	
Reynolds	(Re)	$\frac{\rho v d}{\eta}$	
Schmidt	(Sc)	$\frac{\eta}{\rho D}$	
Sherwood	(Sh)	$\frac{k_g d}{D}$	
Stanton	(St)	$\frac{h}{\hat{C}_p \rho v}$	(Nu) [(Re) (Pr)] ⁻¹
Weber	(We)	$\frac{\rho l v^2}{\sigma}$	

2.2.1. Teorema π de Buckingham

Se define como **factor π** todo término que no tiene dimensiones. Según Bridgman, los principios fundamentales del análisis dimensional son tres:

- Todas las magnitudes físicas pueden expresarse como funciones potenciales de un número reducido de magnitudes fundamentales.
- Las ecuaciones que relacionan magnitudes físicas son homogéneas dimensionalmente. Es decir, las dimensiones de todos sus términos han de ser iguales.
- Si una ecuación es dimensionalmente homogénea puede reducirse a una relación entre una serie completa de razones o grupos adimensionales. En estas razones o grupos figuran todas las variables físicas que influyen en el fenómeno, las constantes dimensionales que puedan corresponder al sistema de unidades elegido y las constantes universales relacionadas con el fenómeno que se trate.

Este principio se denomina **teorema π de Buckingham**. Se entiende que una serie de grupos adimensionales es completa si todos ellos son independientes entre sí, y cualquier otro grupo adimensional que pueda formarse será combinación de dos o más de los grupos de la serie completa.

Como consecuencia del teorema π de Buckingham si la serie q_1, q_2, \dots, q_n es el conjunto de n variables independientes que definen un problema o un fenómeno físico, existe siempre una función explícita del tipo:

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0 \quad [2.1]$$

De esta forma, con la totalidad de las variables pueden definirse un número de factores adimensionales π , tal que:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= q_1^{a_1}, q_2^{a_2}, \dots, q_n^{a_n} \\ \pi_2 &= q_1^{b_1}, q_2^{b_2}, \dots, q_n^{b_n} \\ &\dots\dots\dots \\ \pi_i &= q_1^{p_1}, q_2^{p_2}, \dots, q_n^{p_n} \end{aligned}$$

se obtienen i factores π , en la que cada uno de ellos es función de las variables elevadas a unos exponentes que pueden ser positivos, negativos o nulos. El número de factores adimensionales π será i , donde: $i = n - k$, siendo n el número de variables independientes y k es la característica de la matriz formada por los exponentes de las ecuaciones dimensionales de las distintas variables y constantes con relación a un sistema de unidades definido.

Estos i factores adimensionales $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_i$ estarán relacionados mediante una función:

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_i) = 0 \quad [2.2]$$

que puede aplicarse en cualquier sistema de unidades. A veces resulta difícil encontrar una relación de este tipo, y se recurre a una representación gráfica que ligue los distintos parámetros.

2.2.2. Métodos de análisis dimensional

Los principales métodos del análisis dimensional son tres:

- Método de Buckingham.
- Método de Rayleigh.
- Método de las ecuaciones diferenciales.

A continuación se estudian con detalle los dos primeros, y se describe brevemente el tercero.

2.2.2.1. Método de Buckingham

En primer lugar se relacionan las variables que pueden influir en el fenómeno que se estudia. Se establecen las ecuaciones dimensionales de las diferentes variables, así como las de las constantes dimensionales. En el caso que hayan variables con las mismas dimensiones, sólo se escoge una de ellas. Las restantes se dividen por ésta, obteniéndose grupos adimensionales que se añadirán al final, al total obtenido. Estas razones adimensionales son los denominados factores de forma.

Seguidamente se forma la matriz constituida por los exponentes de las magnitudes correspondientes a las distintas variables y constantes adimensionales. Así, para el caso de las n variables q_1, q_2, \dots, q_n y la constante g_C :

$$\begin{array}{c}
 L \\
 M \\
 F \\
 T \\
 \theta
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 q_1, \quad q_2, \quad \dots, \quad q_n, \quad g_C \\
 \left. \begin{array}{l}
 \text{Matriz de los exponentes} \\
 \text{de las magnitudes para las} \\
 \text{variables y constantes} \\
 \text{dimensionales}
 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

La característica k se determina de esta matriz. Este valor representa el mínimo número de variables y constantes que no forman grupo adimensional.

A continuación se forman los i grupos o factores adimensionales. Cada grupo estará formado por el producto de $k + 1$ factores q , siendo cada factor una variable o constante adimensional, elevados a exponentes, que deben determinarse. De todos estos factores adimensionales, habrá k que serán las variables que hacen que la matriz sea de característica k , además de cada una de las $n-k$ variables restantes con exponente unidad. De esta forma, los factores π serán:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= q_1^{a_1} \cdot q_2^{a_2}, \dots, q_k^{a_k} \cdot q_{k+1} \\ \pi_2 &= q_1^{b_1} \cdot q_2^{b_2}, \dots, q_k^{b_k} \cdot q_{k+2} \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ \pi_i &= q_1^{p_1} \cdot q_2^{p_2}, \dots, q_k^{p_k} \cdot q_{k+i-n} \end{aligned}$$

En este conjunto de ecuaciones las magnitudes q_1, q_2, \dots, q_k , variables y constantes, contienen entre todas la totalidad de magnitudes fundamentales del sistema de unidades elegido. El conjunto de exponentes $a_1, b_1, \dots, p_1; a_2, b_2, \dots, p_2$, etc., deben ser tales que los grupos carezcan de dimensiones.

Como los factores π carecen de dimensiones, se ponen las magnitudes de cada variable en los distintos grupos adimensionales agrupando a continuación cada magnitud, de forma que quede elevada a un exponente, combinación de los exponentes de las variables en la que aparece esta magnitud. Esta combinación de exponentes se iguala a cero, obteniéndose para cada factor π un sistema de k ecuaciones y k incógnitas. Se resuelven estos sistemas, lo que permite determinar los exponentes de las variables que forman cada grupo adimensional.

Con estos i factores y los que puedan haber de factores de forma, se puede llegar a obtener la función:

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_i, \dots) = 0 \tag{2.3}$$

En algunas ocasiones no hay necesidad de formar la matriz de los exponentes y determinar su característica, pues por simple observación puede encontrarse el número mínimo de variables y constantes que no forman grupo adimensional.

2.2.2.2. Método de Rayleigh

Como en el caso anterior, inicialmente deben identificarse las variables físicas que intervienen en el proceso. A continuación una de las variables, generalmente la de mayor interés, se expresa analíticamente como una función potencial de todas las demás:

$$q_1 = K q_2^{a_2} q_3^{a_3} \dots q_n^{a_n} \tag{2.4}$$

donde K es una constante adimensional.

Se sustituyen las variables y posibles constantes dimensionales por las magnitudes de un sistema de unidades, aplicando las condiciones de homogeneidad para cada magnitud. De esta forma, se obtienen tantas ecuaciones como magnitudes fundamentales tenga el sistema de unidades escogido. Si es p el número de tales magnitudes, el número de incógnitas en este sistema de ecuaciones será $n-1$:

Ecuaciones	p
Incógnitas	$n-1$ exponentes

Como existen mayor número de incógnitas que de ecuaciones, se eligen $(n-1)-p$ exponentes, y los restantes se ponen en función de ellos. De esta forma, todos los exponentes se pueden poner en función de estos $(n-1)-p$ elegidos, que se sustituyen en la ecuación anterior. Se agrupan las variables y constantes dimensionales de forma que resulten grupos elevados al mismo exponente. Así, se obtienen $(n-1)-p$ grupos elevados a los exponentes que se han escogido, más un grupo cuyo exponente es la unidad. De este modo, se obtiene la relación entre grupos adimensionales que se buscaba:

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_i) \quad [2.5]$$

2.2.2.3. *Método de las ecuaciones diferenciales*

En este método se parte de las ecuaciones diferenciales de conservación de cantidad de movimiento, materia y energía, que puedan aplicarse a un determinado problema, así como de los que puedan obtenerse a partir de las condiciones límite.

Como en este caso se parte de ecuaciones que son dimensionalmente homogéneas, si en cada una de ellas se dividen todos sus términos por uno cualquiera de ellos, se obtienen tantos grupos adimensionales como términos tenía la ecuación menos uno.

La ventaja de este método frente a los anteriores es que es menos probable que se omitan variables que puedan influir en un determinado problema. Cosa que sólo ocurriría en el caso de que la ecuación utilizada fuera incorrecta. Además, proporciona un acercamiento más intuitivo al significado físico de los grupos adimensionales resultantes (Dickey y Fenic, 1976).

2.3. Teoría de la semejanza

Para el diseño y construcción de equipos industriales, existen dos caminos posibles, que pasan por la construcción de modelos. Estos modelos pueden ser matemáticos o empíricos. Al equipo industrial se le denomina prototipo.

- **Modelos matemáticos:** A partir de aspectos teóricos es posible, a veces, diseñar y construir directamente un prototipo, aplicable a escala industrial. En la práctica esto se presenta en contadas ocasiones.
- **Modelos empíricos:** En estos casos se necesita de experimentación en modelos reducidos o maquetas, siguiendo las directrices dadas por el análisis dimensional.

A partir de los valores encontrados en el modelo, se calculan los valores del prototipo. Para pasar del modelo al prototipo se deben cumplir una serie de criterios de semejanza.

La diferencia primordial entre los dos modelos estriba en que el matemático es aplicable a cualquier escala, mientras que, para la aplicación del modelo empírico se deben cumplir una serie de criterios de semejanza entre el modelo y el prototipo.

De modo general, el **criterio de semejanza** puede expresarse según la ecuación lineal:

$$m' = k m \quad [2.6]$$

en la que m y m' son las medidas de una misma magnitud en el modelo y en el prototipo, respectivamente. La constante de proporcionalidad k recibe el nombre de **factor de escala**.

Este principio de semejanza es aplicable a las distintas magnitudes que engloban el sistema, tales como la geometría, perfil de fuerza, velocidad, temperatura y concentración. Por tanto, los distintos criterios de semejanza serán:

- **Semejanza geométrica**, referida a la proporcionalidad entre las dimensiones del modelo y el prototipo.
- **Semejanza mecánica**, que puede ser estática, cinemática y dinámica, según se refiera a la proporcionalidad entre las deformaciones, velocidades y fuerzas, respectivamente.
- **Semejanza térmica**, si existe proporcionalidad entre las temperaturas.
- **Semejanza de concentración**, referida a la correspondencia de todo proceso químico, que obliga a la proporcionalidad entre las concentraciones y composiciones.

La semejanza geométrica es requisito previo para todas las demás. En general, cada una de ellas resulta requisito para todas las siguientes.

A continuación se estudiarán las semejanzas geométrica y mecánica, haciendo breves comentarios sobre las demás. La semejanza térmica, de concentración y química, pueden llegar a paliarse trabajando a igualdad de temperatura y concentración.

2.3.1. Semejanza geométrica

Existe semejanza geométrica entre dos sistemas cuando cada punto de uno de ellos tiene un punto correspondiente en el otro. Se entiende por puntos correspondientes de dos sistemas a los puntos para los que existe una razón constante para sus correspondientes coordenadas.

En la figura 2.1 se representan dos tramos de una tubería cilíndrica, de radios r_1 y r_2 y longitudes L_1 y L_2 ; los puntos P_1 y P_2 serán correspondientes si sus coordenadas radial y axial están en relación constante:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{L_1}{L_2} = k \quad [2.7]$$

Otra forma de indicar analíticamente la semejanza geométrica sería mediante el uso de razones entre dimensiones pertenecientes a un mismo sistema, que reciben el nombre de factores de forma. Así:

$$\frac{r_1}{L_1} = \frac{r_2}{L_2} = \omega \quad [2.8]$$

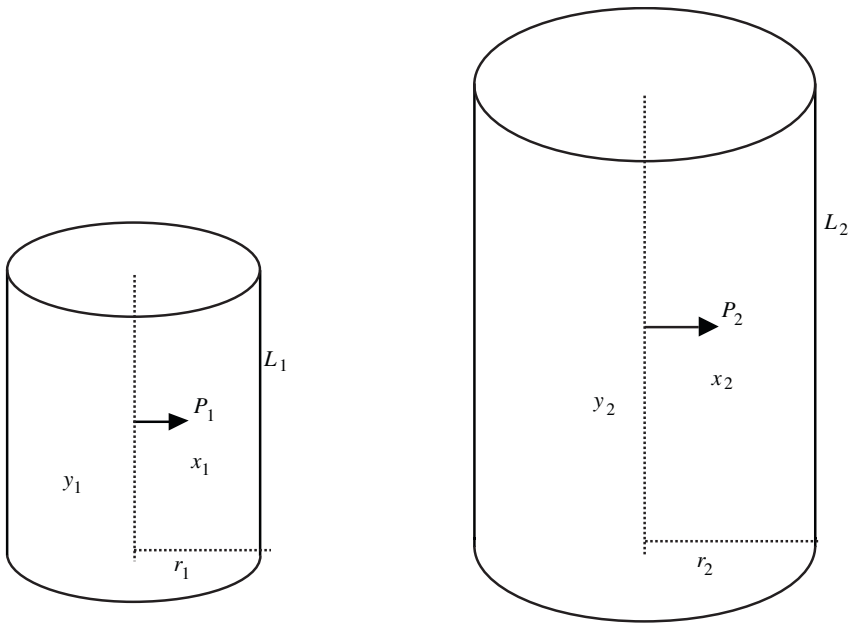


Figura 2.1. Semejanza geométrica. Figuras semejantes.

2.3.2. Semejanza mecánica

2.3.2.1. Semejanza estática

La semejanza estática relaciona la proporcionalidad de las deformaciones. Sin embargo, este tipo de semejanza puede despreciarse si se utilizan materiales con suficiente resistencia. Cuando a cuerpos sólidos se les aplica tensiones constantes y la semejanza geométrica entre ellos se mantiene, se dice que existe semejanza estática.

2.3.2.2. Semejanza cinemática

Una vez que el modelo y prototipo resultan semejantes, deben buscarse las relaciones de proporcionalidad entre las velocidades o los tiempos. De este modo, la semejanza cinemática se cumple cuando:

$$\frac{v_1}{v_2} = C \quad [2.9]$$

en donde v_1 y v_2 son la velocidad para puntos correspondientes del modelo y prototipo.

2.3.2.3. Semejanza dinámica

La semejanza dinámica implica la igualdad de todas las razones o números adimensionales entre las fuerzas significativas que intervienen en los sistemas analizados. Para que exista semejanza dinámica deben cumplirse distintas igualdades, que dependen de las fuerzas que actúan sobre los sistemas. Así, si actúan fuerzas de inercia y de rozamiento, debe cumplirse la igualdad del número de Reynolds. Si además, actúan fuerzas de gravedad, debe cumplirse la igualdad del módulo de Froude. Será necesario que se cumpla la igualdad del módulo de Weber cuando se presentan superficies libres líquido-gas, pues aparecen tensiones superficiales. Cuando existen fuerzas de presión, se deberá cumplir la igualdad del módulo de Euler.

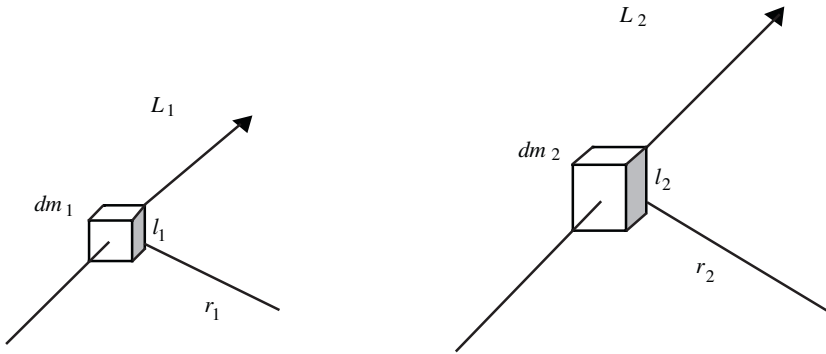


Figura 2.2. Movimiento de una masa en el seno de un fluido. Semejanza dinámica.

A continuación se hace un estudio práctico de lo expuesto. Se supone un diferencial de masa en cada uno de los sistemas considerados (modelo y prototipo), con distinta densidad y viscosidad. En ambos sistemas actúan fuerzas de inercia que desplazan la masa, y además, ambos están sometidos a fuerzas de rozamiento. Tal como muestra la figura 2.2, la masa considerada está encerrada en un volumen de forma cúbica, que se mueve en el seno de un fluido describiendo una trayectoria L .

Si actúan fuerzas de inercia, son fuerzas normales (F_n), de forma que:

$$F_n = \frac{v^2 dm}{r} = \frac{v^2 \rho dV}{r} = \frac{v^2 \rho (dl)^3}{r} \quad [2.10]$$

Las fuerzas de rozamiento serán tangenciales, y según la ley de Newton:

$$F_t = \eta dA \frac{dv}{dr} = \eta (dl)^2 \frac{dv}{dr} \quad [2.11]$$

Donde l es la longitud, A el área y η la viscosidad. Para que haya semejanza dinámica debe cumplirse:

$$\frac{F_{n1}}{F_{t2}} = \frac{F_{n2}}{F_{t2}},$$

o lo que es lo mismo $\left(\frac{F_n}{F_t}\right)_1 = \left(\frac{F_n}{F_t}\right)_2$ [2.12]

$$\frac{F_n}{F_t} = \frac{v^2 \rho (dl)^3}{r} \frac{1}{\eta (dl)^2 \frac{dv}{dr}} = \frac{v^2 \rho dl}{r} \frac{1}{\eta \frac{dv}{dr}} \quad [2.13]$$

con lo que:

$$\frac{v_1^2 \rho_1 dl_1}{r_1} \frac{1}{\eta_1 \frac{dv_1}{dr_1}} = \frac{v_2^2 \rho_2 dl_2}{r_2} \frac{1}{\eta_2 \frac{dv_2}{dr_2}}$$

si se tienen en cuenta las relaciones de semejanza geométrica y cinemática:

$$\begin{aligned} r_i &= w l_i & dl_i &= k dl_j \\ l_i &= k l_j & dr_i &= k dr_j \\ r_i &= k r_j & dv_i &= C dv_j \\ v_i &= C v_j & v_i^2 &= C v_j^2 \end{aligned}$$

al sustituir estas relaciones en el primer miembro de la igualdad anterior se obtiene:

$$\frac{\rho_1 v_1 k}{\eta_1} = \frac{\rho_2 v_2}{\eta_2}$$

pero $k = l_1/l_2$, por lo que:

$$\frac{\rho_1 v_1 l_1}{\eta_1} = \frac{\rho_2 v_2 l_2}{\eta_2} \quad [2.14]$$

es decir: $(Re)_1 = (Re)_2$,

lo que indica que se cumple la igualdad en el módulo de Reynolds en el modelo y prototipo, cuando sólo existan fuerzas de inercia y de rozamiento.

Si además existen fuerzas de gravedad, se toman las relaciones obtenidas, es decir $(Re)_1 = (Re)_2$, y también se cumple

$$(F_n/F_G)_1 = (F_n/F_G)_2 \quad [2.15]$$

Como las fuerzas de gravedad se define como:

$$F_G = g dm = g \rho (dl)^3 \quad [2.16]$$

Si se tienen presentes las ecuaciones 2.10 y 2.16, la relación entre las fuerza de inercia y de gravedad estará definida por:

$$\frac{F_n}{F_G} = \frac{v^2}{r g} \quad [2.17]$$

y como $r_i = \omega l_i$ se cumple que:

$$\frac{v_1^2}{l_1 g} = \frac{v_2^2}{l_2 g} \quad [2.18]$$

lo que indica igualdad en el módulo de Froude. Cabe resaltar que no se puede simplificar g , ya que se obtendría una expresión dimensional. Cuando existen fuerzas de gravedad, los módulos de Froude del modelo y prototipo son iguales.

En el caso que también intervengan fuerzas de tensión superficial (F_s), la nueva relación que se cumple es:

$$(F_n/F_s)_1 = (F_n/F_s)_2 \quad [2.19]$$

Las fuerzas de tensión superficial vienen dadas por:

$$F_s = \sigma l \quad [2.20]$$

en la que σ es la tensión superficial. De este modo:

$$\frac{F_n}{F_s} = \frac{\rho v^2 (dl)^3}{r} \frac{1}{\sigma l} \quad [2.21]$$

de la que se obtiene:

$$\frac{\rho_1 v_1^2 (dl_1)^3}{r_1} \frac{1}{\sigma_1 l_1} = \frac{\rho_2 v_2^2 (dl_2)^3}{r_1} \frac{1}{\sigma_2 l_2} \quad [2.22]$$

al tener en cuenta las relaciones de semejanza geométrica:

$$\begin{aligned} r_i &= \omega l_i \\ l_1 &= k l_2 & dl_1 &= k dl_2 \end{aligned}$$

al sustituir en la igualdad anterior, y simplificando, se obtiene:

$$\frac{\rho_1 v_1^2 l_1}{\sigma_1} = \frac{\rho_2 v_2^2 l_2}{\sigma_2} \quad [2.23]$$

lo que indica que los módulos de Weber son iguales. Es decir, cuando actúan fuerzas de tensión superficial, para que exista semejanza dinámica, los módulos de Weber coinciden en el modelo y prototipo.

Finalmente, se estudia el caso en que, debido a diferencias de presión, existen fuerzas de presión. Se cumple una nueva relación:

$$(F_P/F_N)_1 = (F_P/F_N)_2 \quad [2.24]$$

Las fuerzas de presión están definidas por:

$$F_P = \Delta p \ell^2 \quad [2.25]$$

con lo que:

$$\frac{F_P}{F_N} = \Delta p \ell^2 \frac{r}{\rho v^2 (dl)^3} \quad [2.26]$$

Al combinar las ecuaciones 2.24 y 2.26 se tiene:

$$\Delta p_1 l_1^2 \frac{r_1}{\rho_1 v_1^2 (dl_1)^3} = \Delta p_2 l_2^2 \frac{r_2}{\rho_2 v_2^2 (dl_2)^3} \quad [2.27]$$

y según la semejanza geométrica:

$$\begin{aligned} r_i &= \omega l_i \\ l_1 &= k l_2 & dl_1 &= k dl_2 \end{aligned}$$

al sustituir en la igualdad anterior, y simplificando, se obtiene:

$$\frac{\Delta p_1}{\rho_1 v_1^2} = \frac{\Delta p_2}{\rho_2 v_2^2} \quad [2.28]$$

lo que indica que existe igualdad en el módulo de Euler. Es decir, cuando existe semejanza dinámica, el módulos de Euler del modelo y prototipo coinciden.

No siempre se presentan todas las fuerzas hasta aquí descritas, por lo que de las distintas igualdades entre módulos adimensionales del modelo y prototipo, existirá semejanza dinámica, sólo en aquellas en que la fuerza esté presente.

PROBLEMAS**Problema 2.1**

Un fluido alimentario posee una viscosidad de 6 Poises, y se desea expresar dicha variable en el sistema internacional y en el inglés absoluto.

Por definición 1 Poise es un gramo por centímetro y segundo: 1 Poise = g/(cm·s).

Conversión al sistema internacional:

$$6 \frac{\text{g}}{\text{cm}\cdot\text{s}} \frac{1 \text{ kg}}{10^3 \text{ g}} \frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = 0,6 \frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}} = 0,6 \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

En el sistema internacional la unidad de viscosidad es Pa·s, que es equivalente a kg/(m·s).

Conversión al sistema inglés absoluto:

$$6 \frac{\text{g}}{\text{cm}\cdot\text{s}} \frac{1 \text{ lb}}{453,5 \text{ g}} \frac{30,48 \text{ cm}}{1 \text{ ft}} = 0,403 \frac{\text{lb}}{\text{ft}\cdot\text{s}}$$

Problema 2.2

Para el cálculo de coeficientes individuales de transmisión de calor, en muchos casos se utilizan ecuaciones empíricas. Así, para la circulación de agua en conducciones cilíndricas, puede utilizarse la expresión:

$$h = 160 (1 + 0,01 t) \frac{(v_m)^{0,8}}{(d_i)^{0,2}}$$

siendo: h = coeficiente de película en Btu/(h·ft²·°F)

v_m = velocidad media del agua en ft/s

d_i = diámetro interior de la conducción en pulgadas (in)

t = temperatura del agua en °F

Realizar los cambios de unidades adecuados para que esta ecuación pueda utilizarse en el sistema internacional.

Cuando la temperatura no aparece como incremento, sino como temperatura en términos absolutos, es aconsejable el cambio previo de la misma:

$$t \text{ } ^\circ\text{F} = 1,8 t \text{ } ^\circ\text{C} + 32 \text{ } ^\circ\text{C}$$

por lo que:

$$h = 160 (1,32 + 0,018 t) \frac{(v_m)^{0,8}}{(d_i)^{0,2}}$$

$$\text{Operando se obtiene: } h = 211,2 \frac{(v_m)^{0,8}}{(d_i)^{0,2}} + 2,88 \frac{t (v_m)^{0,8}}{(d_i)^{0,2}}$$

en la que la temperatura t se expresa en $^{\circ}\text{C}$.

Las unidades de los dos coeficientes que aparecen en esta nueva ecuación son:

$$211,2 \frac{\text{Btu}}{\text{h}\cdot\text{ft}^2\cdot^{\circ}\text{F}} \frac{(\text{pulg})^{0,2}}{(\text{ft}/\text{s})^{0,8}}$$

$$2,88 \frac{\text{Btu}}{\text{h}\cdot\text{ft}^2\cdot^{\circ}\text{F}} \frac{(\text{pulg})^{0,2}}{^{\circ}\text{C}\cdot(\text{ft}/\text{s})^{0,8}}$$

El paso siguiente es la conversión de estos coeficientes al sistema internacional:

$$\begin{aligned} 211,2 \frac{\text{Btu}}{\text{h}\cdot\text{ft}^2\cdot^{\circ}\text{F}} \frac{(\text{pulg})^{0,2}}{(\text{ft}/\text{s})^{0,8}} & \frac{5,678 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot^{\circ}\text{C})}{1 \text{ Btu } (\text{h}\cdot\text{ft}^2\cdot^{\circ}\text{F})} \left(\frac{0,0254 \text{ m}}{1 \text{ pulg}} \right)^{0,2} \left(\frac{1 \text{ ft}}{0,3048 \text{ m}} \right)^{0,8} = \\ & = 1,488 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot^{\circ}\text{C}} \frac{\text{m}^{0,2}}{(\text{m}/\text{s})^{0,8}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2,88 \frac{\text{Btu}}{\text{h}\cdot\text{ft}^2\cdot^{\circ}\text{F}} \frac{(\text{pulg})^{0,2}}{^{\circ}\text{C}\cdot(\text{ft}/\text{s})^{0,8}} & \frac{5,678 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot^{\circ}\text{C})}{1 \text{ Btu } (\text{h}\cdot\text{ft}^2\cdot^{\circ}\text{F})} \left(\frac{0,0254 \text{ m}}{1 \text{ pulg}} \right)^{0,2} \left(\frac{1 \text{ ft}}{0,3048 \text{ m}} \right)^{0,8} = \\ & = 20,3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot^{\circ}\text{C}} \frac{\text{m}^{0,2}}{^{\circ}\text{C}\cdot(\text{m}/\text{s})^{0,8}} \end{aligned}$$

Por lo que la ecuación resultante será:

$$h = 1,488 \frac{(v_m)^{0,8}}{(d_i)^{0,2}} + 20,3 \frac{t (v_m)^{0,8}}{(d_i)^{0,2}}$$

que reordenada queda como:

$$h = 1,488 (1 + 0,01364 t) \frac{(v_m)^{0,8}}{(d_i)^{0,2}}$$

expresándose: h en $\text{W}/(\text{m}^2\cdot^{\circ}\text{C})$; v_m en m/s ; d_i en m y t en $^{\circ}\text{C}$.

Problema 2.3

Se desea utilizar el análisis dimensional para obtener una expresión que permita el cálculo de la potencia de un agitador en función de las variables que puedan afectarla. De estudios experimentales se sabe que la potencia de agita-

ción depende del diámetro del agitador (D), de su velocidad de giro (N), de la viscosidad (η) y densidad (ρ) del fluido que está agitando, y de la aceleración de la gravedad (g).

Si se denomina P a la potencia del agitador, ésta se puede expresar en función de las demás variables: $P = f(D, \eta, g, \rho, N)$.

Aplicando el método de Rayleigh: $P = K \cdot D^a \cdot \eta^b \cdot g^c \cdot \rho^d \cdot N^e$

El número de magnitudes fundamentales es tres: longitud (L), masa (M) y tiempo (T). El número de variables es seis. Pueden obtenerse 3 ecuaciones con 5 incógnitas. El número de factores π será: $6 - 3 = 3$.

	P	D	η	g	ρ	N
M	1	0	1	0	1	0
L	2	1	-1	1	-3	0
T	-3	0	-1	-2	0	-1
	1	a	b	c	d	e

$$\frac{ML^2}{T^3} = K^0 L^a \cdot (M/LT)^b \cdot (L/T^2)^c \cdot (M/L^3)^d \cdot (1/T)^e$$

Masa (M): $1 = b + d$
 Longitud (L): $2 = a - b + c - 3d$
 Tiempo (T): $-3 = -b - 2c - e$

Al resultar 3 ecuaciones con cinco incógnitas, se fijan dos de ellas. Si se fijan b y c , las otras se ponen en función de éstas:

$$d = 1 - b$$

$$e = 3 - b - 2c$$

$$a = 2 + b - c + 3 - 3b = 5 - 2b - c$$

Si se sustituye a , d y e en la ecuación en que la potencia es función de las diferentes variables, se obtiene:

$$P = K \cdot D^{5-2b-c} \cdot \eta^b \cdot g^c \cdot \rho^{1-b} \cdot N^{3-b-2c}$$

Se agrupan las variables de forma que posean el mismo exponente:

$$P = K \cdot D^5 \cdot \rho \cdot N^3 \cdot (\rho N D^2 / \eta)^{-b} \cdot (D N^2 / g)^{-c}$$

$$\frac{P}{\rho \cdot N^3 \cdot D^5} = K \left(\frac{\rho \cdot N \cdot D^2}{\eta} \right)^{-b} \left(\frac{D \cdot N^2}{g} \right)^{-c}$$

Se puede observar que se han obtenido tres módulos adimensionales:

- Módulo o número de potencia: $(Po) = \frac{P}{\rho \cdot N^3 \cdot D^5}$

- Módulo de Reynolds: $(Re) = \frac{\rho \cdot N \cdot D^2}{\eta}$
- Módulo de Froude: $(Fr) = \frac{D \cdot N^2}{g}$

este último expresa la relación acción dinámica/acción gravitatoria.

En general, la expresión del módulo de potencia se puede expresar en función de los módulos de Reynolds y Froude, según una expresión del tipo:

$$(Po) = K \cdot (Re)^m \cdot (Fr)^n$$

Problema 2.4

Cuando un fluido circula por una tubería se producen pérdidas de energía mecánica por rozamiento con las paredes, denominándose \hat{E}_f a estas pérdidas por unidad de masa del fluido. \hat{E}_f depende de las características de la tubería (diámetro interno, rugosidad y longitud), de las propiedades del fluido que circula (densidad y viscosidad), así como de la velocidad de circulación (v). Utilizar el método de Buckingham para deducir una expresión que permita el cálculo de \hat{E}_f en función de las variables mencionadas.

El número de variables es 7, siendo tres el número de magnitudes fundamentales. Por tanto, el número de factores adimensionales π es: $\pi = 7 - 3 = 4$.

Las pérdidas de energía por rozamiento se pueden expresar en función del resto de variables: $\hat{E}_f = K \cdot \rho^a \cdot (d_i)^b \cdot v^c \cdot l^d \cdot g^e \cdot \eta^f$.

Se construye la matriz:

	ρ	d_i	v	l	ϵ	η	\hat{E}_f
M	1	0	0	0	0	1	1
L	-3	1	1	1	1	-1	2
T	0	0	-1	0	0	-1	-2
	a	b	c	1	1	1	1

Se trabaja con tres variables que serán las fundamentales, se buscan de tal forma que el determinante de la matriz sea distinto de cero. Se obtiene que el rango de la matriz es igual a tres.

Factores π :

1. $\pi_1 = \rho^a \cdot (d_i)^b \cdot v^c \cdot \hat{E}_f$

Las magnitudes fundamentales son masa, longitud y tiempo:

Masa (M): $0 = a$

Longitud (L): $0 = -3a + b + c + 2$

Tiempo (T): $0 = -c - 2$

al resolver este sistema se obtienen los valores de a, b y c : $a = 0$; $b = 0$; $c = -2$.

por lo que el factor π_1 será:
$$\pi_1 = \frac{\hat{E}_f}{v^2}$$

2. $\pi_2 = \rho^a \cdot (d_i)^b \cdot v^c \cdot l$

Masa (M): $0 = a$

Longitud (L): $0 = -3a + b + c + 1$

Tiempo (T): $0 = -c$

al resolver este sistema se obtienen los valores de a, b y c : $a = 0$; $b = -1$; $c = 0$.

por lo que el factor π_2 será:
$$\pi_2 = \frac{l}{d_i}$$

3. $\pi_3 = \rho^a \cdot (d_i)^b \cdot v^c \cdot \varepsilon$

Masa (M): $0 = a$

Longitud (L): $0 = -3a + b + c + 1$

Tiempo (T): $0 = -c$

al resolver este sistema se obtienen los valores de a, b y c : $a = 0$; $b = -1$; $c = 0$.

por lo que el factor π_3 será:
$$\pi_3 = \frac{\varepsilon}{d_i}$$

4. $\pi_4 = \rho^a \cdot (d_i)^b \cdot v^c \cdot \eta$

Masa (M): $0 = a + 1$

Longitud (L): $0 = -3a + b + c - 1$

Tiempo (T): $0 = -c - 1$

al resolver este sistema se obtienen los valores de a, b y c : $a = -1$; $b = -1$; $c = -1$.

por lo que el factor π_4 será:
$$\pi_4 = \frac{\eta}{\rho v d_i} = (\text{Re})^{-1}$$

Como es un factor adimensional se puede considerar que su valor es el módulo de Reynolds: $\pi_4 = \text{Re}$.

Según el teorema π de Buckingham, uno de estos factores adimensionales se puede expresar en función de los otros tres. Por lo que se puede escribir:

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \pi_4)$$

es decir:
$$\frac{\hat{E}_f}{v^2} = \phi \left(\frac{l}{d_i}, \frac{\varepsilon}{d_i}, \text{Re} \right)$$

o lo que es lo mismo:
$$\hat{E}_f = v^2 \phi \left(\frac{l}{d_i}, \frac{\varepsilon}{d_i}, \text{Re} \right)$$

Se sabe que las pérdidas de energía mecánica por unidad de masa son proporcionales a la longitud, por lo que:

$$\hat{E}_f = v^2 \frac{l}{d_i} \phi \left(\frac{\varepsilon}{d_i}, \text{Re} \right)$$

Se ha obtenido que \hat{E}_f es directamente proporcional a la velocidad al cuadrado y a la longitud, e inversamente proporcional al diámetro de la tubería. Asimismo, depende de una función ϕ' que depende del módulo de Reynolds y de la denominada rugosidad relativa, ε/d_i .

Para completar esta expresión se debería recurrir a la experimentación. Sin embargo, la función ϕ' se puede sustituir por un factor f denominado factor de fricción o de rozamiento, de tal forma que las pérdidas de energía por rozamiento se podrán obtener a partir de la ecuación:

$$\hat{E}_f = f v^2 \frac{l}{d_i}$$

en la que el factor f es función del módulo de Reynolds y de la rugosidad relativa.

Problema 2.5

Uno de los dispositivos más usuales para las fermentaciones en discontinuo es el tanque agitado. La potencia que debe aplicarse al agitador (P) es función de la velocidad de giro (N) y del diámetro (D) del mismo, así como de la densidad (ρ) y viscosidad del sustrato (η), dependiendo además de la aceleración de la gravedad (g) y del tiempo (t) desde que se inicia la operación. Demostrar, por los métodos de Rayleigh y Buckingham, que el módulo de potencia (P_o) es función de los módulos de Reynolds (Re), de Froude (Fr) y del módulo de tiempo (Nt), es decir: $(P_o) = \Phi [(Re), (Fr), (Nt)]$.

Los módulos (P_o), (Re) y (Fr) están definidos por las expresiones:

$$(P_o) = \frac{P}{\rho \cdot N^3 \cdot D^5} \quad (Re) = \frac{D^2 \cdot N \cdot \rho}{\eta} \quad (Fr) = \frac{D \cdot N^2}{g}$$

El número de variables es 7, mientras que el número de magnitudes fundamentales es 3, por lo que el número de factores adimensionales π es 4.

Método de Rayleigh

La potencia del agitador se puede expresar como función de las otras variables:

$$P = K \cdot N^a \cdot \rho^b \cdot \eta^c \cdot D^d \cdot g^e \cdot t^f \quad [2.5.1]$$

	<i>P</i>	<i>N</i>	ρ	η	<i>D</i>	<i>g</i>	<i>t</i>
M	1	0	1	1	0	0	0
L	2	0	-3	-1	1	1	0
T	-3	-1	0	-1	0	-2	1
	1	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>

$$\frac{ML^2}{T^3} = K^0 \cdot (1/T)^a \cdot (M/L^3)^b \cdot (M/LT)^c \cdot (L)^d \cdot (L/T^2)^e \cdot (T)^f$$

Masa (M): $1 = b + c$

Longitud (L): $2 = -3b - c + d + e$

Tiempo (T): $-3 = -a - c - 2e + f$

Al resultar 3 ecuaciones con 6 incógnitas, se fijan tres de ellas. Si se fijan *c*, *e* y *f*, las otras se ponen en función de éstas:

$$b = 1 - c$$

$$d = 5 - e - 2c$$

$$a = 3 - c - 2e + f$$

Si se sustituye *a*, *b* y *d* en la ecuación 2.5.1, se obtiene:

$$P = K \cdot N^{3-c-2e+f} \cdot \rho^{1-c} \cdot \eta^c \cdot D^{5-2c-e} \cdot g^e \cdot t^f$$

Se agrupan las variables de forma que posean el mismo exponente:

$$P = K \cdot D^5 \cdot \rho \cdot N^3 \left(\frac{\eta}{\rho \cdot N \cdot D^2} \right)^c \cdot \left(\frac{g}{D \cdot N^2} \right)^e \cdot (Nt)^f$$

con lo que:
$$\frac{P}{\rho \cdot N^3 \cdot D^5} = K \left(\frac{\rho \cdot N \cdot D^2}{\eta} \right)^{-c} \cdot \left(\frac{D \cdot N^2}{g} \right)^{-e} \cdot (Nt)^f$$

Si se tiene presente las definiciones de los módulos de Potencia, de Reynolds y de Froude, esta expresión se convierte en:

$$(Po) = K \cdot (Re)^{-c} \cdot (Fr)^{-e} \cdot (Nt)^f$$

o lo que es lo mismo: $(Po) = \Phi [(Re), (Fr), (Nt)]$ que es lo que se quería demostrar.

Método de Buckingham

Se forma la matriz de los exponentes:

	<i>P</i>	<i>N</i>	<i>D</i>	<i>g</i>	ρ	η	<i>t</i>
M	1	0	0	0	1	1	0
L	2	0	1	1	3	-1	0
T	-3	-1	0	-2	0	-1	1

Se busca el rango de esta matriz, que como máximo puede ser tres. Existe un determinante formado por las columnas de N , D y ρ distinto de cero:

$$\text{Det} \begin{Bmatrix} N & D & \rho \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} = 1$$

con lo que el rango de la matriz es 3. Se eligen como variables fundamentales N , D y ρ .

	N	D	ρ	P	η	g	t
M	0	0	1	1	1	0	0
L	0	1	-3	2	-1	1	0
T	-1	0	0	-3	-1	-2	1
	a	d	b	1	1	1	1

Los factores adimensionales π se determinan uno a uno.

- $\pi_1 = N^a \cdot \rho^b \cdot D^d \cdot P$

Masa (M): $0 = b + 1$

Longitud (L): $0 = d - 3b + 2$

Tiempo (T): $0 = -a - 3$

al resolver este sistema se obtiene: $b = -1$; $d = -5$; $a = -3$

con lo que el factor adimensional π_1 será: $\pi_1 = \frac{P}{N^3 \cdot D^5 \cdot \rho}$

- $\pi_2 = N^a \cdot \rho^b \cdot D^d \cdot \eta$

Masa (M): $0 = b + 1$

Longitud (L): $0 = d - 3b - 1$

Tiempo (T): $0 = -a - 1$

al resolver este sistema se obtiene: $b = -1$; $d = -2$; $a = -1$

con lo que el factor adimensional π_2 será: $\pi_2 = \frac{\eta}{N \cdot D^2 \cdot \rho}$

- $\pi_3 = N^a \cdot \rho^b \cdot D^d \cdot g$

Masa (M): $0 = b$

Longitud (L): $0 = d - 3b + 1$

Tiempo (T): $0 = -a - 2$

al resolver este sistema se obtiene: $b = 0$; $d = -1$; $a = -2$

con lo que el factor adimensional π_3 será: $\pi_3 = \frac{g}{N^2 \cdot D}$

- $\pi_4 = N^a \cdot \rho^b \cdot D^d \cdot t$

Masa (M): $0 = b$

Longitud (L): $0 = d - 3b$

Tiempo (T): $0 = -a + 1$

al resolver este sistema se obtiene: $b = 0$; $d = 0$; $a = 1$

con lo que el factor adimensional π_4 será: $\pi_4 = Nt$

Aplicando el teorema de Buckingham: $\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, \pi_4)$

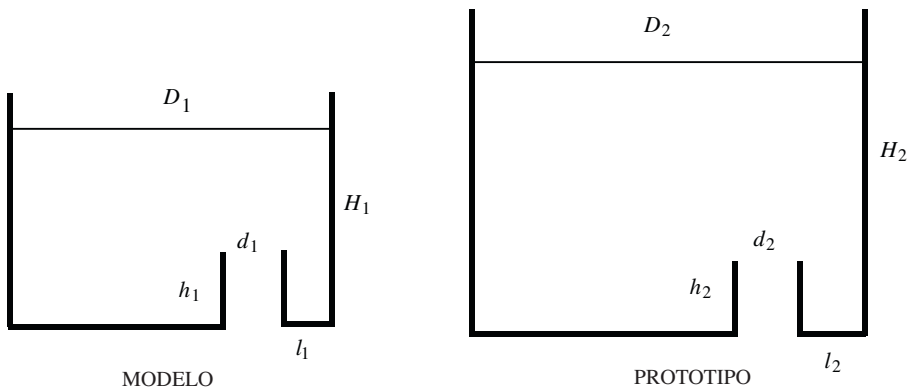
con lo que: $(Po) = \Phi[(Re), (Fr), (Nt)]$ que es lo que se quería demostrar.

Problema 2.6

Un tanque cilíndrico de almacenamiento, de zumo concentrado de 54 °Brix, posee 5 m de diámetro, y está provisto de un desagüe de 20 cm de diámetro, situado a 50 cm de la pared lateral del depósito y con una embocadura de 10 cm por encima del fondo del depósito. Cuando se vacía el tanque se forma un vórtice, que cuando el nivel del líquido no es lo suficientemente elevado, existe el peligro de que alcance la tubería de salida, con lo que se succiona aire junto con el zumo. El tanque debe operar a un caudal de vaciado de 20 m³/s. Con el objeto de predecir cuál debe ser el nivel mínimo de zumo en el tanque, para evitar que el vórtice llegue al desagüe, se realiza un estudio con un modelo a escala reducida, que operará con agua. Determinar las dimensiones que debe poseer el modelo, así como las condiciones de operación.

Datos:

- Puede suponerse que la forma del vórtice depende únicamente de la velocidad de vaciado y de la cantidad de líquido existente en el tanque.
- Propiedades del zumo: Densidad 1.250 kg/m³. Viscosidad 50 mPa·s



H_2 es el nivel de zumo en el tanque para el que el vórtice no alcance el desagüe. El subíndice 1 indica modelo y el 2 prototipo.

Semejanza geométrica

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{D_1}{D_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{H_1}{H_2} = k$$

Semejanza dinámica

Como existen fuerzas de inercia, rozamiento y de gravedad, se cumple que los módulos de Reynolds y de Froude del modelo y prototipo deben ser iguales:

$$(\text{Re})_1 = (\text{Re})_2 \quad (\text{Fr})_1 = (\text{Fr})_2$$

De la igualdad en los módulos de Reynolds: $\frac{\rho_1 \cdot v_1 \cdot d_1}{\eta_1} = \frac{\rho_2 \cdot v_2 \cdot d_2}{\eta_2}$

de donde: $\frac{d_1 \cdot v_1}{d_2 \cdot v_2} = \frac{\eta_1 \cdot \rho_2}{\eta_2 \cdot \rho_1}$

De la igualdad en los módulos de Froude: $\frac{(v_1)^2}{g \cdot d_1} = \frac{(v_2)^2}{g \cdot d_2}$,

de donde: $\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{1/2}$

Al combinar las expresiones obtenidas: $\frac{d_1 \cdot (d_1)^{1/2}}{d_2 \cdot (d_2)^{1/2}} = \frac{\eta_1 \cdot \rho_2}{\eta_2 \cdot \rho_1}$

de la que se deduce: $\frac{d_1}{d_2} = \frac{(\eta_1 \cdot \rho_2)^{2/3}}{(\eta_2 \cdot \rho_1)^{2/3}}$

De los datos del problema y propiedades del agua:

$$\begin{array}{ll} \eta_1 = 1 \text{ mPa}\cdot\text{s} & \rho_1 = 1.000 \text{ kg/m}^3 \\ \eta_2 = 50 \text{ mPa}\cdot\text{s} & \rho_2 = 1.250 \text{ kg/m}^3 \end{array}$$

se obtiene que la **razón de semejanza geométrica** será: $k = d_1/d_2 = 0,0855$

Este factor permite obtener las dimensiones del modelo:

$$\begin{array}{l} d_1 = k \cdot d_2 = 0,0855 \cdot 0,2 \text{ m} = 0,017 \text{ m} \\ h_1 = k \cdot h_2 = 0,0855 \cdot 0,1 \text{ m} = 0,0085 \text{ m} \\ D_1 = k \cdot D_2 = 0,0855 \cdot 5 \text{ m} = 0,428 \text{ m} \\ l_1 = k \cdot l_2 = 0,0855 \cdot 0,5 \text{ m} = 0,0428 \text{ m} \end{array}$$

El caudal volumétrico (q) es el producto de la velocidad lineal (v) por la sección de paso (S). Como ésta se expresa en función del diámetro de la tubería, se tiene:

$$q = v \cdot S = v \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2$$

por lo que la relación de caudales entre el modelo y el prototipo será:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{v_1 (d_1)^2}{v_2 (d_2)^2} = \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^{5/2} = k^{5/2}$$

de la que se obtiene el caudal volumétrico con que desagua el modelo:

$$q_1 = k^{5/2} \cdot q_2 = (0,0855)^{5/2} \cdot (20 \text{ m}^3/\text{s}) = 0,0428 \text{ m}^3/\text{s}$$

El nivel mínimo que debe poseer el zumo en el tanque se puede expresar en función del nivel en el modelo, a partir del valor de la razón de semejanza geométrica:

$$H_2 = \frac{H_1}{k} = \frac{H_1}{0,0855} = 11,7 \cdot H_1$$

El valor de H_1 se obtiene experimentalmente en el laboratorio, operando con el modelo. A partir de este valor es posible obtener el de H_2 , la mínima altura que debe alcanzar el zumo en el depósito prototipo, para que el vórtice no alcance la tubería de desagüe.

Introducción a los fenómenos de transporte **3**

3.1. Introducción histórica

Las operaciones unitarias de las industrias agraria y alimentaria constituyen las etapas físicas, químicas o bioquímicas que integran los procesos industriales, en los que se transforman o manipulan los productos agrícolas.

La coincidencia de que estas etapas físicas, químicas o bioquímicas que constituyen los procesos de las industrias agrícolas, sean las mismas que las que se presentan en los procesos de las industrias químicas hace que los conocimientos y avances de las Operaciones Unitarias de la Ingeniería Química sean aplicables a las Industrias Agroalimentarias, siempre y cuando se adapten a las especiales características de la materia prima de estas últimas (productos naturales, generalmente perecederos) y a las particulares condiciones (higiene, limpieza, etc.) exigidas normalmente a los procesos agroindustriales.

Es importante resaltar que la Ingeniería Alimentaria es una rama relativamente nueva de la Ingeniería que se ha ido desarrollando en los últimos años. Sus fundamentos arrancan de la industria química, ya que fue en ella donde se desarrolló la Ingeniería de los Procesos.

La importancia de los conceptos de la ingeniería de los procesos se debe a que sirven para unificar las técnicas de lo que normalmente se consideran industrias separadas. Con ello se unifican de forma lógica los principios básicos que son comunes a todas las industrias alimentarias, a pesar de su aparente diversidad.

Como se ha comentado, la ingeniería de los procesos se desarrolló por primera vez en la industria química, y los ingenieros químicos han construido una tecnología de los procesos de dimensiones poco frecuentes, que ha sido de lo más provechosa, y la mayor parte se puede aplicar a la industria alimentaria.

Los procesos se pueden desglosar en las llamadas Operaciones Unitarias o Básicas, que son comunes a muchos de ellos. De forma que el estudio por separado de cada operación unitaria resulta más sencillo que el estudio de cada proceso. Los conocimientos que se han desarrollado sobre las Operaciones Unitarias son considerables, y el Ingeniero Alimentario debe tomar estos conocimientos para aplicarlos al desarrollo de las industrias alimentarias.

Debe recordarse que el término Operación Unitaria fue establecido en 1915 por el profesor Little del Massachusetts Institute of Technology (MIT). Por su valor histórico y conceptual es interesante recordar su definición:

«... todo proceso químico conducido a cualquier escala puede descomponerse en una serie ordenada de lo que pudieran llamarse Operaciones Unitarias, como pulverización, secado, cristalización, filtración, evaporación, destilación, etc. El número de estas Operaciones Unitarias no es muy grande y, generalmente, sólo unas cuantas de ellas intervienen en un proceso determinado».

Con esta simplificación se ha reducido la complejidad del estudio de los procesos, pues del conjunto de los casi infinitos procesos que pueden imaginarse, bastará con estudiar el conjunto de las pocas Operaciones Unitarias existentes. Un proceso determinado será entonces la combinación de Operaciones Unitarias.

Con el estudio sistemático de estas Operaciones Unitarias empieza una nueva etapa de desarrollo y crecimiento de la Ingeniería, añadiéndose nuevas operaciones y generalizándose para muchas de ellas la presentación didáctica a partir del análisis dimensional y del estudio experimental. Es una fase de empirismo razonado en que la teoría y práctica se combinan hábilmente, y durante la cual se van hallando, poco a poco, los fundamentos teóricos de las distintas operaciones. Este concepto tradicional de las operaciones unitarias ha sido uno de los factores principales del extraordinario éxito de esta rama de la Ingeniería en el pasado.

Prosiguiendo el esfuerzo de sistematización, se inicia un nuevo período de generalización, agrupando las Operaciones Unitarias según los principios generales en que se basan. De este modo quedan distribuidas en las siguientes secciones:

- Tratamiento de fluidos.
- Transferencia de materia, por contacto múltiple.
- Transferencia de energía y materia, por contacto continuo.

Posteriormente, y como consecuencia de un mejor conocimiento de los fundamentos de las Operaciones Unitarias, se advirtió que todas ellas se basan en los tres fenómenos siguientes:

- Transporte de cantidad de movimiento.
- Transmisión de energía.
- Transferencia de materia.

Asimismo, en todos los casos, el flujo de propiedad transferida es directamente proporcional a una fuerza impulsora (gradiente de velocidad, de temperatura o concentración) e inversamente proporcional a una resistencia que depende de las propiedades del sistema y de las condiciones de operación. Por tanto, resulta posible desarrollar un cuerpo de doctrina totalmente abstracto del cual se pueden desglosar como casos particulares los tres fenómenos de transporte mencionados.

3.2. Fenómenos de transporte. Definición

Se deduce de lo expuesto en el apartado anterior que todas las etapas físicas que constituyen los distintos procesos de elaboración industrial se basan en los tres fenómenos siguientes:

- Transporte de cantidad de movimiento.
- Transmisión de energía.
- Transferencia de materia

En todos los procesos en los que un sistema no se encuentra en equilibrio, evolucionan de tal forma que se tiende a llegar a él, mediante la transferencia de alguna de las tres propiedades citadas, sola o bien más de una de ellas.

Se puede definir el fenómeno de transporte como el fenómeno físico que se pone de manifiesto cuando un sistema evoluciona hacia la situación de equilibrio.

Algunos ejemplos que clarifican esta definición pueden ser:

- a) Cuando en una corriente fluida existen dos puntos en que su velocidad tomada en sentido normal al desplazamiento de la corriente es distinta, el sistema evolucionará de tal forma que contrarreste esta diferencia de velocidades mediante un transporte de cantidad de movimiento.
- b) Si en un sólido existen zonas con distinta temperatura, existirá un transporte de calor de la zona más caliente a la más fría, de forma que el sistema tiende a un equilibrio térmico.
- c) Cuando en una misma fase existe una diferencia de concentración entre dos puntos, se realizará un transporte de materia que tiende a equilibrar esta diferencia de concentración.

En realidad, en todas las operaciones se presentan simultáneamente al menos dos de los tres fenómenos, pero hay algunas en las que normalmente predomina uno de ellos. Así, el transporte de cantidad de movimiento predomina en las operaciones de transporte de fluidos, sedimentación, filtración, etc.; la transmisión de calor en el diseño de intercambiadores, condensadores, etc., y la transferencia de materia en operaciones tales como absorción, extracción con disolventes, destilación, etc. Existen operaciones, tales como interacción aire-agua, secado, cristalización, etc., en las que tienen importancia, de modo simultáneo, los fenómenos de transferencia de materia y transmisión de calor, principalmente.

3.3. Regímenes de circulación. Experimento de Reynolds

Antes de pasar a estudiar los mecanismos de los fenómenos de transporte, es interesante comprobar experimentalmente la existencia de tales mecanismos. En el caso del estudio de los regímenes de circulación resulta de sumo interés el experimento llevado a cabo por Reynolds en 1833. Dicho experimento consistía en hacer circular agua a través de una tubería transparente y de sección constante, variando la velocidad de circulación del líquido mediante una válvula colocada a la entrada de la tubería. En el centro de la tubería, y en la sección de entrada, se introduce una solución coloreada. Se observa la variación de la vena coloreada a lo largo de la tubería, para las distintas velocidades de circulación del líquido.

Si la velocidad del líquido es baja, la vena coloreada no pierde su identidad, circulando por la parte central de la tubería, y aunque se observa un lento y progresivo aumento en el espesor de la vena, no se aprecia mezcla en el sentido transver-

sal, lo que indica que el flujo tiene lugar en forma de corrientes paralelas que no interfieren entre ellas. El intercambio de materia es sólo a nivel molecular. A medida que se aumenta la velocidad del líquido van apareciendo oscilaciones en el filamento coloreado, hasta que a partir de una cierta velocidad se rompe en remolinos e inunda transversalmente la conducción. En la figura 3.1 se observan distintas imágenes de lo expuesto sobre el experimento de Reynolds.

De todo lo observado puede deducirse que existen dos tipos de regímenes de circulación bien diferenciados, en que los mecanismos de transporte de materia son distintos.

Para velocidades bajas se desprende que el líquido se desplaza en sentido horizontal y por capas concéntricas paralelas, sin desplazamiento transversal. Este ré-

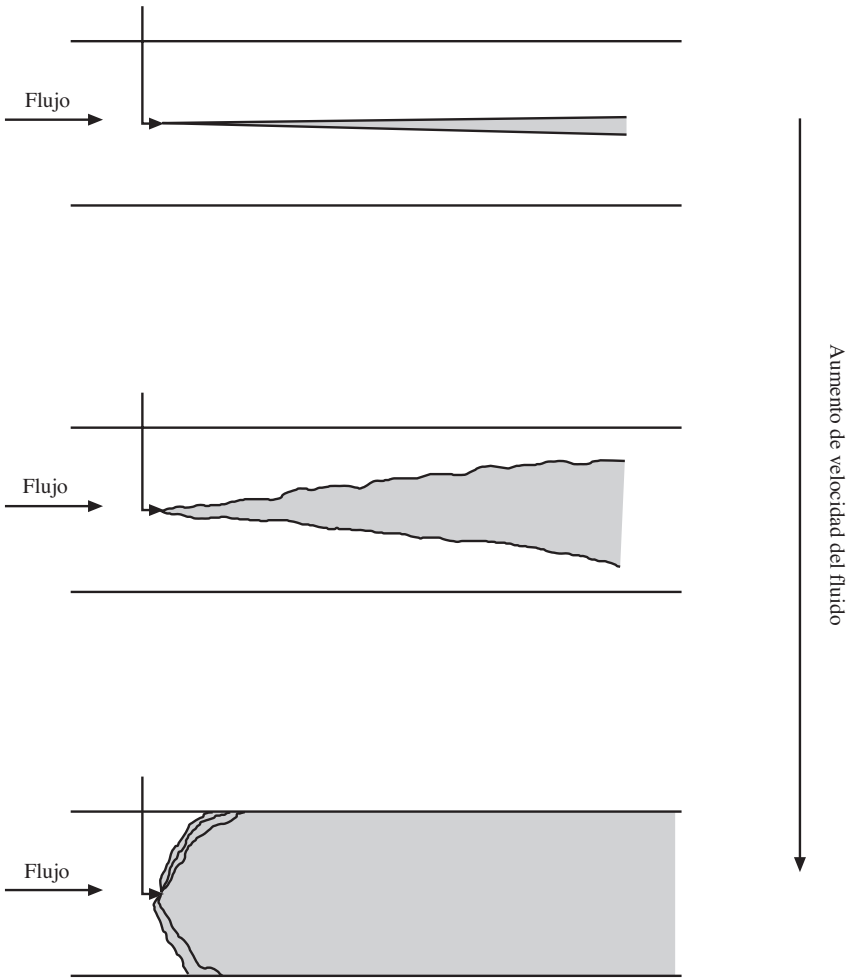


Figura 3.1. Experimento de Reynolds.

gimen se llama laminar y se caracteriza por la ausencia de movimiento global perpendicular a la dirección principal de la corriente.

Para velocidades elevadas, existe un desplazamiento de líquido en sentido transversal, de proporciones macroscópicas. Este tipo de régimen de circulación recibe el nombre de turbulento. Se caracteriza por el rápido movimiento del líquido en forma de remolinos con direcciones al azar en la sección transversal de la tubería.

En estos experimentos la única variable que cambia es la velocidad, pero puede haber otras variables que se alteren, tales como el diámetro de la tubería o la naturaleza del líquido. Por todo ello, para un mejor estudio de los regímenes de circulación se define un módulo adimensional que reúne las magnitudes que caracterizan el fenómeno de la circulación, delimitando los distintos regímenes. Dicho módulo recibe el nombre de módulo o número de Reynolds, que representa el cociente entre las fuerzas de inercia y viscosas en el fluido en movimiento. Para el caso de una conducción cilíndrica y fluido newtoniano, toma la forma:

$$\text{Re} = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta} \quad [3.1]$$

siendo: Re = Módulo de Reynolds (adimensional).

ρ = densidad del fluido (kg/m^3).

v = velocidad media del fluido (m/s).

d = diámetro de la conducción (m).

η = viscosidad del fluido (Pa·s).

El valor numérico del módulo de Reynolds es un criterio para definir el tipo de régimen de circulación de una corriente fluida. Se ha observado que para valores inferiores a un Re llamado crítico, las oscilaciones del flujo son inestables, y cualquier perturbación desaparece rápidamente. Para valores superiores a este Re crítico, las oscilaciones se hacen estables y de mayor amplitud, dando lugar a un alto grado de mezcla radial. Para fluidos newtonianos el valor del Re crítico es 2.100. Para valores inferiores el régimen es laminar, mientras que para valores superiores existe un intervalo de valores del módulo Re, denominado de transición, en que se pueden dar fenómenos metaestables. A partir de valores superiores a 10.000, el régimen es netamente turbulento.

Este estudio realizado para los regímenes de circulación también puede aplicarse al transporte de cantidad de movimiento y transmisión de calor.

Si en el experimento de Reynolds se mide la caída de presión que experimenta el fluido entre las secciones de entrada y salida de la tubería (ΔP), se observa que aumenta con el caudal. La figura 3.2 muestra la variación de la caída de presión con el módulo de Reynolds. La pérdida de carga del fluido es la expresión de la energía que el fluido consume, por tener lugar un transporte de cantidad de movimiento. En dicha figura se observa que a partir de $\text{Re} = 2.100$ la pérdida de carga aumenta más rápidamente, lo que favorece el proceso de transporte de cantidad de movimiento, pues aparecen componentes radiales en la velocidad de las partículas del fluido.

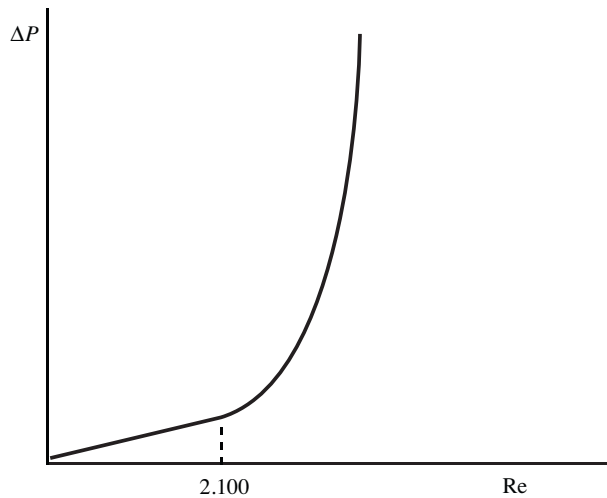


Figura 3.2. Variación de la caída de presión con el módulo de Reynolds.

Si se desea estudiar la transmisión de calor, puede considerarse una tubería en la que entra agua con un caudal w a una temperatura t_1 y sale con el mismo caudal a una temperatura t_2 , debido al calor que gana el fluido a través de la pared. El calor total ganado será:

$$q = w \cdot \hat{C}_p (t_1 - t_2) \quad [3.2]$$

Al variar el caudal (w) la temperatura de salida (t_2) también variará. Al representar gráficamente la variación del calor ganado frente al módulo de Reynolds se obtiene una gráfica análoga a la figura 3.2. Se observa que para flujo laminar el calor intercambiado aumenta en proporción directa al flujo del fluido, sin embargo, a partir del valor crítico del módulo Re , el aumento es cada vez más pronunciado. En régimen laminar la transmisión de calor se produce de forma radial, molécula a molécula, pero en régimen turbulento existen corrientes o torbellinos que favorecen el transporte radial de calor.

3.4. Mecanismos de los fenómenos de transporte

El mecanismo de transmisión de energía mediante ondas electromagnéticas recibe el nombre de radiación, pudiéndose realizar a través de vacío, sin necesidad de medio material para transmitirse. Sin embargo, las demás formas de transmisión de energía y de transporte de cantidad de movimiento van asociados de un modo u otro al movimiento de materia, aunque no exista una transferencia neta de la misma. Así, en la transmisión de calor por conducción en un medio material continuo, no existe ningún desplazamiento de materia a escala macroscópica, aunque sí

a nivel molecular, por desplazamiento de los electrones libres (en los metales) o por vibración de las moléculas o iones de los sólidos.

Con lo cual, al ir asociados estos distintos fenómenos de transporte, resulta interesante un tratamiento conjunto de los mismos. El tratamiento de las tres propiedades referidas puede tener lugar por dos mecanismos bien diferenciados:

- Transporte molecular.
- Transporte turbulento.

En el transporte molecular la transferencia de la propiedad se realiza molécula a molécula, bien por desplazamientos de las moléculas individuales o bien por interacciones entre ellas. El transporte turbulento se produce cuando grandes grupos de moléculas se trasladan en forma de agregados o torbellinos, transportando con ellos cantidad de movimiento, materia o energía. Estos agregados sirven como medio transportador, y transfieren la propiedad a otros grupos de moléculas que interactúan con ellas. El transporte molecular puede presentarse sólo, mientras que el transporte turbulento nunca se presenta aislado, sino que siempre va acompañado de transporte molecular.

3.4.1. Transferencia de materia

Para estudiar el mecanismo de transporte de materia puede suponerse un componente cualquiera de la materia considerada, que se transfiere de un punto a otro del sistema que se está estudiando. Esta transferencia de masa puede tener lugar según dos mecanismos, por flujo molecular o advectivo. Cuando existe un gradiente de concentración del componente considerado entre dos puntos del sistema, se produce la transferencia de masa por flujo molecular. Sin embargo, cuando toda la masa se mueve desde un punto hacia el otro, la transferencia se produce por flujo advectivo.

Según la naturaleza física del medio considerado pueden presentarse diferentes situaciones, en las que la transferencia de materia se realiza por uno o los dos mecanismos de transporte considerados.

- a) Cuando no existe un gradiente de concentración del componente considerado, si el medio es fluido, sólo puede haber transporte advectivo. Pero este tipo de problema se estudia como transporte de cantidad de movimiento y no de materia.
- b) Cuando existe un gradiente de concentración del componente, y el medio es un fluido en reposo, la transferencia de materia se realiza por flujo molecular, siendo debida únicamente a la difusión molecular. Así, si se considera un vaso de precipitado que se llena de agua, y en el que se introduce un cristal de un colorante en el fondo del vaso. Se observará que el cristal se disuelve paulatinamente, difundiéndose en todo el vaso, pues la concentración en los alrededores del cristal es superior a las de otras zonas. Esta difusión tiene lugar hasta que se llega al equilibrio.
- c) Cuando existe un gradiente de concentración y el medio es un fluido que se mueve en régimen laminar, la transferencia de materia se realiza por los

dos mecanismos. Recordando el experimento de Reynolds, al inyectar el colorante en un punto de entrada P de la tubería (figura 3.3), a la salida en el punto Q , el colorante se ha transferido desde la entrada a la salida por flujo advectivo, y desde el centro de la conducción hasta el punto Q por flujo molecular.

- d) Cuando el medio es un fluido en el que hay turbulencia y gradientes de concentración, los mecanismos de transporte de materia molecular y advectivo se presentan simultáneamente. Aunque el fenómeno resulta complejo, se asimila al anterior, utilizando un modelo análogo. En este caso se considera una difusión efectiva, que engloba la difusión molecular debida al gradiente de concentración y la denominada difusión turbulenta, debida al paso de P a Q mediante transporte turbulento por remolinos.

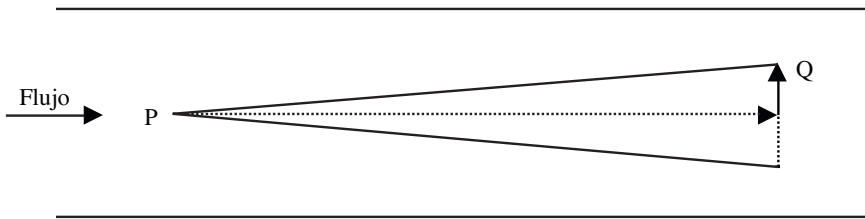


Figura 3.3. Flujos molecular y advectivo simultáneos.

3.4.2. Transmisión de energía

Como ya se ha mencionado al inicio de este apartado, la transmisión de energía por radiación tiene un mecanismo distinto de los de conducción y convección. Es interesante mencionar algunos aspectos de la transmisión de energía por estos dos últimos tipos.

La conducción supone un flujo de energía molécula a molécula, debido a la existencia de gradientes de temperatura, mediante mecanismos que dependen de la naturaleza física del medio. Por analogía con la difusión de materia, el principio de estos mecanismos se explica a nivel atómico-molecular, pero se diferencian en que en el caso de la conducción no existe un flujo neto de materia.

Cuando el medio considerado es un fluido, si existe un gradiente de temperaturas, esto hará que en muchos casos exista una notable diferencia de densidad. Por tanto, existirá un flujo de materia debido a las fuerzas de flotación, que llevará asociado un flujo de energía de tipo convección natural. También existe la convección forzada, que al igual que la natural es debida a la energía asociada a los fluidos en movimiento. Pero en este caso la energía comunicada para poner en movimiento al fluido se logra mediante dispositivos mecánicos. Además de la convección, también se presentará transmisión de energía por conducción, pero ésta es de mucha menor importancia. De modo general, en los medios fluidos, la transmisión de energía se estudia como un fenómeno de convección, englobando la convección y conducción.

3.4.3. Transporte de cantidad de movimiento

Para el estudio de los mecanismos de transporte de cantidad de movimiento, puede hacerse un planteamiento análogo al realizado en el estudio de la transferencia de materia. Se puede considerar también los flujos molecular y advectivo de cantidad de movimiento.

3.4.4. Leyes de velocidad

En los mecanismos de transporte molecular, la propiedad que se transfiere tiene lugar debido a un gradiente de potencial, siendo este gradiente de concentración, temperatura o velocidad, según la propiedad transferida sea materia, energía o cantidad de movimiento, respectivamente.

En el transporte molecular de densidad de flujo de propiedad es proporcional al gradiente de potencial. La constante de proporcionalidad es una propiedad intensiva del medio. Según la naturaleza de la propiedad la constante de proporcionalidad recibe distintos nombres, así como las leyes de cada uno de los fenómenos de transporte.

a) Ley de Fick

$$\left(\begin{array}{c} \text{Densidad de flujo} \\ \text{de materia} \end{array} \right) = (\text{Difusividad}) \left(\begin{array}{c} \text{Gradiente de} \\ \text{concentración} \end{array} \right)$$

b) Ley de Fourier

$$\left(\begin{array}{c} \text{Densidad de flujo} \\ \text{energía térmica} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Conductividad} \\ \text{térmica} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{Gradiente de} \\ \text{temperatura} \end{array} \right)$$

c) Ley de Newton

$$\left(\begin{array}{c} \text{Densidad de flujo} \\ \text{cantidad de movimiento} \end{array} \right) = (\text{Viscosidad}) \left(\begin{array}{c} \text{Gradiente de} \\ \text{velocidad} \end{array} \right)$$

Cuando el transporte es turbulento, en el interior de los torbellinos subsiste un medio laminar, de modo que lleva asociado el transporte molecular, y normalmente los parámetros que se utilizan incluyen ambos fenómenos.

3.4.5. Fenómenos acoplados

Las leyes de velocidad para la transferencia de materia, energía térmica y cantidad de movimiento se expresan de una misma forma, en la que la densidad de flujo de la propiedad considerada es proporcional al gradiente de la fuerza impulsora:

$$\vec{J} = k \vec{X} \quad [3.3]$$

siendo: \vec{J} = densidad de flujo (cantidad de propiedad/m²·s).

k = constante de proporcionalidad.

\vec{X} = gradiente de potencial.

Esta ecuación es aplicable a todos los sistemas que no están en equilibrio. Aunque el flujo de una misma propiedad puede estar provocado por varios gradientes de potencial simultáneos, es decir, un mismo gradiente puede originar diversos flujos. Se denominan procesos o fenómenos acoplados a aquellos que tienen lugar en sistemas en los que se consideran presentes distintos flujos y gradientes simultáneamente. Así, por ejemplo, un gradiente de temperatura además de provocar un flujo energético, puede dar lugar a un flujo de materia (efecto Soret de termodifusión).

Onsager generalizó la expresión anterior a un sistema de R flujos y S gradientes:

$$\vec{J}_i = \sum_{j=1}^S k_{ij} \vec{X}_j \quad \text{Para } i = 1, 2, \dots, R \quad [3.4]$$

esta ecuación indica que cada flujo J_i no sólo depende de su gradiente conjugado, sino que también puede depender de los demás gradientes que actúan $X_{j \neq i}$.

Tabla 3.1. Fenómenos acoplados

POTENCIAL	DENSIDAD DE FLUJO		
	Materia	Energía	Cantidad de movimiento
Gradiente de concentración	Difusión (Ley de Fick)	Termodifusión (Efecto Dufour)	
Gradiente de temperatura	Termodifusión (Efecto Soret)	Conducción térmica (Ley de Fourier)	
Gradiente de velocidad			Transporte molecular de cantidad de movimiento (Ley de Newton)

Transporte molecular de cantidad de movimiento, energía y materia **4**

4.1. Introducción

En muchos casos es difícil poder describir completa y cuantitativamente los problemas que se pueden plantear en Ingeniería. Esto se debe a que no se conocen con exactitud las leyes de velocidad que rigen los procesos que se estudian. Si se estudia el comportamiento de los fluidos en reposo, no resulta difícil describir el problema. Sin embargo, el comportamiento de los fluidos en movimiento plantea problemas complicados para poder cuantificarlos, pues, si se estudia el trabajo requerido para bombear un fluido a través de una conducción, se observa que depende de las pérdidas de cantidad de movimiento que experimenta el fluido al rozar con las paredes, que dependen del régimen de circulación y del tipo o naturaleza del fluido.

Para el transporte en una sola dirección y en condiciones de régimen estacionario y laminar, es decir, transporte molecular, se ha visto en el capítulo anterior que las expresiones o leyes de velocidad pueden expresarse como:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Densidad} \\ \text{de flujo} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Propiedad de} \\ \text{transporte} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{Gradiente de} \\ \text{potencial} \end{array} \right)$$

4.2. Transporte de cantidad de movimiento. Ley de Newton de la viscosidad

Se considera un fluido en reposo que se encuentra entre dos láminas paralelas, de área A , que están separadas por una distancia y . Si en un instante determinado ($t = 0$) la placa inferior se pone en movimiento a una velocidad v , llega un momento en que el perfil de velocidades se estabiliza, tal como se muestra en la figura 4.1. Una vez alcanzado este régimen estacionario, debe seguir aplicándose una fuerza F para mantener el movimiento de la placa inferior. Suponiendo que el régimen de circulación es laminar, la fuerza por unidad de área que debe aplicarse es proporcional a la razón velocidad/distancia, según la ecuación:

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{v}{y} \quad [4.1]$$

a la constante de proporcionalidad η se la denomina **viscosidad** del fluido.

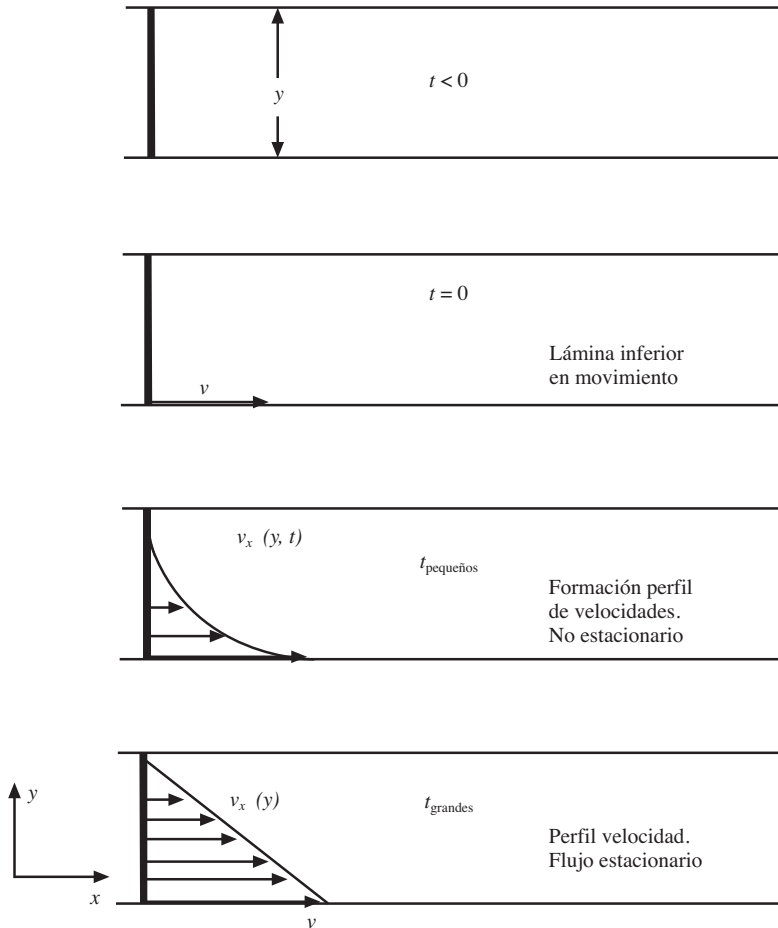


Figura 4.1. Perfil de velocidades.

Para ciertas aplicaciones es conveniente expresar la ecuación anterior de forma más explícita. El esfuerzo cortante que se ejerce en la dirección x sobre la superficie del fluido, situada a una distancia y , por el fluido existente en la región donde y es menor, se designa por τ_{yX} . Si la componente de la velocidad en la dirección x posee el valor v_x , la ecuación anterior se puede expresar como:

$$\tau_{yX} = -\eta \frac{dv_x}{dy} \quad [4.2]$$

es decir, la fuerza de cizalla por unidad de área es proporcional al gradiente de velocidad local. Esta ecuación es la expresión de la **Ley de Newton** de la viscosidad. Todos aquellos fluidos que siguen esta ley se denominan **fluidos newtonianos**.

El esfuerzo cortante o fuerza de cizalla τ_{yx} en un fluido newtoniano, para una distancia y desde la superficie límite, es una medida de la velocidad de transporte de cantidad de movimiento por unidad de área en dirección perpendicular a la superficie. La densidad de flujo de cantidad de movimiento tiene las unidades de cantidad de movimiento por unidad de área y unidad de tiempo, que corresponden a una fuerza por unidad de área. Por lo que τ_{yx} puede interpretarse como la densidad de flujo de cantidad de movimiento x en la dirección y .

Según se observa en la ecuación 4.2, la densidad de flujo de cantidad de movimiento va en dirección del gradiente negativo de velocidad. Esto es, la cantidad de movimiento se transfiere desde el fluido más rápido al más lento. Además, el esfuerzo cortante actúa en una dirección tal que se opone al movimiento del fluido.

Otro modo de expresar la ley de Newton de la viscosidad es:

$$\tau_{yx} = -\nu \frac{d(\rho \cdot v_x)}{dy} \quad [4.3]$$

en la que ν es la **viscosidad cinemática**, que es la viscosidad dividida por la densidad:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad [4.4]$$

4.3. Transmisión de energía. Ley de Fourier de la conducción de calor

Para estudiar la transmisión de calor se considera un material sólido de forma paralelepípedica de superficie A y espesor y . Inicialmente la temperatura de la placa es T_0 . En un instante determinado ($t = 0$) la lámina inferior se pone bruscamente a una temperatura T_1 , superior a T_0 , y se mantiene constante a lo largo del tiempo. La temperatura varía a lo largo de la placa hasta que se llega al estado estacionario, en el que se alcanza un perfil de temperaturas como el mostrado en la figura 4.2. Para mantener este perfil debe seguirse comunicando un flujo de calor \dot{Q} a través de la placa.

Para valores lo suficientemente pequeños de la diferencia de temperaturas $\Delta T = T_1 - T_0$, se cumple la relación:

$$\frac{\dot{Q}}{A} = k \frac{\Delta T}{y} \quad [4.5]$$

ecuación que indica que el flujo de calor por unidad de área es proporcional al incremento de temperatura con la distancia y . A esta constante de proporcionalidad k se la denomina **conductividad térmica** de la placa sólida. Esta ecuación también se cumple para líquidos y gases colocados entre láminas, siempre que no existan procesos de convección y radiación. Por tanto, esta ecuación es aplicable en los procesos de conducción de calor en sólidos, líquidos y gases.

Para ciertas aplicaciones es conveniente expresar esta ecuación en forma diferencial. Es decir, si el espesor y del sólido tiende a cero, la forma límite de la ecuación 4.5 será:

$$q_Y = -k \frac{dT}{dy} \quad [4.6]$$

en la que q_Y representa la densidad de flujo de calor en la dirección y . Esta ecuación expresa que esta densidad de flujo es proporcional al gradiente negativo de temperatura, y es la forma unidimensional de la **ley de Fourier** de la conducción de calor.

Para las otras direcciones las ecuaciones son análogas a la descrita para la dirección y . Por lo que la ley de Fourier se expresa como:

$$\vec{q} = -k \cdot \vec{\nabla} T \quad [4.7]$$

es decir, el vector densidad de flujo de calor es proporcional al gradiente de temperaturas y de sentido contrario. Se ha supuesto que el medio es isótropo, es decir, la conductividad térmica posee el mismo valor en todas las direcciones del material.

Las unidades en que normalmente se expresa la conductividad calorífica son $W/(m \cdot K)$ o $kcal/(h \cdot m \cdot ^\circ C)$, siendo sus dimensiones: $[k] = MLT^{-3}\theta^{-1}$.

Además de la conductividad térmica, en las ecuaciones anteriores puede utilizarse la **difusividad térmica** (α), definida según la ecuación:

$$\alpha = \frac{k}{\rho \hat{C}_p} \quad [4.8]$$

en la que \hat{C}_p es el calor específico del material.

Teniendo en cuenta la definición de la difusividad térmica, la expresión de la ley de Fourier para una sola dirección es:

$$q_Y = -\alpha \frac{d(\rho \cdot \hat{C}_p \cdot T)}{dy} \quad [4.9]$$

para un material isótropo en el que k , ρ y \hat{C}_p son constantes.

4.4. Transferencia de materia. Ley de Fick de la difusión

A continuación se presenta la ley de Fick de la difusión, referente al movimiento de una sustancia a través de una mezcla binaria, debida a la existencia de un gradiente de concentración.

El movimiento de una sustancia en el seno de una mezcla binaria, desde puntos de elevadas concentraciones a otros de más bajas, se puede intuir fácilmente. Recordando la disolución de un cristal de colorante en agua, descrito en el apartado 3.4.1 del capítulo 3. La difusión de un componente debida a la existencia de un gradiente de concentración recibe el nombre de **difusión ordinaria**. Además, existen

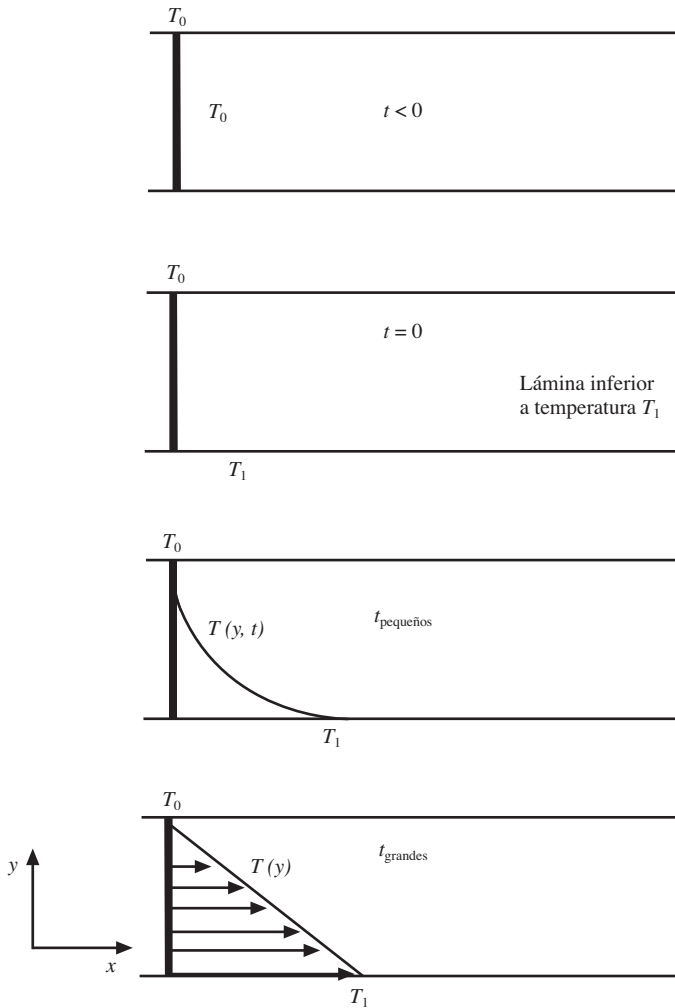


Figura 4.2. Formación del perfil de temperatura.

otros tipos de difusión, según sea la propiedad que confiere el movimiento al componente de la mezcla; así, si es debida a un gradiente de presión se trata de **difusión de presión**, si es debida a un gradiente térmico la difusión es **térmica**, cuando existe una desigualdad de fuerzas externas que provoca dicho movimiento se trata de **difusión forzada**.

El estudio de la difusión resulta más complicado que en los casos de transporte de cantidad de movimiento y energía, pues en la difusión se da el movimiento de una especie en el seno de mezclas. En una mezcla que difunde, las velocidades de los componentes individuales son distintas, debiéndose promediar dichas veloci-

des para obtener la **velocidad local** de la mezcla, que es necesaria para poder definir las velocidades de difusión. Para llegar a la expresión de la ley de Fick es conveniente definir las distintas formas de expresar las concentraciones, velocidades y densidades de flujo.

Si se supone una mezcla con n componentes, las distintas formas de definir la concentración son:

- **Concentración de masa ρ_i** : es la masa de la especie i por unidad de volumen de la mezcla.
- **Concentración molar C_i** : es el número de moles de la especie i por unidad de volumen de mezcla. $C_i = \rho_i/M_i$ en la que M_i es la masa molecular de la especie i .
- **Fracción másica w_i** : es la concentración de la masa de la especie i dividida por la densidad total de la mezcla. $w_i = \rho_i/\rho$.
- **Fracción molar X_i** : es la concentración molar de la especie i dividida por la densidad molar total (concentración global) de la mezcla: $X_i = C_i/C$.

En la mezcla considerada, cada uno de los componentes se mueve con distinta velocidad. Si un componente cualquiera i posee una velocidad v_i con respecto a ejes de coordenadas estacionarios, se definen los distintos tipos de velocidad del siguiente modo:

- **Velocidad másica media v** :

$$\vec{v} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i \cdot \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i \cdot \vec{v}_i}{\rho} = \sum_{i=1}^n w_i \cdot \vec{v}_i \quad [4.10]$$

- **Velocidad molar media v^*** :

$$\vec{v}^* = \frac{\sum_{i=1}^n C_i \cdot \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n C_i} = \frac{\sum_{i=1}^n C_i \cdot \vec{v}_i}{C} = \sum_{i=1}^n X_i \cdot \vec{v}_i \quad [4.11]$$

Cuando se trata de sistemas de flujo resulta más conveniente referir la velocidad del componente i con respecto a v o v^* en lugar de referirlo a ejes de coordenadas estacionarias. De esta forma se obtienen las denominadas **velocidades de difusión**, que representan el movimiento de la especie i con respecto al movimiento de la corriente del fluido.

- **Velocidad de difusión del componente i con respecto a \vec{v}** : Es la velocidad que posee el componente i con respecto a un sistema de ejes que se mueve con la velocidad v , viene dada por la diferencia $(v_i - v)$.
- **Velocidad de difusión del componente i con respecto a \vec{v}^*** : Es la velocidad que posee el componente i con respecto a un sistema de ejes que se mueve con la velocidad v^* , viene dada por la diferencia $(v_i - v^*)$.

La densidad de flujo puede ser másica o molar, y es una magnitud vectorial definida por la masa o moles que atraviesan la unidad de área por unidad de tiempo. El movimiento puede estar referido a ejes estacionarios o a ejes que se mueven a velocidad v ó v^* . De este modo, las distintas formas de expresar la densidad de flujo de un componente i que forma parte de una mezcla de n componentes será:

a) *Respecto a ejes fijos:*

• **Densidad de flujo másico:**

$$\vec{m} = \rho_i \cdot \vec{v} \quad [4.12]$$

• **Densidad de flujo molar:**

$$\vec{N}_i = \vec{C}_i \cdot \vec{v}_i \quad [4.13]$$

b) *Para ejes que se desplazan:*

• **Densidad de flujo másico de difusión relativa a la velocidad \vec{v} :**

$$\vec{j}_i = \rho_i \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}) \quad [4.14]$$

• **Densidad de flujo másico de difusión relativa a la velocidad \vec{v}^* :**

$$\vec{j}_i^* = \rho_i \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}^*) \quad [4.15]$$

• **Densidad de flujo molar de difusión relativa a la velocidad \vec{v} :**

$$\vec{J}_i = C_i \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}) \quad [4.16]$$

• **Densidad de flujo molar de difusión relativa a la velocidad \vec{v}^* :**

$$\vec{J}_i^* = C_i \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}^*) \quad [4.17]$$

De todas estas formas hay algunas de ellas que apenas se aplican, tales como son J_i y j_i^* . De todas ellas la más utilizada en ingeniería es la densidad de flujo molar referida a ejes estacionarios N_i .

Una vez revisadas las distintas formas en que pueden expresarse las concentraciones, velocidades y densidades de flujo, a continuación se pasa a estudiar la transferencia de materia. Para ello, se considera una mezcla binaria, de componentes A y B , de forma que la difusión de uno de ellos es debida a la existencia de un gradiente de concentración del componente considerado. Así como para la transferencia de cantidad de movimiento y de energía se definían la viscosidad y conductividad térmica como factores de proporcionalidad entre la densidad de flujo de cantidad de movimiento y el gradiente de velocidad para la viscosidad (ley de Newton de la viscosidad), y entre la densidad de flujo de calor y el gradiente de temperatura para la conductividad térmica (ley de Fourier de la conducción de calor); de modo análogo se define la **difusividad** $D_{AB} = D_{BA}$ en una mezcla binaria, como el factor de proporcionalidad entre la densidad de flujo de materia y el gradiente de concentración, según la ecuación:

$$\vec{J}_A^* = -C \cdot D_{AB} \vec{\nabla} X_A \quad [4.18]$$

que es la **primera ley de Fick de la difusión** para la densidad de flujo molar. Además del gradiente de concentración también los de temperatura, presión y fuerzas externas contribuyen a la densidad de flujo de difusión, aunque sus efectos son pequeños en comparación con el gradiente de concentración. Ello indica que la densidad de flujo molar de difusión relativa a la velocidad v^* es proporcional al gradiente de la fracción molar. El signo negativo expresa que esta difusión tiene lugar desde zonas de mayor a menor concentración.

Es fácil deducir que la suma de difusión de una mezcla binaria es cero, es decir: $\vec{J}_A^* + \vec{J}_B^* = 0$, ya que si un componente se difunde hacia un lado, el otro lo hace en sentido opuesto.

Cuando la concentración global es constante, o bien si no existe reacción química, o cuando existiendo reacción química no hay variación en el número de moles, la ecuación 4.18 se puede transformar en:

$$\vec{J}_A^* = -D_{AB} \vec{\nabla} C_A \quad [4.19]$$

Existen otras formas de expresar la primera ley de Fick, según sea la densidad de flujo y gradiente de concentración correspondiente que se tomen. Así, para la densidad de flujo másica, referida a ejes fijos, se toma como gradiente el de fracción másica, quedando expresada esta ley por la ecuación:

$$\vec{m}_A = w_A (\vec{m}_A + \vec{m}_B) - \rho D_{AB} \vec{\nabla} w_A \quad [4.20]$$

De todas las posibles expresiones de la primera ley de Fick de la difusión, una de las que tiene mayor importancia es la relativa a la densidad de flujo molar en ejes fijos o estacionarios:

$$\vec{N}_A = X_A (\vec{N}_A + \vec{N}_B) - CD_{AB} \vec{\nabla} X_A \quad [4.21]$$

Se observa que N_A es la resultante de dos magnitudes vectoriales, $X_A (N_A + N_B)$, que es la densidad de flujo molar por transporte convectivo, resultado del movimiento global del fluido, y de $(-CD_{AB} \nabla X_A)$, debido al transporte molecular, según se ha definido J_A^* .

Las unidades de la difusividad son de área por unidad de tiempo, pudiendo expresarse en cm^2/s o m^2/h o m^2/s .

Se carece de datos de difusividad para la mayor parte de las mezclas, por lo que es necesario utilizar valores estimados en muchos cálculos en que se precisan difusividades. Si es posible se utilizan datos experimentales, pues, generalmente, son los más seguros. A continuación se da el orden de magnitud de la difusividad para varios casos que se pueden presentar en la práctica:

• Difusión de gas-gas:	0,776	a	0,096 cm^2/s
• Difusión líquido-líquido:	$2 \cdot 10^{-5}$	a	$0,2 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$
• Difusión de un gas en un sólido:	$0,6 \cdot 10^{-8}$	a	$8,5 \cdot 10^{-11} \text{ cm}^2/\text{s}$
• Difusión de un sólido en otro:	$2,5 \cdot 10^{-15}$	a	$1,3 \cdot 10^{-30} \text{ cm}^2/\text{s}$

Así como la viscosidad y conductividad térmica para un fluido puro son sólo función de la temperatura y presión, la difusividad D_{AB} para una mezcla binaria es función de la temperatura, presión y composición.

4.5. Ecuación general de velocidad

Observando las dimensiones de la difusividad D_{AB} , son de superficie por unidad de tiempo:

$$D_{AB} = L^2 T^{-1}$$

Si se considera la ley de Newton de la viscosidad, las dimensiones de ésta no se corresponden a las de la difusividad:

$$[\eta] = ML^{-1} T^{-1}$$

Sin embargo, si se toma la viscosidad cinemática ν , que es la relación de la viscosidad dinámica y la densidad, se obtiene que sus dimensiones son de superficie por unidad de tiempo:

$$[\nu] = L^2 T^{-1}$$

es decir, sus dimensiones coinciden con las de la difusividad. Por lo que ν también recibe el nombre de **difusividad de cantidad de movimiento**.

De forma análoga, en la ley de Fourier de la conducción de calor, las dimensiones de la conductividad térmica son:

$$[k] = MLT^{-3} \theta^{-1}$$

Sin embargo, si se considera la relación $\alpha = k/(\rho \cdot \hat{C}_p)$ sus dimensiones coinciden con las de la difusividad:

$$[\alpha] = L^2 T^{-1}$$

en la que a α se la denomina **difusividad térmica**.

La analogía de estas tres magnitudes D_{AB} , ν y α , se deduce a partir de las ecuaciones de velocidad, para los tres fenómenos de transporte, en sistemas de una sola dirección:

- Ley de Fick:
$$j_{AB} = -D_{AB} \frac{d}{dy} (\rho_A)$$
- Ley de Newton:
$$\tau_{yx} = -\nu \frac{d}{dy} (\rho \cdot v_x)$$
- Ley de Fourier:
$$q_y = -\alpha \frac{d}{dy} (\rho \cdot \hat{C}_p \cdot \theta)$$

en las que k , ρ y \hat{C}_p permanecen constantes.

En estas ecuaciones se ha supuesto que el medio es isótropo, es decir, que su viscosidad, conductividad térmica y difusividad de materia poseen el mismo valor en cualquier dirección. Esto es aceptable para los fluidos y la mayoría de sólidos homogéneos.

Considerando una sola dirección, las ecuaciones anteriores se pueden agrupar en una misma expresión:

$$\Phi_y = -\delta \frac{d\xi}{dy} \quad [4.22]$$

en la que Φ_y representa la densidad de flujo de cualquiera de las tres propiedades en la dirección y ; ξ es la concentración por unidad de volumen de la propiedad considerada, y δ es el factor de proporcionalidad, que recibe el nombre de **difusividad**. Para las otras direcciones resultarían ecuaciones análogas, de modo que las ecuaciones experimentales de Fick, Newton y Fourier pueden englobarse en tres ecuaciones generales, una para cada dirección. Estas ecuaciones constituyen las expresiones del transporte molecular de las tres propiedades en estudio.

Las analogías expresadas por las ecuaciones anteriores, entre la cantidad de movimiento, energía y materia, no pueden aplicarse a los problemas bi- y tridimensionales, ya que los esfuerzos cortantes τ se agrupan en una magnitud tensorial, mientras que j_A y q son magnitudes vectoriales de tres componentes.

Si se utiliza la notación vectorial, para generalizar estas ecuaciones, para la dirección x se obtiene:

$$\tau_x = -\eta \cdot \nabla (v_y) \quad [4.23a]$$

$$q = -k \cdot \nabla T_x \quad [4.24]$$

$$j_{AB} = -D_{AB} \frac{d}{dy} (\rho_A) \quad [4.25]$$

En las otras direcciones sólo cambia la ecuación relativa a la ley de Newton; así, las ecuaciones que se utilizarán para las direcciones y y z , serán:

$$\tau_y = -\eta \cdot \nabla (v_y) \quad [4.23b]$$

$$\tau_z = -\eta \cdot \nabla (v_z) \quad [4.23c]$$

Por tanto, generalizando se tiene:

$$\vec{\Phi} = -\delta \cdot \vec{\nabla} \xi \quad [4.26]$$

que expresa que el vector densidad de flujo es proporcional al gradiente de fuerza impulsora o potencial (para las leyes experimentales) y concentración de las propiedades (en el caso de leyes más rigurosas), y de dirección opuesta.

Balances macroscópicos de materia y energía 5

5.1. Introducción

En el estudio de las diferentes operaciones unitarias es necesario plantear el modelo matemático de cada una de ellas. Las herramientas utilizadas en la obtención de este modelo matemático son las ecuaciones de conservación, que usualmente se denominan balances. Generalmente, las ecuaciones obtenidas a partir de estos balances no suelen tener una gran complejidad matemática y son fáciles de resolver; únicamente en los procesos no estacionarios y en los que se desarrolla alguna reacción química pueden presentarse ciertas complicaciones.

Para la definición del estado de cualquier sistema son necesarias ciertas variables macroscópicas que no dependen del tamaño del sistema considerado. Estas son las denominadas *variables intensivas*, como son la presión, la temperatura, la concentración de un componente y la velocidad de un fluido en movimiento. Las *variables extensivas* dependen del tamaño del sistema considerado, como pueden ser la masa y el volumen. La relación entre dos variables extensivas es una variable intensiva; así, por ejemplo, la densidad es una variable intensiva, que es la relación entre dos variables extensivas, la masa y el volumen.

En cualquier operación unitaria, el sistema evoluciona de un estado a otro, y las variables intensivas están relacionadas con tres propiedades que se conservan a escala molecular, que son la masa de cada componente, la energía y la cantidad de movimiento de las moléculas del sistema. Estas tres propiedades son extensivas, ya que dependen del tamaño del sistema considerado.

Cuando el balance se realiza sobre un sistema con un volumen finito, se trata de un balance *macroscópico*, pero si el sistema sobre el que se realiza el balance es un diferencial de volumen, al balance se le denomina *microscópico*. En este capítulo se presentarán los balances macroscópicos de materia y energía aplicados a un sistema con un volumen finito.

Si se considera un sistema como el mostrado en la figura 5.1, en el que pueden haber corrientes de entrada y salida de las dos propiedades extensivas de materia y energía, el típico balance de la propiedad considerada se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \text{Caudal de} \\ \text{entrada} \\ \text{de propiedad} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Caudal de} \\ \text{generación} \\ \text{de propiedad} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Caudal de} \\ \text{salida} \\ \text{de propiedad} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Caudal de} \\ \text{acumulación} \\ \text{de propiedad} \end{pmatrix}$$

En muchos casos esta ecuación general suele expresarse del siguiente modo:

$$(\text{Acumulación}) = (\text{Entrada-Salida}) + (\text{Generación})$$

en la que el término de *Acumulación* representa la variación de la propiedad en el sistema en la unidad de tiempo, el término (*Entrada-Salida*) representa el caudal neto de entrada al sistema, y la *Generación* es la cantidad de propiedad generada en el sistema en la unidad de tiempo. Como se puede observar, cada uno de los términos tiene unidades de propiedad por unidad de tiempo. Conviene resaltar que en el flujo neto de entrada, se considerarán como positivas las corrientes de entrada y negativas las de salida. Asimismo, cabe destacar que el término de generación puede ser positivo o negativo, dependiendo de si la propiedad se genera o desaparece, respectivamente.

5.2. Balance macroscópico de materia

El balance de materia es una generalización del principio de conservación de la materia a sistemas abiertos. Básicamente, la ley de conservación de la materia establece que la materia ni se crea ni se destruye, sólo se transforma. Esta ley tiene validez en las diferentes operaciones unitarias y procesos de la Ingeniería de Alimentos, ya que únicamente se considera que no se cumple en las reacciones nucleares, en la que parte de la materia se convierte en energía según la ecuación de Einstein: $E = mc^2$.

La realización de un balance de materia permite conocer los caudales y composiciones de las diferentes corrientes que entran y salen de un sistema, así como la cantidad total y composición media en el interior del sistema en un instante determinado. Los balances de materia se pueden realizar en unidades másicas o molares, dependiendo del tipo de problema que se plantee.

Si el sistema está formado por una mezcla de n componentes ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), y se consideran p corrientes ($j = 1, 2, 3, \dots, p$), al realizar un balance másico para un componente i de la mezcla, se obtiene:

$$\frac{d(M_i)}{dt} = \sum_{j=1}^p w_{ij} + R_i \quad [5.1]$$

en la que M_i es la masa del componente i en el sistema considerado, R_i la generación del componente i en la unidad de tiempo, w_{ij} el caudal de componente i en la corriente j . Las corrientes que entran al sistema se consideran positivas y las que salen negativas.

Si existen n componentes se podrán plantear n ecuaciones similares a ésta, una para cada uno de los componentes, resultando, por tanto, n ecuaciones matemáticamente independientes. Las dimensiones de cada uno de los términos de la ecuación 5.1 son de masa por unidad de tiempo (kg/s o kmol/s en el Sistema Internacional de unidades).

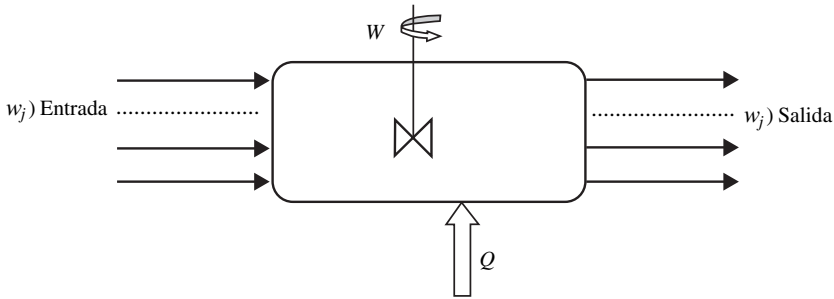


Figura 5.1. Sistema sobre el que se realizan los balances macroscópicos.

Para la determinación del término de generación se suele utilizar la *velocidad intensiva de reacción* (r_i), definida como la variación de la materia por unidad de volumen en la unidad de tiempo debida a la reacción:

$$r_i = \frac{d R_i}{d V} \quad [5.2]$$

En muchos casos esta velocidad de reacción es constante en todo el volumen del sistema, como en el caso de tanques de mezcla perfecta, con lo que:

$$r_i = \frac{R_i}{V} \quad [5.3]$$

Al sustituir esta última ecuación en la del balance para el componente i , se obtiene:

$$\frac{d (M_i)}{d t} = \sum_{j=1}^p w_{ij} + r_i V \quad [5.4]$$

Las ecuaciones 5.1 y 5.4 representan los balances de materia para un componente i , tanto en unidades másicas como molares. En la práctica, al objeto de facilitar su aplicación, esta ecuación se puede expresar de modo distinto según sean las unidades utilizadas. De este modo, en unidades másicas se puede utilizar la ecuación:

$$\frac{d (V \rho_i)}{d t} = \sum_{j=1}^p q_j \rho_{ij} + r_{iM} V \quad [5.5]$$

donde V es el volumen total en el interior del sistema, ρ_i y ρ_{ij} son las densidades del componente i en el interior del sistema y en la corriente j , respectivamente, q_j el caudal volumétrico de la corriente j , r_{iM} la velocidad de generación de masa del componente i por unidad de volumen y tiempo.

En el caso que se utilicen unidades molares, resulta conveniente expresar la ecuación 5.5 en la siguiente forma:

$$\frac{d(V C_i)}{dt} = \sum_{j=1}^p q_j C_{ij} + r_i V \quad [5.6]$$

en la que C_i es la concentración molar del componente i en el sistema considerado, C_{ij} la concentración molar del componente i en la corriente j , q_j el caudal volumétrico de la corriente j , r_i es la velocidad intensiva de generación molar del componente i por unidad de volumen y unidad de tiempo.

Se pueden realizar las siguientes definiciones en unidades másicas:

$$M = \sum_{i=1}^n M_i \quad w_j = \sum_{i=1}^n w_{ij} \quad \sum_{i=1}^n r_i V = 0$$

Si se consideran todos los componentes del sistema, y se realiza un sumatorio para todos ellos, la ecuación 5.4 se convierte en:

$$\frac{d(M)}{dt} = \sum_{j=1}^p w_j \quad [5.7]$$

que representa el balance macroscópico de materia total.

Como se puede observar, no aparece el término de reacción, ya que la materia total generada en el sistema es nula. Si el sumatorio se hubiera realizado en la ecuación 5.6, expresada en unidades molares, esta simplificación no podría darse, ya que el número total de moles puede variar. Únicamente en el caso que no hubiera variación en el número total de moles el término de reacción sería nulo.

De todo lo expuesto se observa que se pueden plantear $n + 1$ ecuaciones, n para los componentes más la del balance total. De éstas solamente n serán matemáticamente independientes.

En la práctica existen casos particulares en que no aparecen todos los términos de las ecuaciones expuestas anteriormente. Así, en el caso que el proceso se desarrolle en estado estacionario, el término de acumulación desaparece, ya que las variables son independientes del tiempo. Estas variables independientes del tiempo pueden variar con la posición, pero en cualquier caso el término de acumulación es nulo. Para este caso, el balance de componente i quedará de la forma:

$$\sum_{j=1}^p w_{ij} + r_i V = 0 \quad [5.8]$$

Además, si no existe reacción química, se obtiene que el sumatorio de los caudales másicos de las corrientes de entrada y salida son nulos:

$$\sum_{j=1}^p w_{ij} = 0 \quad [5.9]$$

El caudal másico de una corriente j es:

$$w_j = \rho_j q_j = \rho_j v_j S_j$$

en la que q_j es el caudal volumétrico, ρ_j la densidad de la corriente j , v_j la velocidad media de circulación, y S_j la sección transversal de entrada o salida de la corriente j .

También puede darse el caso de un sistema en el que no existan entradas ni salidas de materia, con lo que se obtiene:

$$\frac{d(M_i)}{dt} = r_i V \quad [5.10]$$

que indica que la acumulación del componente i en el sistema es debida únicamente a la generación por reacción de dicho componente.

5.3. Balance macroscópico de energía

Al realizar los balances macroscópicos de materia se obtiene información sobre los caudales y composiciones de las diferentes corrientes que entran y salen del sistema, y en muchas ocasiones no son suficientes para conocer todas las variables asociadas a las diferentes corrientes. Así, por ejemplo, en muchos sistemas alimentarios es necesario conocer la temperatura de cada corriente, la cantidad de energía necesaria para accionar una bomba o un compresor y las necesidades de vapor de calefacción de un evaporador. Es por ello, que es necesario realizar los balances energéticos. A pesar de que se consideran los balances de materia y energía por separado, rigurosamente ni la energía ni la materia se conservan de modo independiente, aunque sí una combinación de ambas. En la práctica se puede considerar, sin cometer un grave error, que en los procesos que trata la Ingeniería de Alimentos se conserva la energía, ya que como se ha dicho anteriormente, sólo en las reacciones nucleares esto no es cierto.

Las formas de energía son muy variadas, y de modo general se la puede definir como la capacidad para producir trabajo. Las diferentes formas de energía se pueden convertir unas en otras, y previo al planteamiento del balance energético es conveniente recordar aquellos tipos de energía que se deben tener en cuenta en este balance. Estos tipos son: energía interna, energía potencial, energía cinética, calor y trabajo. Las tres primeras son función de estado, y será necesario definir un estado de referencia, mientras que el calor y el trabajo dependen de la evolución del proceso considerado.

Energía interna (U). La materia está formada por un conjunto de partículas (átomos, moléculas, iones, etc.) que están en continuo movimiento. La energía interna es la suma de las energías de rotación, traslación y vibración de estas partículas, y depende de la temperatura.

Para un sistema que contiene una masa M , la energía interna es función de la temperatura (T), de la cantidad de materia (M) y del volumen específico (\hat{V}). Este

último suele tener poca influencia, por lo que si se desprecia, la energía interna se puede expresar como:

$$U = \int_M C_v T dM$$

en la que C_v es el calor específico a volumen constante.

Energía potencial (ϕ). Este es el tipo de energía que posee el sistema en función de su posición bajo un campo de fuerzas. Este campo puede ser gravitatorio, eléctrico y magnético. Estos dos últimos campos no suelen tener importancia en los procesos habituales de la Ingeniería de Alimentos, por lo que sólo se considerará el campo potencial gravitatorio, que para un sistema de masa M se expresa como:

$$\phi = \int_M g z dM$$

en la que g es la aceleración de gravedad y z la posición en el campo potencial, o la altura con respecto a un nivel de referencia.

Energía cinética (K). Es la energía que posee el sistema debido a la velocidad (v) que posee con respecto a un sistema de coordenadas, y se expresa como:

$$K = \int_M \frac{v^2}{2} dM$$

Calor (Q). El calor o energía térmica es una forma de energía que depende de la diferencia de temperaturas existente entre el sistema y sus alrededores, y del área a través de la cual se transmite. Se considera positivo el calor que se comunica al sistema, mientras que el calor que el sistema cede a los alrededores es negativo. El calor es una energía que no se intercambia a través de las corrientes de entrada y de salida debidas al flujo de materia. Una ecuación sencilla que permite el cálculo del caudal de calor es:

$$\dot{Q} = U A (T_e - T)$$

en la que U es el coeficiente global de transmisión de calor (no confundir con la energía interna, en la que se utiliza la misma letra), A es el área de intercambio, T_e y T son la temperatura exterior del sistema y la propia del sistema, respectivamente.

Trabajo (W). En muchos procesos industriales aparece el trabajo mecánico debido a la expansión, o bien el consumo de trabajo por compresión de un fluido. El cálculo del trabajo de un fluido en expansión se obtiene a partir de la expresión:

$$W = \int_x F dx = \int_x -p S dx = - \int_V p dV$$

en la que F es la fuerza, p es la presión, S la sección en la que se aplica la fuerza y V el volumen.

El signo negativo es debido a que, al igual que el calor, el trabajo que realiza el sistema se considera negativo, mientras que el que se comunica al sistema es positivo.

Una vez definidas las diferentes formas de energía, se puede plantear el balance macroscópico de energía. En la expresión general no aparece el término de generación, ya que en los procesos habituales de la Ingeniería de Alimentos la energía ni se crea ni se destruye, únicamente se transforma entre los distintos tipos existentes. Por tanto, en el planteamiento del balance macroscópico de energía se cumple que:

$$(\text{Acumulación}) = (\text{Entrada} - \text{Salida})$$

en la que el segundo término expresa la entrada neta de energía que experimenta el sistema.

De los diferentes tipos de energía que se han expuesto, el sistema sólo puede acumular energía interna, potencial y cinética, que son funciones de estado. Sin embargo, el trabajo y el calor no son funciones de estado, ya que su valor depende del camino seguido para pasar del estado inicial al final, por lo que no se acumulan. Tanto el trabajo como el calor se consideran energías en tránsito, por lo que el aporte de estas dos formas de energía al sistema aumentarán algunas de las energías función de estado (interna, potencial o cinética).

En cuanto a la entrada neta de energía, deben considerarse dos tipos: la que acompaña a las corrientes de entrada y salida de materia y la que entra de los alrededores del sistema.

Por tanto, el balance macroscópico de energía, aplicado a un sistema como el mostrado en la figura 5.1, se expresará como:

$$\frac{d(U + \phi + K)}{dt} = \dot{Q} + \dot{W} + \sum_j w_j (\hat{U}_j + \hat{\phi}_j + \hat{K}_j) + \sum_j p_j S_j v_j \quad [5.11]$$

en la que w_j es el caudal másico de la corriente j , \hat{U}_j , $\hat{\phi}_j$ y \hat{K}_j son las energías interna, potencial y cinética por unidad de masa de la corriente j , p_j es la presión que la corriente j ejerce sobre la sección S_j y v_j es la velocidad media de esta corriente.

El último sumando del segundo miembro de la ecuación 5.11 representa la entrada neta de energía debido al caudal de trabajo que ejercen las diferentes corrientes de materia. Este término no se debe confundir con el caudal de trabajo debido a bombas, compresores, turbinas, etc., que entra o sale del sistema sin estar asociado a las corrientes j de materia.

El caudal volumétrico de la corriente j (q_j) se puede expresar como:

$$q_j = S_j v_j \quad [5.12a]$$

$$q_j = \frac{w_j}{\rho_j} = w_j \hat{V}_j \quad (5.12b)$$

en la que \hat{V}_j es el volumen específico de la corriente j .

Si se tiene presente que la entalpía por unidad de masa se define como:

$$\hat{H}_j = \hat{U}_j + p_j \hat{V}_j$$

la ecuación anterior [ec. 5.11] se podrá expresar como:

$$\frac{d(U + \phi + K)}{dt} = \dot{Q} + \dot{W} + \sum_j w_j (\hat{H}_j + \hat{\phi}_j + \hat{K}_j) \quad [5.13]$$

ecuación correspondiente al balance macroscópico de energía, que indica que la velocidad de acumulación de energía de un sistema es igual a la suma de los caudales de calor y trabajo que se comunican o cede el sistema más el caudal de entrada neta de entalpía, energía potencial y energía cinética, asociadas a las corrientes de materia que entran y salen del sistema. Cualquiera de los términos expresados en la ecuación 5.13 representa un caudal de energía (potencia), siendo sus unidades en el Sistema Internacional de J/s, o lo que es lo mismo watios (W).

La ecuación 5.13 utiliza valores absolutos de las energías interna, potencial y cinética y de la entalpía. Todas ellas son funciones de estado y es necesario definir un estado de referencia, por lo que resulta conveniente obtener un balance macroscópico de energía en la que se utilice magnitudes relativas.

Si se definen \hat{H}^* , $\hat{\phi}^*$ y \hat{K}^* como los valores de referencia para la entalpía, energía potencial y energía cinética por unidad de masa, y se multiplica su suma por cada uno de los términos del balance global de materias en unidades másicas [ec. 5.7], se obtiene:

$$\frac{d[M(\hat{H}^* + \hat{\phi}^* + \hat{K}^*)]}{dt} = \sum_j w_j (\hat{H}^* + \hat{\phi}^* + \hat{K}^*)$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{d(H^* + \phi^* + K^*)}{dt} = \sum_j w_j (\hat{H}^* + \hat{\phi}^* + \hat{K}^*)$$

Si de la ecuación 5.13 se resta esta última expresión, se obtiene:

$$\frac{d(U - H^* + \phi - \phi^* + K - K^*)}{dt} = \dot{Q} + \dot{W} + \sum_j w_j (\hat{H} - \hat{H}^* + \hat{\phi} - \hat{\phi}^* + \hat{K} - \hat{K}^*)_j$$

Pero teniendo en cuenta que:

$$U = H - pV$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dH}{dt} - \frac{d(pV)}{dt}$$

se obtiene:

$$\frac{d(H - H^* + \phi - \phi^* + K - K^*)}{dt} = \dot{Q} + \dot{W} + \frac{d(pV)}{dt} + \sum_j w_j (\hat{H} - \hat{H}^* + \hat{\phi} - \hat{\phi}^* + \hat{K} - \hat{K}^*)_j \quad [5.14]$$

En esta última ecuación se utilizan magnitudes relativas, pero debe tenerse en cuenta que en su aplicación deben utilizarse magnitudes másicas, aunque en ausencia de reacciones también se puede utilizar en unidades molares.

En el caso de régimen estacionario, todas las variables son independientes del tiempo y, por tanto, su variación con el tiempo es nula. Si se utiliza la ecuación 5.13 se obtiene:

$$\sum_j w_j (\hat{H}_j + \hat{\phi}_j + \hat{K}_j) + \dot{Q} + \dot{W} = 0 \quad [5.15]$$

Con magnitudes relativas y caudales másicos [ec. 5.14], la ecuación que se obtiene es:

$$\sum_j w_j (\hat{H} - \hat{H}^* + \hat{\phi} - \hat{\phi}^* + \hat{K} - \hat{K}^*)_j + \dot{Q} + \dot{W} = 0 \quad [5.16]$$

En el caso que no exista ni entrada ni salida de trabajo, para magnitudes absolutas se cumple:

$$\sum_j w_j (\hat{H}_j + \hat{\phi}_j + \hat{K}_j) + \dot{Q} = 0 \quad [5.17]$$

y para magnitudes relativas:

$$\sum_j w_j (\hat{H} - \hat{H}^* + \hat{\phi} - \hat{\phi}^* + \hat{K} - \hat{K}^*)_j + \dot{Q} = 0 \quad [5.18]$$

En los procesos alimentarios, los términos correspondientes a las energías cinética y potencial suelen ser pequeños frente al término entálpico, y se pueden despreciar. A modo de ejemplo puede citarse que aumentar 1 °C la temperatura de una masa determinada de agua es equivalente a elevar 430 m esa misma masa de agua o darle una velocidad de 330 km/h. En el caso que haya un cambio de fase, las diferencias entre el término entálpico y las energías potencial y cinética son todavía más pronunciadas; así, la evaporación de una determinada masa de agua equivale a elevar dicha masa a una altura de 230 km o imprimirle una velocidad de 8.820 km/h (Costa *et al.*, 1984). Por ello, en el caso que se desprecien los términos potencial y cinético, y además si el proceso es adiabático, para magnitudes absolutas se obtiene:

$$\sum_j w_j \hat{H}_j = 0 \quad [5.19]$$

y para magnitudes relativas:

$$\sum_j w_j (\hat{H} - \hat{H}^*)_j = 0 \quad [5.20]$$

que se corresponden a simples balances entálpicos. De esta forma, en estado estacionario, para procesos adiabáticos y en los que el sistema no cede o se le comunica trabajo, se puede enunciar que la suma de entalpías de las corrientes de materia de entrada será igual a la suma de las entalpías de las corrientes de materia que salen del sistema.

Como se ha mencionado, en muchos procesos de la industria alimentaria los términos cinético y potencial se pueden despreciar y si además no existe trabajo de máquina, en estado estacionario se cumple:

$$\sum_j w_j \hat{H}_j + \dot{Q} = 0$$

Como la entalpía es función de estado, no es posible calcular su valor absoluto, ya que es necesario establecer un estado de referencia. Dicho estado se considera que es el correspondiente a los elementos libres de todas las sustancias a una presión y una temperatura de referencia. Generalmente, este estado de referencia se define a 1 atmósfera y 278 K. Las entalpías de reacción están incluidas en \hat{H}_j , ya que ésta incluye las entalpías de formación de todos los componentes que acompañan a la corriente j .

La entalpía depende de su composición química, del estado de agregación, de la temperatura y de la presión, aunque en la práctica se puede considerar que es independiente de la presión y más en los procesos de la industria alimentaria. Para un compuesto puro, si se supone despreciable la variación de la entalpía con la presión, se podrá determinar mediante la expresión:

$$\hat{H} = \hat{H}_f^* + \int_{T^*}^T \hat{C}_p dT = \hat{H}_f^* + \hat{C}_p (T - T^*) \quad [5.21]$$

en la que T^* es la temperatura de referencia, \hat{C}_p es el calor específico a presión constante y \hat{H}_f^* es la entalpía de formación a la temperatura de referencia.

Si hubiera un cambio de estado, esta expresión cambiará. Así, para el caso de un cambio desde un estado a a otro b , se obtendría:

$$\hat{H} = \hat{H}_f^* + \hat{C}_p)_a (T_e - T^*) + \lambda_{a \rightarrow b} + \hat{C}_p)_b (T - T_e) \quad [5.22]$$

siendo $\lambda_{a \rightarrow b}$ el calor latente de cambio del estado a al estado b y T_e la temperatura a la cual se produce el cambio, indicando los subíndices a y b los estados correspondientes.

Si en cada una de las corrientes j existen n componentes, y se desprecia la entalpía de mezcla, la entalpía de cada una de las corrientes se puede expresar en función de la entalpía de cada uno de los componentes (\hat{H}_i) según la expresión:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^n \frac{\hat{V}}{\hat{V}_i} \hat{H}_i \quad [5.23]$$

en la que \hat{V} y \hat{V}_i son los volúmenes específicos total de la mezcla y de cada componente, respectivamente. Si esta última ecuación se expresa en función del estado de referencia se obtiene:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^n \frac{\hat{V}}{\hat{V}_i} \hat{H}_{fi}^* + \sum_{i=1}^n \frac{\hat{V}}{\hat{V}_i} \hat{C}_{pi} (T - T^*) \quad [5.24]$$

En esta ecuación se ha supuesto que no existen cambios de estado, pero de haberlos se debería utilizar una expresión como la dada en la ecuación 5.22. La ecuación 5.24 se puede utilizar tanto con magnitudes másicas como molares, pero teniendo en cuenta que la relación entre los volúmenes específicos es una fracción másica, y si esta ecuación se aplica en unidades molares la fracción a utilizar será una fracción molar.

Por tanto, para un proceso que se lleva a cabo en estado estacionario y en el que no exista trabajo de máquina, al introducir la ecuación 5.24 en la del balance de energía se obtiene:

$$\sum_{j=1}^p w_j \left[\sum_{i=1}^n \frac{\hat{V}}{\hat{V}_i} \hat{C}_{pi} (T - T^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\hat{V}}{\hat{V}_i} \hat{H}_{fi}^* \right] + \dot{Q} = 0$$

o bien:

$$\dot{Q} = - \sum_{j=1}^p w_j \left[\sum_{i=1}^n \frac{\hat{V}}{\hat{V}_i} \hat{C}_{pi} (T - T^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\hat{V}}{\hat{V}_i} \hat{H}_{fi}^* \right] \quad [5.25]$$

en la que el signo negativo del segundo miembro indica que es entrada neta. Si se considerara salida menos entrada, el signo sería positivo.

Se pueden definir los flujos entálpicos de todas las corrientes de entrada (H_E) y de salida (H_S) con respecto a la temperatura de referencia T^* como:

$$H_E = \sum_{j=1}^p w_{jE} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{V}_E}{\hat{V}_{iS}} \hat{C}_{piE} (T - T^*)$$

$$H_S = \sum_{j=1}^p w_{jS} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{V}_S}{\hat{V}_{iS}} \hat{C}_{piS} (T - T^*)$$

los subíndices E y S denotan entrada y salida, respectivamente.

Además, si se define ΔH_R^* como la entalpía estándar correspondiente a las reacciones químicas como:

$$\Delta H_R^* = \sum_{j=1}^p w_{jS} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{V}_S}{\hat{V}_{iS}} \hat{H}_{fi}^* - \sum_{j=1}^p w_{jE} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{V}_E}{\hat{V}_{iS}} \hat{H}_{fi}^*$$

A partir de la ecuación 5.25 se obtiene:

$$(H_S - H_E) + \Delta H_R^* = \dot{Q} \quad [5.26]$$

La entalpía de una reacción química, a una determinada temperatura y presión, se obtiene como la diferencia entre la suma de las entalpías de formación de los productos y la suma de las entalpías de formación de los reactantes; aunque también puede obtenerse a partir de la diferencia entre los calores de combustión de los reaccionantes y la de los productos de la reacción considerada.

En el caso que las entalpías de las corrientes de entrada y salida sean iguales, el caudal de calor será igual al término de entalpía de reacción:

$$\dot{Q} = \Delta H_R^*$$

Si el término de entalpías de reacción es negativo (reacción exotérmica) el caudal de calor es negativo ($\dot{Q} < 0$), lo que indica que es el calor que se debe eliminar del sistema. En el caso de reacción endotérmica, el caudal de calor resultará positivo ($\dot{Q} > 0$), lo que supone un aporte de energía al sistema.

PROBLEMAS

Problema 5.1

Un tanque de 1 m^3 perfectamente agitado con rebosadero contiene 800 kg de un zumo clarificado de manzana de 50°Brix . En un instante determinado se alimentan al tanque de forma continua 50 litros de agua/min. Determinar el tiempo que tarda en rebosar el tanque, y en ese instante, ¿cuál es la concentración de la corriente que sale por el rebosadero? Calcular el tiempo adicional necesario para que la corriente de salida posea un contenido en sólidos solubles de 12°Brix .

Todo el proceso se lleva a cabo a 20°C , y a esta temperatura la variación de la densidad con la concentración se puede expresar mediante la ecuación:

$$\rho = 999 + 3,8 C + 0,018 C^2 \text{ kg/m}^3$$

en la que C se expresa en $^\circ\text{Brix}$.

En la figura P5.1a se muestra el tanque agitado, en el que inicialmente existen M_0 kg y ocupan un volumen V_0 . Se supone que el agua posee una densidad de 1.000 kg/m^3 . La densidad del zumo de 50°Brix es de 1.234 kg/m^3 .

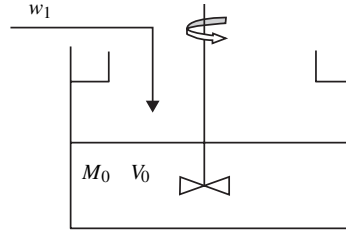


Figura P5.1a.

El volumen inicial que el zumo ocupa en el tanque es:

$$V = \frac{M_0}{\rho_0} = \frac{800 \text{ kg}}{1.234 \text{ kg/m}^3} = 0,648 \text{ m}^3$$

Balance másico global:

$$\frac{dM}{dt} = w_1$$

ecuación que se puede integrar con la condición inicial de que a tiempo $t = 0$, la masa es la inicial $M = M_0$, obteniéndose:

$$M = M_0 + w_1 t$$

Balance de componente (sólidos solubles):

$$\frac{d(MC)}{dt} = w_1 \cdot 0, \text{ ya que la corriente } w_1 \text{ no contiene sólidos solubles.}$$

$$C \frac{dM}{dt} + M \frac{dC}{dt} = 0$$

teniendo en cuenta que $M = M_0 + w_1 t$, se obtiene:

$$C w_1 + (M_0 + w_1 t) \frac{dC}{dt} = 0$$

que reordenada da una ecuación en variables separables:

$$\frac{dC}{C} = - \frac{dt}{\left(\frac{M_0}{w_1} + t\right)}$$

ecuación que se integra con la condición inicial para $t = 0$, $C = C_0$, obteniendo:

$$t = \frac{M_0}{w_1} \left(\frac{C_0}{C} - 1 \right) \quad \text{o bien} \quad C = \frac{M_0 C_0}{M_0 + w_1 t} = \frac{M_0 C_0}{M}$$

Inicialmente existen en el tanque 800 kg de zumo que ocupan 0,648 m³. Cuando rebosa el tanque está lleno y su volumen es de 1 m³, por lo que el agua añadida es:

$$(1 - 0,648) = 0,352 \text{ m}^3, \text{ que son } 352 \text{ kg de agua}$$

por lo que la masa total cuando el tanque está lleno es: $M = 800 + 352 = 1.152 \text{ kg}$.

La concentración en el momento que empieza a rebosar es:

$$C = \frac{M_0 C_0}{M} = \frac{(800 \text{ kg})(0,5)}{(1.152 \text{ kg})} = 0,3472 \text{ (34,72 } ^\circ\text{Brix)}$$

El tiempo necesario es:

$$t = \frac{M_0}{w_1} \left(\frac{C_0}{C} - 1 \right) = \frac{(800 \text{ kg})}{(50 \text{ kg/min})} \left(\frac{50}{34,72} - 1 \right) \cong 7,04 \text{ min}$$

Una vez que empieza a rebosar la solución, la concentración de la corriente que abandona el tanque (w_2) es la misma que la que existe en el interior del mismo (mezcla perfecta) (figura P5.1b).

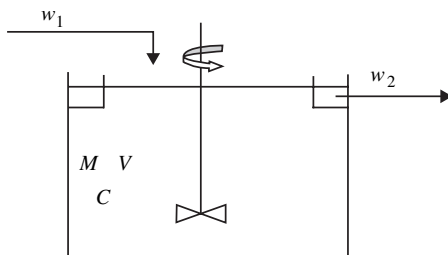


Figura P5.1b.

Balances de sólidos solubles:

Es importante resaltar que a pesar de que el volumen del tanque es de 1 m³, su masa total puede variar debido a que la densidad va variando con el tiempo. Pero en cualquier instante la densidad del zumo que está contenido en el tanque coincide con la densidad de la corriente de salida.

Balance másico global:

Se plantea en función de la densidad:

$$\frac{d(V\rho)}{dt} = q_1 \rho_1 - q_2 \rho_2$$

Como el volumen del tanque agitado es constante ($V = 1\text{ m}^3$), la densidad de la corriente que abandona el tanque coincide con la del interior del mismo ($\rho = \rho_2$) y además los caudales volumétricos de entrada y salida del tanque son iguales ($q_1 = q_2 = q$) la expresión anterior se convierte en:

$$V \frac{d(\rho)}{dt} = q \rho_1 - q \rho$$

ésta es una ecuación en variables separables que se puede integrar con la condición límite inicial: para $t = 0$ la densidad es la que existía en el momento que empieza a rebosar el tanque ($\rho = \rho_0 = 1.152,5 \text{ kg/m}^3$), obteniéndose:

$$t = \frac{V}{q} \ln \left(\frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 - \rho} \right)$$

Si se desea saber el tiempo que se tarda para que la corriente que rebosa alcance los 12°Brix , se debe sustituir en la ecuación anterior los datos adecuados en función de la densidad:

Para $C = 12^\circ\text{Brix}$ la densidad del zumo es $\rho = 1.047 \text{ kg/m}^3$

Sustituyendo datos:

$$t = \frac{(1 \text{ m}^3)}{(50 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{min})} \ln \left(\frac{1.000 - 1.152,5}{1.000 - 1.047} \right) = 23,54 \text{ min}$$

Por tanto, desde que el tanque empieza a rebosar, deben pasar 23,54 minutos para que la corriente de salida sea de 12°Brix .

Problema 5.2

Los zumos para consumo suelen comercializarse con un contenido en sólidos solubles de 12°Brix y, generalmente, se obtienen a partir de zumos concentrados mediante dilución con agua. A partir de un zumo de 70°Brix se alimenta una corriente de 50 kg/min a un tanque perfectamente agitado de 2 m^3 de capacidad, donde se diluye con una corriente de agua. Calcular el caudal de agua que debe introducirse en el tanque si se desean obtener 100 litros/min de un zumo de 12°Brix . El proceso se lleva a cabo de forma isotérmica a 20°C , para cuya temperatura la densidad del zumo varía con el contenido en sólidos solubles según la expresión:

$$\rho = 999 + 3,8 C + 0,018 C^2 \text{ kg/m}^3$$

en la que C se expresa en $^\circ\text{Brix}$.

Al ser una operación en estado estacionario no existe término de acumulación y, como no existe generación, los términos de entrada y salida son iguales. En la figura P5.2 se da un esquema del tanque con las diferentes corrientes.

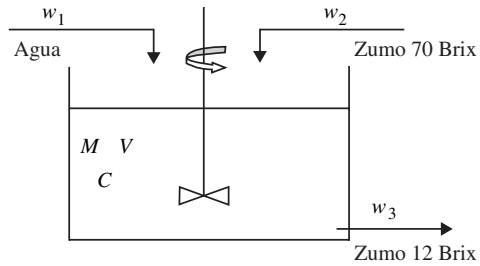


Figura P5.2.

Balace global: $w_1 + w_2 = w_3$

Balace de componente: $q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2 = q_3 \rho_3$

Como las densidades son función del contenido en sólidos solubles ($^{\circ}$ Brix) se obtiene:

Para	$C = 12 \text{ } ^{\circ}\text{Brix}$	$\rho_3 = 1.047 \text{ kg/m}^3$
	$C = 70 \text{ } ^{\circ}\text{Brix}$	$\rho_1 = 1.353,2 \text{ kg/m}^3$
	Agua	$\rho_2 = 1.000 \text{ kg/m}^3$

Y como para la corriente de zumo de $70 \text{ } ^{\circ}\text{Brix}$ se cumple:

$$q_2 = \frac{w_2}{\rho_2} = \frac{(50 \text{ kg/min})}{(1.353,2 \text{ kg/m}^3)} = 36,95 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$$

Al sustituir todos los datos en el balance de componente se obtiene:

$$q_1 (1.000 \text{ kg/m}^3) + (36,95 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{min}) (1.353,2 \text{ kg/m}^3) = (100 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{min}) (1.047 \text{ kg/m}^3)$$

de la que se obtiene:

$$q_1 = 54,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{min} = 54,7 \text{ litros/min}$$

Problema 5.3

Uno de los deterioros más comunes en la elaboración y almacenamiento de los zumos clarificados es el pardeamiento no enzimático debido a la reacción de Maillard. El grado de pardeamiento se mide a partir de la absorbancia a 420 nm (A_{420}) del zumo de $12 \text{ } ^{\circ}\text{Brix}$, y se considera no apto para su comercialización si supera el valor de $0,210$. Una industria que elabora zumos clarificados de pera los almacena en forma de concentrados de $72 \text{ } ^{\circ}\text{Brix}$, bajo refrigeración a $4 \text{ } ^{\circ}\text{C}$. La velocidad de aparición de color puede describirse mediante una cinética de primer orden con una constante cinética $k = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ días}^{-1}$. Para un tanque de almacenamiento de 50 m^3 que contiene zumo de pera con un valor inicial de la $A_{420} = 0,105$ (para el zumo diluido a $12 \text{ } ^{\circ}\text{Brix}$), determinar la vida comercial de este zumo si se supone que en el interior del tanque no existen gradientes de concentración.

Al no existir gradientes de concentración en el interior del tanque se supone que la velocidad intensiva de aparición de color es la misma en cualquier punto

del tanque, es decir, el sistema se comporta como si fuera un tanque de mezcla perfecta.

Como no existen corrientes de entrada y salida, el término de acumulación de color debe ser igual al de generación. El balance para los componentes coloreados se podrá expresar según la expresión:

$$\frac{d(VA)}{dt} = r V$$

Como el volumen del tanque es constante: $\frac{d(A)}{dt} = r$

Al tratarse de una reacción de primer orden:

$$\frac{dA}{dt} = k A$$

Ésta es una ecuación en variables separables que se puede integrar con la condición inicial, de que para $t = 0$ la absorbancia es $A = A_0$, obteniéndose:

$$\ln \left(\frac{A}{A_0} \right) = k t$$

De la que puede despejarse el tiempo.

Como el zumo sólo se puede comercializar para una absorbancia máxima $A = 0,210$, el tiempo correspondiente a este valor es:

$$t = \frac{1}{k} \cdot \ln \left(\frac{A}{A_0} \right) = \frac{1}{1,2 \cdot 10^{-3} \text{ días}^{-1}} \cdot \ln \left(\frac{0,210}{0,105} \right) = 577 \text{ días}$$

Problema 5.4

Un zumo de pera de 15 °Brix, a 50 °C, que contiene un 10% en sólidos insolubles se alimenta a razón de 20 kg/min a un módulo de ultrafiltración, al objeto de obtener 15 kg/min de zumo clarificado. Este zumo se alimenta a un evaporador en donde se elimina parte del agua y se obtiene una corriente de zumo concentrado de 72 °Brix. Calcular el contenido en sólidos insolubles de la corriente de retenido en la etapa de ultrafiltración, el caudal de zumo concentrado y el caudal de agua, en forma de vapor, evaporada en el evaporador.

En la figura P5.4 se muestra un esquema de todo el proceso con las diferentes corrientes que intervienen en el proceso.

Al ser un proceso continuo se supondrá que opera en régimen estacionario, por lo que el término de acumulación es nulo, y al no haber generación, las corrientes de entrada son iguales a las de salida.

Balance de materia en el módulo de ultrafiltración

Balance global: $w_1 = w_2 + w_3$

Balance de sólidos **insolubles**: $w_1 X_1 = w_2 X_2 + w_3 X_3$

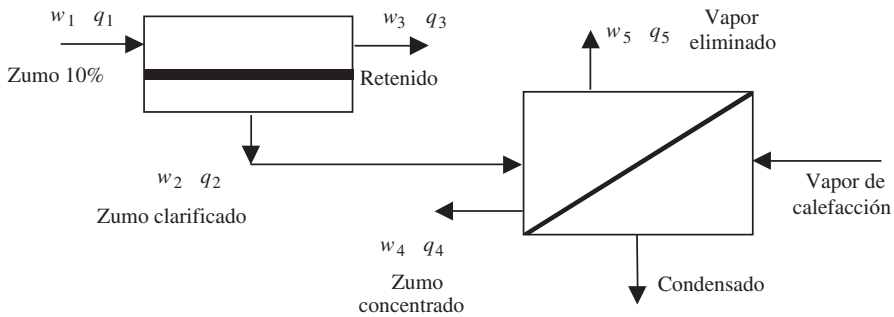


Figura P5.4.

En la que X es la fracción másica de sólidos insolubles. Conviene resaltar que el zumo clarificado no posee sólidos insolubles, con lo que $X_2 = 0$.

Sustituyendo datos se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$20 \text{ kg/min} = 15 \text{ kg/min} + w_3$$

$$(20 \text{ kg/min}) (0,10) = (15 \text{ kg/min}) (0) + w_3 X_3$$

al resolver este sistema se obtiene: $w_3 = 5 \text{ kg/min}$ y $X_3 = 0,40$ (40%)

Balance de materia en el evaporador:

Balance global: $w_2 = w_4 + w_5$

Balance de sólidos **solubles**: $w_2 X_2 = w_4 X_4 + w_5 X_5$

La fracción másica de la corriente w_5 es cero ($X_5 = 0$), ya que el vapor que abandona el evaporador no contiene sólidos solubles.

Sustituyendo datos se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$15 \text{ kg/min} = w_4 + w_5$$

$$(15 \text{ kg/min}) (0,15) = w_4 (0,72) + w_5 (0)$$

al resolver este sistema se obtiene:

Caudal de zumo concentrado $w_4 = 3,125 \text{ kg/min}$

Caudal de agua eliminada en forma de vapor: $w_5 = 11,875 \text{ kg/min}$

Problema 5.5

En la elaboración de conservas en almíbar es necesario preparar la solución azucarada que acompaña a los trozos de fruta. Para ello, se utilizan 400 kg de azúcar que se mezclan con agua en un tanque agitado encamisado lateralmente, al objeto de obtener una solución de 40 °Brix. Inicialmente la solución azucarada se encuentra a temperatura ambiente (20 °C) y recibe calor a través de la pared late-

ral encamisada a razón de 100 kW/m^2 . El tanque es cilíndrico de 1 m de diámetro y una altura de $1,5 \text{ m}$. Cuando la solución azucarada ha alcanzado los $50 \text{ }^\circ\text{C}$ se para la operación y se utiliza la solución azucarada en el proceso de llenado de las latas que contienen los trozos de fruta. Suponiendo que bajo las condiciones de trabajo los valores del calor específico ($\hat{C}_p = 2,85 \text{ kJ/kg }^\circ\text{C}$) y la densidad ($\rho = 1.175 \text{ kg/m}^3$) de la solución azucarada no varían, calcular el tiempo necesario para que la solución azucarada alcance los $50 \text{ }^\circ\text{C}$.

La figura P5.5 muestra un esquema del tanque agitado encamisado. La solución azucarada de $40 \text{ }^\circ\text{Brix}$ contiene un 40% de azúcar, por lo que si se parte de 400 kg de azúcar, serán necesarios 600 kg de agua para obtener la citada solución.

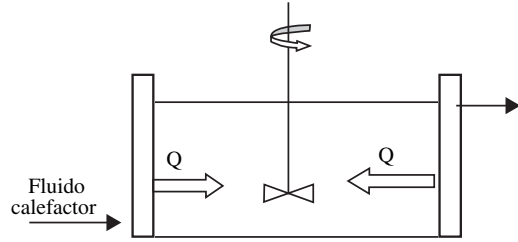


Figura P5.5.

El volumen que ocupan los 1.000 kg de la solución azucarada es:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{(1.000 \text{ kg})}{(1.175 \text{ kg/m}^3)} = 0,851 \text{ m}^3$$

La altura que la solución alcanza en el tanque agitado es:

$$h = \frac{V}{\frac{\pi}{4} D_T^2} = \frac{(0,851 \text{ m}^3)}{\frac{\pi}{4} (1 \text{ m})^2} = 1,084 \text{ m}$$

siendo D_T el diámetro del tanque.

A pesar de que la altura del tanque es de $1,5 \text{ m}$, la solución azucarada solamente recibe calor lateralmente por el área correspondiente a la altura que alcanza la solución azucarada.

Área de transmisión de calor:

$$A = \pi D_T h = \pi (1 \text{ m}) (1,084 \text{ m}) = 3,405 \text{ m}^2$$

El caudal de calor que la solución azucarada recibe a través del área lateral es:

$$\dot{Q} = (100 \text{ kW/m}^2) (3,405 \text{ m}^2) = 340,5 \text{ kW}$$

Suponiendo que no existen pérdidas de calor por convección y radiación, del balance energético se obtiene que el término de acumulación es igual al de entrada por la pared lateral.

$$\frac{d(m \hat{C}_p T)}{dt} = \dot{Q}$$

Como la masa contenida en el tanque agitado no varía y el calor específico se considera constante, la ecuación anterior se convierte en:

$$m \hat{C}_p \frac{d(T)}{dt} = \dot{Q}$$

ecuación en variables separables que se puede integrar con la condición límite inicial de que para $t = 0$, la temperatura de la solución azucarada es la que poseía inicialmente ($T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$). Por lo que la variación con el tiempo de la temperatura de la solución en el interior del tanque se puede describir mediante la ecuación:

$$T = T_0 + \frac{\dot{Q}}{m \hat{C}_p} t$$

de la que se puede despejar el tiempo:

$$t = \frac{m \hat{C}_p}{\dot{Q}} (T - T_0)$$

Sustituyendo datos en esta última ecuación:

$$t = \frac{(1.000 \text{ kg}) \left(2,85 \frac{\text{kJ}}{\text{kg } ^\circ\text{C}} \right)}{(340,5 \text{ kJ/s})} (50 - 20) \text{ }^\circ\text{C} = 251 \text{ s}$$

Por lo que para que la solución azucarada alcance los $50 \text{ }^\circ\text{C}$ serán necesarios 251 s, o lo que es lo mismo 4,2 minutos.

Problema 5.6

A un evaporador se alimenta una corriente de 10.000 kg/h de leche cruda a $25 \text{ }^\circ\text{C}$, cuyo contenido en agua es del 87%, que se desea concentrar hasta que su contenido en agua sea del 20%. Como fluido calefactor se utiliza vapor recalentado de 2 atmósferas a $135 \text{ }^\circ\text{C}$, y que abandona la cámara de calefacción a su temperatura de saturación en forma de agua líquida. Calcular el caudal de vapor de calefacción, el caudal de leche concentrada y el caudal de vapor de agua evaporada de la leche. Suponer que no existe incremento ebulloscópico y que las corrientes que abandonan la cámara de evaporación lo hacen a la temperatura de $100 \text{ }^\circ\text{C}$.

Datos. Para el vapor de 2 atmósferas: Calor latente 2.202 kJ/kg . Temperatura de condensación $120 \text{ }^\circ\text{C}$. Calor específico $1,95 \text{ kJ/(Kg } ^\circ\text{C)}$.

Para el vapor que se evapora a $100 \text{ }^\circ\text{C}$: Calor latente de evaporación 2.250 kJ/kg .

El calor específico de la leche se puede obtener a partir de la ecuación:

$$C_p = 0,83 + 3,35 X_{\text{Agua}} \text{ kJ}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$$

en la que X_{Agua} es la fracción másica de agua en la leche.

Para la resolución de este problema es necesario realizar balances másicos y energéticos en el sistema representado en la figura P5.6.

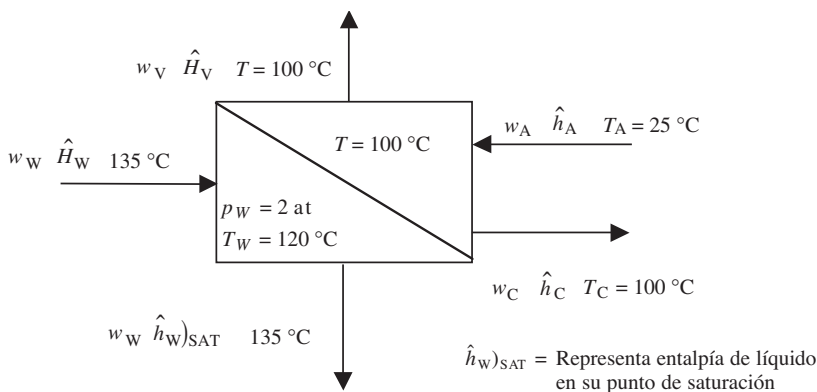


Figura P5.6.

Balances másicos:

Balance global: $w_A + w_w = w_C + w_V + w_W$

Balance de sólidos: $w_A X_A = w_C X_C$

En las que los subíndices A, C, V y W indican las corrientes de alimentación, concentrado, vapor evaporado y vapor de calefacción, respectivamente. Al realizar el balance de soluto es conveniente tener presente que las corrientes de vapor no poseen solutos, con lo que su fracción másica de soluto es cero.

Al considerar la leche como una mezcla binaria, formada por agua y solutos, las fracciones másicas de las corrientes de alimentación y de leche concentrada son:

$$X_A = 1 - 0,87 = 0,13 \quad \text{y} \quad X_C = 1 - 0,20 = 0,80$$

Sustituyendo los datos en los balances másicos:

$$\begin{aligned} (10.000 \text{ kg/h}) &= w_C + w_V \\ (10.000 \text{ kg/h}) (0,13) &= w_C (0,80) \end{aligned}$$

La resolución de este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas permite encontrar las variables desconocidas, de tal manera que se obtiene:

Caudal de leche concentrada: $w_C = 1.625 \text{ kg/h}$

Caudal de vapor eliminado: $w_V = 8.375 \text{ kg/h}$

Balances energéticos:

Es un proceso en estado estacionario, y no existe término de generación, por lo que las entradas de energía son iguales a las salidas. Además, despreciando los términos cinéticos y potencial se obtiene:

$$\sum_j w_j \hat{H} = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} w_A \hat{h}_A + w_W \hat{H}_W &= w_C \hat{h}_C + w_V \hat{H}_V + w \hat{h}_W \\ w_W (\hat{H}_W - \hat{h}_W) &= w_C \hat{h}_C + w_V \hat{H}_V - w_A \hat{h}_A \end{aligned}$$

en la que \hat{H}_W y \hat{H}_V son las entalpías por unidad de masa de las corrientes de vapor de calefacción y del vapor eliminado, respectivamente; \hat{h}_W es la entalpía por unidad de masa del líquido condensado del vapor de calefacción (líquido saturado a su punto de ebullición); \hat{h}_A y \hat{h}_C son las entalpías por unidad de masa de las corrientes de alimentación y de la leche concentrada, respectivamente.

Las entalpías de las corrientes del alimento (leche cruda) y de la leche concentrada son:

$$\text{Alimento: } \hat{h}_A = \hat{C}_P)_A (T_A - T^*)$$

$$\text{Concentrado: } \hat{h}_C = \hat{C}_P)_C (T_C - T^*)$$

Siendo T^* la temperatura de referencia, T_A la temperatura de la leche cruda cuando entra al evaporador, T_C es la temperatura de la leche concentrada cuando abandona el evaporador y coincide con la de ebullición de la solución ($T_C = T_e$).

Para las corrientes de vapor las entalpías son:

$$\hat{H}_W = \hat{H}_W)_{SAT} + \hat{C}_P)_{VAPOR} (T_R - T_e) = h_W)_{SAT} + \lambda_W + \hat{C}_P)_{VAPOR} (T_R - T_e)$$

$$\hat{H}_V = \hat{H}_V)_{SAT} = \hat{C}_P)_{Agua\ líquida} (T_e - T^*) + \lambda_V + \hat{C}_P)_{VAPOR} (T_V - T_e)$$

en las que el subíndice *SAT* indica que son entalpías a su punto de saturación. La temperatura del vapor recalentado es T_R , la temperatura de ebullición del agua a 2 atmósferas es T_e' . Para el vapor eliminado T_e es la temperatura de ebullición de la solución en la cámara de evaporación, T_V es la temperatura del vapor que se elimina, que como no existe aumento ebulloscópico coincide con T_e ($T_V = T_e$).

La entalpía de la corriente líquida condensada del vapor de calefacción es un líquido a su punto de ebullición, es decir posee una entalpía de líquido saturado:

$$\hat{h}_W = \hat{h}_W)_{SAT}$$

y como el calor latente de vaporización o condensación se define como:

$$(\hat{H}_W - \hat{h}_W)_{SAT} = \lambda_W$$

se cumple:

$$(\hat{H}_W - \hat{h}_W) = \lambda_W + \hat{C}_P)_{VAPOR} (T_R - T_e')$$

Al sustituir todas estas expresiones en el balance entálpico se obtiene:

$$w_W [\lambda_W + \hat{C}_P)_{Vapor} (T_R - T_e')] = w_C \hat{C}_P)_C (T_e - T^*) + w_V [\hat{C}_P)_{Agua} (T_e - T^*) + \lambda_W] - w_A \hat{C}_P)_A (T_A - T^*)$$

Como la temperatura de referencia es arbitraria, si se toma $T^* = T_e$, la ecuación anterior se simplifica, y se puede escribir:

$$w_W [\lambda_W + \hat{C}_P)_{Vapor} (T_R - T_e')] = w_V \lambda_V - w_A \hat{C}_P)_A (T_A - T_e)$$

Ecuación en la que se pueden sustituir los siguientes datos:

$$\lambda_W = 2.202 \text{ kJ/kg} \quad \lambda_V = 2.250 \text{ kJ/kg}$$

$$\hat{C}_P)_{Vapor} = 1,95 \text{ kJ/(kg } ^\circ\text{C)}$$

Para $X_A = 0,13$, el calor específico del alimento es $\hat{C}_P)_A = 3,74 \text{ kJ/kg } ^\circ\text{C}$

$$T_R = 135 \text{ } ^\circ\text{C}, \quad T_A = 25 \text{ } ^\circ\text{C}, \quad T_e = 100 \text{ } ^\circ\text{C}, \quad T_e' = 120 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$w_A = 10.000 \text{ kg/h}, \quad w_V = 8.375 \text{ kg/h}$$

Al sustituir todos estos datos en la última ecuación es posible calcular el caudal del vapor de calefacción, obteniendo el siguiente valor:

$$w_W = 9.702,5 \text{ kg vapor/h}$$

Interacción aire-agua 6

6.1. Introducción

Las operaciones en las que existe una interacción aire-agua están basadas en la transferencia de materia entre dos fases, estando presentes dos componentes. Se supone que la fase líquida está constituida por agua pura, mientras que la fase gaseosa estará formada por un gas inerte que contiene vapor de agua.

Se considera que la transferencia de materia tiene lugar exclusivamente en fase gas, pudiendo el vapor de agua pasar de la interfase al seno del gas o bien de esta interfase al seno del líquido, dándose, en cualquier caso, en el sentido normal a la superficie. Los mecanismos de transferencia involucrados en estos procesos son una combinación de transporte turbulento y difusión. Al existir un cambio de fase, la transferencia de materia va acompañada de una transmisión de calor.

La interacción aire-agua se aplica en diferentes procesos, pudiéndose destacar como los más relevantes el acondicionamiento de aire y el enfriamiento de agua por evaporación. Las operaciones de humidificación y deshumidificación de aire se basan en el acondicionamiento de aire utilizado en los procesos de conservación de alimentos. Además, las operaciones de secado de alimentos se basan en la interacción entre aire-agua, en la que el agua contenida en el alimento se transfiere al aire en forma de vapor.

6.2. Propiedades del aire húmedo

En este apartado se realizará una exposición de las diferentes propiedades que posee el aire con cierto contenido de vapor de agua, que son de gran utilidad en los cálculos de las operaciones unitarias involucradas en la transferencia de agua entre las fases líquido y gas. Para facilitar los cálculos, todas las propiedades se suelen referir a la unidad másica o molar de aire seco.

Humedad molar X_m . Es el contenido en humedad del aire expresado en moles de agua por mol de aire seco. Según esta definición:

$$X_m = \frac{P_V}{P - P_V} \text{ kmoles vapor agua/kmoles aire seco} \quad [6.1]$$

en la que: P_V = presión parcial del vapor de agua.

P = presión total.

Humedad absoluta X . Es el contenido de humedad del aire expresado en kg de agua por kg de aire seco. La humedad absoluta se puede expresar en función de la presión parcial del vapor de agua en el aire según la ecuación:

$$X = \frac{P_V M_{AGUA}}{(P - P_V) M_{AIRE}} \text{ kg vapor agua/kg aire seco} \quad [6.2]$$

siendo: $M_{AGUA} = 18 \text{ kg/kmol}$

$$M_{AIRE} = 28,9 \text{ kg/kmol}$$

por lo que se puede encontrar una relación directa entre la humedad absoluta y la molar:

$$X = 0,622 \frac{P_V}{P - P_V} = 0,622 X_m \quad [6.3]$$

Cuando la presión parcial del vapor de agua en el aire coincide con la tensión del vapor de agua a la temperatura a la que se encuentra el aire, se dice que el aire está saturado. Si P_S es la tensión de vapor del agua pura, se cumple:

$$X_{SATURACIÓN} = 0,622 \frac{P_S}{P - P_S} \quad [6.4]$$

Humedad relativa ϕ . Es la relación entre la cantidad de vapor de agua contenido en un determinado volumen de aire y el que contendría si estuviera saturado. De esta definición, es fácil ver que:

$$\phi = P_V/P_S \quad [6.5]$$

Como para el aire saturado la presión de vapor del agua en el aire coincide con la de saturación, la humedad relativa es la unidad $\phi = 1$.

La relación entre las humedades absoluta y relativa se obtiene al combinar las ecuaciones 6.3 y 6.5:

$$X = 0,622 \frac{P_S \phi}{P - P_S \phi} \quad [6.6]$$

Humedad porcentual Y . Es la relación entre la humedad absoluta y la de saturación:

$$Y = \frac{X}{X_{SAT}} = \frac{P_V (P - P_S)}{P_S (P - P_V)} = \phi \frac{(P - P_S)}{(P - P_V)} \quad [6.7]$$

Volumen húmedo \hat{V} . Es el volumen que ocupa un kg de aire seco más el vapor de agua que contiene:

$$\hat{V} = \hat{V}_{AIRE SECO} + \hat{V}_{VAPOR AGUA}$$

Como todas las variables se refieren a un kg de aire seco, el volumen húmedo contendrá 1 kg de aire seco más X kg de vapor de agua. De la ecuación de gases perfectos se obtiene:

$$\hat{V} = \frac{1}{M_{AIRE}} \frac{RT}{P} + \frac{X}{M_{AGUA}} \frac{RT}{P} = \left(\frac{1}{28,9} + \frac{X}{18} \right) \frac{RT}{P} \quad [6.8]$$

Si el aire está saturado de humedad, el volumen es saturado, y se obtiene sustituyendo la humedad absoluta por la de saturación.

Densidad del aire húmedo ρ . Es la densidad que posee el aire húmedo, es decir, la relación entre la masa del aire húmedo y el volumen que ocupa.

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{P \cdot M_m}{RT} \quad [6.9]$$

en la que M_m es la masa molecular media de la mezcla aire seco y vapor de agua:

$$M_m = X_{AGUA} \cdot M_{AGUA} + (1 - X_{AGUA}) \cdot M_{AIRE}$$

siendo X_{AGUA} la fracción molar del vapor de agua contenido en el aire, que es: $X_{AGUA} = P_V/P$. Por lo que:

$$M_m = \frac{P_V}{P} (M_{AGUA} - M_{AIRE}) + M_{AIRE}$$

Si se sustituye esta expresión en la ecuación 6.9, y si se tiene presente que $P_V = \phi \cdot P_S$, se obtiene la expresión:

$$\rho = \frac{P}{RT} M_{AIRE} - \frac{\phi \cdot P_S}{RT} (M_{AIRE} - M_{AGUA}) \quad [6.10]$$

Como las masas moleculares del aire y agua son 28,9 y 18 kg/kmol, respectivamente, y la constante de gases posee un valor de 0,082 atm·m³/(kmol·K) o de 8,314 Pa·m³/(mol·K), la ecuación 6.10 se transforma en:

$$\rho = 352,44 \frac{P}{T} - 132,93 \frac{\phi \cdot P_S}{T} \quad [6.11a]$$

en la que las presiones se deben expresar en atmósferas. Aunque también se puede utilizar la ecuación:

$$\rho = 0,0035 \frac{P}{T} - 0,0013 \frac{\phi \cdot P_S}{T} \quad [6.11b]$$

si la presión se expresa en Pa. En ambas expresiones, la densidad se obtiene en kg/m³.

Calor específico húmedo \hat{s} . Es el calor necesario para elevar 1 °C la temperatura de 1 kg de aire seco más la cantidad de agua que contiene.

$$\hat{s} = \hat{C}_{AIRE} + X \cdot \hat{C}_V \quad [6.12]$$

en la que: \hat{C}_{AIRE} = calor específico del aire seco.

\hat{C}_V = calor específico del vapor de agua.

En los procesos más usuales en los que se desarrollan las operaciones de interacción aire-agua, se puede considerar que los valores de estos calores específicos varían poco, y se toman unos valores medios:

$$\hat{C}_{AIRE} = 1 \text{ kJ/kg}\cdot^\circ\text{C} \quad \text{y} \quad \hat{C}_V = 1,92 \text{ kJ/kg}\cdot^\circ\text{C}$$

Lo que permite obtener el calor específico húmedo:

$$\hat{s} = 1 + 1,92 X \text{ (kJ/kg aire seco} \cdot ^\circ\text{C)} \quad [6.13]$$

Entalpía húmeda \hat{i}_G . Es la entalpía que posee el aire seco más la del vapor de agua que contiene:

$$\hat{i}_G = \hat{i}_{AIRE} + X \cdot \hat{i}_V \quad [6.14]$$

siendo: \hat{i}_{AIRE} = entalpía de 1 kg de aire seco.

\hat{i}_V = entalpía de 1 kg de vapor de agua.

Las entalpías son funciones de estado, por lo que es necesario definir unos estados de referencia. Generalmente, para el agua se toma como estado de referencia la entalpía que posee el agua líquida a 0 °C y 1 atmósfera; mientras que para el aire es la correspondiente a aire seco a 0 °C y 1 atmósfera. Para el agua sería más adecuado tomar como estado de referencia el correspondiente al punto triple. Sin embargo, con este estado de referencia, el agua a 0 °C y 1 atmósfera posee una entalpía de 0,22 kcal/kg, y debido a que este valor es bajo, en la práctica suele considerarse que ambos estados de referencia son coincidentes.

La entalpía de 1 kg de aire seco que contiene una humedad absoluta X , y que se halla a una temperatura T , se calculará mediante la ecuación:

$$\hat{i}_G = \hat{C}_{AIRE} (T - T^*) + \hat{C}_V X (T - T^*) + \lambda_0 X$$

siendo: $T^* = 0$ °C (Temperatura de referencia).

$\lambda_0 = 2.490$ kJ/kg (Calor latente de vaporización del agua a 0 °C).

Al sustituir estos datos, se obtiene una expresión que permite el cálculo de la entalpía húmeda en función de la temperatura y del contenido de humedad.

$$\hat{i}_G = (\hat{C}_{AIRE} + \hat{C}_V X) T + \lambda_0 X \quad [6.15]$$

$$\hat{i}_G = \hat{s} T + \lambda_0 X \quad [6.16]$$

Temperatura de rocío T_R . Es la temperatura a la que tiene lugar la saturación del aire con un contenido de agua dado. Es decir, es la temperatura a la que se inicia la condensación del vapor de agua cuando el aire húmedo sufre un proceso de enfriamiento.

Temperatura de saturación adiabática T_S . Es la temperatura a la que se satura el aire cuando se enfría adiabáticamente. En este proceso adiabático, el aire está sometido a una variación continua de temperatura y contenido de humedad.

Temperatura húmeda T_H . También denominada temperatura del termómetro húmedo. Es la temperatura que alcanza una pequeña masa de agua, en condiciones adiabáticas y estacionarias, situada en el seno de una corriente de aire de temperatura, humedad y velocidad constantes (figura 6.1).

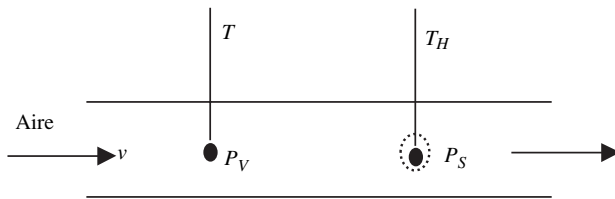


Figura 6.1. Temperatura húmeda.

La temperatura húmeda es función de la temperatura T del aire y de contenido en humedad X . Además, a partir de esta temperatura húmeda es posible determinar la humedad absoluta del aire. En el sistema aire-agua, se cumple que para velocidades del aire comprendidas entre 4 y 10 m/s la temperatura húmeda coincide con la de saturación.

6.3. Diagrama psicrométrico de Mollier para aire húmedo

Para la resolución gráfica de problemas en los que intervienen procesos de interacción aire-agua, como pueden ser los procesos de secado, humidificación y deshumidificación de aire, entre otros, suele utilizarse el denominado diagrama de Mollier para el aire húmedo. Existen diversos tipos de diagramas psicrométricos, dependiendo de qué variables son las que se correlacionan; así, uno de los más utilizados es el diagrama $X-T$, en el que se representa la humedad absoluta frente a la temperatura. Aunque también puede utilizarse el diagrama en el que se representa al producto del calor específico húmedo por la temperatura frente a la humedad absoluta (diagrama $\hat{s}T-X$).

6.3.1. Diagrama psicrométrico $\hat{s}T-X$

Tal como se ha indicado, en este diagrama se representan en ordenadas los valores del producto $\hat{s}T$, mientras que en abscisas se representan los valores de la hu-

medad absoluta X (figura 6.2). En el apartado de Apéndice se puede encontrar este diagrama. A continuación se obtendrán las diferentes rectas y curvas que aparecen en este diagrama.

Rectas isotermas. De la definición de calor específico húmedo se ha obtenido la ecuación 6.13. Si se multiplica esta ecuación por la temperatura se obtiene:

$$\hat{s}T = T + 1,92 TX \quad [6.17]$$

De la que se puede observar que para cada temperatura se obtiene una recta de pendiente $1,92 T$ y ordenada en el origen T . Es importante resaltar que para cada valor de la temperatura se obtiene una recta diferente.

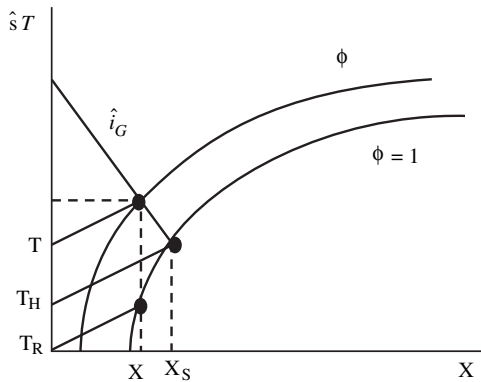


Figura 6.2. Diagrama psicrométrico $\hat{s}T$ - X .

Rectas isoentálpicas. La ecuación 6.16 es la expresión de la entalpía húmeda, que reordenada puede expresarse como:

$$\hat{s}T = \hat{i}_G - \lambda_0 X \quad [6.18]$$

que en el diagrama $\hat{s}T$ - X , se corresponde a la ecuación de una recta de pendiente λ_0 y ordenada en el origen \hat{i}_G . Es evidente que las isoentálpicas son rectas paralelas, ya que su pendiente es $\lambda_0 = 2.490$, pero que se diferencian por su valor de entalpía húmeda.

Curvas de humedad relativa constante. Para obtener este conjunto de curvas es necesario combinar las ecuaciones 6.6 y 6.17:

$$X = 0,622 \frac{P_s \phi}{P - P_s \phi} \quad [6.6]$$

$$\hat{s}T = T + 1,92 TX \quad [6.17]$$

El proceso a seguir es:

- a) Se fija la presión total, para la que se construye el diagrama.
- b) Se fija el valor de la humedad relativa.

- c) Se van dando valores a las temperaturas, y mediante las tablas de vapor de agua se buscan los valores correspondientes de las presiones de vapor.
- d) Con los distintos valores de las presiones de vapor y el valor de la humedad relativa fijada en el apartado b), se obtienen los valores de las humedades absolutas, utilizando la ecuación 6.6
- e) Con los valores de la temperatura y sus correspondientes humedades absolutas, se calculan los valores del producto $\hat{s}T$, utilizando la ecuación 6.17.
- f) Al representar los valores de $\hat{s}T$ frente a sus correspondientes de humedad absoluta X , se obtiene una curva en la que el valor de la humedad relativa es constante.
- g) Se vuelve a la etapa b, cambiando el valor de la humedad relativa, y se repite el proceso con el nuevo valor de ϕ . Se obtiene una nueva curva con el nuevo valor de la humedad relativa, y así sucesivamente.

De todo el conjunto de curvas obtenidas, la inferior se corresponde a la que posee un valor $\phi = 1$; es decir, es la curva de saturación. Es importante resaltar que esta curva no pasa por el origen de ordenadas, ya que para una presión total de 1 atmósfera y una temperatura de 0 °C, la presión de vapor del agua pura son 610 Pa, que se corresponde a una humedad absoluta de $X = 0,00377$ kg agua/kg aire seco.

Rectas de humidificación adiabática. Si se supone un proceso como el mostrado en la figura 6.3, en el que existe una cámara que contiene agua a una temperatura constante T , para lo que el agua se recircula y entra de nuevo al sistema con la que se va añadiendo, consiguiendo que su temperatura sea aproximadamente la misma que la del aire que abandona la cámara. A esta cámara se introduce aire con un caudal w' kg aire seco/h, que posee una humedad X_1 , una temperatura T_1 y una entalpía \hat{i}_{G1} . Asimismo, de la cámara sale una corriente de aire con una humedad X_2 , una temperatura T_2 y una entalpía \hat{i}_{G2} . Para compensar el agua evaporada se introduce al sistema una corriente de agua a la temperatura T , con un caudal $w'(X_2 - X_1)$ kg agua/h. Como el proceso es adiabático no existirá intercambio de calor con los alrededores.

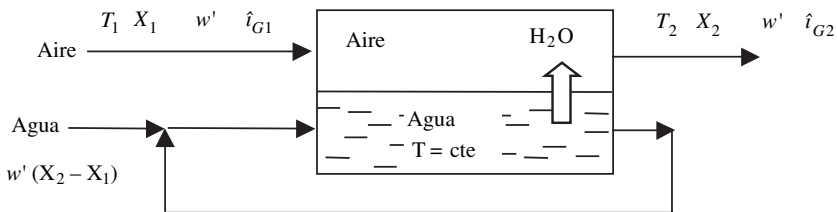


Figura 6.3. Humidificación adiabática de aire.

Al realizar un balance energético global del sistema se obtiene:

$$w' \hat{i}_{G1} + w' \hat{C}_L (X_2 - X_1) (T - T^*) = w' \hat{i}_{G2} \quad [6.19]$$

en la que \hat{C}_L es el calor específico del agua. Si se toma como temperatura de referencia $T^* = 0^\circ\text{C}$, y teniendo en cuenta que la entalpía se expresa según la ecuación 6.16:

$$\hat{i}_G = \hat{s} T + \lambda_0 X \quad [6.16]$$

al sustituir en la ecuación anterior se tiene:

$$\hat{s}_1 T_1 + \lambda_0 X_1 + \hat{C}_L T (X_2 - X_1) = \hat{s}_2 T_2 + \lambda_0 X_2$$

que reordenada se puede expresar como:

$$\hat{s}_2 T_2 - \hat{s}_1 T_1 = (\hat{C}_L T - \lambda_0) (X_2 - X_1) \quad [6.20]$$

En el diagrama $\hat{s} T - X$ ésta es la ecuación de una recta que posee de pendiente $(\hat{C}_L T - \lambda_0)$. Generalmente, el valor del producto $\hat{C}_L T$ es mucho más pequeño que el del calor latente de vaporización, por lo que puede despreciarse, y se obtiene que:

$$\hat{s}_2 T_2 - \hat{s}_1 T_1 = -\lambda_0 (X_2 - X_1)$$

y si se observa la ecuación 6.18, es la correspondiente a una isoentálpica. Ello indica que las rectas de humidificación adiabática coinciden con las isoentálpicas.

Rectas de humidificación no adiabática. Se considera un proceso similar al anterior, pero en el que no existe recirculación de agua, y que para mantener constante la temperatura T de este agua se aporta un caudal de calor de \dot{Q}_E , que debe compensar las pérdidas por evaporación y las de la cámara hacia los alrededores \dot{Q}_S . Al realizar un balance energético global se obtiene:

$$w' \hat{i}_{G1} + w' \hat{C}_L (X_2 - X_1) (T - T^*) + \dot{Q}_E = w' \hat{i}_{G2} + \dot{Q}_S \quad [6.21]$$

Si la temperatura de referencia es $T^* = 0$, y se tiene presente que:

$$\hat{Q}_E = \frac{\dot{Q}_E}{w' (X_2 - X_1)} \quad \text{y} \quad \hat{Q}_S = \frac{\dot{Q}_S}{w' (X_2 - X_1)}$$

son, respectivamente, los calores aportados y perdidos al sistema por unidad de masa. La ecuación 6.21 queda de la forma:

$$\hat{Q}_E + (\hat{C}_L T - \hat{Q}_S) = \frac{(\hat{i}_{G2} - \hat{i}_{G1})}{(X_2 - X_1)}$$

Definiendo $\hat{Q}_0 = \hat{C}_L T - \hat{Q}_S$ y teniendo presente la ecuación 6.16:

$$\hat{Q}_E + \hat{Q}_0 = \lambda_0 + \frac{\hat{s}_2 T_2 - \hat{s}_1 T_1}{X_2 - X_1}$$

o lo que es lo mismo:

$$\hat{s}_2 T_2 - \hat{s}_1 T_1 = (\hat{Q}_E + \hat{Q}_0 - \lambda_0) (X_2 - X_1) \quad [6.22]$$

que en el diagrama $\hat{s}-T-X$ se corresponde a la ecuación de una recta de pendiente $(\hat{Q}_E + \hat{Q}_0 - \lambda_0)$ y que pasa por los puntos de coordenadas $(\hat{s}_1 T_1, X_1)$ y $(\hat{s}_2 T_2, X_2)$.

La cantidad $(\hat{Q}_E + \hat{Q}_0)$ representa el calor que debe aportarse por cada kg de agua evaporada. Este calor es el necesario para llevar a cabo el proceso descrito, y se obtiene a partir de la pendiente de la recta que une los puntos que representan los estados del aire a la entrada y salida del sistema.

6.3.2. Diagrama psicrométrico X-T

Este diagrama es la representación de las ecuaciones que se han obtenido en el apartado 6.2. En este diagrama se representa la humedad absoluta en ordenadas frente a su temperatura en el eje de abscisas (figura 6.4).

Las curvas de humedad relativa constante se trazan de forma análoga al diagrama $\hat{s}-T-X$. Para una presión total P , se fija un valor de la humedad relativa. Se buscan los valores de las presiones de vapor de agua a distintas temperaturas, y mediante la ecuación 6.6 se calculan las humedades absolutas correspondientes a estas temperaturas. Las distintas curvas se obtienen con distintos valores de humedad relativa. La curva superior se corresponde a la de saturación ($\phi = 1$). Esta curva divide el diagrama en dos zonas, los puntos situados a la izquierda de la curva representan mezclas de aire con agua líquida, y son nieblas inestables de aire con vapor de agua. Los puntos situados a la derecha de la curva de saturación son mezclas recalentadas de aire-vapor de agua.

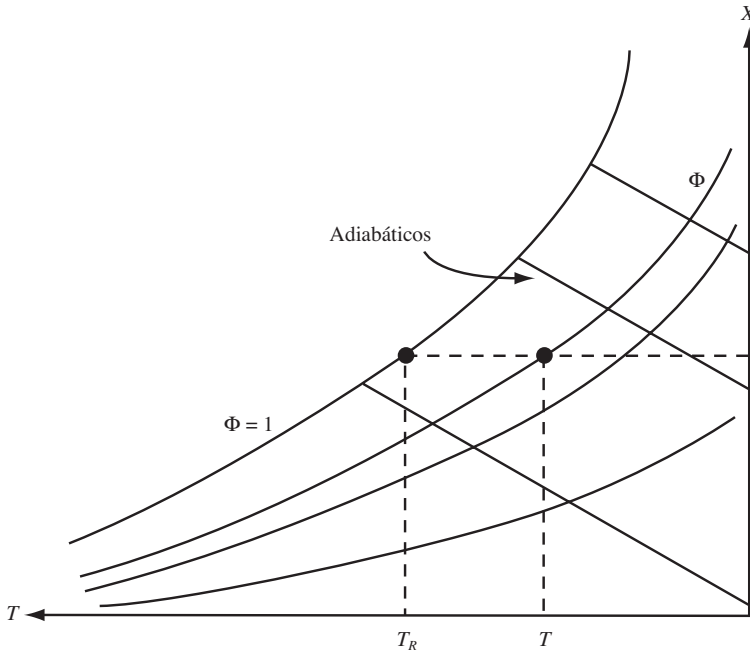


Figura 6.4. Diagrama psicrométrico X-T.

En el diagrama $X-T$, las líneas isoentálpicas, y por consiguiente las de enfriamiento adiabático, tal como se observa en la ecuación 6.16 son rectas de pendiente negativa $-\hat{s}/\lambda_0$.

6.4. Temperatura de termómetro húmedo

Si una corriente de aire no saturado circula por una superficie de agua, existe una transferencia de calor desde el aire hacia el agua, que trae consigo el que se evapore agua, que pasa al aire. La evaporación hace disminuir la temperatura del agua, mientras que el aire se acerca más a las condiciones de saturación. Al final se alcanza una situación estacionaria, en la que la transmisión de calor desde el aire hacia el agua equilibra el calor necesario para vaporizar el agua. En estas condiciones estacionarias se dice que el agua se encuentra a la **temperatura de termómetro húmedo**.

Este proceso es similar al que se describe a continuación. Se dispone de una gran corriente de aire no saturado, que posee una humedad, en la que su presión de vapor P_V es menor que la de saturación. Un termómetro mide la temperatura T_1 de este aire, y se dispone, además, de otro termómetro cuyo bulbo se halla envuelto con una gota de agua (figura 6.5). En los alrededores de este segundo termómetro se considera que el aire está saturado, es decir, la presión de vapor es la de saturación P_S . Como la presión de vapor del aire es menor que la de saturación ($P_V < P_S$), en los alrededores de la gota de agua existe una evaporación de agua, que lleva asociada una disminución de la temperatura. Ello hace que este segundo termómetro presente una lectura T_H inferior a T_1 ($T_H < T_1$), denominándose a T_H temperatura de termómetro húmedo, mientras que a T_1 se la denomina temperatura seca.

El caudal de agua evaporada es:

$$w_{AGUA} = K_G A_G (P_S - P_V) \tag{6.23}$$

siendo: K_G = Coeficiente de transferencia de materia $\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{Pa})$.

A_G = Área de la gota de agua.

El caudal de calor necesario para evaporar el agua es el calor latente:

$$\dot{Q}_L = \lambda_S w_{AGUA} = \lambda_S K_G A_G (P_S - P_V) \tag{6.24}$$

en la que λ_S es el calor latente a la temperatura del agua.

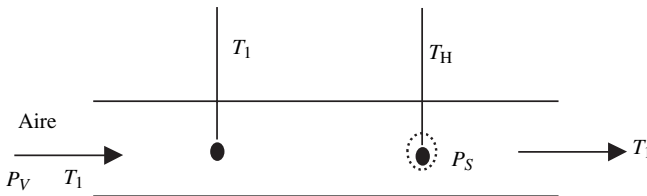


Figura 6.5. Temperatura de termómetro húmedo.

Desde el aire se produce una transferencia de calor hacia la gota de agua, por mecanismos de convección y radiación, de tal forma que se puede calcular según la expresión:

$$\dot{Q}_S = (h_C + h_R) A_G (T_1 - T_H) \quad [6.25]$$

en la que h_C y h_R son los coeficientes de transmisión de calor por convección y radiación, respectivamente.

Cuando se alcanzan las condiciones estacionarias existe un equilibrio, en el que se cumple que el calor transferido desde el aire hacia la gota es igual al calor necesario para la evaporación:

$$(\dot{Q}_L = \dot{Q}_S): \quad \lambda_S K_G A_G (P_S - P_V) = (h_C + h_R) A_G (T_1 - T_H)$$

de la que se deduce:

$$P_S - P_V = - \frac{(h_C + h_R)}{\lambda_S K_G} (T_H - T_1) \quad [6.26]$$

a esta ecuación se la denomina **ecuación psicrométrica**.

En esta ecuación, tanto el coeficiente de transmisión de calor por convección h_C como el coeficiente K_G de transferencia de materia dependen del espesor de la película gaseosa. Por tanto, un aumento de la velocidad del aire provoca una disminución de esta película y un aumento en los valores de h_C y K_G . Para valores de velocidad del aire de 5 a 8 m/s, y temperaturas más usuales de trabajo, el calor transmitido por convección es muy superior al de radiación, pudiéndose considerar que la relación $(h_C + h_R)/K_G$ es prácticamente constante. En estas condiciones se

considera que $\frac{h_C + h_R}{\lambda_S K_G} = 66 \text{ Pa}/^\circ\text{C}$. La temperatura del termómetro húmedo T_H

sólo depende de la temperatura y humedad del aire.

Si en la ecuación 6.6, que da la humedad absoluta en función de la presión de vapor, se considera que esta presión P_V es muy pequeña frente a la presión total, y que se trabaja con $P = 1 \text{ atm}$, se puede obtener:

$$\begin{aligned} X &= 0,622 P_V, & \text{expresándose } P_V \text{ en atm,} \\ \text{o bien} \quad X &= 0,00614 P_V & \text{si la presión se expresa en kPa} \end{aligned}$$

Al sustituir esta ecuación en la psicrométrica se obtiene:

$$\frac{X_S - X_1}{T_H - T_1} = - \frac{0,00614 (h_C + h_R)}{\lambda_S K_G} \quad [6.27]$$

ecuación que liga las temperaturas seca y húmeda con la humedad del aire.

6.5. Saturación adiabática del aire

En los procesos adiabáticos de interacción aire-agua es importante poder determinar las condiciones del aire después del contacto aire-agua. Si se tiene un proceso como el mostrado en la figura 6.6, en la que se introduce una corriente de aire con w' kg de aire seco cuyas condiciones de temperatura, humedad y entalpía son T_1 , X_1 e \hat{i}_{G1} , respectivamente, en una cámara con agua a una temperatura T_S de saturación. Si el tiempo de contacto es prolongado, y además se rocía el aire con agua, se consigue que la corriente de aire que abandona la cámara lo haga en condiciones de saturación T_S, X_S, \hat{i}_{GS} . Para compensar las pérdidas de agua que pasan al aire por evaporación, se adiciona continuamente un caudal de agua igual a $w_L = w'(X_S - X_1)$ a la temperatura T_S .

Un balance energético del sistema conduce a la ecuación:

$$w_L \hat{C}_L (T_S - T^*) + w' \hat{i}_{G1} = w' \hat{i}_{GS}$$

en la que la temperatura de referencia es $T^* = 0$.

La entalpía es función de la temperatura y humedad, según la ecuación 6.16, por lo que:

$$w' \hat{C}_L T_S (X_S - X_1) + w' (\hat{s}_1 T_1 + \lambda_0 X_1) = w' (\hat{s}_S T_S + \lambda_0 X_S)$$

El agua líquida que se evapora y pasa al aire lo hace a la temperatura de saturación T_S . El calor específico húmedo a la temperatura T_S es:

$$\hat{s}_S = \hat{s}_1 + \hat{C}_L (X_S - X_1) \tag{6.28}$$

por lo que:

$$\hat{C}_L T_S (X_S - X_1) + \hat{s}_1 T_1 + \lambda_0 X_1 = \hat{s}_1 T_S + \hat{C}_V (X_S - X_1) T_S + \lambda_0 X_S$$

que reordenando: $(X_S - X_1) [\hat{C}_L T_S - \hat{C}_V T_S - \lambda_0] = \hat{s}_1 (T_S - T_1)$

Pero como el calor latente de evaporación a la temperatura de saturación T_S es:

$$\lambda_S = \lambda_0 + \hat{C}_V T_S - \hat{C}_L T_S \tag{6.29}$$

se obtiene: $X_S - X_1 = -\frac{\hat{s}_1}{\lambda_S} (T_S - T_1)$ [6.30]

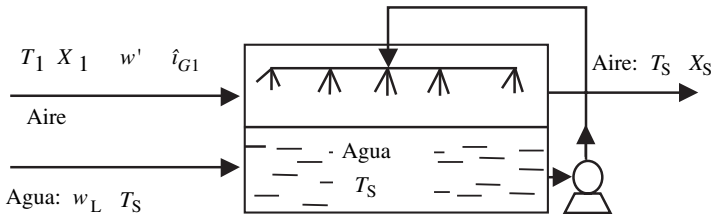


Figura 6.6. Saturación adiabática del aire.

que es una ecuación que permite los cálculos en procesos de saturación adiabáticos, en función de la humedad absoluta y temperatura.

Si se comparan las ecuaciones 6.30 y 6.27 se observa que la temperatura de saturación adiabática coincide con la de termómetro húmedo ($T_S = T_H$) para una presión total de 101,3 kPa (1 atmósfera) y calor específico:

$$\hat{s}_1 = 0,00614 \frac{(h_C + h_R)}{K_G} \quad [6.31]$$

expresión que es conocida como relación de Lewis.

De la comparación anterior se obtiene la relación psicrométrica:

$$b = 0,00614 \frac{(h_C + h_R)}{K_G \hat{s}_1} \quad [6.32]$$

que para el sistema aire-agua posee un valor de 1 kJ/(kg·°C). Para otros sistemas gas-líquido esta relación psicrométrica es superior a la unidad ($b > 1$), y además la temperatura de termómetro húmedo es superior a la de saturación.

En el diagrama $\hat{s}-T$ las condiciones del aire a la entrada de la cámara vienen dadas por el punto 1 (figura 6.7). Las condiciones del punto de salida se obtienen al trazar una recta de pendiente $-\hat{s}_1/\lambda_S$, cuya intersección con la curva de saturación (punto 2) da precisamente las condiciones del aire que abandona la cámara.

En caso que no se disponga del diagrama psicrométrico la temperatura de saturación adiabática puede obtenerse mediante un proceso iterativo, cuyas etapas de cálculo son las siguientes:

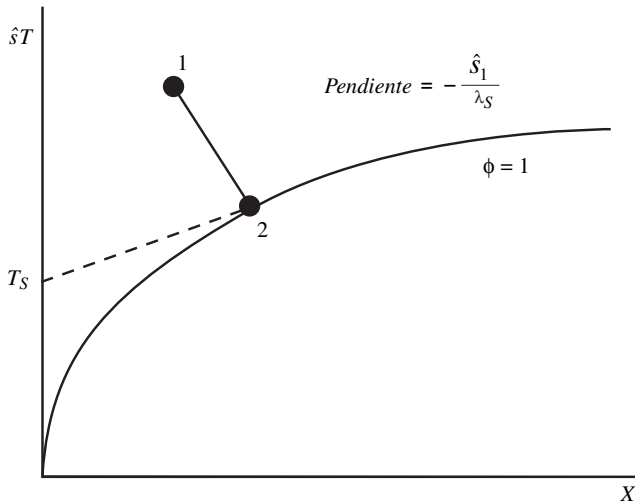


Figura 6.7. Proceso de saturación adiabática del aire.

120 *Operaciones Unitarias en la Ingeniería de Alimentos*

- a) Se supone una temperatura de saturación T_S .
- b) Con esta temperatura se calculan el calor latente λ_S y presión de vapor P_S de saturación.
- c) Con la ecuación 6.30 se calcula la humedad de saturación X_S correspondiente.
- d) Con la ecuación 6.4 se calcula también la humedad de saturación X_S' .
- e) Se comparan las humedades de saturación X_S y X_S' calculadas en las etapas c) y d). Si coinciden los valores, el cálculo se da por acabado. En caso contrario se inicia la etapa a) con un nuevo valor de la temperatura de saturación.

PROBLEMAS

Problema 6.1

Un aire húmedo posee una temperatura seca de 75 °C y una temperatura húmeda de 45 °C. Calcular su humedad absoluta y relativa, así como su densidad.

A partir de la ecuación psicrométrica [Ec. 6.26], tal como se ha indicado anteriormente, en las condiciones usuales de trabajo se considera que esta ecuación se puede expresar como:

$$P_S - P_V = -66 (T_H - T_1)$$

si la presión se da en Pa, y la temperatura en °C.

Para la temperatura seca de 75 °C, la presión de saturación se obtiene de las tablas de vapor de agua saturado $P_V = 38,5$ kPa, de la que se puede obtener la humedad absoluta, a partir de la ecuación 6.3:

$$X = 0,622 \frac{P_V}{P - P_V} = 0,622 \frac{38,5}{101,23 - 38,5} = 0,382 \frac{\text{kg agua}}{\text{kg aire seco}}$$

Para la temperatura de 45°C le corresponde una presión de saturación de 9,8 kPa, de la que se obtiene una humedad de saturación $X_S = 0,067$ kg agua/kg aire seco.

Aplicando la ecuación psicrométrica:

$$P_V - 9.800 = -66 \cdot (75 - 45)$$

con lo que $P_V = 7.820$ Pa. A partir de esta presión y con la ecuación 6.3 se puede determinar la humedad absoluta:

$$X = 0,622 \frac{P_V}{P - P_V} = 0,622 \frac{7,82}{101,23 - 7,82} = 0,052 \frac{\text{kg agua}}{\text{kg aire seco}}$$

La humedad relativa se obtiene a partir de la ecuación 6.5:

$$\phi = \frac{P_V}{P_S} = \frac{7.820 \text{ Pa}}{38.500 \text{ Pa}} = 0,20 \text{ (20\%)}$$

El volumen específico húmedo se calcula mediante la ecuación 6.8, en la que la humedad absoluta es 0,052 kg agua/kg aire seco, la temperatura 348 K, y la presión total de 101,23 kPa, mientras que la constante R es $8,314 \cdot 10^3$ Pa·m³/(kmol·K). Con estos valores se obtiene un valor del volumen húmedo de 1,072 m³ aire seco/kg. Por lo que la densidad será el inverso de este valor, obteniendo $9,33 \cdot 10^{-1}$ kg/m³.

La densidad se podría haber calculado a partir de la ecuación 6.11b.

$$\rho = 0,0035 \frac{101.230}{348} - 0,0013 \frac{(0,2) (38.500)}{348} = 0,989 \text{ kg/m}^3$$

Problema 6.2

Una habitación se mantiene a una temperatura de 21 °C, mediante un radiador, mientras que en el exterior la temperatura es de 15 °C, siendo su temperatura húmeda correspondiente 10 °C. Determinar la humedad absoluta, presión de vapor de agua, humedad relativa, temperatura de rocío y temperatura de saturación adiabática del aire contenido en la habitación.

Con las temperaturas $T_1 = 15\text{ °C}$ y $T_H = 10\text{ °C}$, es posible localizar el punto 1 en el diagrama psicrométrico (figura P6.2). Cuando la habitación se calienta hasta 21 °C se obtienen unas nuevas condiciones del aire, que se representan por el punto 2 en el mismo diagrama.

Para obtener el punto 2 se parte del 1, y para una humedad absoluta constante se sube hasta alcanzar la isoterma de 21 °C. La humedad absoluta no variará, ya que kg agua/kg aire seco son constantes.

A partir del diagrama psicrométrico es posible encontrar los valores que se preguntan en el problema:

- Humedad absoluta: $X = 0,0056\text{ kg agua/kg aire seco}$
- Humedad relativa: $\phi = 0,37\text{ (37\%)}$
- Temperatura de rocío: $T_R = 5,2\text{ °C}$
- Temperatura de saturación adiabática: $T_S = 12,8\text{ °C}$

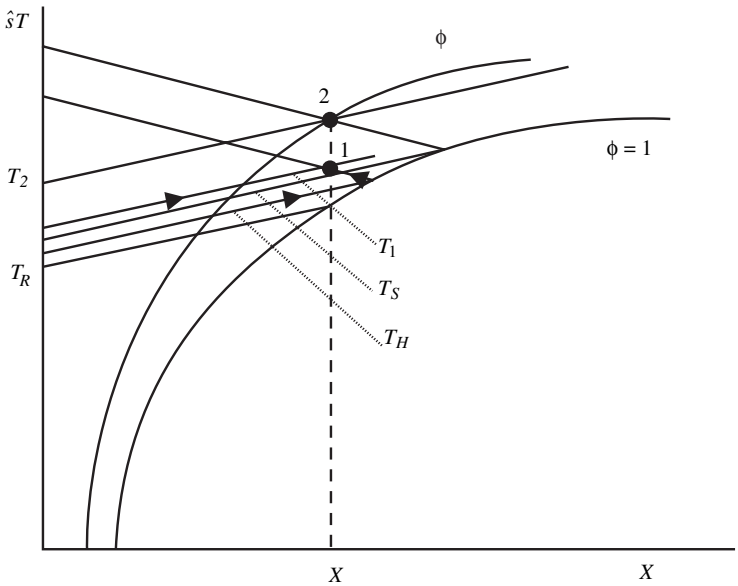


Figura P6.2. Problema 6.2.

La presión de vapor se calcula a partir de la ecuación 6.3, en la que se sustituyen los valores de las diferentes variables $X = 0,0056$ kg agua/kg aire seco, $P = 101,23$ kPa, lo que permite obtener una presión de vapor de $P_V = 903$ Pa.

Problema 6.3

La temperatura en un almacén es de 30 °C, siendo 12 °C la temperatura de rocío del aire contenido en dicho almacén. Calcular: a) La humedad relativa que poseerá el aire si se enfría hasta 16 °C. b) La cantidad de agua que se eliminará de 570 m³ de aire con las condiciones indicadas, si se enfría hasta 2 °C.

En el diagrama psicrométrico, el punto 1 (figura P6.3) representa las condiciones del aire en el almacén, con $T_1 = 30$ °C y $T_R = 12$ °C, que dan un contenido de humedad absoluta de $X_1 = 0,0087$ kg agua/kg aire seco. Al enfriar este aire hasta 16 °C, la humedad absoluta no variará ($X_2 = X_1$). Por tanto, en el mismo diagrama se obtiene el punto 2 al interseccionar la recta vertical húmeda X_2 con la isoterma 16 °C.

Esta intersección permite obtener el punto 2, que se corresponde a una curva de humedad relativa $\phi_2 = 0,77$ (77%).

El valor de esta humedad relativa podría haberse obtenido analíticamente. Inicialmente se calcula la humedad absoluta con la ecuación 6.3, en la que la presión de vapor se obtiene de las tablas de vapor de agua para $T_R = 12$ °C, siendo $P_V = 1.390$ Pa. Estos valores se sustituyen en la ecuación 6.3:

$$X_1 = 0,622 \frac{1,39 \cdot 10^3}{(101,23 - 1,39) \cdot 10^3} = 0,00866 \frac{\text{kg agua}}{\text{kg aire seco}}$$

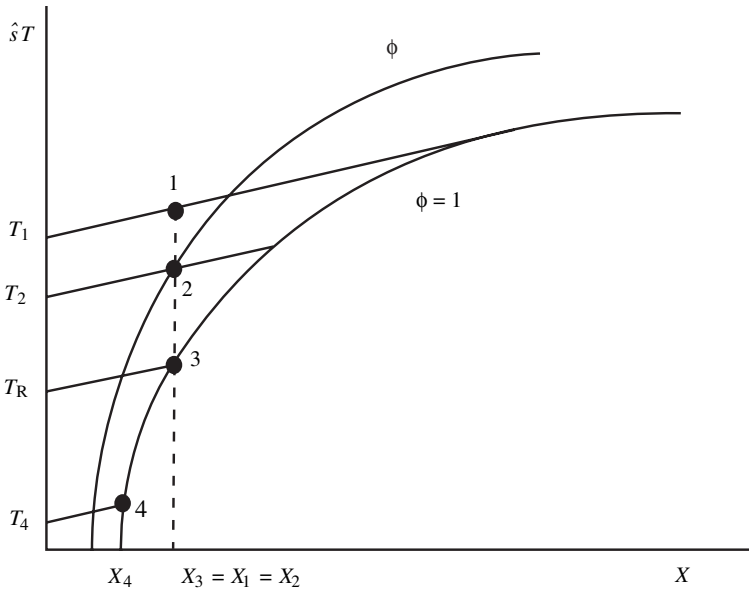


Figura P6.3. Problema 6.3.

Para la temperatura de 16 °C, a partir de las tablas de vapor de agua se obtiene que la presión de saturación a esta temperatura es $P_s = 1.832$ Pa. Como la humedad absoluta X_2 es la misma que X_1 , a partir de la ecuación 6.6 es posible determinar la humedad relativa:

$$0,0087 = 0,622 \frac{1,83 \cdot 10^3 \phi}{(101,23 - 1,83 \phi) \cdot 10^3}$$

de la que se obtiene la humedad relativa para las condiciones del punto 2: $\phi_2 = 0,76$ (76%).

Para calcular los kg de agua que condensan al pasar a 2 °C, se determinarán previamente las humedades absolutas a 16 °C (X_3) y a 2 °C (X_4). La diferencia ($X_3 - X_4$) da la cantidad de agua eliminada por cada kg de aire seco. Por tanto, se calcularán inicialmente los kg de aire seco contenidos en los 570 m³ de aire húmedo.

A partir de la ecuación 6.8 se calculará el volumen húmedo que ocupa 1 kg de aire seco a 30 °C:

$$\hat{V} = \left(\frac{1}{28,9} + \frac{0,0087}{18} \right) \frac{(8,314 \cdot 10^3) (303)}{101,23 \cdot 10^3} = 0,873 \frac{\text{m}^3 \text{ aire húmedo}}{\text{kg aire seco}}$$

con lo que los kg de aire seco contenidos en los 570 m³ serán:

$$570 \text{ m}^3 \text{ aire húmedo} \frac{1 \text{ kg aire seco}}{0,873 \text{ m}^3 \text{ aire húmedo}} = 653 \text{ kg aire seco}$$

La humedad absoluta del punto 3 coincide con las del punto 1 y 2, mientras que la del punto 4 se obtiene a partir del diagrama psicrométrico:

$$X_3 = X_1 = X_2 = 0,0087 \text{ kg agua/kg aire seco}$$

$$X_4 = 0,0042 \text{ kg agua/kg aire seco}$$

Lo que permite calcular el agua eliminada cuando el aire se enfría hasta 2 °C:

$$653 \text{ kg aire seco} (0,0087 - 0,0042) \frac{\text{kg agua}}{\text{kg aire seco}} = 2,94 \text{ kg de agua}$$

Problema 6.4

En un día de julio en que la presión atmosférica era de 1 atm, la temperatura del aire era de 32 °C, siendo su humedad relativa del 30%. Determinar: a) La cantidad de agua que contiene el aire que se encuentra en una habitación de 162 m³ b) El peso de la mezcla aire-vapor de agua que se encuentra en la habitación. c) Explicar porqué los huevos «sudaban» al sacarlos de la nevera. La temperatura en el interior de la nevera era de 8 °C. d) La humedad absoluta del aire de la habitación, una vez saturado, si se hubiera humedecido isotérmicamente.

a) A partir del diagrama psicrométrico, para la temperatura $T_1 = 32^\circ\text{C}$, y humedad relativa $\phi = 0,3$, se puede fijar el punto 1, al cual le corresponde una humedad absoluta de $X_1 = 0,0088 \text{ kg agua/kg aire seco}$. El volumen húmedo puede calcularse a partir de la ecuación 6.8.

$$\hat{V} = \left(\frac{1}{28,9} + \frac{0,0088}{18} \right) \frac{(8,314 \cdot 10^3) (305)}{101,23 \cdot 10^3} = 0,879 \frac{\text{kg aire húmedo}}{\text{kg aire seco}}$$

Como el volumen de la habitación es de 162 m^3 , y es aire húmedo, la cantidad de aire seco de la habitación será:

$$162 \text{ m}^3 \text{ aire húmedo} \frac{1 \text{ kg aire seco}}{0,879 \text{ kg aire húmedo}} = 184,3 \text{ kg aire seco}$$

La cantidad de agua contenida en la habitación se calculará multiplicando este valor por la humedad absoluta del aire:

$$(184,3 \text{ kg aire seco}) \left(0,0088 \frac{\text{kg agua}}{\text{kg aire seco}} \right) = 1,622 \text{ kg de agua}$$

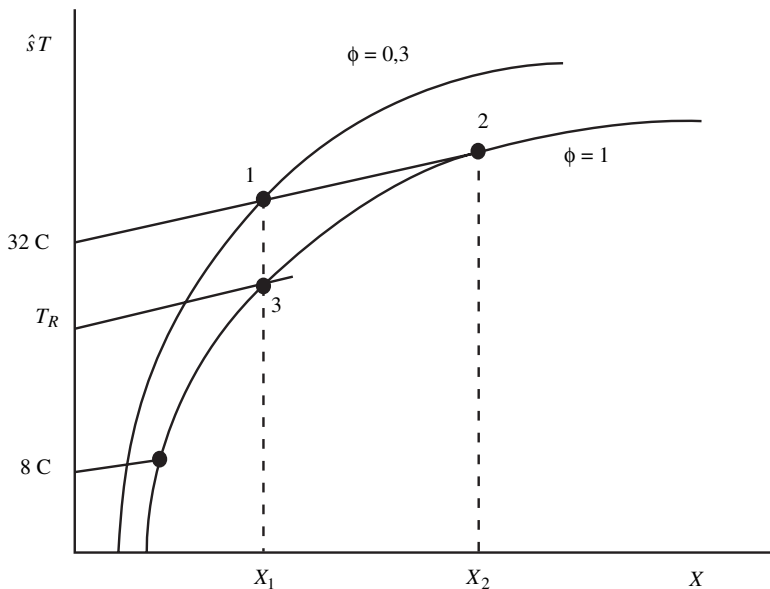


Figura P6.4. Problema 6.4.

b) El peso de la mezcla aire-agua de la habitación es la suma de los valores obtenidos en el apartado anterior:

$$(184,3 \text{ kg aire seco} + 1,62 \text{ kg agua}) = 185,92 \text{ kg aire húmedo}$$

c) En el diagrama psicrométrico se tiene que para las condiciones $T_1 = 32^\circ\text{C}$ y $\phi = 0,3$ se obtiene que la humedad absoluta es $X_1 = 0,0088$ kg agua/kg aire seco. Para esta humedad absoluta y humedad relativa $\phi = 1$ se obtiene como punto representativo el 3, por donde pasa la isoterma de $12,3^\circ\text{C}$; es decir, la temperatura de rocío correspondiente es $T_R = 12,3^\circ\text{C}$. Por tanto, al enfriar el huevo a 8°C $T_{\text{HUEVO}} < T_R$, por lo que condensará agua sobre la superficie del huevo.

d) Cuando se humedece isotérmicamente el aire hasta saturación, en el diagrama psicrométrico se sigue una isoterma de 32°C , para pasar del punto 1 al 2. Las condiciones del punto 2 son, por tanto, $T_2 = 32^\circ\text{C}$ y $\phi_2 = 1$. La abscisa correspondiente a este punto 2 es el valor de la humedad absoluta del aire bajo estas nuevas condiciones: $X_2 = 0,030$ kg agua/kg aire seco.

Problema 6.5

En un secador se eliminan 100 kg/h de agua de un material húmedo, utilizando una corriente de aire que se encuentra a 24°C y posee una humedad absoluta de 0,01 kg agua/kg aire seco. Este aire se calienta hasta una temperatura de 69°C antes de introducirlo en el secador. A la salida del secador existe un termómetro que marca una temperatura seca de 54°C y una húmeda de 38°C .

a) *Determinar el consumo de aire. b) A la entrada del secador el agua contenida en el material se halla a 24°C , mientras que el vapor que abandona dicho secador se encuentra a 54°C . Calcular el caudal de calor que se debe suministrar al secador. Determinar, asimismo, el flujo de calor que se debe suministrar al precalentador.*

En el diagrama psicrométrico (figura P6.5) se puede representar las transformaciones que sufre el aire en todo el proceso. Inicialmente el aire posee una temperatura $T_1 = 24^\circ\text{C}$, y una humedad absoluta $X_1 = 0,01$ kg agua/kg aire seco, lo que permite determinar el punto 1. En el calentador, el aire aumenta su temperatura hasta $T_2 = 69^\circ\text{C}$, aunque su humedad absoluta permanece siendo la misma ($X_2 = X_1$), pudiéndose determinar, de esta forma, el punto 2. Las condiciones del aire que abandona el secador son $T_H = 38^\circ\text{C}$ y $T_3 = 54^\circ\text{C}$, con lo que el punto 3 se obtiene trazando la isoterma que pasa por 38°C , al cortar esta isoterma a la curva de $\phi = 1$, se traza la isoentálpica, y el corte de ésta con la isoterma de 54°C permite determinar el punto 3, al que le corresponde una humedad absoluta de $X_3 = 0,0375$ kg agua/kg aire seco.

a) Si el caudal de aire seco que circula a través de todo el proceso es w' , de un balance de agua en el secador se obtiene:

$$w'(X_3 - X_2) = 100 \text{ kg agua evaporada/h}$$

$$w' = \frac{100 \text{ kg agua evaporada/h}}{(0,0375 - 0,01) \text{ kg agua/kg aire seco}} = 3.636,36 \text{ kg aire seco/h}$$

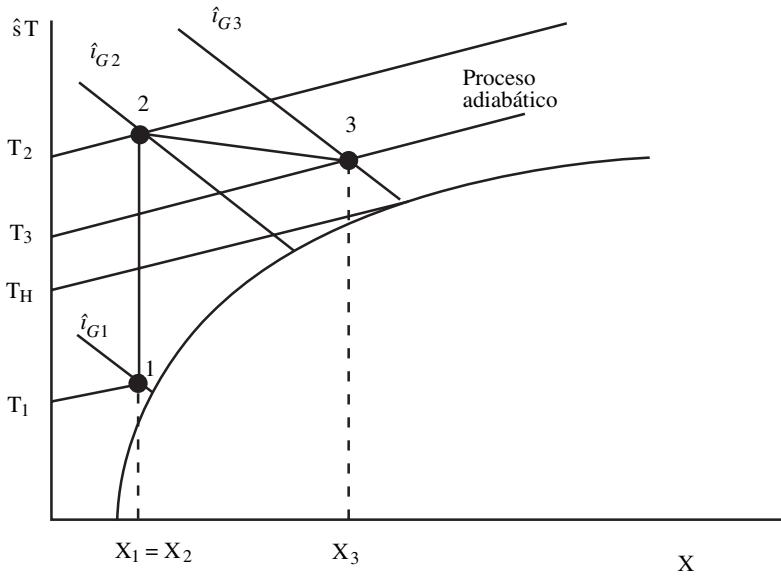


Figura P6.6. Problema 6.5.

El caudal de aire húmedo que penetra al calentador es el mismo que el que lo abandona, es decir:

$$w_1 = w_2 = w'(1 + X_2) = (3.636,36) (1 + 0,01) = 3.672,73 \text{ kg aire húmedo/h}$$

b) Se supone que el material seco abandona el secador a una temperatura de 24 °C, con lo que la entalpía asociada a este material coincide a la entrada y salida del secador. Además, se tomará como temperatura de referencia $T^* = 0 \text{ °C}$. Si \dot{Q}_S es el caudal de calor al secador, al realizar un balance energético en el mismo se obtiene:

$$\dot{Q}_S + w' \hat{i}_{G2} + w_{AGUA} \hat{C}_p T_{AGUA} = w' \hat{i}_{G3}$$

A partir del diagrama psicrométrico se calculan las entalpías \hat{i}_{G2} e \hat{i}_{G3} , que poseen unos valores:

$$\hat{i}_{G2} = 95,42 \text{ kJ/kg}$$

$$\hat{i}_{G3} = 151,5 \text{ kJ/kg}$$

Al sustituir los datos en la ecuación anterior se obtiene:

$$\dot{Q}_S + (3.636,36) (95,42) + (100) (4,18) (24) = (3.636,36) (151,5)$$

$$\dot{Q}_S = 1,94 \cdot 10^5 \text{ kJ/h} = 54,2 \text{ kW}$$

Si \dot{Q}_C es el caudal de calor aportado al calentador, al realizar un balance energético en el mismo se obtiene:

$$\dot{Q}_C = w (\hat{i}_{G2} - \hat{i}_{G1})$$

El valor de \hat{i}_{G1} se obtiene del diagrama psicrométrico: $\hat{i}_{G1} = 49,38$ kJ/kg. Este valor también se podría haber obtenido a partir de las ecuaciones 6.13 y 6.16:

$$\hat{s} = 1 + 1,92 X_1 = 1 + 1,92 (0,01) = 1,0192 \text{ kJ/kg}\cdot^\circ\text{C}$$

$$\hat{i}_G = \hat{s} T + \lambda_0 X_1 = (1,0192) (24) + (2.490) (0,01) = 49,36 \text{ kJ/kg}$$

Con lo que el calor suministrado al aire en el calentador será:

$$\dot{Q}_C = (3.636,36) (95,42 - 49,36) = 167.490 \text{ kJ/h}$$

$$\dot{Q}_C = 167.490 \text{ kJ/h} = 46,5 \text{ kW}$$

7.1. Introducción

La reología es la ciencia que estudia el flujo y las deformaciones de sólidos y fluidos, bajo la influencia de fuerzas mecánicas.

Para el estudio del comportamiento reológico de los diferentes productos, es necesario recurrir a la reometría, lo que permite conocer dicho comportamiento, y ser utilizado en distintos campos de la industria. Así, las medidas reológicas de un producto en la etapa de manufactura pueden servir como control de calidad de dicho producto. También puede llegar a correlacionarse la microestructura de un producto con su comportamiento reológico, lo que permite el desarrollo de nuevos materiales. La reometría permite obtener ecuaciones reológicas, que se aplican en ingeniería de procesos, sobre todo en las operaciones unitarias que implican transferencia de calor y cantidad de movimiento. Finalmente, conociendo las exigencias de los consumidores, es posible obtener un producto que se adecúe a estas exigencias.

En las industrias alimentarias se trabaja muy frecuentemente con productos que se encuentran en fase líquida, en todas o en algunas de las operaciones industriales realizadas sobre los mismos (concentración, evaporación, pasteurización, bombeo, entre otras), siendo imprescindible un buen diseño de cada instalación para un funcionamiento óptimo del proceso. En el diseño de todo proceso es necesario conocer, entre otras, las características físicas de las corrientes que lo forman. Una de estas características es el comportamiento reológico del fluido que se procesa, para evitar posibles sobredimensionamientos de bombas, conducciones, evaporadores, etc., que podrían repercutir negativamente en la economía del proceso.

La viscosidad se utiliza en el cálculo de parámetros de fenómenos de transporte de cantidad de movimiento y energía, así como para el control de calidad de ciertos productos. Debido a ello, en las ecuaciones del modelo matemático planteado para las diversas operaciones que forman un determinado proceso, intervienen las constantes reológicas de los fluidos que se procesan y que se deben determinar, generalmente, mediante experimentación en cada caso particular. Es por ello que es de suma importancia la caracterización reológica de las diferentes corrientes fluidas y la deducción de ecuaciones que permitan calcular directa-

mente las constantes reológicas en función del alimento considerado y de las variables de operación.

Entre los alimentos que se encuentran en fase líquida, bien sea en el proceso industrial de preparación, o bien en la presentación y utilización por el consumidor, pueden citarse las pastas, purés, bebidas, ovoproductos, lácteos, zumos naturales de frutas, concentrados vegetales, salsas, entre otros.

7.2. Esfuerzo y deformación

Cuando a un cuerpo cualquiera se le aplica una fuerza, la respuesta que presenta es distinta según sea el material. Así, cuando la fuerza se aplica a un sólido elástico, se deforma, pero cuando deja de actuar dicha fuerza, el sólido recupera su forma inicial. Sin embargo si el producto es un fluido newtoniano, cuando se deja de aplicar la fuerza, sigue fluyendo.

El **esfuerzo** (σ) aplicado a un material se define como la fuerza (F) por unidad de área (A). Los esfuerzos pueden ser normales y tangenciales. Dentro de los normales cabe distinguir los de tracción y compresión. Si se supone un cuerpo como el representado en la figura 7.1, se observa que sobre cada cara de dicho cuerpo pueden aplicarse tres esfuerzos, uno por cada dirección. Por tanto, existirán nueve componentes del esfuerzo, cada una de las cuales se designará con dos subíndices, expresando el primero de ellos la sección sobre la que se aplica, y el

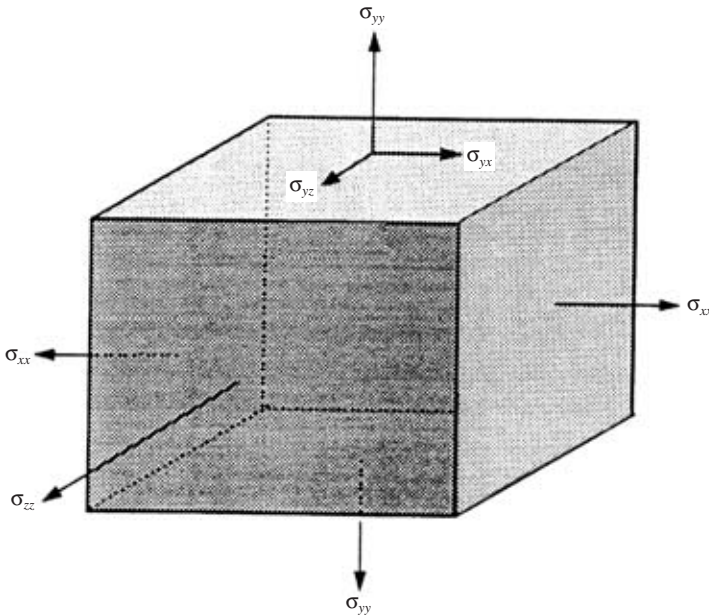


Figura 7.1. Esfuerzos sobre un material.

segundo la dirección. Así, σ_{ij} es un esfuerzo aplicado sobre la sección i en la dirección j . Las nueve componentes del esfuerzo forman lo que se denomina el tensor esfuerzo:

$$\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{Bmatrix} \quad [7.1]$$

El tensor esfuerzo es simétrico, lo que supone que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Por tanto, de las nueve componentes del tensor esfuerzo sólo son seis las independientes.

Los esfuerzos tangenciales son aquellos en que $i \neq j$, mientras que en los normales $i = j$. Los esfuerzos normales de tracción son positivos ($\sigma_{ii} > 0$), mientras que los de compresión son negativos ($\sigma_{ii} < 0$).

Todo esfuerzo aplicado a un material le produce **deformación**. Las deformaciones pueden ser angulares o longitudinales, según sea el tipo de esfuerzo aplicado. Los esfuerzos normales producen deformaciones longitudinales, que pueden ser alargamientos o acortamientos, dependiendo si el esfuerzo es de tracción a compresión. Los esfuerzos tangenciales producen deformaciones angulares.

Si se aplica un esfuerzo normal de tracción sobre una barra, de longitud inicial L_0 , le produce un alargamiento, de tal forma que su longitud final es $L = L_0 + \Delta L$ (figura 7.2). La deformación producida sobre esta barra puede expresarse como deformación de Cauchy:

$$\epsilon_c = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L}{L_0} - 1 \quad [7.2]$$

Otro modo sería utilizar la deformación de Hencky:

$$\epsilon_H = \ln(L/L_0) \quad [7.3]$$

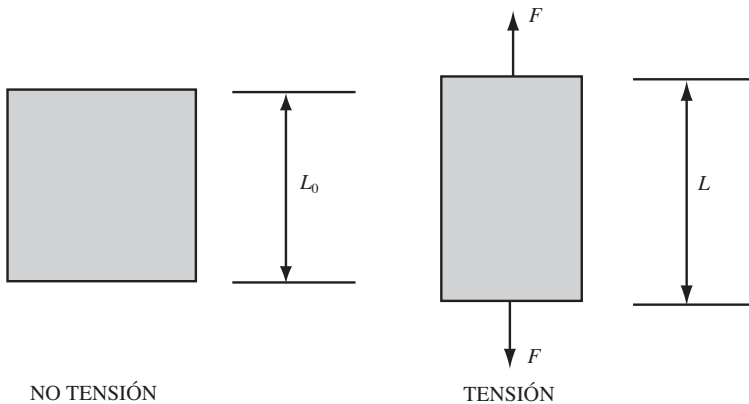


Figura 7.2. Deformación debida a un esfuerzo normal.

Para deformaciones elevadas es preferible utilizar esta última definición de deformación.

Otro tipo de deformación es la cizalla simple. Si a un material rectangular se le aplica sobre su cara superior un esfuerzo tangencial, se produce una deformación como la que se muestra en la figura 7.3, donde la cara inferior permanece estacionaria. El ángulo de cizalla γ se calcula según la ecuación:

$$\tan \gamma = \frac{\Delta L}{L} \quad [7.4]$$

En el caso que las deformaciones sean pequeñas, el ángulo expresado en radianes coincide con su tangente: $\tan \gamma = \gamma$, y se denomina deformación de cizalla.

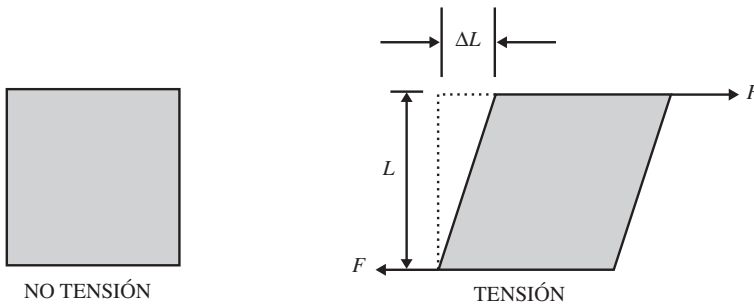


Figura 7.3. Deformación en cizalla.

7.3. Sólidos elásticos y fluidos newtonianos

Si a un material sólido se le aplica un esfuerzo tangencial (σ_{ij}), y se cumple que la relación entre este esfuerzo aplicado y la deformación de cizalla producida (γ) son proporcionales:

$$\sigma_{ij} = G \cdot \gamma \quad [7.5]$$

a la constante de proporcionalidad G se la denomina *módulo de cizalla* o de *rigidez*. Este tipo de material se denomina sólido de Hooke, siendo linealmente elástico y no fluye. La deformación permanece constante hasta que el esfuerzo es eliminado, volviendo el material a su forma inicial.

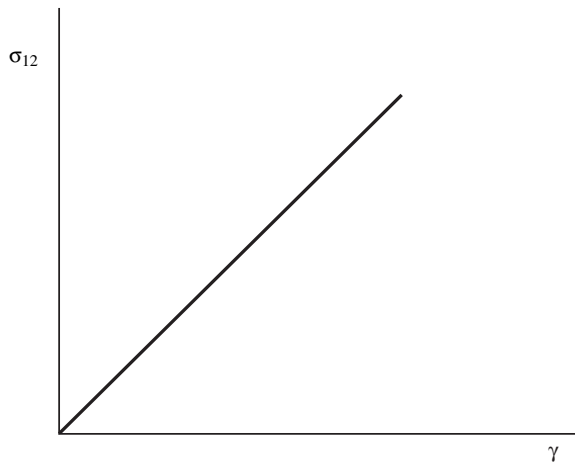
El comportamiento de sólido de Hooke también puede ser estudiado si se aplica un esfuerzo normal (σ_{ii}) que le produce un cambio en su longitud. El esfuerzo normal aplicado es directamente proporcional a la deformación de Cauchy producida:

$$\sigma_{ii} = E \cdot \epsilon_C \quad [7.6]$$

en la que la constante de proporcionalidad E recibe el nombre de *módulo de Young* o de elasticidad.

Los sólidos **elásticos** son aquellos que se deforman al estar sometidos a fuerzas de tensión, pero que recuperan su forma inicial a medida que se retiran dichas fuerzas. Aquellos sólidos que no recuperan su forma inicial al cesar las fuerzas se conocen como sólidos **plásticos**. Mientras que los sólidos **elastoplásticos** son intermedios a estos dos tipos, es decir, si los esfuerzos aplicados son menores que un cierto valor se comportan como sólidos elásticos, pero una vez superado este valor del esfuerzo, no pueden recuperar su forma inicial, comportándose como plásticos (figura 7.4).

a) *Sólido elástico*



b) *Sólido elastoplástico*

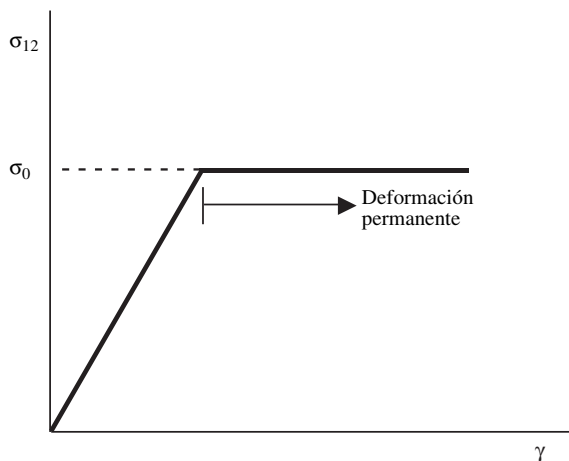


Figura 7.4. Curvas de deformación de sólidos.

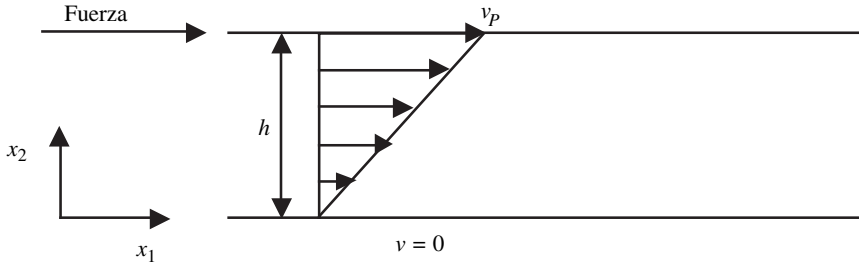


Figura 7.5. Perfil de velocidad entre placas paralelas.

Para el estudio del comportamiento ideal de fluidos se puede suponer una muestra que esté contenida entre dos placas paralelas separadas por una distancia h , tal como se muestra en la figura 7.5, en la que el plato inferior permanece fijo, mientras que el superior se mueve a una velocidad constante v_p . En un instante determinado, esta velocidad se define como:

$$v_p = \frac{\delta x}{\delta t}$$

Para poder mantener esta velocidad es necesario ejercer una fuerza por unidad de área (σ_{12}) sobre el plato superior. A lo largo de toda la altura del fluido se presenta un perfil de velocidades como el que se muestra en la figura 7.5. Este tipo de flujo se denomina cizalla simple, pudiéndose definir una velocidad de deformación ($\dot{\gamma}$):

$$\dot{\gamma} = \frac{dv_p}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\frac{\delta x}{\delta t} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta x}{\delta y} \right) = \frac{d\gamma}{dt} \quad [7.7]$$

El esfuerzo tangencial aplicado σ_{12} y la velocidad de deformación $\dot{\gamma}$ son directamente proporcionales, siendo la constante de proporcionalidad la **viscosidad** (η):

$$\sigma_{12} = \eta \dot{\gamma} \quad [7.8]$$

esta expresión es conocida como **ley de Newton de la viscosidad**.

Así como los sólidos que siguen la ley de Hooke de las deformaciones se les considera como sólidos elásticos ideales, los fluidos que siguen la ley de Newton de la viscosidad son considerados como fluidos viscosos ideales.

7.4. Funciones viscosimétricas

Para el estudio completo del flujo de fluidos es necesario correlacionar los esfuerzos y deformaciones o velocidad de deformación en tres dimensiones. Ello supone considerar, tanto el esfuerzo como la deformación o velocidad de deforma-

ción, como tensores, poseyendo por tanto nueve componentes cada uno de ellos. Sin embargo, en estado estacionario y flujo en cizalla simple, el tensor esfuerzo se reduce a:

$$\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{Bmatrix} \quad [7.9]$$

El flujo en cizalla simple también es denominado flujo viscosimétrico, y es el que se da en el flujo rotacional entre cilindros concéntricos, flujo axial en un tubo, flujo rotacional entre platos paralelos y plato y cono.

En flujo en cizalla simple únicamente son necesarias tres funciones para describir el comportamiento al flujo de un fluido. Estas son las denominadas funciones viscosimétricas, que incluyen la función viscosidad, $\eta(\dot{\gamma})$, y las funciones primera y segunda de esfuerzos normales, $\psi_1(\dot{\gamma})$ y $\psi_2(\dot{\gamma})$. Estas funciones se definen como:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \phi_1(\dot{\gamma}) = \frac{\sigma_{12}}{\dot{\gamma}} \quad [7.10]$$

$$\psi_1(\dot{\gamma}) = \phi_2(\dot{\gamma}) = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{(\dot{\gamma})^2} \quad [7.11]$$

$$\psi_2(\dot{\gamma}) = \phi_3(\dot{\gamma}) = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{(\dot{\gamma})^2} \quad [7.12]$$

En algunos casos se definen la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales como:

$$N_1 = \sigma_{11} - \sigma_{22} \quad [7.13]$$

$$N_2 = \sigma_{22} - \sigma_{33} \quad [7.14]$$

Generalmente, N_1 es bastante superior a N_2 , y además la medición de esta última función es difícil, y puede suponerse, de modo satisfactorio, que su valor es nulo.

7.5. Clasificación reológica de alimentos fluidos

En la mecánica clásica, la distinción entre líquidos y sólidos fue en un principio muy clara, y se generaron leyes físicas separadas para describir sus comportamientos; los sólidos representados por la ley de Hooke y los líquidos por la de Newton. Sin embargo, existe una variedad de productos que cuando fluyen presentan un comportamiento comprendido entre estos dos extremos. Tal es el caso de una gran cantidad de alimentos. Es justamente en estos casos en los que, para optimizar su uso en la industria, interesa caracterizarlos reológicamente.

De un modo muy general puede hacerse una primera distinción entre alimentos con comportamiento newtoniano y no newtoniano, según si su comportamiento reológico puede describirse mediante la ley de Newton de la viscosidad o no. Además, existen alimentos en los que su comportamiento depende del tiempo de actuación del esfuerzo realizado sobre ellos. Los fluidos cuyo comportamiento es únicamente función del esfuerzo cortante se denominan independientes del tiempo, y su viscosidad, a una determinada temperatura, sólo depende de la velocidad de deformación. Los fluidos dependientes del tiempo son aquellos en los que su viscosidad depende, no sólo del gradiente de velocidad, sino también del tiempo que actúa dicho gradiente. Además, existen alimentos que presentan conjuntamente comportamiento de fluido viscoso y sólido elástico, es decir son fluidos viscoelásticos.

La clasificación de los alimentos fluidos puede realizarse mediante las funciones viscosimétricas, definidas en el apartado anterior. Así, para fluidos newtonianos, la función viscosidad es constante, siendo precisamente su valor el de la viscosidad newtoniana [$\eta(\dot{\gamma}) = \eta = \text{cte}$]. En los fluidos no newtonianos esta función ya no es constante, pero puede ser independiente o dependiente del tiempo, lo que permite distinguir los fluidos no newtonianos independientes y dependientes del tiempo.

En los fluidos no newtonianos, ya no se puede hablar de viscosidad, ya que la relación entre el esfuerzo aplicado y la velocidad de deformación no es constante. La función viscosidad recibe el nombre de viscosidad aparente, y es función de la velocidad de deformación:

$$\eta_a = \frac{\sigma_{12}}{\dot{\gamma}} = \eta(\dot{\gamma}) \neq \text{cte} \quad [7.15]$$

La primera diferencia de esfuerzos normales (N_1) puede ser aplicada en el estudio del comportamiento viscoelástico de los fluidos que lo presenten.

De esta forma, se puede realizar una clasificación de los fluidos alimentarios según el esquema:

- A) Flujo newtoniano.
- B) Flujo no newtoniano.
 - 1) Comportamiento independiente del tiempo.
 - a) Fluidos plásticos.
 - b) Fluidos pseudoplásticos.
 - c) Fluidos dilatantes.
 - 2) Comportamiento dependiente del tiempo.
 - a) Fluidos tixotrópicos.
 - b) Fluidos antitixotrópicos o reopéticos.
- C) Comportamiento viscoelástico.

7.6. Flujo newtoniano

El flujo viscoso de un fluido newtoniano implica una deformación no recuperable. Este comportamiento se ilustra en la figura 7.5, en la que un fluido está contenido entre dos platos paralelos. El plato superior es obligado a moverse con una velocidad v , relativa al plato inferior. Esta velocidad es debida a la aplicación de una fuerza cortante F por unidad de área (se considera que los platos son de extensión infinita o que los efectos de borde son despreciables). Las capas de fluido en contacto con los platos se considera que se mueven a la misma velocidad que la superficie con la que están en contacto, lo que supone que no tiene lugar deslizamiento en las paredes. Entonces el fluido se comporta como una serie de capas paralelas, o láminas, cuyas velocidades son proporcionales a su distancia al plato inferior. Así, para un fluido newtoniano, el esfuerzo de cizalla es directamente proporcional a la velocidad de cambio de la velocidad con la distancia, es decir al gradiente de velocidad:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \eta \frac{dv}{dy} \quad [7.8a]$$

donde η es el coeficiente de viscosidad, aunque generalmente se le denomina simplemente viscosidad. Luego, se puede decir que para tales fluidos el gradiente de velocidad es igual a la velocidad de tiempo de cambio de la deformación de cizalla, resultando de esta forma que la ecuación de la viscosidad es usada más frecuentemente como:

$$\sigma = \eta \dot{\gamma} \quad [7.8b]$$

en la que $\dot{\gamma}$ es llamada velocidad de cizalla (o velocidad de deformación).

Los líquidos simples, soluciones verdaderas, disolventes de baja masa molecular, dispersiones macromoleculares diluidas, soluciones de polímeros que no interactúan y pastas con bajo contenido en sólidos presentan comportamiento ideal newtoniano.

Estas características al flujo incluyen la mayoría de las bebidas tales como té, café, cerveza, vinos, y bebidas gaseosas. También están incluidas las soluciones azucaradas. Diversos investigadores han estudiado la viscosidad de soluciones de sacarosa porque a menudo son utilizadas para calibrar los viscosímetros (Muller, 1973) (ver tabla 7.1). La viscosidad de soluciones de mezclas de azúcar es más o menos aditiva y puede ser estimada fácilmente.

La leche, que es una emulsión acuosa de glóbulos grasos de mantequilla de 0,0015-0,001 mm de diámetro y contiene cerca del 87% de agua, 4% de grasa, 5% de azúcar (mayoritariamente lactosa), y 3% de proteína (mayoritariamente caseína) es un líquido newtoniano. Fernández-Martín (1972) apuntó que la viscosidad de la leche depende de la temperatura, concentración, y del estado físico de la grasa y proteínas la cual a su vez es afectada por los tratamientos térmicos y mecánicos. Fernández-Martín encontró que las leches concentradas son líquidos no newtonianos, pero la leche concentrada presenta una débil dependencia de la cizalla. La le-

Tabla 7.1. Coeficiente de viscosidad de soluciones de sacarosa a 20 °C (Muller, 1973)

% Sacarosa	g/100 g agua	Viscosidad (mPa·s)
20	25,0	2,0
25	33,2	2,5
30	42,9	3,2
35	53,8	4,4
40	66,7	6,2
45	81,8	9,5
50	100,0	15,5
55	122,2	28,3
60	150,0	58,9
65	185,7	148,2
70	233,3	485,0
75	300,0	2.344,0

che descremada es menos viscosa que la leche entera con nata porque su viscosidad aumenta con el contenido en grasa. La viscosidad también aumenta con el aumento de sólidos no grasos, pero ni una ni otra relación es simple. Como con la mayoría de los líquidos, la viscosidad de la leche decrece con el aumento de temperatura.

Los aceites son normalmente newtonianos, pero a muy altas velocidades de deformación presentan un comportamiento diferente (este comportamiento se referirá como pseudoplasticidad). Puede ser debido al alineamiento de las celdas unitarias a altos esfuerzos cortantes, los cuales pueden causar una disminución en la fricción interna (Muller, 1973). Todos los aceites tienen una viscosidad claramente alta debido a su estructura molecular de largas cadenas. A mayor longitud de la cadena de ácidos grasos, mayor su viscosidad. Los aceites polimerizados tienen una viscosidad más alta que los no polimerizados. La viscosidad de un aceite también aumenta con la saturación de los enlaces doble de carbono.

Generalmente, parece que a mayor interacción molecular, mayor viscosidad. El principal constituyente del aceite de ricino es el ácido ricinoleico, que contiene 18 átomos de carbono con un grupo hidroxilo en la posición 12. Los grupos hidroxilo forman enlaces de hidrógeno y por esta razón la viscosidad del aceite de ricino es más alta que la de otro aceite similar.

Algunos zumos de frutas también presentan flujo newtoniano, tal como el zumo de manzana conteniendo pectinas y filtrados hasta 30 °Brix, mosto hasta 50 °Brix y zumo de naranja filtrada de 10 y 18 °Brix (Saravacos, 1970). Este comportamiento se encontró en el intervalo de temperatura de 20-70 °C. Los zumos clarificados y despectinizados de distintos tipos de frutas, tales como manzana, pera, melocotón, entre otros, presentan comportamiento newtoniano (Rao *et al.*, 1984; Ibarz *et al.*, 1987; Ibarz *et al.*, 1989; Ibarz *et al.*, 1992a). En el artículo de revisión de Barbosa-Cánovas *et al.* (1993) se pueden encontrar toda una serie de productos que presentan este comportamiento.

Otros importantes tipos de alimentos que presentan este comportamiento son el conjunto de jarabes semejantes a la miel, jarabe de cereales, mezclas de sacarosa y melazas.

Pryce-Jones (1953) muestra que con excepción de productos basados en brezo (*Calluna vulgaris*) de Inglaterra, manuka (*Leptospermum scoparium*) de Nueva Zelanda, y *Eucalyptus ficifolia* de Sudáfrica, la mayoría de las mieles son líquidos newtonianos (Rao, 1977).

Munro (1943) muestra que hay tres estados distintos en el efecto de la temperatura sobre la viscosidad de la miel, la mayor disminución ocurre con la miel fría que es calentada a temperatura ambiente, un posterior calentamiento reduce la velocidad de disminución de la viscosidad, y calentando por encima de 30 °C tiene poco valor práctico.

7.7 Flujo no newtoniano

7.7.1. Flujo independiente del tiempo

Aunque la mayoría de los gases y líquidos simples experimentalmente se comportan como fluidos newtonianos en la región de flujo laminar, varios sistemas, incluyendo emulsiones, suspensiones, soluciones de moléculas largas, y fluidos de masa macromolecular, se aproximan al comportamiento newtoniano sólo a muy bajos esfuerzos cortantes y velocidades de deformación. A un nivel más alto de cizalla, tales sistemas pueden desviarse del comportamiento ideal newtoniano en una o varias formas, como se ilustra en la figura 7.6. Aquí el esfuerzo cortante se muestra esquemáticamente en función de la velocidad de deformación. La línea recta *a*, que pasa por el origen y posee una pendiente constante representa un fluido newtoniano ideal. La curva *c*, que también pasa por el origen, representa un fluido pseudoplástico, o fluido «*shear thinning*». Para tales materiales el coeficiente de viscosidad no es una constante en toda su extensión como en la ecuación 7.8, pero es a su vez una función de la velocidad de deformación, toma un valor en cada instante, y esta cantidad es conocida como viscosidad aparente.

Análogamente, la curva *b* pasa por el origen, tendiendo a una línea recta cerca del origen, pero en contraste, posee una curvatura cóncava hacia el eje de esfuerzos cortantes a medida que aumenta la velocidad de deformación. A tales materiales se les llama dilatantes, o «*shear thickening*», y generalmente están limitados a suspensiones concentradas o pastas acuosas.

Otro importante fenómeno conectado con el flujo es la existencia de un valor umbral. Ciertos materiales realmente fluyen bajo un cizallamiento suficiente pero no fluyen si el esfuerzo de cizalla es inferior a un cierto valor, éste se llama valor umbral o umbral de fluencia (van Wazer *et al.*, 1963). Ejemplos de este tipo de comportamiento son bien conocidos, siendo mostrados como tales diversos materiales como tarta helada, yema de huevo batida, entre otros. Una vez que se excede el valor del umbral de fluencia, la velocidad de deformación es proporcional al esfuerzo, como en el caso de fluidos newtonianos. Un fluido que exhibe este

comportamiento se le denomina sustancia plástica o cuerpo de Bingham (ver curva *d*, fig. 7.6). Materiales que exhiben umbral de fluencia también pueden presentar falta de linealidad en el cociente obtenido al dividir el esfuerzo cortante por la velocidad de deformación.

La ecuación para este cociente, llamada viscosidad plástica aparente, η_{pl} , y está dada por:

$$\eta_{pl} = \frac{\sigma - \sigma_0}{\dot{\gamma}} \quad [7.16]$$

donde σ_0 es el umbral de fluencia. Los dos cuerpos que exhiben flujo no lineal una vez excedido el umbral de fluencia se llaman fluidos pseudoplásticos con umbral de fluencia (curva *e*, fig. 7.6).

Estos tipos de comportamiento al flujo están referidos todos al estado estacionario, o flujo independiente del tiempo (en el sentido que el equilibrio se alcance en un tiempo relativamente corto durante el experimento). Los fluidos newtonianos, pseudoplásticos y dilatantes, no poseen un umbral de fluencia, pudiendo ser llamados todos ellos líquidos. Sin embargo, las sustancias plásticas exhiben las propiedades de líquidos a esfuerzos superiores al umbral de fluencia, por lo que pueden ser clasificados tanto como líquidos o como sólidos.

Para expresar cuantitativamente el flujo y ajustar los datos experimentales, en general, el modelo más aplicado es una ecuación potencial o modelo de Herschel-Bulkley:

$$\sigma = k \cdot \dot{\gamma}^n + c \quad [7.17]$$

Esta ecuación contiene el esfuerzo cortante (σ), esfuerzo umbral (c), índice de consistencia (k), velocidad de deformación ($\dot{\gamma}$) e índice de comportamiento al flujo (n), y puede representar propiedades newtonianas, de cuerpo de Bingham, pseudoplásticas y dilatantes, dependiendo del valor de las constantes.

La dependencia con respecto a la velocidad de deformación pone de manifiesto la existencia de una estructura dentro del sistema. El comportamiento pseudoplástico indica una ruptura continua o reorganización de la estructura, dando como resultado una disminución de la resistencia al flujo. La dilatancia demuestra la elaboración o reorganización de estructuras, dando como resultado un aumento de la resistencia al aplicar una fuerza (Rha, 1978). El comportamiento pseudoplástico es debido a la presencia de:

1. Compuestos de elevada masa molecular o partículas alargadas a concentraciones bajas.
2. Alta interacción entre partículas, causando su agregación o asociación por enlaces secundarios.
3. Relación axial elevada y asimetría de las partículas, requiriendo su orientación a lo largo de las líneas de corriente.
4. Variación de la forma y tamaño de las partículas, permitiendo su apilamiento.
5. Partículas no rígidas o flexibles, que pueden sufrir un cambio en su geometría o conformación.

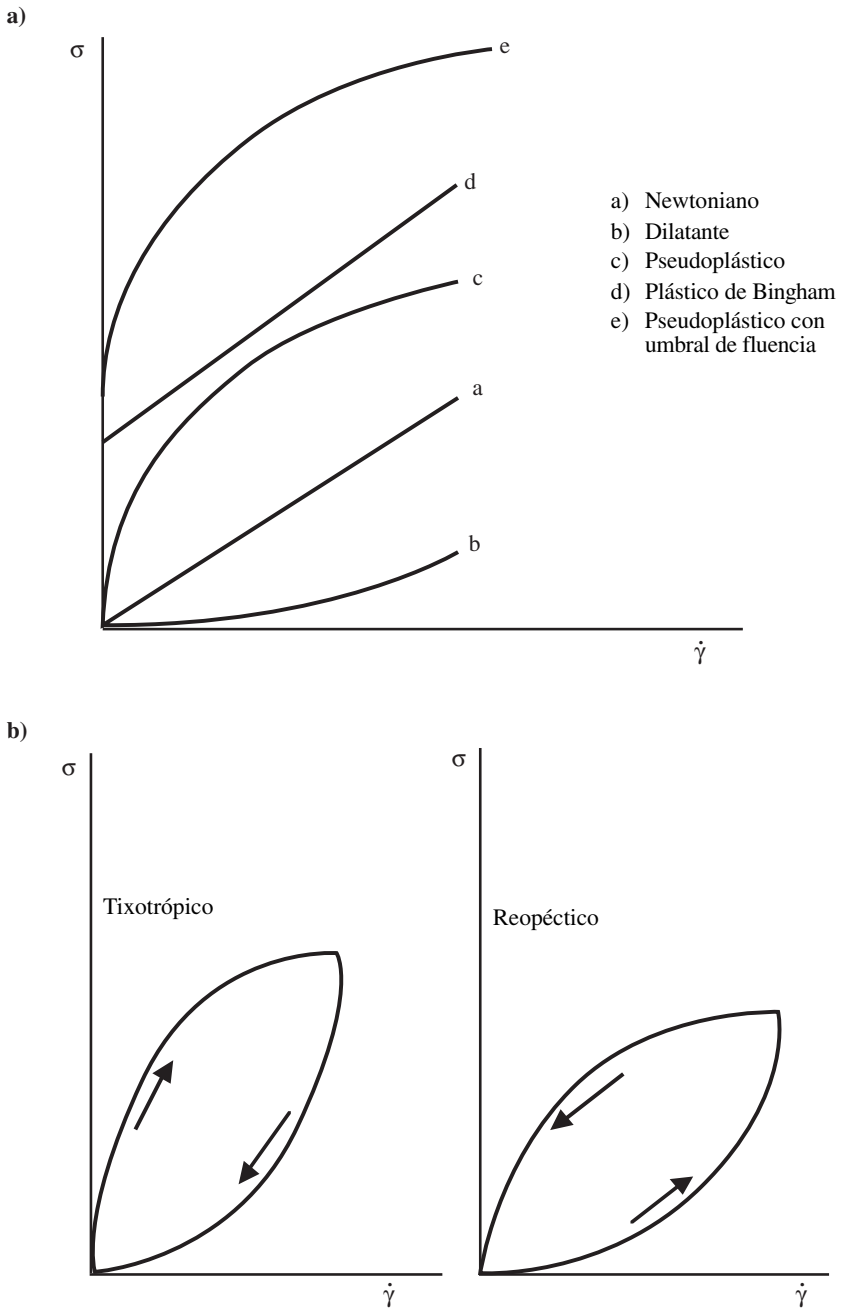


Figura 7.6. Reogramas de fluidos: a) Newtonianos y no newtonianos independientes del tiempo. b) No newtonianos dependientes del tiempo.

La dilatancia (*shear thickening*) puede explicarse por la presencia de partículas, de formas y tamaños variados, ceñidas y estrechamente empaquetadas, con lo que el flujo se torna relativamente más dificultoso con el aumento de presión. Con el aumento de la velocidad de deformación, las partículas largas y flexibles pueden estirarse; lo que contribuye a su dilatancia (Rha, 1978).

Un número de alimentos líquidos exhiben comportamiento pseudoplástico al flujo. Algunos de los científicos que han investigado en este tema son: Saravacos (1970), que trabajó con manzana, uva, y zumo comercial de naranja; Prentice (1968), con nata; Cornford *et al.* (1969) con muestras derretidas de huevos enteros congelados; Tung *et al.* (1970), con clara de huevo no mezclada.

En general, los purés de frutas y vegetales son fluidos pseudoplásticos. La consistencia de estos productos es un parámetro importante de calidad y es medido a menudo con un solo punto, utilizando instrumentos tales como los consistómetros Adams y Bostwick, el viscosímetro Stormer, y la pipeta de flujo (Rao, 1977). La consistencia de purés de tomate depende del método de preparación y del tratamiento mecánico a la que han sido sometidas las muestras, además de la variedad y madurez de los tomates.

Harper y El Sahrighi (1965) estudiaron el comportamiento reológico de concentrados de tomate en el intervalo de sólidos totales comprendido entre 5,8 a 30,0% en peso. El modelo de la potencia describe adecuadamente el comportamiento al flujo de estos concentrados.

Watson (1968) usó el modelo de la potencia para caracterizar el comportamiento reológico de purés y concentrados de albaricoques verdes y maduros.

Las propiedades reológicas de cierto número de otros purés de frutas han sido determinados, y en cada caso el modelo de la potencia ha sido utilizado para describir el comportamiento al flujo. Los productos estudiados son: salsa de manzana (Charm, 1960; Saravacos, 1968), puré de plátano (Charm, 1960), puré de melocotón (Saravacos y Moyer, 1967; Saravacos, 1968), puré de pera (Harper y Leberman, 1962; Saravacos, 1968); boniato (Rao *et al.*, 1975).

Se encontró que el ketchup de tomate y la mostaza francesa obedecen a la ley de la potencia con un umbral de fluencia (Higgs y Norrington, 1971). No demasiados productos exhiben comportamiento dilatante como lo presentan las mieles de *Eucalyptus ficifolia*, *Eucalyptus eugenioides*, *Eucalyptus orymbosa*, y *Opuntia eugelmanni*.

7.7.2. Flujo dependiente del tiempo

Algunos materiales exhiben características de flujo dependientes del tiempo. Así, al aumentar el tiempo de flujo bajo condiciones constantes, tales fluidos pueden desarrollar un aumento o disminución de la viscosidad. El primero de estos efectos es denominado reopexia, mientras que el último se conoce como tixotropía, y ambos son atribuidos al cambio continuo de la estructura del material, que puede ser en cualquier caso reversible o irreversible.

Los factores que contribuyen a la tixotropía también contribuyen a la pseudo-plasticidad, y los factores causantes de la reopexia también causan la dilatancia. La tixotropía es debida a la dependencia del tiempo, semejante a la dependencia a la cizalla, y es el resultado de la reorganización estructural de la estructura, con una disminución a la resistencia al flujo. El comportamiento reopéctico implica la elaboración o reorganización de estructura, que trae consigo un aumento de la resistencia al flujo.

En otras palabras, la descripción fenomenológica de las características al flujo no puede ser completa a menos que se incluya el tiempo, de modo que, en el caso general, en las curvas de flujo debe ser añadido un eje para el tiempo.

Cierto número de investigadores (Moore, 1959; Ree y Eyring, 1959; Peter, 1964; Cheng y Evans, 1965; Harris, 1967; Frederickson, 1970; Ritter y Govier, 1970; Joye y Poehlin, 1971; Lee y Brodkey, 1971; Mylins y Reher, 1972; Petrellis y Flumerfelt, 1973; Carleton *et al.*, 1974; Lin, 1975; Zitny *et al.*, 1978; Kemblowski y Petera, 1979; Barbosa-Cánovas y Peleg, 1983) han intentado la dificultosa tarea de formular relaciones cuantitativas entre esfuerzo cortante-velocidad de deformación y tiempo.

Cheng y Evans (1965) y Petrellis y Flumerfelt (1973) modificaron la ecuación de Herschel-Bulkley con el objeto de incluir un parámetro estructural que tuviera en cuenta los efectos de dependencia con el tiempo:

$$\sigma = \lambda [c + k \cdot \dot{\gamma}^n] \tag{7.18}$$

en la que λ es un parámetro estructural de tiempo, cuyo valor oscila entre la unidad para tiempo cero hasta un valor límite de equilibrio, λ_e , que es menor que la unidad.

De acuerdo con Petrellis y Flumerfelt (1973), el descenso del valor del parámetro estructural con el tiempo se supone que obedece a una ecuación cinética de segundo orden:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -k_1 (\lambda - \lambda_e)^2 \quad \text{para } \lambda > \lambda_e \tag{7.19}$$

en la que la constante de velocidad, k_1 , es una función de la velocidad de deformación, que debe ser determinada de forma experimental.

La determinación de la constante cinética k_1 de la ecuación 7.19 en función de la velocidad de deformación es complicada por el hecho de que el parámetro estructural λ no puede obtenerse de forma explícita a partir de medidas experimentales. Para superar esta dificultad los parámetros estructurales instantáneo y de equilibrio, λ y λ_e , se expresan en términos de viscosidad aparente:

$$\frac{d\eta}{dt} = -a_1 (\eta - \eta_e)^2 \tag{7.20}$$

donde:

$$a_1 \cdot \dot{\gamma} = \frac{k_1}{c} + k_1 \cdot \dot{\gamma}^n \tag{7.21}$$

Integrando la ecuación [7.20] a una velocidad de deformación constante, con las condiciones límite.

- Para $t = 0$ $\eta = \eta_0$
- Para $t = t$ $\eta = \eta$

se obtiene:

$$\frac{1}{\eta - \eta_e} = \frac{1}{\eta_0 - \eta_e} + a_1 \cdot t \quad [7.22]$$

Para una velocidad de deformación determinada, al representar $1/(\eta - \eta_e)$ frente al tiempo se obtiene una recta el valor de cuya pendiente es a_1 . Repitiendo el mismo procedimiento a otras velocidades de deformación se puede llegar a establecer una relación entre a_1 y $\dot{\gamma}$, y de aquí obtener k_1 de la ecuación 7.21. Tiu y Bogger (1974) emplearon este modelo cinético-reológico para caracterizar el comportamiento tixotrópico de una muestra de mayonesa.

Otro modelo cinético es el dado por Fighi y Shoemaker (1983), en el que se supone que el descenso del esfuerzo cortante es una suma de funciones cinéticas de primer orden:

$$\sigma - \sigma_e = \sum (\sigma_{0,i} - \sigma_{e,i}) \exp(-k_i t) \quad (7.23)$$

en la que σ_e es el esfuerzo cortante de equilibrio, σ_0 el correspondiente al tiempo inicial y k_i las constantes cinéticas de degradación estructural.

Tung *et al.* (1970) usaron el modelo matemático de Weltman (1943):

$$\sigma = A_1 - B_1 \log t \quad [7.24]$$

Otro modelo es el de Hahn *et al.* (1959):

$$\log(\sigma - \sigma_e) = A_2 - B_2 t \quad [7.25]$$

Este describe el comportamiento tixotrópico de clara de huevo fresca, vieja e irradiada con rayos gamma. En estas ecuaciones, σ es el esfuerzo cortante, σ_e es el esfuerzo cortante de equilibrio, y los coeficientes B_1 , B_2 , A_1 , y A_2 denotan el esfuerzo cortante inicial. Longree *et al.* (1966) discutieron las propiedades reológicas de un conjunto de sistemas de crema de leche basadas en mezclas de leche-huevo-almidón. Los productos presentaron tixotropía y eran altamente no newtonianos. Tanto la ecuación de la potencia como la de Casson (1959) no resultaron adecuadas y fueron ensayadas otras ecuaciones. de entre éstas, se encontró que algunos datos se ajustaban con la ecuación:

$$\log(\eta - \eta_e) = -ct \quad [7.26]$$

en la que η es la viscosidad para un tiempo t , η_e es la viscosidad en el equilibrio y c es una constante empírica.

Higgs y Norrington (1971) estudiaron el comportamiento tixotrópico de leche condensada azucarada. Este producto es newtoniano a temperaturas de 40 y 55°C,

y débilmente no newtoniano a temperaturas más bajas, pero presenta comportamiento tixotrópico a todas las temperaturas estudiadas. El coeficiente de tiempo para la ruptura tixotrópica B , viene dado por:

$$B = \frac{m_1 - m_2}{\ln(t_2/t_1)} \quad [7.27]$$

en la que m_1 y m_2 son las pendientes de las curvas de retorno medidas después de los tiempos t_1 y t_2 , respectivamente, y el coeficiente de ruptura tixotrópico debido al aumento de la velocidad de deformación M viene dado por:

$$M = \frac{m_1 - m_2}{\ln(N_2/N_1)} \quad [7.28]$$

donde N_1 y N_2 son las velocidades angulares. Los parámetros de la ley de la potencia y los coeficientes tixotrópicos para leche condensada azucarada se dan en la tabla 7.2.

Tabla 7.2. Parámetros de la ley de la potencia y coeficientes tixotrópicos para leche condensada azucarada

Temperatura (°C)	k (Pa·s ⁿ)	n	B (Pa·s)	M (Pa·s)
25	3,6	0,834	4,08	18,2
40	0,818	1,0	1,20	8,65
55	0,479	1,0	0,529	1,88

En estudios de relajación, a una velocidad de deformación fija, en diversos alimentos se observa inicialmente un crecimiento del esfuerzo cortante. Este fenómeno se conoce como crecimiento del esfuerzo cortante (*shear stress overshoot*).

Dickie y Kokini (1981) han estudiado el crecimiento del esfuerzo cortante en típicos productos alimentarios usando el modelo de Bird-Leider:

$$\sigma_{rz} = m (\dot{\gamma})^n \left[1 + (b \dot{\gamma} t - 1) \exp\left(-\frac{t}{an\lambda}\right) \right] \quad [7.29]$$

donde m y n son los parámetros de la ecuación de la potencia; $\dot{\gamma}$, la velocidad de cizalla súbita impuesta; t , el tiempo; a y b parámetros del ajuste; y λ , una constante de tiempo. La constante de tiempo en esta ecuación se calcula en función de la viscosidad y del coeficiente primario de esfuerzos normales (ψ_1'), definidos de la siguiente manera:

$$\eta = m (\dot{\gamma})^{n-1} \quad [7.30]$$

$$\psi_1' = \tau_{11} - \tau_{22} = m' (\dot{\gamma})^{n'-2} \quad [7.31]$$

$$\lambda = \left(\frac{m'}{2m} \right)^{\frac{1}{m'-n}} \quad [7.32]$$

Los alimentos con los que se estudió este modelo fueron ketchup, mostaza, mayonesa, mermelada de manzana, mantequilla no salada, margarina y helados, entre otros. Kokini (1992) da los parámetros m , n , m' y n' para 15 típicos productos alimentarios (tabla 7.3).

Tabla 7.3. Parámetros reológicos de alimentos

Alimento	m (Pa·s ^{n})	n	m' (Pa·s ^{n'})	n'	λ (s)
Mermelada de manzana	222,90	0,145	156,03	0,566	$8,21 \cdot 10^{-2}$
Escarchados en lata	355,84	0,117	816,11	0,244	$2,90 \cdot 10^0$
Miel	15,39	0,989			
Ketchup	29,10	0,136	39,47	0,258	$4,70 \cdot 10^{-2}$
Crema de acalia	563,10	0,379	185,45	0,127	$1,27 \cdot 10^3$
Mayonesa	100,13	0,131	256,40	0,048	$2,51 \cdot 10^{-1}$
Mostaza	35,05	0,196	65,69	0,136	$2,90 \cdot 10^0$
Manteca de cacahuete	501,13	0,065	3.785,00	0,175	$1,86 \cdot 10^5$
Manteca en barra	199,28	0,085	3.403,00	0,398	$1,06 \cdot 10^3$
Margarina en barra	297,58	0,074	3.010,13	0,299	$1,34 \cdot 10^3$
Margarina prensada	8,68	0,124	15,70	0,168	$9,93 \cdot 10^{-2}$
Margarina en tubo	106,68	0,077	177,20	0,353	$5,16 \cdot 10^{-1}$
Mantequilla batida	312,30	0,057	110,76	0,476	$1,61 \cdot 10^{-2}$
Crema de queso batida	422,30	0,058	363,70	0,418	$8,60 \cdot 10^{-2}$
Adorno de postre batido	35,98	0,120	138,00	0,309	$3,09 \cdot 10^1$

Fuente: Kokini, 1992.

Una gran ventaja de esta ecuación es que a tiempos elevados converge a la ley de la potencia. Además, describe perfectamente los picos de crecimiento del esfuerzo cortante. Sin embargo, no describe adecuadamente la parte decreciente de la curva de relajación. Debido a ello, Mason *et al.* (1982) han modificado el modelo de Leider-Bird añadiendo varios términos de relajación, obteniéndose la ecuación:

$$\sigma_{yx} = m (\dot{\gamma})^n \left[1 + (b_0 \dot{\gamma} t - 1) \frac{\sum b_i \exp(-t/\lambda_i)}{\sum b_i} \right] \quad [7.33]$$

en la que m y n son los parámetros de la ley de la potencia; $\dot{\gamma}$, la velocidad de deformación; t , el tiempo; λ_i , son las constantes de tiempo; y b_0 y b_i son constantes.

7.8. Viscoelasticidad

Algunos productos semi-líquidos presentan conjuntamente propiedades de flujo viscoso y sólido elástico, denominándose viscoelásticos. El conocimiento de las propiedades viscoelásticas es muy útil en el diseño y predicción de la estabilidad de muestras almacenadas.

Los materiales viscoelásticos presentan comportamientos característicos que los diferencian notablemente de los otros fluidos. Así, si un fluido newtoniano se hace salir en chorro por una tubería, se produce una contracción en el diámetro del chorro; mientras que si se trata de un fluido viscoelástico, se produce un ensanchamiento muy remarcado en el diámetro del chorro (figura 7.7a). Este fenómeno se conoce como efecto Barus.

Otra característica de estos fluidos es el efecto Weissenberg que presentan. Este efecto se pone de manifiesto cuando un fluido contenido en un depósito es agitado mediante una varilla. Si el fluido es newtoniano o pseudoplástico se forma un vórtice libre con un perfil de superficie tal como se indica en la figura 7.7b. En el caso de fluidos viscoelásticos el fluido tiende a ascender por la varilla.

Para describir el comportamiento viscoelástico se dan unas ecuaciones, en las que el esfuerzo cortante es función del flujo viscoso y de la deformación elástica. De estas ecuaciones, las más utilizadas son la de Voigt y Maxwell, dependiendo de que el comportamiento sea más como un sólido elástico o como un fluido viscoso.

La expresión matemática del modelo de Voigt es:

$$\sigma = G \cdot \gamma + \eta \cdot \dot{\gamma} \quad [7.34]$$

Cuando el gradiente de velocidad tiende a cero, el cuerpo se comporta como elástico. El cociente entre la viscosidad y el módulo G recibe el nombre de tiempo de retraso del sólido:

$$t_E = \eta/G \quad [7.35]$$

y representa el tiempo que se necesita para que la velocidad de deformación, resultante al realizar un esfuerzo constante, se reduzca a la mitad de su valor inicial.

a) Efecto Barus o Merrington



b) Efecto Weissenberg

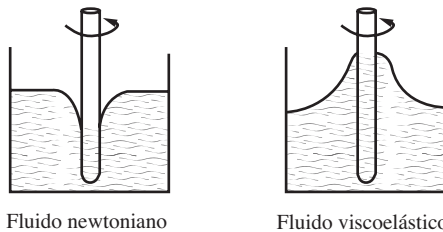


Figura 7.7. Viscoelasticidad no lineal.

La ecuación de Maxwell es:

$$\sigma = \frac{\eta}{G} \frac{d\sigma}{dt} + \eta \cdot \dot{\gamma} \quad [7.36]$$

La relación entre la viscosidad y el módulo G recibe el nombre de tiempo de relajación del fluido:

$$t_R = \eta/G \quad [7.37]$$

y representa el tiempo necesario para que el esfuerzo que se produce como resultado de una deformación constante se reduzca a la mitad de su valor.

Generalmente, la viscoelasticidad que presentan los alimentos es no lineal y de difícil caracterización, y deben definirse por tanto las condiciones experimentales en las que puedan obtenerse relaciones entre las variables deformación, tensión y tiempo.

El comportamiento viscoelástico de una muestra se puede estudiar y caracterizar de diferentes modos. Uno de ellos sería estudiar la evolución del esfuerzo cortante con el tiempo, a una velocidad de deformación fija; de las curvas obtenidas es posible realizar un análisis comparativo de las diferentes muestras (Elliot y Green, 1972; Elliot y Ganz, 1977; Fiszman *et al.*, 1986).

Los materiales viscoelásticos presentan también esfuerzos normales, siendo la diferencia de los primeros esfuerzos normales los utilizados en la caracterización de la viscoelasticidad. Contrario a lo que ocurría con los esfuerzos cortantes, los esfuerzos normales primarios no presentan *overshoot* en la mayoría de alimentos semisólidos.

Tal como indican Kokini y Plutchok (1987), en estado estacionario se pueden definir los coeficientes de esfuerzos normales primarios según la expresión:

$$\Psi_1 = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\dot{\gamma}^2} \quad [7.38]$$

Al representar el coeficiente de esfuerzos normales primarios en estado estacionario frente a la velocidad de deformación, para diversos alimentos semisólidos, en escala doble logarítmica se obtienen líneas rectas, lo que indica un comportamiento según la ley de la potencia.

También se utilizan ensayos oscilatorios, en los que a la muestra se aplica una deformación o velocidad de deformación de forma oscilatoria continua, lo que acarrea que aparezca una onda sinusoidal de esfuerzos. Para los sólidos elásticos esta onda está en fase con la de la deformación aplicada; mientras que para un fluido viscoso perfecto existe un desfase de 90° . En los materiales viscoelásticos el ángulo de desfase está comprendido entre 0 y 90° .

Se definen dos propiedades reológicas, el módulo de rigidez o almacenamiento (G'), que representa la parte elástica del material, y el módulo de pérdidas (G''), que representa su carácter viscoso. Si γ^0 y τ^0 son, respectivamente, las amplitudes

de las ondas de la deformación y esfuerzo, y ε el ángulo de desfase, los módulos G' y G'' vienen definidos por:

$$G' = (\tau^0/\gamma^0) \cos \varepsilon \quad [7.39]$$

$$G'' = (\tau^0/\gamma^0) \operatorname{sen} \varepsilon \quad [7.40]$$

Para sistemas fluidos se define la viscosidad compleja como:

$$\eta^* = [(\eta')^2 + (\eta'')^2]^{1/2} \quad [7.41]$$

en la que η' es la componente viscosa en fase entre el esfuerzo y la velocidad de deformación, mientras que η'' es la componente elástica o desfasada. Estas funciones de viscosidad se definen por:

$$\eta' = G''/\omega \quad [7.42]$$

$$\eta'' = G'/\omega \quad [7.43]$$

Este tipo de funciones han sido utilizadas para la caracterización de soluciones de hidrocoloides (Morris y Ross-Murphy, 1981). Además, en algunos casos, existen expresiones que correlacionan las diferentes propiedades y funciones viscosas de cizallamiento en estado estacionario con las de ensayos oscilatorios (Kokini y Plutchok, 1987).

De todas formas, es de sumo interés poder disponer de una ecuación constitutiva que pueda describir adecuadamente el comportamiento real de las muestras. Un primer modelo es el de Maxwell, que combina las ecuaciones de Newton de viscosidad y la de Hooke de elasticidad:

$$\sigma + \lambda \dot{\sigma} = \eta \dot{\gamma} \quad [7.44]$$

en la que λ es el tiempo de relajación definido como el cociente entre la viscosidad newtoniana (η) y el módulo de elasticidad (G).

En los experimentos de relajación del esfuerzo la muestra es sometida a una deformación fija por un espacio de tiempo y se mide la variación del esfuerzo con el tiempo. La medida de relajación es un método simple para la obtención de una descripción cualitativa del comportamiento elástico de la muestra. El tiempo de relajación se calcula a partir de la relajación que experimenta la muestra después de haberse aplicado un esfuerzo. En algunos casos no es suficiente un único tiempo de relajación para la descripción del comportamiento reológico de la muestra, siendo necesario utilizar un modelo generalizado de Maxwell, que incluye varios elementos de dicho modelo.

Generalmente, la viscoelasticidad que presentan los alimentos es no lineal, no pudiéndose aplicar este modelo de Maxwell. Es por ello, que se han buscado otros modelos constitutivos, siendo el de Bird-Carreau uno de ellos. Este es un modelo constitutivo integral basado en la teoría constitutiva de Carreau de redes moleculares, en la que se incorpora la historia total de deformación del material.

Para poder aplicar el modelo de Bird-Carreau, es preciso conocer los valores de la viscosidad límite η_0 a velocidad de deformación cero, así como las constantes de tiempo λ_1 y λ_2 y las constantes α_1 y α_2 . Para su cálculo es preciso realizar experimentos de cizallamiento en estado estacionario y experimentos oscilatorios. En la figura 7.8 se exponen las gráficas obtenidas en estos tipos de experimentos, y que permiten obtener las constantes de Bird-Carreau (Bird *et al.*, 1977).

Del experimento de cizalla en estado estacionario (figura 7.8a) se obtiene η_0 por extrapolación a $\dot{\gamma} = 0$; la constante de tiempo λ_1 es el valor de la inversa de la velocidad de deformación en el punto de intersección de la recta de valor η_0 con la tangente a la curva en la zona no newtoniana; mientras que α_1 se obtiene a partir de la pendiente de la curva $\log \eta - \log \dot{\gamma}$ en la zona no newtoniana (Kokini, 1992).

A partir de experimentos oscilatorios es posible obtener las gráficas de η' y η''/ω frente a la velocidad angular ω en coordenadas doble logarítmicas (figuras 7.8b y 7.8c). La constante de tiempo λ_2 se obtiene como el inverso del valor de la velocidad angular ω en el punto de intersección de la recta η_0 con la tangente a la curva de la zona no newtoniana; mientras que α_2 se obtiene de la pendiente de esta curva.

Una vez conocidas estas constantes es posible predecir los valores de η , η' y η'' (Bird *et al.*, 1977). Así, el modelo de Bird-Carreau que permite obtener el valor de la viscosidad η es:

$$\eta = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\eta_p}{1 + (\lambda_{1p} \dot{\gamma})^2} \tag{7.45}$$

en la que

$$\lambda_{1p} = \lambda_1 \left(\frac{2}{p+1} \right)^{\alpha_1} \tag{7.46}$$

$$\eta_p = \eta_0 \frac{\lambda_{1p}}{\sum \lambda_{1p}} \tag{7.47}$$

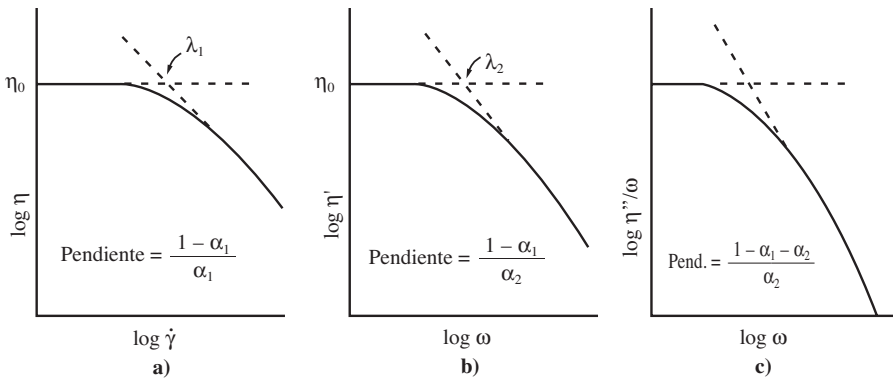


Figura 7.8. Determinación de las constantes Bird-Carreau λ_1 , λ_2 , α_1 y α_2 .

Para velocidades de deformación elevadas, la ecuación 7.45 puede aproximarse a la expresión:

$$\eta = \frac{\pi \eta_0}{Z(\alpha_1) - 1} \left[\frac{(2\alpha_1 \lambda_1 \dot{\gamma})^{\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}}}{2\alpha_1 \operatorname{sen} \left(\frac{1+\alpha_1}{2\alpha_1} \pi \right)} \right] \quad [7.48]$$

en la que $Z(\alpha_1)$ es la función Zeta-Riemann:

$$Z(\alpha_1) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha_1} \quad [7.49]$$

En la bibliografía (Bird *et al.*, 1977; Kokini, 1992) pueden encontrarse expresiones que permiten calcular η' y η'' , según el modelo constitutivo de Bird-Carreau.

Ensayos de *creep* y recuperación se han aplicado al estudio de nata y helados (Sherman, 1966). En este caso, se aplica un esfuerzo constante durante un tiempo determinado y se estudia la variación de la deformación con el tiempo (figura 7.9). Los resultados se expresan en términos de $J(t)$ frente al tiempo. La función $J(t)$ es la capacitancia (*compliance*), que es una relación entre la deformación que se produce y el esfuerzo aplicado:

$$J(t) = \gamma/\sigma \quad [7.50]$$

Para helados y productos congelados, la *creep compliance* frente al tiempo puede describirse según la ecuación:

$$J(t) = J_0 + J_1 \left[1 - \exp \left(-\frac{t}{\theta_1} \right) \right] + J_2 \left[1 - \exp \left(-\frac{t}{\theta_2} \right) \right] + \frac{1}{\eta_N} \quad [7.51]$$

en la que $J_0 = 1/E_0$ es la capacitancia elástica instantánea; E_0 es el módulo elástico instantáneo; $J_1 = 1/E_1$ y $J_2 = 1/E_2$ son las capacitancias asociadas con el comportamiento elástico retardado; $\theta_1 = \eta_1/E_1$ y $\theta_2 = \eta_2/E_2$ son los tiempos de retraso asociados con la elasticidad retardada; E_1 y E_2 son los módulos elásticos retardados asociados con la elasticidad retardada; η_1 y η_2 son los componentes de viscosidad asociados con la elasticidad retardada, y η_N es la viscosidad asociada con el flujo newtoniano.

Asimismo, es posible realizar una caracterización de la viscoelasticidad de las muestras mediante el estudio del desarrollo del esfuerzo cortante en estado no estacionario (*shear stress overshoot*), aplicando el modelo de Bird-Leider o el modificado; tal como se ha expuesto en el apartado anterior.

Otro método muy utilizado en la caracterización viscoelástica de los alimentos es el de los modelos mecánicos. Así, por ejemplo, productos mezclados y congelados se comportan como dos cuerpos de Kelvin-Voigt conectados en serie; mientras que para helados derretidos se puede representar su comportamiento como un solo cuerpo de Kelvin-Voigt.

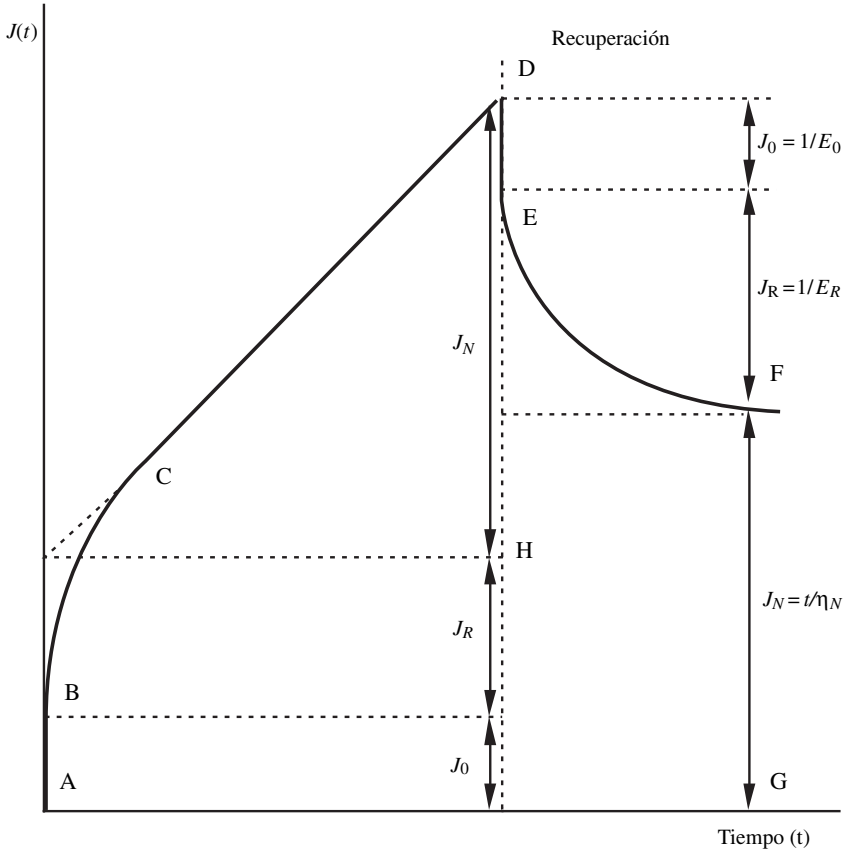


Figura 7.9. Curva de un modelo de *Creep*. Zona de Creep A-B: Creep elástico instantáneo. B-C: Creep elástico retardado. C-D: Flujo Newtoniano. Zona recuperación D-E: Recuperación elástica instantánea. E-F: Recuperación elástica retardada. F-G: Deformación no recuperable.

7.9. Efecto de la temperatura

Los alimentos fluidos durante todo el proceso de elaboración, almacenamiento, transporte, venta y consumo, están sujetos a variaciones continuas en su temperatura. Es por ello, que resulta importante conocer las propiedades reológicas de los productos en función de la temperatura.

En el caso de fluidos newtonianos, la expresión que correlaciona la viscosidad con la temperatura es una ecuación tipo Arrhenius. Sin embargo, para fluidos no newtonianos suele relacionarse la viscosidad aparente a una velocidad de deformación fijada, en lugar de viscosidad (Rao *et al.*, 1984; Vitali *et al.*, 1974; Moresi y Spinosi, 1984):

$$\eta_a = \eta_\infty \exp\left(\frac{E_a}{RT}\right) \quad [7.52]$$

en la que E_a es la energía de activación al flujo; η_∞ es una constante denominada viscosidad de deformación infinita; R la constante de los gases, y T la temperatura en grados Kelvin.

Para fluidos no newtonianos, también suele utilizarse el índice de consistencia en lugar de la viscosidad aparente (Harper y El Sahrigi, 1965; Vitali y Rao, 1984a).

Esta ecuación es la más utilizada en la bibliografía para todo tipo de fluidos alimentarios; aunque existen otras, como la utilizada por Sáenz y Costell (1986):

$$Y = Y_0 \exp(-BT) \quad [7.53]$$

en la que Y es la viscosidad o bien el esfuerzo umbral, mientras que T es la temperatura expresada en grados Celsius, y B es una constante.

En el caso de zumos de kiwi (Ibarz *et al.*, 1991) se ha aplicado una ecuación lineal para describir la variación del umbral de fluencia con la temperatura.

La temperatura puede afectar a los diferentes parámetros reológicos, como son viscosidad, índice de consistencia, índice de comportamiento al flujo y umbral de fluencia. Generalmente, el efecto que se observa es el siguiente:

- La viscosidad e índice de consistencia disminuyen cuando aumenta la temperatura.
- El índice de comportamiento al flujo no suele verse afectado por la variación de temperatura (Sáenz y Costell, 1986; Mizrahi y Berk, 1972; Crandall *et al.*, 1982). Sin embargo, en algún caso se ha observado que un aumento de temperatura puede hacer aumentar el índice de comportamiento al flujo (Ibarz y Pagán, 1987), pasándose de comportamiento pseudoplástico a newtoniano.
- El umbral de fluencia también puede variar con la temperatura, de tal modo que al aumentar la temperatura disminuye su valor. Así, para zumos de limón (Sáenz y Costell, 1986) esta variación del valor del umbral de fluencia puede provocar un cambio en el comportamiento de los zumos, pasando de ser pseudoplásticos a newtonianos.

7.10. Efecto de la concentración sobre la viscosidad

7.10.1. Teorías estructurales de la viscosidad

Bondi (1956) revisó las teorías de la viscosidad de líquidos. De acuerdo a la teoría cinética, la viscosidad de líquidos newtonianos puede darse por la siguiente ecuación (después de numerosas aproximaciones):

$$\eta = [0,48 (r_1/v) m \Phi_a (r_1)]^{1/2} \exp\left[\frac{\Phi_a (r_1)}{kT}\right] \quad [7.54]$$

en la que r_1 es la distancia interatómica propia de la densidad del líquido, Φ_a es el componente de atracción de la energía de interacción entre un par de moléculas aisladas, m es la masa molecular, v es el volumen molar, k es la constante de Boltzmann, y T la temperatura.

La ventaja de la ecuación 7.54, y expresiones similares, es que relaciona la viscosidad con parámetros moleculares, especialmente con la energía de interacción entre dos moléculas aisladas. Sin embargo, los problemas matemáticos al aplicar la teoría básica molecular a la viscosidad de líquidos son tan difíciles que las ecuaciones finales que se derivan, actualmente no tienen un valor práctico para el réologo (van Wazer *et al.*, 1963).

Otro paso en la comprensión teórica de la viscosidad de líquidos ha sido desarrollado por Eyring y colaboradores basándose en la teoría «absoluta» de procesos de velocidad. Esta teoría describe los procesos elementales que gobiernan la cinética de las reacciones químicas. Este paso supone que el líquido es un enrejado o retículo molecular imperfecto, con un número de puestos del retículo vacantes denominados «agujeros». De acuerdo con Eyring (1936), la ecuación para la viscosidad se puede expresar:

$$\eta = \frac{hN}{v} \exp\left(\frac{\Delta F}{RT}\right) \quad [7.55]$$

en la que ΔF es la energía libre de activación; h , la constante de Planck; N , el número de Avogadro; v , el volumen molar.

Brunner (1949) modificó esta ecuación para obtener:

$$\eta = \left(\frac{\delta}{v_L}\right) (2 \pi m kT)^{1/2} \exp\left(\frac{\Delta F}{RT}\right) \quad [7.56]$$

donde δ es el ancho de la barrera potencial; m , es la masa reducida del complejo activado; v_L , es el volumen molecular del líquido.

7.10.2. Viscosidad de soluciones

Las viscosidades de las soluciones diluidas han recibido un tratamiento teórico considerable. Tratándose de datos de viscosidad, a dilución elevada, se han utilizado diversas funciones. La razón de viscosidad (también conocida como viscosidad relativa):

$$\eta_r = \eta/\eta_0 \quad [7.57]$$

Viscosidad específica:

$$\eta_{SP} = \eta_r - 1 = \frac{\eta - \eta_0}{\eta_0} \quad [7.58]$$

Número de viscosidad (viscosidad reducida):

$$\eta_{red} = \frac{\eta_{SP}}{C} \quad [7.59]$$

Viscosidad inherente:

$$\eta_{inh} = \frac{\ln(\eta_r)}{C} \quad [7.60]$$

Viscosidad intrínseca (número de viscosidad límite):

$$[\eta] = \left[\frac{\eta_{SP}}{C} \right]_{C \rightarrow 0} = [(\ln \eta_r / C)]_{C \rightarrow \infty} \quad [7.61]$$

en las que η es la viscosidad de la solución de concentración C y η_0 es la viscosidad del disolvente puro.

De acuerdo con Einstein, el número de viscosidad límite, en el caso de suspensiones de esferas rígidas, es 2,5 por concentración volumétrica (C_V), medida en unidades de cm^3 de las esferas por volumen total en cm^3 .

Para concentración baja, el número de viscosidad se da por la expresión:

$$\eta_{red} = 2,5 + 14,1 C_V \quad [7.62]$$

La relación de viscosidad de Einstein ha sido aplicada en diversas soluciones y suspensiones. Para soluciones de azúcar, que fueron en las primeras con las que se ensayó esta relación, el número de viscosidad encontrado experimentalmente es de una a una y media veces mayor que el valor 2,5 obtenido al suponer que el azúcar disuelto lo era en forma de moléculas esféricas no solvatadas (van Wazer *et al.*, 1963).

Los datos de viscosidad en función de la concentración son extrapolados hasta dilución infinita por medio de la ecuación de Huggins (1942):

$$\frac{\eta_{SP}}{C} = [\eta] + k' [\eta]^2 C \quad [7.63]$$

en la que k' es una constante para una serie de polímeros de diferente peso molecular en un disolvente dado. La definición alternativa de la viscosidad intrínseca conduce a la ecuación (Kraemer, 1938):

$$\frac{\ln \eta_r}{C} = [\eta] + k'' [\eta]^2 C \quad [7.64]$$

donde $k' - k'' = 1/2$.

A viscosidades intrínsecas superiores aproximadamente a 2, e incluso menores en algunos casos, puede haber una dependencia apreciable de la viscosidad con la velocidad de cizalla en el viscosímetro. Esta dependencia no es eliminada por ex-

trapolación a dilución infinita; siendo también necesaria la medida en función de la velocidad de cizalla y extrapolación a velocidad de deformación cero (Zimm y Grothers, 1962).

Las teorías de las propiedades friccionales de moléculas de polímeros en solución muestran que la viscosidad intrínseca es proporcional al volumen hidrodinámico efectivo de la molécula en solución dividido por su masa molecular (M). El volumen efectivo es proporcional al cubo de una dimensión lineal del enrollamiento al azar de la cadena. Si $(r)^{1/2}$ es la dimensión escogida:

$$[\eta] = \frac{\delta (r^2)^{3/2}}{M} \quad [7.65]$$

donde δ es una constante universal (Billmeyer, 1971).

El efecto que la concentración ejerce sobre un sistema homogéneo es el de aumentar la viscosidad o índice de consistencia. En la bibliografía pueden encontrarse dos tipos de correlaciones (Harper y El Sahrigi, 1965; Rao *et al.*, 1984), según un modelo potencial y otro exponencial, de acuerdo con las expresiones:

$$Y = K_1 (C)^{A_1} \quad [7.66]$$

$$Y = K_2 \exp (A_2 C) \quad [7.67]$$

en las que Y puede ser la viscosidad o el índice de consistencia y C es la concentración de alguno de los componentes de la muestra.

La mayoría de información existente se refiere a derivados de frutas, en los que se estudia el efecto del contenido en sólidos solubles, contenido en pectinas, sólidos totales, etc. De las dos ecuaciones anteriores, la primera de ellas suele dar buenos resultados en alimentos tipo purés, mientras que la segunda se aplica con éxito en zumos concentrados de frutas y pastas (Rao y Rizvi, 1986).

Además de la viscosidad e índice de consistencia, la concentración puede afectar a otros parámetros. Así, el umbral de fluencia aumenta cuando lo hace la concentración. Para zumos de kiwi (Ibarz *et al.*, 1991), al disminuir la concentración desaparece el umbral de fluencia, pasando su comportamiento de plástico a pseudoplástico.

En el caso del índice de comportamiento al flujo, existen trabajos en los que la concentración no lo afecta (Sáenz y Costell, 1986), mientras que en otros se observa que un aumento de la concentración disminuye el valor del índice de comportamiento al flujo (Mizrahi y Berk, 1972).

7.10.3. Efecto combinado temperatura-concentración

Desde el punto de vista ingenieril es interesante poder encontrar una sola expresión que correlacione el efecto que la temperatura y concentración ejercen sobre la viscosidad.

Las ecuaciones que generalmente se utilizan son:

$$\eta_a = \alpha_1 (C)^{\beta_1} \exp\left(\frac{E_a}{RT}\right) \quad [7.68]$$

$$\eta_a = \alpha_2 \exp\left(\beta_2 C + \frac{E_a}{RT}\right) \quad [7.69]$$

en la que η_a es la viscosidad para fluidos newtonianos, y la viscosidad aparente o índice de consistencia para no newtonianos. Los parámetros α_i y β_i son constantes, mientras que C es la concentración y T la temperatura absoluta.

Generalmente, este tipo de ecuaciones son válidas en el intervalo de las variables para el cual han sido determinadas (Rao y Rizvi, 1986; Vitali y Rao, 1984). Estas ecuaciones se han aplicado para describir el efecto combinado de concentración y temperatura en diferentes productos alimentarios (Rao *et al.*, 1984; Vitali y Rao, 1984a; Ibarz y Sintés, 1989; Ibarz *et al.*, 1989; Castaldo *et al.*, 1990; Ibarz *et al.*, 1992a y 1992b).

7.11. Modelos mecánicos

El comportamiento reológico de las distintas sustancias puede ser descrito mediante modelos mecánicos. Los resultados obtenidos con los modelos mecánicos se pueden expresar mediante diagramas esfuerzo-deformación y tiempo, que permiten obtener ecuaciones de aplicación reológica. Los modelos que se utilizan son los de muelle y amortiguador, así como combinaciones de ambos.

7.11.1. Modelo de Hooke

El modelo mecánico de Hooke (de muelle) sirve para describir el comportamiento de sólidos elásticos ideales. En la figura 7.10 se representa este tipo de modelo y el esfuerzo frente a la deformación que se produce en el muelle.

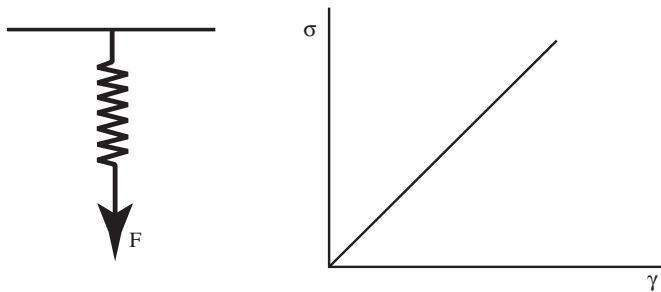


Figura 7.10. Modelo mecánico de Hooke.

7.11.2. Modelo de Newton

El modelo mecánico de los fluidos newtonianos es el amortiguador con fluido, representado en la figura 7.11. El amortiguador es un recipiente lleno de fluido, en el que puede subir y descender libremente un pistón. En este modelo la única resistencia que se opone al movimiento del pistón es la viscosidad del líquido.

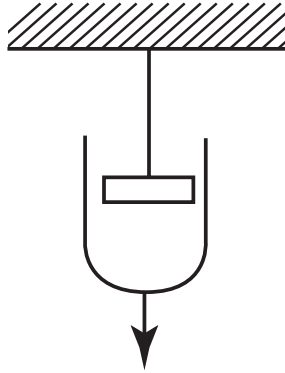


Figura 7.11. Modelo mecánico de fluido newtoniano.

7.11.3. Modelo de Kelvin

El modelo mecánico de Kelvin describe el comportamiento reológico de los materiales viscoelásticos ideales, y que se corresponde a la ecuación de Voigt (ec. 7.34). Este modelo considera conjuntamente un muelle y un amortiguador dispuestos en paralelo, es decir, que su movimiento es conjunto y a la misma velocidad. Los dos elementos, muelle y amortiguador, sufren la misma deformación, pero no la misma fuerza. En la figura 7.12 se representa gráficamente este modelo.

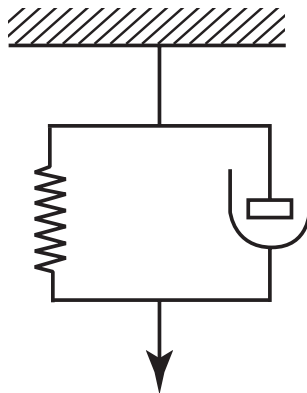


Figura 7.12. Modelo mecánico del cuerpo de Kelvin.

En las sustancias o cuerpos de Kelvin, cuando se suprime la fuerza, la deformación se anula, pero con un cierto retraso, según la expresión:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{máx.}} \exp\left(-\frac{t}{t_E}\right) \quad [7.70]$$

en la que ε es la deformación relativa, t el tiempo y t_E el tiempo de retraso del sólido. Esto indica que existe elasticidad, pero no flujo. El retraso en volver al estado inicial se debe a la viscosidad del amortiguador.

7.11.4. Modelo de Maxwell

Este modelo considera un muelle y un amortiguador asociados en serie, correspondiendo al comportamiento de fluidos viscoelásticos ideales. Los dos elementos sufren el mismo esfuerzo, pero no la misma deformación. Este modelo se halla representado en la figura 7.13. La variación de la deformación con el tiempo, al principio es lineal, debido a que inicialmente sólo se deforma el muelle. Luego empieza la deformación del amortiguador, y una vez que el muelle ya no puede deformarse más, es únicamente el amortiguador el que controla toda la deformación.

Si a un cuerpo de Maxwell, sobre el que se ha aplicado un esfuerzo σ_M , en un instante determinado, t_i , se mantiene constante la deformación que ha adquirido, el esfuerzo cortante sólo cesa lentamente a causa de la viscosidad del amortiguador, pudiéndose expresar según la ecuación:

$$\sigma = \sigma_M \exp\left(-\frac{t}{t_R}\right) \quad [7.71]$$

en la que σ_M es el esfuerzo cortante aplicado y t_R el tiempo de relajación del fluido.

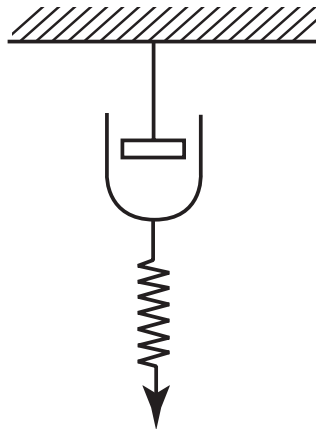


Figura 7.13. Modelo mecánico del «cuerpo de Maxwell».

Este fenómeno de relajación se presenta siempre que una sustancia tenga propiedades plásticas. Un cuerpo sólido ideal no presenta relajación, mientras que un fluido viscoso perfecto presenta una relajación instantánea. Todo cuerpo sólido que presente este fenómeno de relajación prueba que también es viscoso.

7.11.5. Modelo de Saint-Venant

Este modelo es el de corredera o deslizador, que es una especie de pinza que sostiene un trozo de material (figura 7.14). Si la fuerza que se aplica es superior a la de rozamiento entre la corredera y el material, éste puede deslizarse, en caso contrario, permanece fijo.

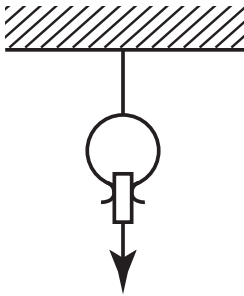


Figura 7.14. Modelo mecánico de Saint-Venant.

7.11.6. Modelo mecánico del cuerpo de Bingham

Para los plásticos de Bingham, el modelo mecánico que describe su comportamiento reológico es una combinación de un muelle en serie con una corredera y un amortiguador en paralelo (figura 7.15).

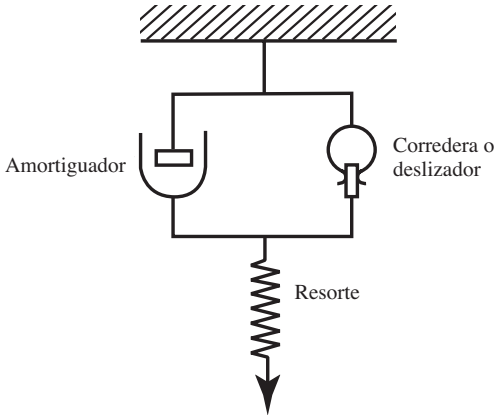


Figura 7.15. Modelo mecánico del cuerpo de Bingham.

Además de estos modelos mecánicos, existen otros más complicados, pero que son combinaciones de los tres modelos básicos, muelle, amortiguador y corredera. Así, en la figura 7.16 se presenta el modelo mecánico de Burgers, que describe el comportamiento viscoelástico de ciertos productos.

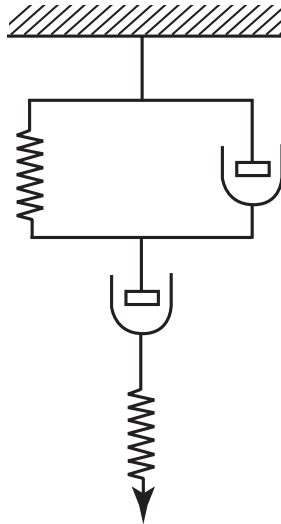


Figura 7.16. Modelo mecánico de Burgers.

7.12. Medidas reológicas en alimentos semilíquidos

Scott-Blair (1958) clasificó los instrumentos para el estudio de la textura, y Rao (1980) clasificó los instrumentos para la medida de propiedades al flujo de alimentos fluidos en tres categorías: 1) fundamental; 2) empírico, y 3) imitativo. Los ensayos fundamentales miden propiedades físicas definidas y son independientes de los instrumentos. Los ensayos empíricos miden parámetros que no están claramente definidos, pero los parámetros han sido probados por su utilidad desde experiencias pasadas. Los ensayos imitativos miden propiedades bajo condiciones similares a las que se dan en la práctica (White, 1970).

7.12.1. Métodos fundamentales

Diversos instrumentos se han empleado para medir las propiedades de flujo usando métodos fundamentales. Oka (1960), van Wazer *et al.* (1963), Sherman (1970), Rao (1977), y Shoemaker *et al.* (1987) han descrito varios de los instrumentos comerciales y sus ecuaciones fundamentales.

Los métodos fundamentales pueden clasificarse según la geometría utilizada: capilar, Couette (cilindro concéntrico), plato y cono, platos paralelos, retroextrusión, flujo por compresión.

Tres requisitos son comunes a las tres geometrías citadas. Estos son: 1) flujo laminar del líquido; 2) operación isoterma, y 3) no deslizamiento en la interfase sólido-fluido (van Wazer *et al.*, 1963).

7.12.1.1. **Viscosímetros rotacionales**

Un cuerpo en rotación, inmerso en un líquido, experimenta un arrastre viscoso o fuerza retardada. La cantidad de arrastre viscoso es una función de la velocidad de rotación del cuerpo. Utilizando las ecuaciones de velocidad, no se obtiene diferencia tanto si es el cuerpo como si es el recipiente el que rota.

Los viscosímetros rotacionales permiten medidas continuas a una velocidad de deformación o esfuerzo cortante dados para períodos de tiempo prolongados, permitiendo determinaciones tanto si existe o no dependencia del tiempo. Estos atributos no son típicos de la mayoría de viscosímetros capilares, o para la mayoría de otros viscosímetros para esta cuestión. Por estas razones, los viscosímetros rotacionales han llegado a ser el tipo de instrumentos más ampliamente utilizados en las determinaciones reológicas.

7.12.1.1 A. Viscosímetros de cilindros concéntricos

Aunque los viscosímetros rotacionales utilizan vasos y rotores en forma de esferas, discos, conos y otras formas curiosas, el tipo más común es el de cilindros coaxiales concéntricos mostrado esquemáticamente en la figura 7.17. Un cilindro de radio R_b está suspendido en una muestra fluida contenida en un recipiente de radio R_c . El líquido cubre el cilindro interno hasta una altura h . La parte inferior del cilindro interno, o rotor, está separado del fondo del vaso por una distancia l .

Descripciones completas de este tipo de flujo las han dado Oka (1960), van Wazer (1963), Reiner (1971) y Walters (1975), entre otros.

Este es un flujo viscosimétrico que ha sido utilizado para caracterizar el comportamiento de cizalla de fluidos no newtonianos. Recientemente esta configuración ha sido también utilizada para caracterizar diferencias de esfuerzos normales (Schowalter, 1978). Según van Wazer *et al.* (1963), para poder obtener las ecuaciones fundamentales deben hacerse las siguientes suposiciones:

1. El líquido es incompresible.
2. El movimiento del líquido es en régimen laminar.
3. La velocidad es sólo función del radio; se supone que los flujos radial y axial son iguales a cero (despreciando las fuerzas centrífugas).
4. El movimiento es estacionario. Todas las derivadas con respecto al tiempo de las ecuaciones de continuidad y movimiento son cero.
5. No existe movimiento relativo entre la superficie de los cilindros y el fluido en contacto con los cilindros, es decir no hay deslizamiento.
6. El movimiento es bidimensional (despreciando los efectos finales y de borde).
7. El sistema es isotérmico.

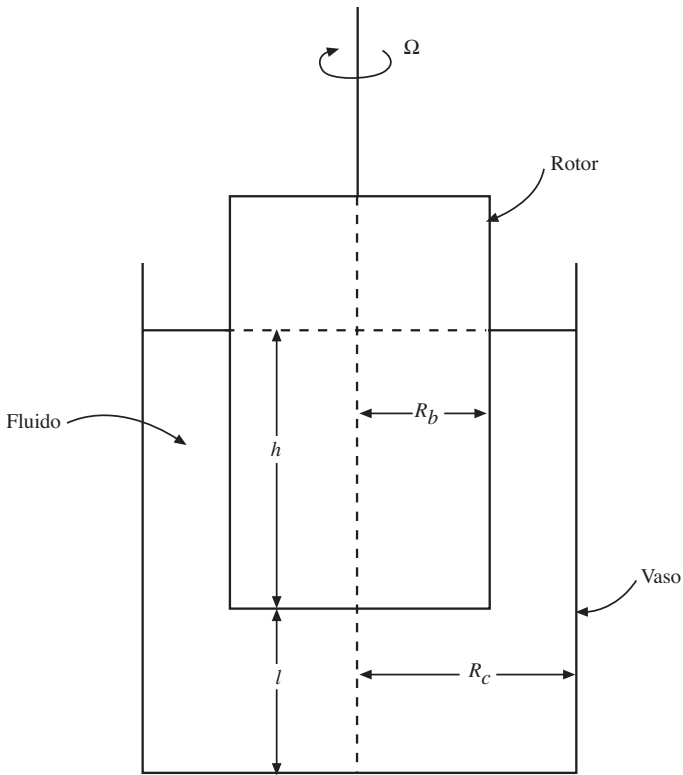


Figura 7.17. Viscosímetro de cilindros concéntricos.

El flujo de Couette es un ejemplo de flujo de cizalla simple con un campo de velocidades cuyas componentes en coordenadas cilíndricas son:

$$v(r) = 0 \quad [7.72a]$$

$$v(\theta) = r \omega(r) \quad [7.72b]$$

$$v(z) = 0 \quad [7.72c]$$

La única componente no nula de la velocidad es la de la dirección θ , $r\omega(r)$ en la que $\omega(r)$ es la velocidad angular.

De acuerdo con el campo de velocidad, las componentes de esfuerzo vienen dadas por:

$$\sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0 \quad [7.73]$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma(\dot{\gamma}) \quad [7.74]$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{zz} = \psi_1(\dot{\gamma}) \quad [7.75]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = \psi_2(\dot{\gamma}) \quad [7.76]$$

en la que σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} , $\sigma_{r\theta}$, σ_{rz} , $\sigma_{\theta z}$ son las componentes del tensor esfuerzo, y ψ_1 ($\dot{\gamma}$) y ψ_2 ($\dot{\gamma}$) son los de la función de esfuerzos normales.

Se supone que el flujo ocurre entre dos cilindros coaxiales infinitos de radios R_i y R_0 ($R_i < R_0$). El cilindro interno rota con cierta velocidad angular mientras que el externo permanece fijo. Si se calcula el par de torsión por unidad de altura (T') ejercido sobre el fluido en el interior de la superficie cilíndrica con r constante, se obtiene la siguiente relación:

$$T' = \sigma_{r\theta} (2\pi r) r = 2 \pi r^2 \sigma_{r\theta} \quad [7.77]$$

Según la primera ley de movimiento de Cauchy, se obtiene:

$$\sigma_{r\theta} = \frac{\mu}{r^2} \quad [7.78]$$

donde μ es una constante. Igualando las ecuaciones 7.74 y 7.77:

$$\sigma_{r\theta} = \frac{T'}{2\pi r^2} = \sigma (\dot{\gamma}) \quad [7.79]$$

Si se supone que el fluido sigue la ley de la potencia:

$$\sigma = m \dot{\gamma}^n = m \left[\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right]^n \quad [7.80]$$

e integrando entre el radio del cilindro interno y el del externo, se obtiene la siguiente expresión:

$$\int_0^{\omega_i} d\omega = \left[\frac{T'}{2\pi m} \right]^{1/n} \int_{R_0}^{R_i} \frac{dr}{\left(r \frac{n+2}{n} \right)} \quad [7.81]$$

donde ω_i es la velocidad angular con la que gira el cilindro interno. La ecuación 7.81 se puede integrar obteniéndose:

$$\omega_i = 2\pi N' = \frac{n}{2} \left[\frac{T'}{2\pi m} \right]^{1/n} \left[\frac{1}{R_i^{2/n}} - \frac{1}{R_0^{2/n}} \right] \quad [7.82]$$

en la que N' es el número de revoluciones por unidad de tiempo a la cual gira el cilindro interno. La expresión para fluidos newtonianos se obtiene directamente para $n = 1$. De donde se obtiene la ecuación de Margules para la viscosidad newtoniana:

$$\eta = \frac{T'}{4\pi \omega_i} \left[\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_0^2} \right] \quad [7.83]$$

Cuando el fluido que se mide posee un comportamiento de plástico de Bingham se obtiene la siguiente expresión:

$$\omega_i = 2\pi N' = \frac{1}{m} \frac{T'}{4\pi} \left[\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_0^2} \right] - \frac{\tau_0}{m} \ln \left(\frac{R_0}{R_i} \right) \quad [7.84]$$

7.12.1.1 B. Viscosímetros plato-plato y cono-plato

Otros tipos de viscosímetros rotacionales son el de plato y plato, y el de cono y plato. Como su nombre indica, el viscosímetro de plato y cono consiste en un plato plano y un cono (figura 7.18). El ángulo del cono θ_0 es aproximadamente de 3° o menor.

De acuerdo con Walters (1975), se supone que:

- 1) los efectos de inercia son despreciables;
- 2) el ángulo del cono es muy pequeño;
- 3) el cono y el plato poseen el mismo radio;
- 4) la superficie libre del líquido es parte de una esfera de radio a con centro en el vértice del cono;
- 5) el flujo por cizalla simple en estado estacionario es continuo hasta la superficie libre;
- 6) las fuerzas de tensión superficial son despreciables, las medidas del par de torsión (T) en el plato fijo, en función de la velocidad angular (Ω_1) del cono, pueden ser utilizadas para determinar la velocidad de deformación dependiente de la viscosidad aparente, según las ecuaciones siguientes:

$$\dot{\gamma} = \Omega_1 \frac{a}{h} \quad [7.85]$$

$$\sigma = \frac{3T}{2\pi a^3} \left[1 + \frac{1}{3} \frac{d \ln T}{3 d \dot{\gamma} a} \right] \quad [7.86]$$

donde a es el radio y h es la distancia entre plato y cono.

Si el sistema es de platos paralelos, se utilizan las mismas ecuaciones para el cálculo de la velocidad de deformación y del esfuerzo cortante. Tanto para el flujo y flujo de torsión del plato y cono, el campo de velocidad es independiente de las propiedades del material.

Desde mediados de los años sesenta, se ha prestado considerable atención a la situación de flujo combinado estacionario y oscilatorio. Tal situación es de interés de por sí, como un flujo reométrico relativamente simple que puede ser interpretado en términos de ciertas funciones bien definidas del material. También proporciona un ensayo mucho más crítico de cualquier ecuación reológica propuesta separadamente en cizalla ya sea en estado estacionario y/u oscilatorio (Walters, 1975; Kokini y Plutchok, 1987).

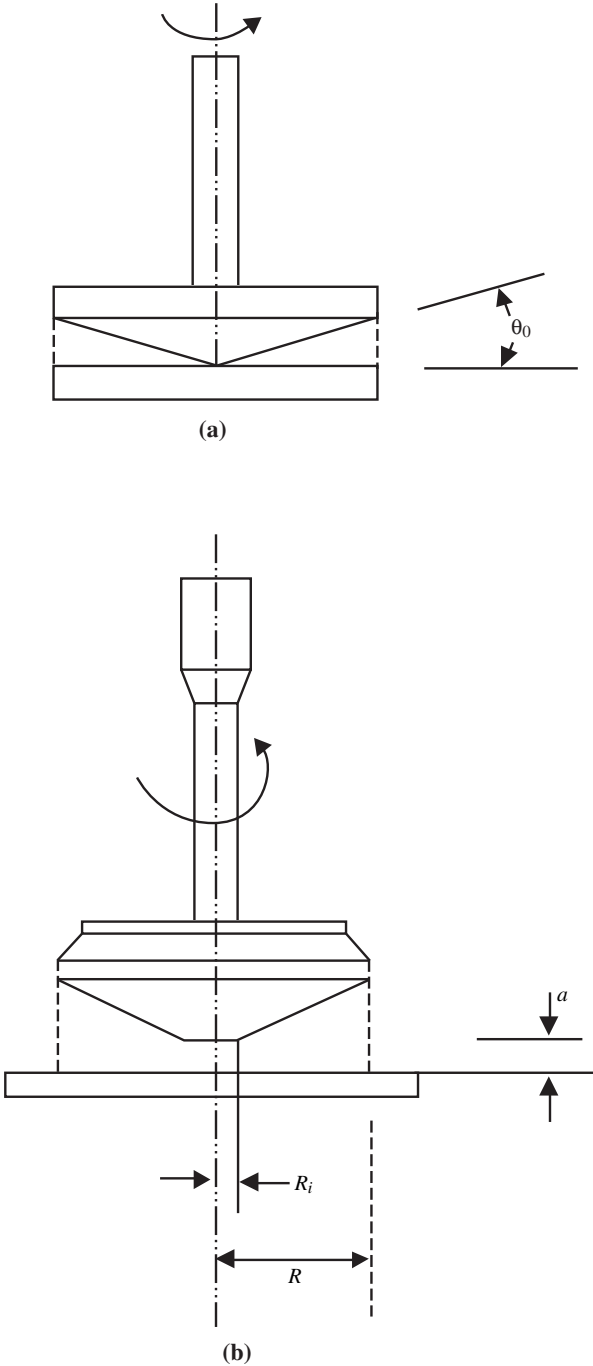


Figura 7.18. Esquema de la geometría cono-placa.

7.12.1.1 C. Fuentes de error

Las ecuaciones básicas obtenidas en la sección anterior para la determinación de la relación entre σ y $\dot{\gamma}$ descansan en la existencia de un flujo simple a través del líquido, debiéndose cumplir numerosas suposiciones para que tenga lugar el tipo de flujo deseado. Una consideración importante, por tanto, que debe realizarse es que estas suposiciones son válidas en situaciones prácticas y las limitaciones que ellas imponen con las condiciones de operación. En esta sección se revisan las posibles fuentes de error que afectan la interpretación de los resultados experimentales en el flujo Couette.

Calentamiento viscoso

Cuando un líquido es cizallado, parte del trabajo aplicado es disipado en forma de calor. Este calentamiento inducido por el cizallamiento ocasiona un inevitable aumento en la temperatura del líquido, lo que constituye una fuente de error, que puede ser particularmente importante en el caso de líquidos altamente viscosos y/o para cizallamiento elevado (Walters, 1975). El símbolo β se usará para describir la dependencia con la temperatura de las propiedades del material ($\beta = 0$ representa materiales cuyas propiedades no se ven afectadas por los cambios de temperatura y valores altos de β representa materiales cuyas propiedades son muy sensibles a la temperatura).

Es posible identificar β como el parámetro de relación viscosidad-temperatura. El parámetro que decide si el calentamiento inducido por la cizalla es importante en una situación práctica es el producto $\beta \cdot B(r)$, siendo $B(r)$ el número de Brinkman. Para flujo plano de Couette con una separación entre cilindros (*gap*) de anchura h , $B(r)$ viene dado por:

$$B(r) = \frac{\sigma^2 h^2}{\eta K_T T_0} r^2 \quad [7.87]$$

donde K_T es la conductividad térmica y T_0 es una temperatura de referencia (K). De esta ecuación se puede deducir que los efectos de calentamiento deben ser significativos en los intervalos más elevados de viscosidad y velocidad de deformación. Una forma de minimizar dichos efectos es trabajar con una separación entre cilindros estrecha.

Imperfecciones del instrumento

Medidas viscosimétricas fiables requieren mucha precisión, tanto en la geometría de los diferentes instrumentos como en el alineamiento de las superficies y problemas con él relacionados (Walters, 1975).

El perfecto alineamiento en el caso de reometría de *gap* estrecho es una tarea difícil y, para líquidos altamente viscosos, un pequeño grado de inclinación puede ocasionar una presión positiva grande en la región de flujo convergente y una presión negativa grande en la región de flujo divergente sobreimpuesta a la

presión debida a los efectos de esfuerzos normales (Greensmith y Rivlin, 1953). Este efecto se puede eliminar invirtiendo la dirección de la rotación y tomando la media de la presión obtenida durante el movimiento en ambas direcciones (Mc-Kennell, 1960).

Otra fuente de error es la debida al pequeño movimiento axial del miembro en rotación durante el experimento, causado por las imperfecciones de conexión (Adams y Lodge, 1964).

Efectos finales y de borde

Este tipo de error ha sido puesto de manifiesto por diversos autores, tales como Oka (1960), van Wazer (1963), y Walters (1975). Este error es debido a que los miembros del instrumento tienen dimensiones finitas. Consecuentemente, en general, siempre existe un arrastre viscoso debido al esfuerzo en el fondo de la superficie del cilindro interno. Además, la distribución de esfuerzos en la superficie cilíndrica difiere de la de cilindros de longitud infinita, ya que el flujo es afectado por la existencia del final de la superficie.

El efecto final puede ser considerado como equivalente a un aumento en la longitud efectiva de inmersión desde h a $(h + \Delta h)$ (Oka, 1960). La ecuación de Margules para flujo newtoniano se convierte en:

$$\Omega = \left[\frac{T' h}{4\pi \eta (h + \Delta h)} \right] \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_0^2} \right) \tag{7.88}$$

donde Δh , la corrección final, es en general función de R_i, R_0, h y el hueco final l . La corrección final (Δh) normalmente se obtiene por experimentación al representar T'/Ω frente a h .

Oka (1960) ha deducido una relación para el efecto final que satisface la ecuación de Navier Stokes. La expresión final es:

$$\frac{\Delta h}{R_i} = \frac{1}{8} \frac{R_i}{l} \left[1 - \left(\frac{R_i}{R_0} \right)^2 \right] \left[1 + 4 \frac{1}{R_i} \sum_1^\infty A_n I_2 \left(\frac{n \pi a}{1} \right) + \frac{8}{\pi} \frac{1}{R_i} \sum_1^\infty B_n \frac{\text{sen } h (K_n h)}{K_n R_i} \right] \tag{7.89}$$

donde I_2 es la función de segundo orden de Bessel modificada, K es la raíz n -ésima positiva de la ecuación. $r = (KR_0) = 0$; A_n, B_n son funciones de los parámetros adimensionales $R_i/R_0, h/R_0$ y l/R_0 . En esta ecuación el primer término del segundo miembro entre corchetes es debido únicamente al efecto final del cilindro interno; el segundo es debido al efecto de borde en el fondo; y el tercer término es debido al efecto final y de superficie libre del fluido en el *gap*. Se observa que es evidente que cuando l es muy grande comparado con R_i y cuando R_i/R_0 es cercano a la unidad, el término $(\Delta h/R_i)$ es muy pequeño. Basado en estos resultados, se puede y probablemente debería reducirse la influencia de esfera y efectos finales si se toma el hueco entre cilindros tan estrecho como sea posible.

Vórtices de Taylor

La presencia de vórtices de Taylor es un problema que se presenta cuando se analiza una muestra con un viscosímetro coaxial en la que gira el cilindro interno. La condición de esta inestabilidad viene dada por el número de Taylor (Schlichting, 1955):

$$T_a = \frac{v_i}{\nu} \left(\frac{d}{R_i} \right)^{1/2} \geq 41,3 \quad [7.90]$$

en la que R_i es el radio del cilindro interno, d es el hueco entre cilindros, v_i es la velocidad periférica del cilindro interno, y ν es la viscosidad cinemática. Se pueden diferenciar los números de Taylor en tres regímenes de flujo:

$$\begin{aligned} T_a < 41,3 &= \text{laminar Couette} \\ 41,3 < T_a < 400 &= \text{laminar, con vórtices de Taylor} \\ T_a > 400 &= \text{turbulento} \end{aligned}$$

Miscelánea de fuentes de error

Otras fuentes de error que se pueden presentar son:

- a) Efectos de inercia. Esta corrección depende de $\omega(r)$ que a su vez depende de la función de viscosidad aparente.
- b) Errores inherentes en la interpretación de los resultados experimentales.
- c) Inestabilidades debidas al flujo turbulento.
- d) Homogeneidad de la muestra ensayada.
- e) Estabilidad de la muestra ensayada.
- f) Deslizamiento.

7.12.1.2. Flujo oscilatorio

Los experimentos oscilatorios pueden llevarse a cabo con geometrías de platos paralelos, plato y cono, y sistema Couette de cilindros concéntricos. Este tipo de experimentos se utiliza en el estudio de la viscoelasticidad de alimentos. Para ello, se aplica un movimiento armónico simple de amplitud pequeña a la parte fija de los sistemas anteriores de medición, lo que induce una oscilación en el rotor que viene afectada por la resistencia viscosa y la fuerza elástica de la muestra contenida en el viscosímetro. La fase de oscilación del rotor está desfasada negativamente, y la amplitud inducida también difiere de la aplicada.

Es posible llegar a calcular η' y G' (Rao, 1986) a partir de las expresiones:

$$\eta' = \frac{-s (\theta_1/\theta_2) \operatorname{sen} c}{[(\theta_1/\theta_2)^2 - 2 (\theta_1/\theta_2) \cos c + 1]} \quad [7.91]$$

$$G' = \frac{\omega s (\theta_1/\theta_2) [\cos c - (\theta_1/\theta_2)]}{[(\theta_1/\theta_2)^2 - 2 (\theta_1/\theta_2) \cos c + 1]} \quad [7.92]$$

Las variables de estas expresiones están definidas de diferente modo según sea el sistema de medición utilizado.

Para el sistema Couette de cilindros concéntricos, se define la variable como:

$$s = \frac{(R_0^2 - R_1^2) (K - I \omega^2)}{4\pi L R_1^2 R_0^2 \omega} \quad [7.93]$$

mientras que θ_1 es la amplitud angular del cilindro interno y θ_2 la del externo, L la altura de la muestra contenida entre los cilindros, I el momento de inercia del cilindro interno respecto de su eje, ω la frecuencia, c el desfase, K la constante de restauración del par de torsión.

Para sistemas de platos paralelos, en el que el inferior es sometido a una oscilación, la variable s se calcula por la ecuación:

$$s = \frac{2 h (K - I \omega^2)}{2 a^2 \omega} \quad [7.94]$$

siendo h la distancia entre platos, a su radio, I el momento de inercia del plato superior respecto a su eje, θ_1 es la amplitud angular del plato superior, θ_2 la del inferior y c el desfase del plato superior.

En sistemas de cono y plato, en el que rota el plato, se tiene:

$$s = \frac{3 \theta_0 (K - I \omega^2)}{2\pi a^2 \omega} \quad [7.95]$$

siendo θ_0 el ángulo del cono, θ_1 la amplitud angular del cono, θ_2 la del plato, mientras que a es el radio del plato y c el desfase del cono.

7.12.1.3. Flujo capilar

Cuando un líquido fluye a través de un tubo forma un gradiente de velocidad y se induce un cizallamiento. Se han desarrollado métodos para medir las propiedades de flujo de fluidos utilizando capilares a través de los que un fluido es forzado a fluir debido a una presión aplicada o a la presión hidrostática. Si el caudal volumétrico, dimensión del tubo, y presión aplicada son conocidos, se pueden construir las curvas de flujo y pueden calcularse los valores aparentes de la viscosidad. Deben hacerse ciertas suposiciones para desarrollar ecuaciones generales que permitan el cálculo de las velocidades de deformación y esfuerzos cortantes para un punto específico en el tubo.

Rabinowitsch (van Wazer *et al.*, 1963) desarrolló una ecuación general para el cálculo de velocidades de deformación. Esta ecuación, que es válida tanto para fluidos no-newtonianos como newtonianos, es:

$$\dot{\gamma} = \frac{3 + b}{4 (4q/\pi R^3)} \quad [7.96]$$

en la que:

$$b = \frac{d \log (4 q / \pi R^3)}{d \log (\Delta P R / 2 l)} \quad [7.97]$$

en las que q es el caudal volumétrico a través del capilar de longitud l y radio R , y ΔP es la presión aplicada. El valor del término b puede ser calculado al representar gráficamente $(4q/R^3)$ frente a $(\Delta P R / 2 l)$ en coordenadas doble logarítmicas, siendo b la pendiente de la recta así construida. Para líquidos newtonianos la pendiente de la recta es uno y la ecuación se reduce a:

$$\dot{\gamma} = 4 q / R^3 \quad [7.98]$$

Cuando la pendiente de la recta se desvía de 1, el fluido no exhibe carácter newtoniano, debiéndose utilizar la ecuación global. El comportamiento al flujo de una variedad de suspensiones alimentarias ha sido estudiado utilizando flujo capilar; tal es el caso de salsa de manzana, alimentos infantiles, y puré de tomate (Charm, 1960; Saravacos, 1968; Rao *et al.*, 1974).

7.12.1.4. Viscosimetría de Retro Extrusión

Un modo de caracterizar el comportamiento reológico de fluidos no newtonianos independientes del tiempo es mediante experimentos de retro extrusión (*back extrusion*). La retro extrusión se produce cuando una varilla es sumergida en un vaso cilíndrico que contiene la muestra a experimentar (figura 7.19). A medida que la varilla penetra se produce un desplazamiento de la muestra, pero en dirección contraria a la penetración de la varilla, de ahí el nombre de «retro extrusión».

Estos tipos de experimentos han sido aplicados por Osorio y Steffe (1987) en la determinación de los parámetros reológicos de fluidos que siguen la ley de la potencia. En la figura 7.20 se muestra la gráfica obtenida en un típico experimento de retro extrusión, en el que a la varilla se le aplica una fuerza cada vez mayor, con lo que la longitud de la varilla que penetra en la muestra va en aumento. Para una fuerza F_T se detiene la penetración, apareciendo una fuerza de equilibrio F_{Te} .

En el cálculo del índice de comportamiento al flujo (n) es preciso realizar dos experimentos, obteniéndose su valor a partir de la expresión:

$$n = \frac{\ln \left[\left(\frac{F_{b2}}{F_{b1}} \right) \left(\frac{L_1}{L_2} \right) \right]}{\ln (v_1/v_2)} \quad [7.99]$$

en la que los subíndices 1 y 2 se refieren a los dos experimentos, v es la velocidad de la varilla, L la longitud de la varilla sumergida en la muestra, y F_b es la fuerza corregida con la de flotación, y se define por:

$$F_b = F_T - \rho g L \pi a^2 \quad [7.100]$$

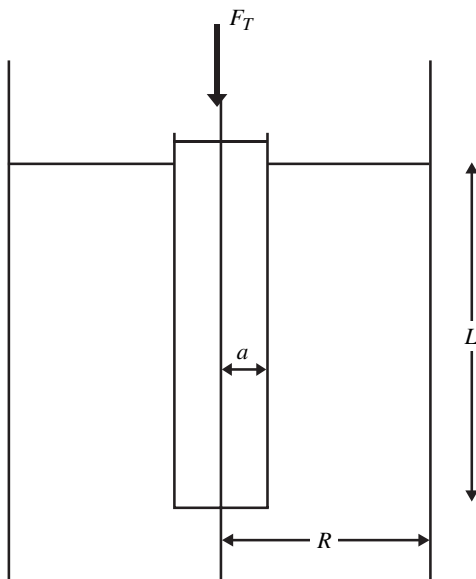


Figura 7.19. Posición de la varilla y vaso cilíndrico en un experimento de retro extrusión.

en la que a es el radio de la varilla, ρ la densidad de la muestra, g la aceleración gravitacional, y F_T la fuerza justo antes del paro de la varilla.

Para el cálculo del índice de consistencia se utiliza la ecuación:

$$k = \frac{R F_b K}{2 \Gamma^2 \pi L R a} \left(\frac{\Phi R}{v K^2} \right) \quad [7.101]$$

en la que R es el radio del vaso exterior, K la relación entre el radio de la varilla y el del vaso ($K = a/R$); Φ es la velocidad de flujo adimensional; Γ es el radio adimensional cuando el esfuerzo es nulo. Tanto Φ como Γ son función de K y del índice de comportamiento al flujo, cuyos valores vienen dados en forma gráfica o tabulados (Osorio y Steffe, 1987; Steffe y Osorio, 1987).

Para fluidos con comportamiento newtoniano también puede aplicarse este tipo de caracterización, asumiendo que $n = 1$. Asimismo, para fluidos de Herschel-Bulkley y de Bingham se puede llegar a obtener sus correspondientes parámetros reológicos (Osorio, 1985; Osorio y Steffe, 1985). Estos fluidos presentan un umbral de fluencia, que también es posible determinar utilizando este tipo de experimentos.

También es posible aplicar esta técnica en la caracterización reológica de fluidos que presentan dependencia con el tiempo; así, se ha aplicado en el estudio reológico de muestras de alimentos infantiles de macarrones y queso (Steffe y Osorio, 1987).

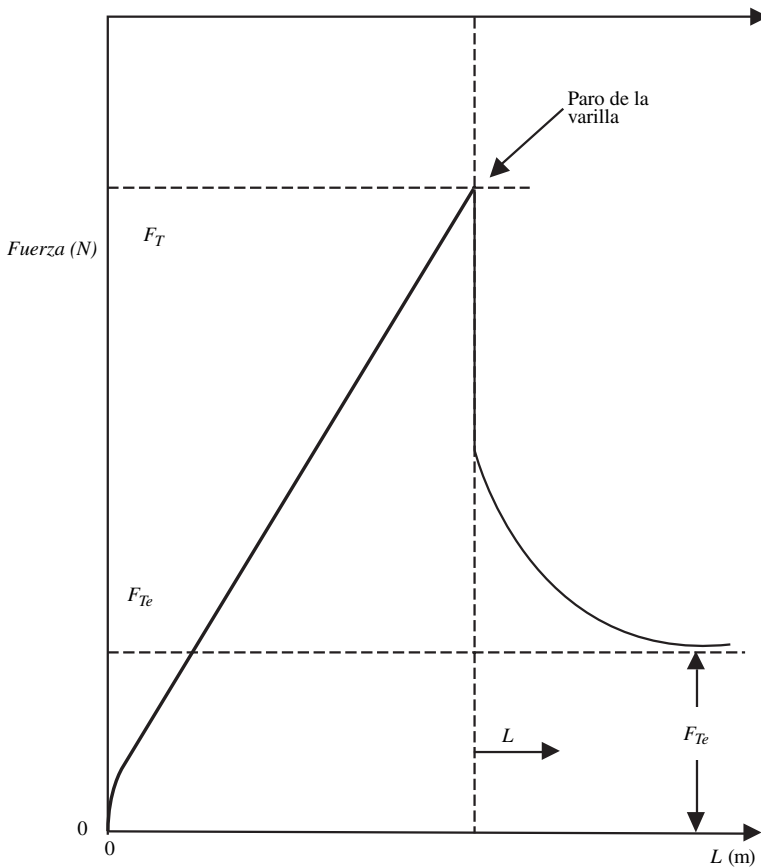


Figura 7.20. Datos Típicos de Retro Extrusión para un Fluido de la Ley de la Potencia.

7.12.1.5. Viscosimetría de Flujo por Compresión

Cuando un material fluido se comprime entre dos placas paralelas el material comprimido fluye en dirección perpendicular a la fuerza de compresión ejercida. Esta es la base de la viscosimetría de flujo por compresión (*squeezing flow viscosimetry*), y puede ser utilizada en la caracterización reológica de fluidos que presentan problemas de deslizamiento (Campanella y Peleg, 1987a, 1987b).

Existen cuatro tipos de ensayos que permiten una caracterización reológica adecuada, que son a volumen de muestra constante o área constante, combinadas con la aplicación de una fuerza o una velocidad de deformación constantes. En la figura 7.21 se hallan esquematizados estos cuatro tipos de ensayos. Si para una muestra determinada se desean obtener los parámetros de la ley de la potencia mediante esta técnica, es necesario asegurarse que dicha muestra no presenta viscoelasticidad. A continuación se expone la forma de calcular el índice de consis-

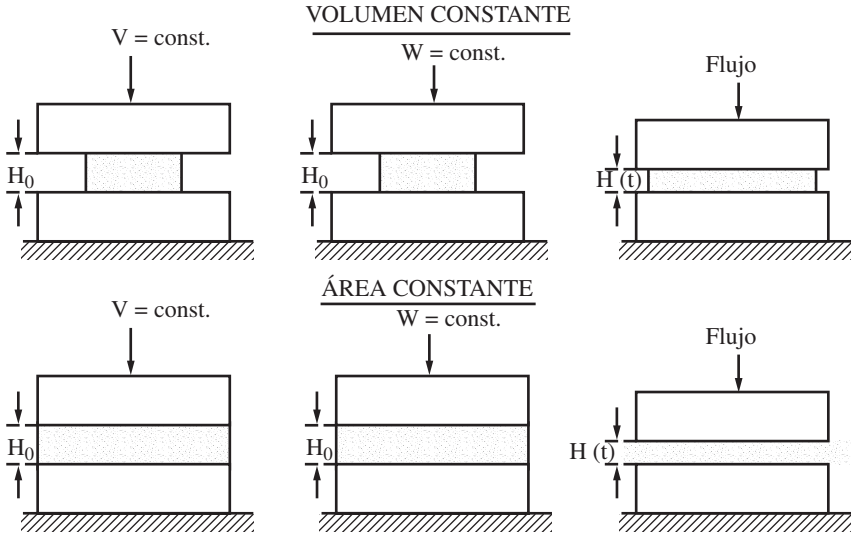


Figura 7.21. Tipos de Ensayos en Viscosimetría de Flujo por Compresión.

tencia (k) y el índice de comportamiento al flujo (n) para ensayos de flujo por compresión de una muestra de área constante introducida entre dos placas circulares de radio R .

Para una velocidad de deformación constante (V_d), existe una variación de la altura de la muestra $H(t)$ y de la fuerza $F(t)$ con el tiempo, y que pueden relacionarse según la expresión (Campanella y Peleg, 1987a):

$$F(t) = \frac{3^{n+1} \pi R^2 k (V_d)^n}{[H(t)]^2} \tag{7.102}$$

a partir de la cual es posible obtener los valores de k y n , mediante un ajuste por regresión no lineal de las datos experimentales de la variación de $F(t)$ con $H(t)$.

También pueden determinarse estos parámetros mediante un experimento para fuerza constante. Si W es la fuerza aplicada, y H_0 la altura inicial de la muestra, la variación de $H(t)$ con el tiempo viene dada por la expresión (Campanella y Peleg, 1987a):

$$\ln [H(t)/H_0] = -S t \tag{7.103}$$

en la que:

$$S = \left[\frac{W}{3^{(n+1)/2} \pi R^2 k} \right]^{1/n} \tag{7.104}$$

Para la obtención del índice de consistencia k y del índice de comportamiento al flujo n , es necesario realizar un mínimo de dos experimentos; ya que la pendiente S de la ecuación 7.103 contiene los dos parámetros a determinar.

La viscosimetría de flujo por compresión también puede utilizarse en la determinación del umbral de fluencia, para aquellos productos que lo presenten (Campanella y Peleg, 1987).

7.12.2. Métodos empíricos

Se han desarrollado diversos instrumentos para caracterizar la consistencia de purés alimentarios. Estos métodos empíricos se usan en el control de calidad de productos y en el tratamiento de estudios con los efectos del cambio de condiciones de procesado en la consistencia de purés (Rao, 1980).

Viscosímetros rotacionales con geometrías de husillos (*spindles*) que son de difícil análisis matemático han sido utilizados en ensayos empíricos. Las geometrías incluyen husillos con agujas con protuberancias y aletas. Kramer y Twigg (1962), Aronson y Nelson (1964), y Rao (1980) describen algunos de estos métodos usados en la industria alimentaria.

7.12.2.1. Consistómetro Adams

Este instrumento mide la consistencia de alimentos por el grado de extensión o flujo del producto en todas las direcciones en un tiempo determinado. Este tipo de instrumento ha sido utilizado en productos de tomate, calabaza, crema de cereal, y pastas de judía (Davis *et al.*, 1954; Lana y Tischer, 1951; Mason y Wiley, 1958).

7.12.2.2. Consistómetro Bostwick

Este mide la consistencia de materiales viscosos por medida de la distancia sobre la que el material fluye en una superficie lisa bajo su propio peso durante un intervalo de tiempo dado. Ha sido utilizado en salsa de tomate («ketchup») (USDA, 1953), confituras y conservas (Davis *et al.*, 1954) y pudín de leche (Rutgus, 1958).

7.12.2.3. Viscosímetro de flujo de tubo

Este viscosímetro es usado para medir el tiempo necesario para que una determinada cantidad de fluido atraviese un tubo o capilar. Este tipo de instrumento es especialmente bueno para materiales altamente móviles como el viscosímetro Ostwald. Davis *et al.* (1954) utilizaron este tipo de viscosímetro para medir la consistencia de pasta de tomate. Mostraron que los datos obtenidos con los consistómetros Adams y Bostwick estaban relacionados linealmente, y que con el viscosímetro Efflux, se obtenían parámetros diferentes de los del consistómetro.

7.12.3. Métodos imitativos

Estos métodos, en casos especiales, miden propiedades reológicas bajo condiciones de simetría similares a las que se presentan en la práctica. En este grupo se

incluyen: 1) El Visco Amilógrafo Brabender utilizado en la evaluación de la «consistencia» de harinas, almidones y gomas (Bhattacharya *et al.*, 1978). La muestra es colocada en un recipiente y se mide el par de torsión ejercido sobre una pala rotante. La temperatura de la muestra es elevada o disminuida a velocidad constante y los resultados son registrados en un papel de registro móvil. 2) El Plastómetro consiste en un puente de flujo con una disposición de conductos ideados para producir una presión diferencial entre dos puntos de referencia. La presión diferencial en el puente de flujo se da como una función de la consistencia (Eolkin, 1957).

Tabla 7.4. Modelos reológicos para alimentos viscosos independientes del tiempo

Denominación	Ecuación	Notas
Ley de Newton	$\sigma = \eta \dot{\gamma}$	1 Parámetro
Modelo de Bingham	$\sigma = \eta_{pl} \dot{\gamma} + c$	2 Parámetros
Modelo de Ostwald-de-Waele, Nutting o Ley de la Potencia	$\sigma = \eta (\dot{\gamma})^n$	2 Parámetros
Herschel-Bulkley Ley de la Potencia Modificada	$\sigma = \eta (\dot{\gamma})^n + c$	3 Parámetros
Modelo de Casson	$\sigma^{0.5} = k_1 + k_2 (\dot{\gamma})^{0.5}$	3 Parámetros
Ecuación de Casson modificada	$\sigma^{0.5} = k'_1 + k'_2 (\dot{\gamma})^m$	3 Parámetros
Ecuación de Elson	$\sigma = \mu \dot{\gamma} + B \operatorname{sen} h^{-1} + \sigma_0$	3 Parámetros
Modelo de Vocadlo	$\sigma = (\sigma_0^{1/n} + k \dot{\gamma})^n$	3 Parámetros
Modelo de Shangraw	$\sigma = a \dot{\gamma} + b [1 - \exp(-c \dot{\gamma})]$	2 Parámetros
Modelo generalizado	$\dot{\gamma} = \frac{1}{\eta_0} \left[\frac{1 + \left(\frac{\tau_{rz}}{\tau_m} \right)^{\alpha-1}}{1 + \left(\frac{\tau_{rz}}{\tau_m} \right)^{\alpha-1} \frac{\eta_\infty}{\eta_0}} \right]$	4 Parámetros
Modelo de Sutterby	$\tau_{rz} = -\mu_0 \left[\frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen} \beta \dot{\gamma}}{\beta \dot{\gamma}} \right]^a \dot{\gamma}$	3 Parámetros
Springs Truncado Ley de la Potencia	$\tau_{rz} = -\mu_0 \left[\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_0} \right]^{n-1} \dot{\gamma}$	3 Parámetros
Modelo de Williamson	$\tau = A \frac{\dot{\gamma}}{B + \dot{\gamma}} + \mu_\infty \dot{\gamma}$	3 Parámetros
Modelo de Sisko	$\tau = A \dot{\gamma} + B \dot{\gamma}^n$	3 Parámetros

PROBLEMAS

Problema 7.1

Se ha determinado el comportamiento al flujo de un zumo clarificado de kiwi de 47,3 °Brix, que posee cierto contenido en pectinas; obteniéndose que el mejor modelo que describe dicho comportamiento es la ecuación de la potencia. Las constantes reológicas obtenidas, a distintas temperaturas, se indican en la tabla adjunta:

T (°C)	k (mPa·s ⁿ)	n
4	2.780	0,68
10	2.287	0,68
15	1.740	0,68
20	1.247	0,71
25	1.146	0,68
30	859	0,71
35	678	0,73
40	654	0,71
45	557	0,73
50	515	0,73
55	467	0,74
60	404	0,75
65	402	0,74

- Determinar la energía de activación al flujo en kJ/mol.
- Estimar qué viscosidad aparente presenta un zumo de kiwi de 47,3 °Brix a 37 °C, para un gradiente de velocidad de 100 s⁻¹.

a) La variación de la viscosidad con la temperatura se puede correlacionar mediante una ecuación tipo Arrhenius, que en el caso de fluidos no newtonianos, se utiliza el índice de consistencia en lugar de la viscosidad:

$$k = K_0 \exp\left(\frac{E_a}{RT}\right)$$

al representar $\ln k$ frente a $1/T$ se obtiene una recta, cuya ordenada en el origen es $\ln(K_0)$ y su pendiente es E_a/R . Realizando este ajuste con los datos de la tabla se obtiene:

$$K_0 = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ mPa}\cdot\text{s}^n, \quad E_a/R = 3.097 \text{ K}$$

con lo que la energía de activación al flujo posee un valor de 25,75 kJ/mol.

- Para un fluido pseudoplástico, la viscosidad aparente se expresa:

$$\eta_a = K (\dot{\gamma})^{n-1}$$

Para 37 °C se puede tomar que el índice de comportamiento al flujo es $n = 0,72$. El índice de consistencia se puede obtener a partir de la ecuación de Arrhenius, con los valores de K_0 y E_a obtenidos en el apartado anterior, para $T = 310$ K. Con estos datos se obtiene $k = 763,5$ mPa·sⁿ.

La viscosidad aparente para una velocidad de deformación de 100 s⁻¹ es $\eta_a = 210$ mPa·s.

Problema 7.2

Las industrias que procesan zumos clarificados y despectinizados suelen concentrarlos hasta contenidos en sólidos solubles cercanos a 70 °Brix, en un sistema de evaporación múltiple. El zumo abandona la etapa de evaporación a 60 °C, y debe ser enfriado hasta la temperatura de almacenamiento de 5 °C, para lo que se utiliza un intercambiador de calor de placas, seguido de una de configuración en espiral. El intercambiador de placas únicamente permite el paso de fluidos cuya viscosidad sea inferior a 1.500 mPa·s.

La variación de la viscosidad con la temperatura, para un zumo clarificado y despectinado de melocotón de 69 °Brix puede expresarse mediante la ecuación:

$$\eta = 7,76 \cdot 10^{-11} \exp(6.690/T)$$

en la que η es la viscosidad en Pa·s, y T la temperatura absoluta.

- Calcular la energía de activación al flujo.
- ¿Cuál sería la temperatura mínima a la que podría enfriarse un zumo de 69 °Brix, utilizando el intercambiador de placas?

a) La variación de la viscosidad con la temperatura se puede correlacionar según una ecuación tipo Arrhenius. Al comparar la ecuación de Arrhenius con la que da el enunciado del problema es posible obtener que:

$$\eta = 7,76 \cdot 10^{-11} \exp\left(\frac{6.690}{T}\right)$$

Con lo que $E_a/R = 6.690$ K, ecuación que permite obtener un valor de la energía de activación al flujo de $E_a = 55,62$ kJ/mol.

b) Como la máxima viscosidad que puede pasar por el intercambiador de calor de placas es de 1.500 mPa·s, la temperatura de salida del fluido, una vez enfriado, debe ser tal que la viscosidad del fluido a esta temperatura sea precisamente de 1,5 Pa·s.

La temperatura mínima de salida se obtiene al sustituir el valor de viscosidad 1,5 Pa·s en la ecuación de Arrhenius:

$$1,5 = 7,76 \cdot 10^{-11} \exp\left(\frac{6.690}{T}\right)$$

que operando se obtiene: $T = 282,5$ K = 9,5 °C.

Problema 7.3

Se ha estudiado la influencia del contenido en sólidos solubles sobre el comportamiento reológico de un zumo clarificado y despectinizado de pera. Para ello, se ha tomado un zumo concentrado industrial de 70 °Brix y, mediante dilución con agua destilada, se han obtenido zumos en el intervalo de concentraciones de 30 a 70 °Brix. Se ha encontrado que a 25 °C todos ellos presentan un comportamiento newtoniano, obteniéndose las siguientes viscosidades de cada muestra:

C (°Brix)	30	40	45	50	55	60	65	70
η (mPa·s)	3	5	8	13	19	41	74	233

Obtener una expresión que describa la influencia del contenido en sólidos solubles sobre la viscosidad.

En una de las etapas de un proceso industrial debe circular un zumo de pera a través de una conducción, disponiéndose de una bomba centrífuga que puede impulsar fluidos que posean como máximo una viscosidad de 100 mPa·s. ¿Serviría esta bomba para hacer circular un zumo de 68 °Brix a 25 °C? ¿Qué concentración máxima puede hacer circular esta bomba?

La variación de la viscosidad con el contenido en sólidos solubles puede correlacionarse por alguna de las expresiones:

$$\eta = K_1 \exp(a_1 C) \quad \text{o} \quad \eta = K_2 (C)^{a_2}$$

Estas ecuaciones se pueden linealizar si se toman en forma logarítmica, y con los datos de la tabla, es posible encontrar las diferentes constantes. Del ajuste se obtiene:

$$\begin{aligned} \eta &= 7,9 \cdot 10^{-5} \exp(0,106 C) & r &= 0,975 \\ \eta &= 9,3 \cdot 10^{-11} (C)^{4,89} & r &= 0,940 \end{aligned}$$

en las que la viscosidad se da en Pa·s, si el contenido en sólidos solubles se expresa en °Brix. Parece que el modelo exponencial ofrece un mejor ajuste, ya que su coeficiente de regresión es superior.

Si se toma la ecuación exponencial, para una concentración de 68 °Brix se obtiene que la viscosidad de dicho zumo es de 106,7 mPa·s. Como esta viscosidad es superior a 100 mPa·s, la bomba no podrá impulsar el zumo de 68 °Brix.

Para viscosidad de 100 mPa·s, según se puede obtener de la ecuación exponencial, se corresponde a un zumo de 67,4 °Brix. Por ello, la bomba de que se dispone, únicamente podrá impulsar zumos cuyo contenido en sólidos solubles no supere los 67,4 °Brix.

Problema 7.4

Se ha estudiado el comportamiento reológico al flujo de un zumo clarificado de frambuesa. Para ello, a partir de un zumo concentrado de 41 °Brix, cuyo conte-

nido en pectinas es 0,5 g de ácido galacturónico/kg de zumo, se han preparado, por dilución con agua destilada, distintas muestras hasta 15 °Brix. El comportamiento reológico de estas muestras se ha estudiado en el intervalo de temperaturas de 5 a 60 °C. Se ha obtenido que la ley de la potencia es el modelo que mejor describe dicho comportamiento, obteniéndose que el índice de consistencia y el índice de comportamiento al flujo varían con la temperatura y contenido en sólidos solubles según las expresiones:

$$k = 1,198 \cdot 10^{-11} \exp\left(\frac{4.560}{T} + 0,196 C\right)$$

$$n = 1,123 - 8,52 \cdot 10^{-3} C$$

en la que k viene expresada en Pa·sⁿ, T en Kelvin y C en °Brix.

¿Cuál es el valor de la energía de activación al flujo, expresada en kcal/mol y kJ/mol?

Una industria que concentra zumos clarificados de frambuesa necesita conocer la viscosidad de un zumo de 27 °Brix, que debe circular a 50 °C a través de una conducción de acero inoxidable. Si el gradiente de velocidad que se ejerce sobre dicho zumo a lo largo de la conducción es 100 s⁻¹, ¿cuál es su viscosidad en mPa·s?

Según las expresiones que describen el efecto combinado temperatura-concentración:

$$k = K_1 \exp\left(\frac{E_a}{RT} + K_2 C\right)$$

lo que indica que: $E_a = 4.560 \cdot R$

$$E_a = 4.560 \text{ K} \cdot 1,987 \cdot 10^{-3} \text{ kcal}/(\text{mol}\cdot\text{K}) = 9,06 \text{ kcal/mol}$$

$$E_a = 4.560 \text{ K} \cdot 8,314 \cdot 10^{-3} \text{ kJ}/(\text{mol}\cdot\text{K}) = 37,91 \text{ kJ/mol}$$

Para zumos de frambuesa de 27 °Brix, a la temperatura de 50 °C (323 K), el índice de comportamiento al flujo es de $n = 0,893$; mientras que el índice de consistencia será $k = 32,2 \text{ mPa}\cdot\text{s}^n$.

La viscosidad aparente de un fluido que sigue la ley de la potencia es: $\eta_a = k (\dot{\gamma})^{n-1}$. Al sustituir en la ecuación exponencial, los datos obtenidos para los índices de consistencia y comportamiento al flujo, y para una velocidad de deformación de 100 s⁻¹, se obtiene una viscosidad aparente de 19,7 mPa·s.

8.1. Introducción

El transporte de fluidos por conducciones es de gran importancia en muchos procesos industriales, considerándose como una operación unitaria dentro de la Ingeniería. En el estudio del transporte de fluidos debe conocerse inicialmente de qué tipo de fluido se trata, para lo cual debe realizarse una clasificación de ellos:

- A) Según el comportamiento que presentan bajo la acción de presiones externas, los fluidos pueden ser: **compresibles** e **incompresibles**. Cuando el volumen del fluido es independiente de su presión y temperatura se trata de un fluido incompresible; por el contrario, si su volumen varía, el fluido es compresible. En la realidad ningún fluido es incompresible, aunque los líquidos pueden considerarse como tales. Por contra, en los gases se presenta una gran variación de la compresibilidad con la presión y temperatura.
- B) Según los efectos que producen los esfuerzos cortantes sobre un fluido, éstos se pueden clasificar en **newtonianos** y **no newtonianos**, según sigan o no la ley de Newton de la viscosidad, lo que determinará el tipo de perfil de velocidades del fluido en el interior de las conducciones.

Dependiendo de la relación existente entre el esfuerzo cortante (σ) aplicado sobre un fluido, y su velocidad de deformación ($\dot{\gamma}$), las principales ecuaciones que describen el comportamiento reológico de un fluido alimenticio, como se vió en el Capítulo 6, son:

$$\text{Ecuación de Newton:} \quad \sigma = \eta \dot{\gamma} \quad [8.1]$$

$$\text{Ley de la Potencia:} \quad \sigma = k \dot{\gamma}^n \quad [8.2]$$

$$\text{Ecuación de Bingham:} \quad \sigma = \sigma_0 + \eta' \dot{\gamma} \quad [8.3]$$

$$\text{Modelo Herschel-Bulkley:} \quad \sigma = \sigma_0 + k_H \dot{\gamma}^n \quad [8.4]$$

donde: η es la viscosidad.
 k es el índice de consistencia.
 n es el índice de comportamiento al flujo.
 σ_0 es el umbral de fluencia.
 η' es la viscosidad plástica.

Puede observarse que los primeros tres modelos son variantes del modelo de Herschel-Bulkley, si σ_0 es cero y n es la unidad para el primero, si σ_0 es cero para el segundo, y si η' es equivalente a k_H y n es igual a la unidad en el tercero.

El problema fundamental que se presenta al estudiar el flujo de fluidos por el interior de tuberías es conocer y encontrar las ecuaciones que relacionen la pérdida de presión, que experimenta el fluido dentro de la tubería, con el flujo y con las diferentes propiedades del fluido, así como con las características y dimensiones de la tubería. Una vez conocidas estas relaciones, mediante los balances de materia y energía, es posible calcular la potencia necesaria para el transporte del fluido alimentario considerado a través de las tuberías.

8.2. Circulación de fluidos incompresibles

Tal como se ha mencionado anteriormente, los fluidos incompresibles son aquellos que al circular isotérmicamente por una tubería, tienen una densidad que en cualquier punto es la misma, es decir, la densidad permanece constante. A pesar de que en la circulación no isotérmica de fluidos incompresibles la densidad depende de la temperatura, pueden aplicarse todas las ecuaciones de fluidos incompresibles para circulación isotérmica, cometiéndose un error mínimo.

8.2.1. Criterios para flujo laminar

En la circulación de fluidos incompresibles por conducciones debe tenerse presente el tipo de flujo. Bajo esta consideración, los fluidos pueden circular en régimen laminar o turbulento, dependiendo del valor del **número o módulo de Reynolds** (Re) (Coulson y Richardson, 1989; McCabe *et al.*, 1985), el cual es adimensional y se define como:

$$\text{Re} = \frac{v d \rho}{\eta} \quad [8.5]$$

donde: v es la velocidad media que lleva el fluido en la tubería.

d es el diámetro interno de la tubería.

ρ es la densidad del fluido.

η es la viscosidad del fluido.

Este módulo es una medida de la razón entre las fuerzas de inercia y las viscosas o de rozamiento en cada punto de un fluido en movimiento. A continuación se dan los tipos de régimen de circulación según el valor del número de Reynolds:

$\text{Re} < 2.100$	Régimen laminar.
$2.100 < \text{Re} < 4.000$	Régimen de transición.
$4.000 < \text{Re} < 10.000$	Régimen prácticamente turbulento.
$10.000 < \text{Re}$	Régimen turbulento.

En la ecuación 8.5 se ha definido el módulo de Reynolds para fluidos newtonianos; sin embargo, si el fluido es no newtoniano, este módulo se define de manera diferente (Charm, 1981; Rao, 1992; Levenspiel, 1993; Singh y Heldman, 1993). Así, para plásticos de Bingham y ley de la potencia o fluidos del tipo Herschel-Bulkley se tienen las siguientes ecuaciones:

Plásticos de Bingham:

$$\text{Re}_B = \frac{v d \rho}{\eta'} \quad [8.6]$$

Ley de la Potencia y fluidos Herschel-Bulkley: para estos fluidos se define un número de Reynolds generalizado Re_G :

$$\text{Re}_G = \frac{d^n v^{2-n} \rho}{8^{n-1} k} \left(\frac{4n}{1+3n} \right)^n \quad [8.7]$$

Para fluidos newtonianos se considera que un fluido circula en régimen laminar si el valor del número de Reynolds es inferior a 2.100. Sin embargo, si los fluidos son no newtonianos el criterio a seguir es distinto. Se define el **valor crítico** del número o módulo de Reynolds como el valor del mismo a partir del cual el fluido deja de circular en régimen laminar.

Para fluidos de la ley de potencia el valor crítico del número de Reynolds (Steffe y Morgan, 1986) está dado por:

$$\text{Re}_G)_{\text{Crítico}} = \frac{6.464 n}{(1+3n)^2 \left(\frac{1}{2+n} \right)^{(2+n)/(1+n)}} \quad [8.8]$$

Una representación gráfica de esta ecuación se muestra en la figura 8.1. El valor crítico del número de Reynolds presenta un máximo de 2.400 para un valor del índice de flujo de 0,4. A partir de aquí su valor va disminuyendo hasta 2.100, que es el valor correspondiente a un fluido newtoniano ($n = 1$).

Para plásticos de Bingham es necesario definir un parámetro m que es la relación entre el umbral de fluencia y el valor del esfuerzo cortante que el fluido ejerce sobre la pared (σ_w) de la conducción por la que está fluyendo:

$$m = \frac{\sigma_0}{\sigma_w} \quad [8.9]$$

El valor del número de Reynolds crítico se puede calcular a partir de la siguiente expresión:

$$\text{Re}_B)_{\text{Crítico}} = \frac{He}{8 m_C} \left(1 - \frac{4 m_C}{3} + \frac{m_C^4}{r} \right) \quad [8.10]$$

en la que m_C es un valor crítico de m , que se obtiene de la siguiente relación:

$$\frac{m_C}{(1 - m_C)^3} = \frac{He}{16.800} \tag{8.11}$$

siendo He el número de Hedstrom, definido por la expresión 8.12a:

$$He = \frac{\sigma_0 d^2 \rho}{(\eta')^2} \tag{8.12a}$$

La variación del valor crítico (m_C) con el número de Hedstrom correspondiente a la ecuación 8.11, está expresada en forma gráfica en la figura 8.2. Además, en la figura 8.3 se representa la variación del número de Reynolds crítico en función del número de Hedstrom. Se puede observar que para valores altos del umbral de fluencia el valor correspondiente al número de Hedstrom es elevado (figura 8.2), lo que implica que el número de Reynolds también lo sea (ec. 8.10). Es decir, es muy difícil que en estos casos el fluido pueda circular en régimen turbulento.

Para fluidos del tipo Herschel-Bulkley la obtención del valor crítico del número de Reynolds generalizado puede obtenerse en función del número de Hedstrom y del índice de flujo, tal como se puede apreciar en la figura 8.4 (Hanks y Ricks, 1984; Steffe y Morgan, 1986). Para el uso de esta gráfica es importante resaltar que debe calcularse el número de Hedstrom generalizado, definido por la expresión:

$$He = \frac{d^2 \rho}{k} \left(\frac{\sigma_0}{k} \right)^{\left(\frac{2}{n} - 1 \right)} \tag{8.12b}$$

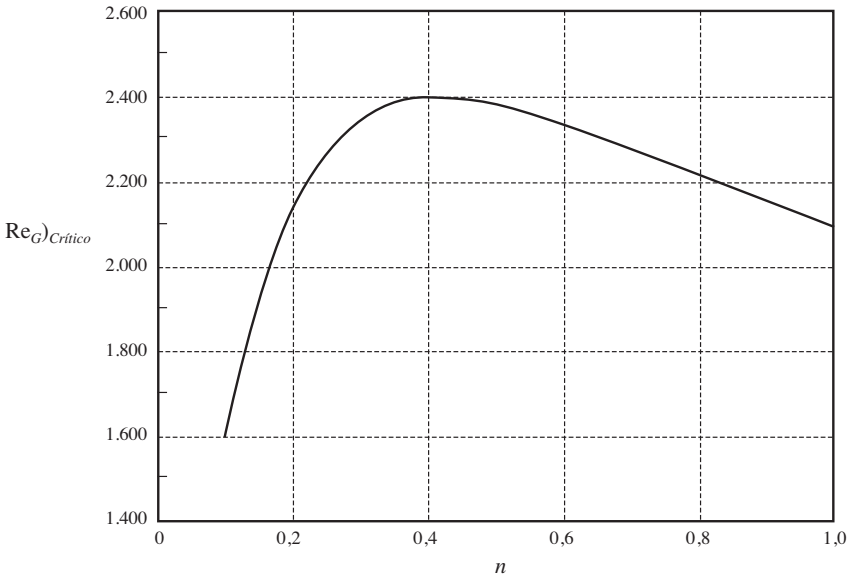


Figura 8.1. Variación del número de Reynolds crítico con el índice de flujo, para fluidos de la ley de potencia (adaptado de Steffe, 1992a).

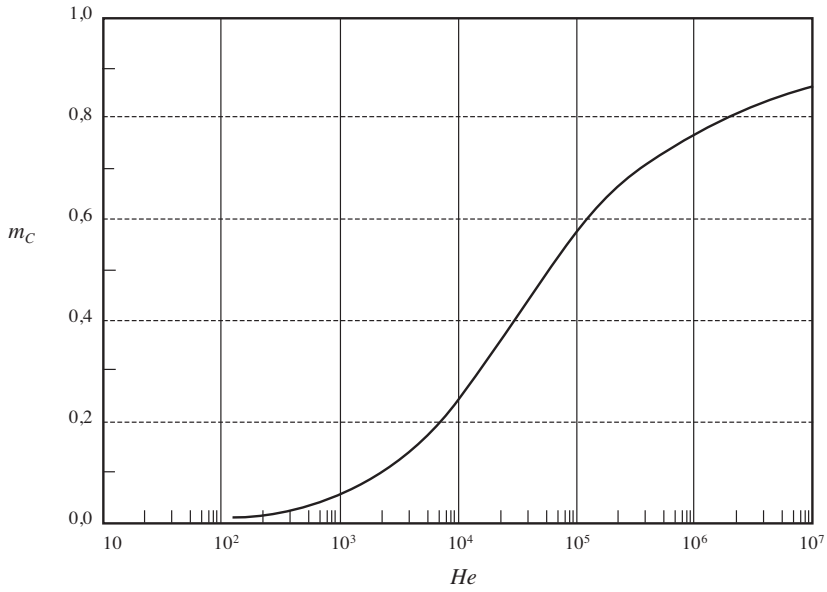


Figura 8.2. Variación m_c con el número de Hedstrom, para plásticos de Bingham (adaptado de Steffe, 1992a).

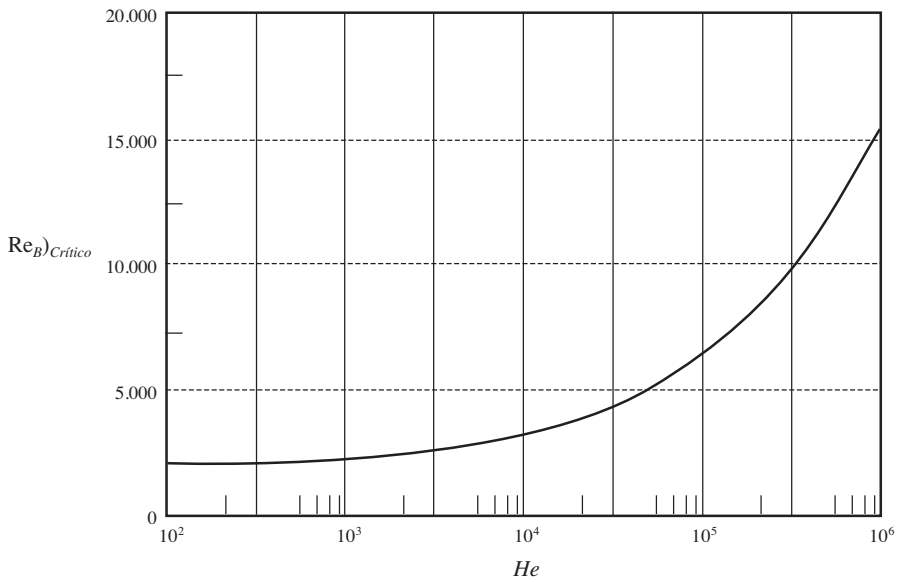


Figura 8.3. Variación del número de Reynolds crítico con el número de Hedstrom, para plásticos de Bingham (adaptado de Steffe, 1992a).

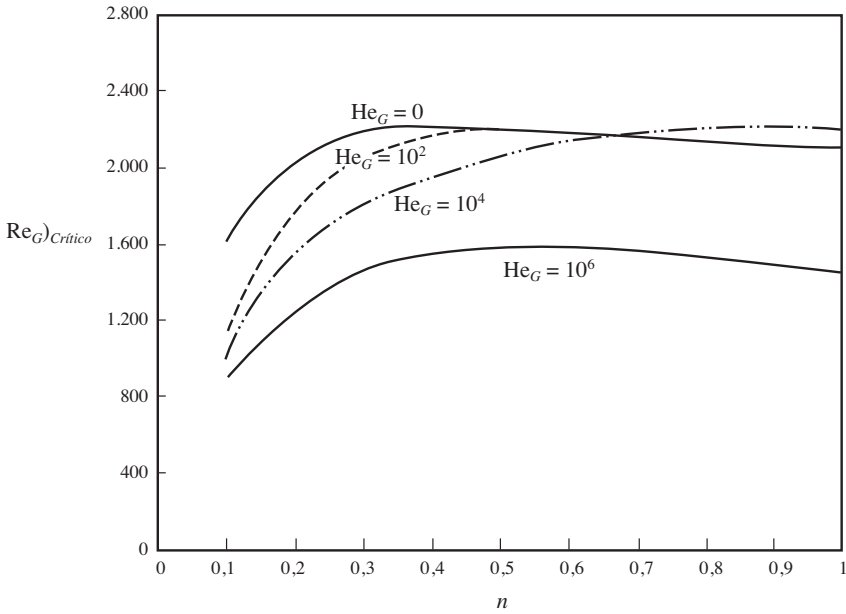


Figura 8.4. Número de Reynolds crítico en función del número de Hedstrom y del índice de flujo para fluidos Herschel-Bulkley.

8.2.2 Distribución de velocidades

Se entiende por perfil de velocidades, para una tubería circular, la gráfica que resulta de representar la variación de la velocidad puntual del fluido con respecto al radio de la tubería. El perfil de velocidades varía con el valor del módulo de Reynolds.

El perfil de velocidades de un fluido en movimiento depende del tipo de régimen con el que fluye, por lo que se tendrán distintos perfiles de velocidad según sea el régimen laminar o turbulento. El conocimiento de este perfil es muy valioso, pues la velocidad es una de las variables que se presenta en el término o factor de energía cinética de la ecuación de Bernoulli. Asimismo, se utiliza en el cálculo del caudal volumétrico.

8.2.2.1. Régimen laminar

El perfil de velocidades, en la dirección de la corriente, sobre la sección transversal de un fluido que está circulando por el interior de una tubería no es uniforme. Este perfil puede calcularse (Coulson y Richardson, 1989; McCabe *et al.*, 1985; Singh y Heldman, 1993) si el fluido circula en régimen laminar, dependiendo de las características geométricas de la tubería por la que éste está fluyendo.

1. Fluidos newtonianos

El perfil de velocidades que presenta un fluido newtoniano, circulando en régimen laminar por una conducción de sección transversal circular, está dado por la expresión:

$$v = \frac{(P_1 - P_2) R^2}{4 \eta L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad [8.13]$$

donde: P_1 es la presión que recibe el fluido en la entrada de la tubería.

P_2 es la presión con la que el fluido sale de la tubería.

R es el radio interno de la tubería.

r es el radio de la tubería en cualquier posición.

L es la longitud de la tubería.

la ecuación 8.13 indica que el perfil de velocidades es parabólico.

La velocidad máxima se da en el centro de la tubería (para $r = 0$), donde el efecto del esfuerzo cortante es mínimo, esto es:

$$v_{m\acute{a}x} = \frac{(P_1 - P_2) R^2}{4 L \eta} \quad [8.14]$$

con lo que al sustituir la ecuación 8.14 en la 8.13, se obtiene una expresión diferente para la velocidad puntual:

$$v = v_{m\acute{a}x} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad [8.15]$$

El caudal o flujo volumétrico con el que el fluido circula por la tubería se obtiene a partir de la siguiente sustitución:

$$q = \int_S v dS = \frac{(P_1 - P_2) R^4 \pi}{8 L \eta} \quad [8.16]$$

en la que S es el área de flujo o sección de paso. Esta expresión es la denominada ecuación de **Hagen-Poiseuille** (Charm, 1981; McCabe *et al.*, 1985; Singh y Heldman, 1993).

La velocidad media de circulación se obtiene por integración del flujo volumétrico y del área de flujo de todos los puntos o filamentos de corriente (McCabe, 1985):

$$v_m = \frac{\int v dS}{\int dS} = \frac{q}{\pi R^2} = \frac{(P_1 - P_2) R^2}{8 L \eta} = \frac{v_{m\acute{a}x}}{2} \quad [8.17]$$

También es interesante conocer el valor del **esfuerzo cortante** en cada punto de una sección de la tubería:

$$\sigma = -\eta \frac{dv}{dr} = \frac{(P_1 - P_2) \eta}{2 L} = \frac{4 v_m \eta}{R^2} r \quad [8.18]$$

lo que indica que el perfil del esfuerzo cortante es lineal con el radio de la tubería, siendo máximo en la pared y nulo en el centro de la tubería:

- Para $r = 0$ $\sigma = 0$
- Para $r = R$ $\sigma_w = \frac{4 v_m \eta}{R}$

2. Fluidos no newtonianos

De manera análoga a como se ha analizado el caso de fluidos newtonianos, es posible determinar el caudal volumétrico y la velocidad media para los fluidos de la ley de potencia, plásticos de Bingham, y de Herschel-Bulkley (Dodge y Metzner, 1959; Skelland, 1968; Heldman, 1985, Toledo, 1993). Las ecuaciones que permiten la evaluación de dichos parámetros están indicadas abajo.

Perfil de velocidades

Fluido de la ley de potencia:

$$v = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\Delta P}{2kL} \right)^{1/n} \left[R \left(\frac{n+1}{n} \right) - r \left(\frac{n+1}{n} \right) \right] \quad [8.19]$$

en la ΔP que es la diferencia de presiones entre la entrada y salida de la tubería.

Plástico de Bingham: En este tipo de fluido se produce una vena central de velocidad máxima, cuyo perfil es recto. El valor del radio r_0 para esta vena central es:

$$r_0 = \frac{2 \sigma_0 L}{\Delta P} \quad [8.20a]$$

Para $r_0 \leq r \leq R$, el perfil de velocidades está dado por:

$$v = \frac{1}{\eta} \left[\frac{\Delta P}{4L} (R^2 - r^2) - \sigma_0 (R - r) \right] \quad [8.20b]$$

Fluido tipo Herschel-Bulkley: Al igual que para los plásticos de Bingham, aparece una vena central de perfil plano, cuya velocidad es máxima. El radio correspondiente a esta vena, r_0 , se obtiene con la ecuación 8.20a descrita anteriormente para plásticos de Bingham.

Para $r_0 \leq r \leq R$, el perfil de velocidades será:

$$v = \frac{2L}{\Delta P (b+1) k^b} \left[(\sigma_w - \sigma_0)^{b+1} - \left(\frac{r\Delta P}{2L} - \sigma_0 \right)^{b+1} \right] \quad [8.21]$$

en la que $b = 1/n$.

Caudal volumétrico

Fluido de la ley de potencia:

$$q = \pi R^3 \left(\frac{n}{3n+1} \right) \left(\frac{\sigma_w}{k} \right)^{1/n} \quad [8.22]$$

Plástico de Bingham:

$$q = \frac{\pi R^3}{4} \frac{\sigma_w}{\eta^?} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_w} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_w} \right)^4 \right] \quad [8.23]$$

Esta ecuación se denomina de **Buckingham**.

Fluido de Herschel-Bulkley:

$$q = \pi R^3 \frac{(\sigma_w - \sigma_0)^{m+1}}{\sigma_w^3 k^m} \left[\frac{(\sigma_w - \sigma_0)^2}{m+3} + \frac{2\sigma_0(\sigma_w - \sigma_0)^2}{m+2} + \frac{\sigma_0^2}{m+1} \right] \quad [8.24]$$

en la que m fue definida previamente como σ_0/σ_w .

Velocidad media

La velocidad media se calcula a partir del flujo o caudal volumétrico, dividiendo la ecuación correspondiente por el área de flujo:

$$v_m = \frac{q}{\pi R^2}$$

Para fluidos de la ley de potencia, la relación entre la velocidad puntual y media está dada por la ecuación 8.25:

$$\frac{v}{v_m} = \frac{3n+1}{n+1} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{(n+1/n)} \right] \quad [8.25]$$

En la figura 8.5 se puede observar la variación del perfil de velocidades adimensional (v/v_m) en función del radio adimensional (r/R) para este tipo de fluido, perfil que depende del valor que adquiere el índice de flujo. Para $n = 1$ en el que el fluido es Newtoniano, el perfil resultante es parabólico tal como se mencionó anteriormente. El valor de la velocidad máxima se presenta en el centro de la tubería, y puede ser calculado por:

$$\frac{v_{m\acute{a}x}}{v_m} = \frac{3n+1}{n+1} \quad [8.26]$$

Para plásticos de Bingham el valor de la velocidad adimensional es función del parámetro que relaciona los esfuerzos cortantes (ec. 8.9), por tanto existen dos expresiones:

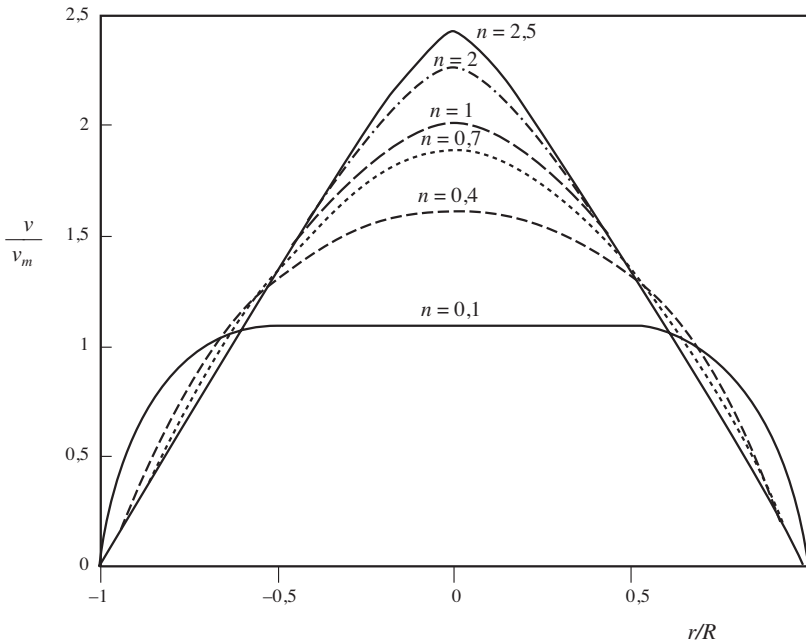


Figura 8.5. Perfil de velocidades para fluidos de la ley de potencia, en función del índice de flujo (adaptado de Steffe, 1992a).

Para $1 \geq r/R \geq m$

$$\frac{v}{v_m} = \frac{2 \left[1 - 2m + 2m \frac{r}{R} - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]}{1 + \frac{4m}{3} + \frac{m^4}{3}} \quad [8.27a]$$

Para $r/R \leq m$

$$\frac{v}{v_m} = \frac{2(1 - 2m)^2}{1 + \frac{4m}{3} + \frac{m^4}{3}} \quad [8.27b]$$

En la figura 8.6 se representa gráficamente el perfil adimensional de velocidades, en esta gráfica se puede observar que dicho perfil depende del valor de m .

8.2.2.2. Régimen turbulento

Cuando un fluido circula por una tubería en régimen turbulento pueden distinguirse tres zonas en la vena líquida. Se supone que se forma una capa laminar del fluido en contacto con la pared de la tubería, debido a los esfuerzos cortantes, de modo que en esta capa se supone régimen laminar. Por el contrario, en el cen-

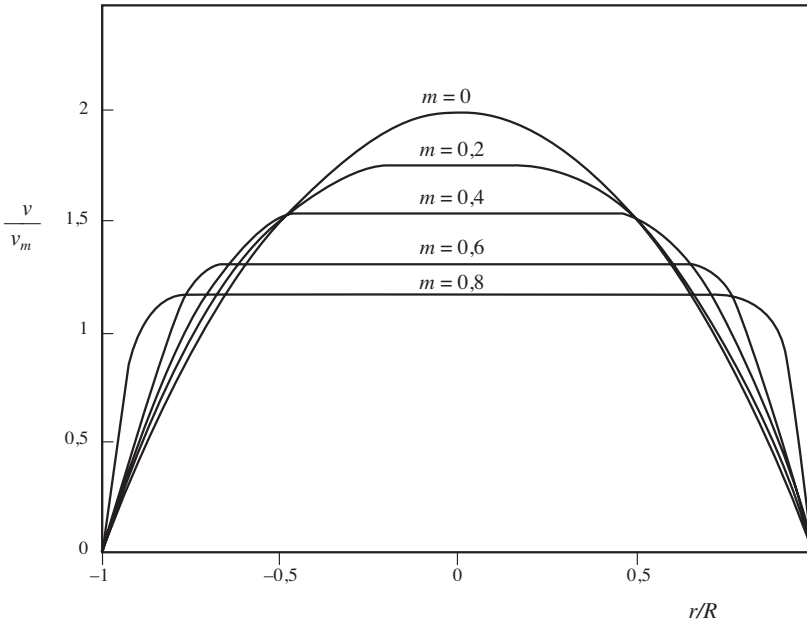


Figura 8.6. Perfil de velocidades para plásticos de Bingham, en función del parámetro m (adaptado de Steffe, 1992a).

tro de la tubería predomina la turbulencia, formándose un frente completamente plano. Entre estas dos zonas existe una de transición, como se puede apreciar en la figura 8.7.

A medida que crece el valor del número de Reynolds los espesores de las zonas laminar y de transición se hacen más delgadas. Es de suma importancia la subcapa la-

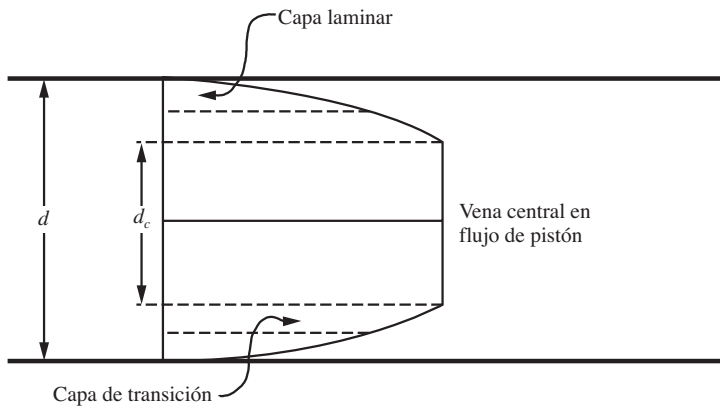


Figura 8.7. Perfil de velocidades en régimen turbulento.

minar, pues en ella el transporte se realiza por mecanismo molecular. Aunque para régimen turbulento no se ha deducido una ecuación teórica que proporcione el perfil de velocidades, experimentalmente se puede llegar a una ecuación que describe satisfactoriamente dicho perfil. Así, la ecuación que puede utilizarse es la siguiente:

$$v_m = v_{m\acute{a}x} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{c}} \tag{8.28}$$

en la que c es una constante que depende del valor del módulo de Reynolds, presentando los siguientes valores (Steffe, 1992):

$c = 6$	para	$Re = 4 \cdot 10^3$
$c = 8$	para	$Re = 1 \cdot 10^5$
$c = 10$	para	$Re = 3 \cdot 10^6$

La ecuación anterior tiene aplicación para muchas conducciones industriales para valores de $c = 8$ (Coulson y Richardson, 1989).

La velocidad media puede calcularse de la manera análoga que para régimen laminar, generándose la siguiente expresión:

$$v_m = v_{m\acute{a}x} \frac{2c^2}{(1+c)(1+2c)} \tag{8.29}$$

esta ecuación se aproxima bien a los resultados experimentales, ya que al representar $v_m/v_{m\acute{a}x}$ frente al número de Reynolds se obtiene una curva que se ajusta a esta ecuación (figura 8.8).

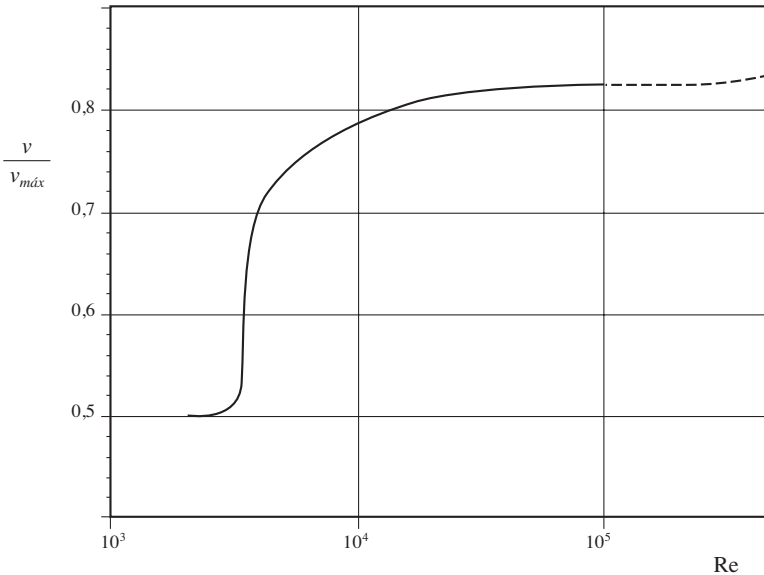


Figura 8.8. Variación de $v_m/v_{m\acute{a}x}$ con el número de Reynolds para régimen turbulento.

Se observa que para $Re \geq 10^4$ la relación $v_m/v_{m\acute{a}x}$ se puede aproximar a 0,82; que coincide con el valor obtenido de la ecuación 8.29 para el valor de $c = 8$.

Para fluidos de la ley de potencia, que son transportados a través de tubos lisos, la relación $v_m/v_{m\acute{a}x}$ es función del número de Reynolds generalizado y del índice de flujo, tal como se indica en la figura 8.9 (Dodge y Metzner, 1959).

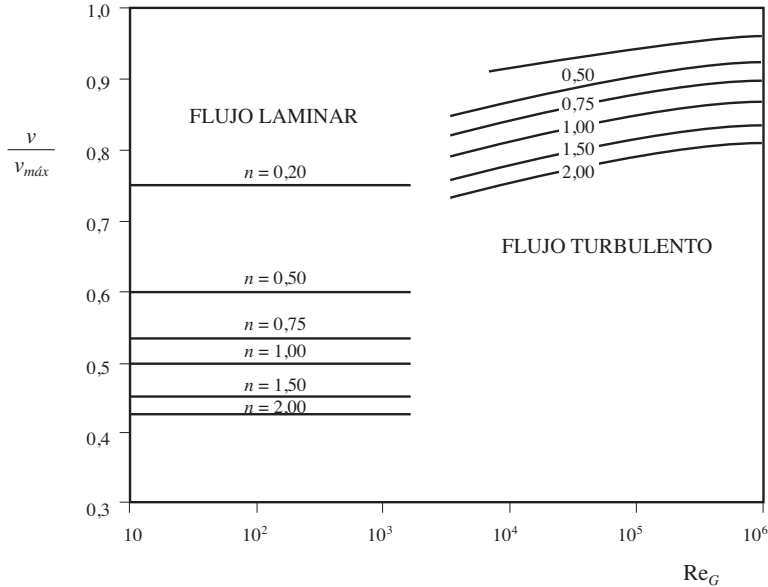


Figura 8.9. Variación $v_m/v_{m\acute{a}x}$ en función del número de Reynold generalizado, para fluidos de la ley de potencia.

8.2.2.3. Flujo en tuberías no cilíndricas

En caso de que las tuberías de transporte sean de forma diferente a la cilíndrica, pueden utilizarse las mismas ecuaciones previamente mencionadas con la única salvedad de que el diámetro de la tubería es sustituido por el diámetro equivalente.

El **diámetro equivalente (D_e)** se define como cuatro veces el radio hidráulico (R_H), que corresponde a la relación existente entre el área de flujo y el perímetro mojado (Charm, 1981; Perry y Chilton, 1983):

$$D_e = 4 R_H = 4 \frac{\text{Área de flujo}}{\text{Perímetro mojado}} \tag{8.30}$$

A continuación se dan las expresiones que permiten el cálculo de algunas tuberías de sección transversal distinta a la circular.

Tubería de sección anular: $D_e = d_0 - d_e$

en la que d_0 corresponde al diámetro interno del tubo externo y d_e es el diámetro externo del tubo interior.

$$\text{Tubería de sección rectangular: } D_e = \frac{2ab}{a+b}$$

en este caso a y b son el ancho y largo, respectivamente, de la sección transversal.

$$\text{Tubería triangular equilátera: } D_e = \frac{2h}{3}$$

siendo h la altura del triángulo.

8.2.3. Perfil universal de velocidades

Utilizando la teoría que se basa en la longitud de mezcla de Prandtl, se puede deducir una ecuación para la distribución de velocidades en régimen turbulento (Bird *et al.*, 1960; Skelland, 1968; Welty *et al.*, 1986; Coulson y Richardson, 1989).

Para fluidos newtonianos se consideran tres zonas en la vena líquida. En la subcapa laminar la velocidad en la pared de la tubería es cero. Además, en la capa laminar, por ser su espesor pequeño, se puede suponer que el esfuerzo cortante es constante e igual al de la pared ($\sigma = \sigma_w$):

$$\sigma = \sigma_w = \eta \frac{dv}{dy} \quad [8.31]$$

cumpliéndose que $v = 0$ para $y = 0$.

$$\text{Por lo que el perfil de velocidad es lineal: } v = \frac{\sigma_w}{\eta} y$$

La distribución de velocidad, en flujo turbulento, se suele expresar en función de parámetros definidos por las siguientes expresiones:

$$v^* = \left(\frac{\sigma_w}{\rho} \right)^{1/2} \quad [8.32]$$

$$v^+ = \frac{v}{v^*} \quad [8.33]$$

$$y^+ = \frac{yv^*}{\eta/\rho} \quad [8.34]$$

donde: v^* es la fricción o velocidad de corte.

v^+ , y^+ son la velocidad y coordenada adimensionales, respectivamente.

Estas relaciones se cumplen cuando la velocidad (v) varía linealmente con y .

Para la subcapa laminar el radio prácticamente es el de la tubería, por lo que se puede suponer $r = R$. Al sustituir las ecuaciones adimensionales, definidas anteriormente en la ecuación 8.31, se obtiene:

$$\frac{d v^+}{d y^+} = 1$$

integrando con la condición límite $v^+ = 0$ para $y^+ = 0$, se deduce que en la subcapa laminar la distribución de velocidades será:

$$v^+ = y^+ \tag{8.35}$$

según datos experimentales esta ecuación es válida para valores de y^+ comprendidos entre 0 y 5 ($0 < y^+ < 5$).

Para la zona de transición, la ecuación que da la variación de la velocidad con la distancia es:

$$v^+ = 5 \ln y^+ - 3,05 \tag{8.36}$$

para valores $5 < y^+ < 30$.

En la zona turbulenta la ecuación a utilizar es:

$$v^+ = 2,5 \ln y^+ + 5,5 \tag{8.37}$$

para $y^+ > 30$.

En la figura 8.10 se da una representación gráfica de estas ecuaciones del perfil universal de velocidades, donde se representan en ordenadas los valores de v^+ en escala decimal, y en abscisas los valores de y^+ en escala logarítmica.

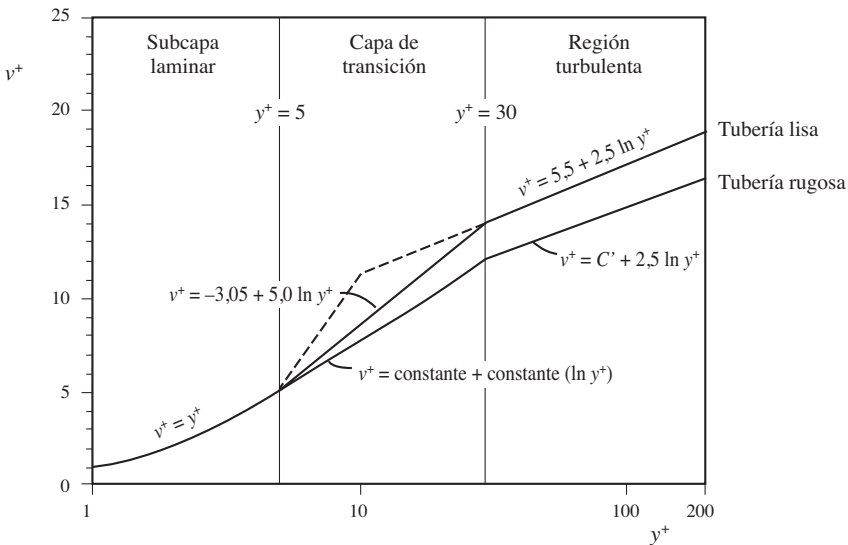


Figura 8.10. Perfil universal de velocidades.

Las ecuaciones del perfil universal de velocidad presentan inconsistencias, debido a su naturaleza empírica. Así, para la zona turbulenta (ec. 8.37) prevee que en el centro exista un gradiente finito de velocidad, cuando en realidad debería ser cero. Estas ecuaciones son válidas para tuberías lisas, no cumpliéndose muy bien en la zona de transición, para valores del número de Reynolds comprendidos entre 2.100 y 10^4 . A pesar de todas las limitaciones, estas ecuaciones pueden utilizarse en el diseño de equipos con bastante fiabilidad.

En el caso de tuberías que no son lisas, debe tenerse en cuenta la rugosidad (ϵ) de la misma, pudiéndose presentar casos de tuberías completamente rugosas, en las que la rugosidad llega hasta la zona turbulenta. En cuyo caso la ecuación 8.37 es modificada, siendo su nueva expresión:

$$v^+ = 2,5 \ln \left(\frac{y^+}{\epsilon} \right) - 8,5 \quad [8.38]$$

El perfil universal de velocidades para **fluidos no newtonianos** fue desarrollado para fluidos de la ley de potencia por Dodge y Metzner (1959), y por Skelland (1968). En este caso la variable de posición, y^+ , está definida por:

$$y^+ = y^n (v^*)^{2-n} \frac{\rho}{k} \quad [8.39]$$

Los perfiles de velocidad se obtienen a partir de las siguientes ecuaciones:

Para la subcapa laminar:

$$v^+ = (y^+)^{1/n} \quad [8.40]$$

Para la subcapa turbulenta:

$$v^+ = \frac{5,66}{n^{0,75}} \log(y^+) - \frac{5,66}{n^{1,2}} + \frac{3,475}{n^{0,75}} \left[1,96 + 0,815 n - 1,628 n \log \left(3 + \frac{1}{n} \right) \right] \quad [8.41]$$

8.3. Balances macroscópicos en la circulación de fluidos

Se considerará que el fluido que circula lo hace en régimen estacionario. Los balances que se realizan son de materia, cantidad de movimiento, energía y energía mecánica, que permiten obtener las ecuaciones de continuidad y de Bernoulli (Foust *et al.*, 1980; McCabe *et al.*, 1985; Steffe y Morgan, 1986, Rao, 1992; Levenspiel, 1993; Singh y Heldman, 1993).

8.3.1. Balance de materia

El balance de materia aplicado a una tubería entre dos puntos en las secciones S_1 y S_2 (figura 8.11), en estado estacionario, puede ser expresado por:

$$w_1 = w_2 \quad [8.42a]$$

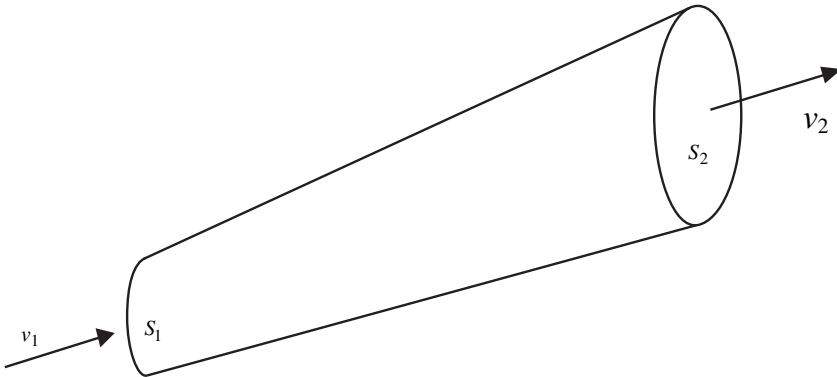


Figura 8.11. Tramo de tubería.

es decir, debido a que se trata de un proceso en que no hay acumulación los flujos másicos (w) en las secciones de entrada y de salida son los mismos.

Teniendo en cuenta que el caudal o flujo másico se puede expresar como:

$$w = \rho S v_m \quad [8.42b]$$

en la que S es el área de flujo de la tubería y v_m es la velocidad media del fluido. Por tanto se cumple para cualquier sección de la tubería:

$$\rho S v_m = C \quad [8.43]$$

en la que C es una constante. Esta expresión es conocida como la **ecuación de continuidad**.

En dicha ecuación debe utilizarse una velocidad media, ya que todos los puntos de la misma sección no poseen la misma velocidad. Es por ello que se define la velocidad media de acuerdo a la siguiente expresión:

$$v_m = \frac{\int_S v dS}{S} \quad [8.44]$$

Al producto de la velocidad media por la densidad se la denomina **densidad de flujo másico** o simplemente **gasto**:

$$G = v_m \rho \quad [8.45]$$

De la ecuación de continuidad se deduce que, para tuberías de sección constante, la densidad de flujo másico también lo es, ya que $S_1 = S_2$; y si, además, se trata de un fluido incompresible, o cuya densidad permanece constante, se cumple que la velocidad media a través de una tubería de sección uniforme es constante.

8.3.2. Balance de cantidad de movimiento

El balance de cantidad de movimiento en régimen estacionario está basado en la segunda ley del movimiento de Newton (Welty *et al.*, 1986, Geankoplis, 1988; Costa *et al.*, 1984; McCabe *et al.*, 1985), que aplicado a un tramo de tubería (figura 8.11), conduce a la siguiente expresión:

$$w_1 (v_1)_m \beta_1 - w_2 (v_2)_m \beta_2 - P_1 \vec{S}_1 + P_2 \vec{S}_2 + m \vec{g} - \vec{F}_{int} + \vec{F}_{ext} = 0 \quad [8.46]$$

en la que β es la relación de velocidades:

$$\beta = \frac{1}{S} \int \frac{(v^2)_m dS}{(v_m)^2} = \frac{(v^2)_m}{(v_m)^2} \quad [8.47]$$

Este coeficiente sirve para corregir los términos de velocidad, debido a la distribución de velocidades en las diferentes secciones del conducto (Harper, 1986; McCabe *et al.*, 1985). Para régimen laminar puede demostrarse que:

$$(v^2)_m = \frac{(v_{m\acute{a}x})^2}{3} \quad \text{y} \quad (v_m)^2 = \frac{(v_{m\acute{a}x})^2}{4}$$

por lo que $\beta = 4/3$.

Además, en dicha ecuación, m representa la masa del fluido, F_{ext} son las fuerzas externas que pueden actuar sobre el fluido originando cambios en su cantidad de movimiento. F_{int} son las fuerzas que ejerce el fluido sobre las paredes de la tubería, tales como fuerzas de rozamiento, fuerzas de presión, entre otras.

A partir de la ecuación 8.46 se pueden calcular las fuerzas que actúan sobre cada punto de la tubería, lo que permite el diseño del sistema de sujeción de dicha tubería.

8.3.3. Balance de energía total

El balance de energía en régimen estacionario (Smith y Van Ness, 1985; Foust *et al.*, 1980; Costa *et al.*, 1984), aplicado a un tramo de tubería tiene la siguiente expresión:

$$w_1 (\hat{H}_1 + \hat{K}_1 + \hat{\phi}_1) - w_2 (\hat{H}_2 + \hat{K}_2 + \hat{\phi}_2) + \dot{Q} + \dot{W} = 0 \quad [8.48]$$

donde: \hat{H} , \hat{K} , $\hat{\phi}$, son la entalpía, la energía cinética y potencial por kg de fluido, respectivamente.

\dot{Q} es el caudal de calor que entra al sistema.

\dot{W} es el caudal de trabajo que entra al sistema.

Como en la ecuación 8.48 lo primeros tres términos son funciones de estado, debe definirse un nivel de referencia.

Entalpía (\hat{H})

La entalpía por unidad de masa es una función de la presión y temperatura, y su expresión difiere según si el fluido es compresible o incompresible.

Para fluidos incompresibles se cumple que:

$$d\hat{H} = \hat{C}_p dT \quad [8.49]$$

en la que \hat{C}_p es la capacidad calorífica por unidad de masa a presión constante, o simplemente calor específico.

Para fluidos compresibles, la entalpía, además de la temperatura depende de la presión, según la expresión:

$$d\hat{H} = \hat{C}_p dT + \hat{V} dP \quad [8.50]$$

en la que \hat{V} es el volumen por unidad de masa o volumen específico.

Energía cinética (\hat{K})

La energía cinética por unidad de masa está dada por:

$$\hat{K} = \frac{1}{2} \frac{(v^3)_m}{v_m} \quad [8.51]$$

En el caso que se quiera expresar este término en función de una velocidad media para todos los puntos de una misma sección, que de hecho resulta ser lo más práctico, se tiene:

$$\hat{K} = \frac{1}{2} \frac{(v_m)^2}{\alpha} \quad [8.52]$$

en la que α es un factor de corrección adimensional que depende del régimen de flujo y del tipo de fluido que está siendo transportado.

En régimen turbulento este factor de corrección puede calcularse a partir de la expresión:

$$\alpha = \frac{4c^4 (3 + c) (3 + 2c)}{(1 + c)^3 (1 + 2c)^3} \quad [8.53]$$

en la que c es un valor entero que forma parte del exponente de la ecuación 8.28. Se considera que para el régimen turbulento, con $Re = 10^4$ el valor de $c = 8$, se obtiene que el valor de $\alpha = 0,945$. Por tanto, para régimen turbulento siempre se toma el valor de la unidad para este parámetro cualquiera que sea el tipo de fluido.

En régimen laminar el valor de α depende del tipo de fluido (Charm, 1981; Osorio y Steffe, 1984, Rao, 1992):

- Fluidos newtonianos: $\alpha = 0,5$

- Fluidos de la potencia: $\alpha = \frac{(2n + 1) (5n + 3)}{3 (3n + 1)^2}$ [8.54]

- Plásticos de Bingham: $\alpha = \frac{1}{2 - m}$ [8.55]

- Fluidos de Herschel-Bulkley: $\alpha = \frac{A}{B}$ [8.56]

donde:

$$A = [(1 + 3n + 2n^2 + 2n^2m + 2nm + 2n^2m^2)^3] [(2 + 3n)(3 + 5n)(3 + 4n)]$$

$$B = [(2n + 1)^2 (3n + 1)^2] [18 + n (105 + 66m) + n^2 (243 + 306m + 85m^2) + n^3 (289 + 522m + 350m^2) + n^4 (159 + 390m + 488m^2) + n^5 (36 + 108m + 216m^2)]$$

En la figura 8.12 se representa la variación del factor de corrección α con respecto al valor de m , para distintos valores del índice de flujo n , siendo $m = \sigma_0/\sigma_w$.

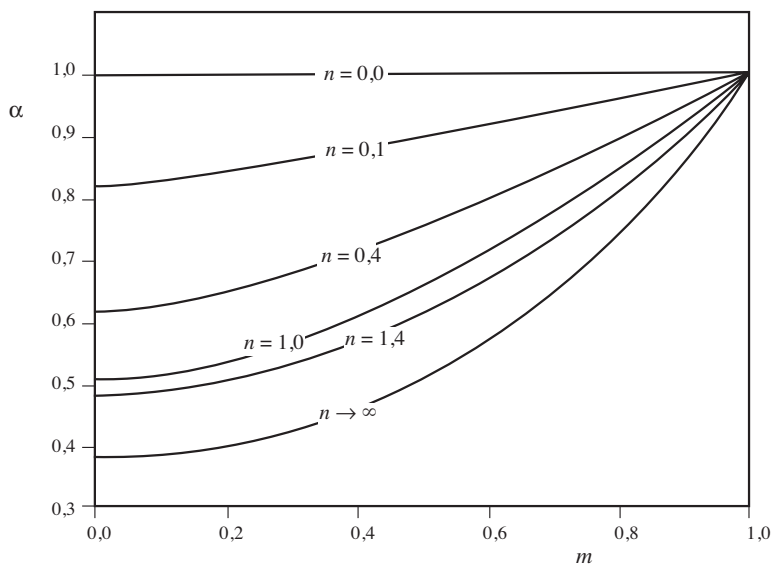


Figura 8.12. Factor de corrección cinético para fluidos de Herschel-Bulkley.

Energía Potencial ($\hat{\Phi}$)

El único campo potencial que se considera es el gravitatorio, con lo que la energía potencial por unidad de masa es:

$$\hat{\phi} = g z \quad [8.57]$$

considerando como nivel de referencia aquel para $z = 0$, lo cual genera una magnitud $\hat{\phi} = 0$.

Al haber realizado el balance de energía en una tubería, por la ecuación de continuidad, el flujo másico se mantiene constante ($w_1 = w_2 = w$). Con lo que si la ecuación 8.48 se divide por el caudal másico, se obtiene:

$$\Delta (\hat{H} + \hat{K} + \hat{\phi}) - \hat{Q} - \hat{W} = 0 \quad [8.58]$$

en la que Δ es el operador diferencia o incremento (salida menos entrada) y todas las variables están expresadas por unidad de masa del fluido.

8.3.4. Balance de energía mecánica

El balance de energía que se realizó en la sección anterior no es útil para evaluar las pérdidas de energía mecánica que se producen en la tubería, debido a que los procesos reales son irreversibles. Por tanto, para poder evaluar estas pérdidas se realiza un balance entrópico, lo que conduce, para un sistema en régimen estacionario, a la expresión:

$$\Delta (\hat{K} + \hat{\phi}) + \int_{P_1}^{P_2} \hat{V} dP - \hat{W} + \hat{E}_f = 0 \quad [8.59]$$

en que el término \hat{E}_f representa la pérdidas de energía mecánica por unidad de masa.

Esta ecuación es la denominada **ecuación de Bernoulli**, y es de gran importancia para el cálculo de la potencia necesaria que debe aplicarse al fluido para que éste sea transportado a través de un sistema de tuberías (Coulson y Richardson, 1989; McCabe *et al.*, 1985; Toledo, 1993, Singh y Heldman, 1993). Estas pérdidas de energía mecánica, pueden evaluarse para ciertos casos, en los que existen métodos o procedimientos desarrollados para su cálculo.

En la ecuación de Bernoulli el valor del término integral depende del tipo de fluido transportado y del tipo de proceso que se realice durante el transporte. Para evaluar este término es necesario conocer la relación existente entre el volumen específico y la presión.

Para fluidos no compresibles el volumen específico permanece constante, con lo que el término integral es:

$$\int_{P_1}^{P_2} \hat{V} dP = \frac{\Delta P}{\rho} \quad [8.60]$$

Para el caso de gases podría utilizarse el valor medio del volumen específico, siempre y cuando no existan grandes variaciones en la presión y/o temperatura. Para un cálculo adecuado de este término es preciso saber qué tipo de proceso se está llevando a cabo, ya sea isotérmico, adiabático, politrópico, o algún otro (Smith y Van Ness, 1985).

Para fluidos incompresibles la ecuación de Bernoulli en su forma más útil para los cálculos relacionados con el transporte de fluidos puede expresarse como:

$$g\Delta z + \frac{\Delta P}{\rho} + \frac{\Delta v^2}{2\alpha} + \hat{E}_f = \hat{W} \quad [8.61]$$

Siendo v la velocidad media, que en lo sucesivo se utilizará como v en lugar de v_m . El parámetro α del término cinético depende del régimen de circulación y del tipo de fluido, tal como se ha indicado anteriormente.

A partir de la ecuación 8.61 se pueden obtener los valores correspondientes a aquellas incógnitas planteadas en un sistema de transporte, tales como la potencia necesaria para que el fluido circule de un punto a otro, la altura necesaria para que un fluido sea descargado en algún punto de interés cuando no se dispone de una bomba, el flujo volumétrico de descarga, la presión necesaria en la entrada del sistema, la presión de descarga del sistema, las pérdidas de energía mecánica por fricción a través de los diferentes accesorios y de la tubería misma, lo cual será analizado en las siguientes secciones.

8.4. Pérdidas de energía mecánica

8.4.1. Factores de fricción

Las pérdidas de energía mecánica (\hat{E}_f) que se producen en el transporte de fluidos a través de una tubería, debidas al rozamiento entre el fluido y la pared de la tubería, pueden ser evaluadas mediante la ecuación de Bernoulli, lo que de acuerdo a la ecuación 8.61 no representa mayor grado de dificultad una vez que se conocen los demás términos, esto es:

$$\hat{E}_f = \hat{W} - g\Delta z - \frac{\Delta P}{\rho} - \frac{\Delta v^2}{2\alpha}$$

Otra forma de evaluar dichas pérdidas de energía mecánica es a partir de las propiedades del fluido y de las características particulares de la tubería, involucrando el denominado factor de fricción.

El **factor de fricción** (f) se define como la relación entre el esfuerzo que el fluido ejerce sobre la pared de la tubería (σ_w) y la energía cinética por unidad de volumen:

$$f = \frac{\sigma_w}{(1/2) \rho v^2} \quad [8.62]$$

Es de resaltar que este factor de fricción definido según la ecuación 8.62, se denomina factor de fricción de **Fanning** (f_F). Sin embargo, algunos autores, Foust *et al.* (1980), entre otros, utilizan el factor de fricción de **Darcy** (f_D). La relación

entre ambos es un factor de 4 (Perry y Chilton, 1983; Welty *et al.*, 1986, Harper 1986; Singh y Heldman, 1993):

$$f_D = 4 f_F$$

El más usual de éstos es el de Fanning, y es el que será utilizado en lo sucesivo. Para simplificar la nomenclatura, se usará como f en lugar de f_F .

Las pérdidas de carga por unidad de masa del fluido son evaluadas por medio de la siguiente expresión:

$$\hat{E}_f = \frac{Fv}{w} = \frac{Fv}{vS\rho} \quad [8.63]$$

en la que F es la fuerza ejercida sobre la pared de la tubería, v es la velocidad media de circulación del fluido, w el flujo másico con el que circula el fluido, ρ la densidad del fluido y S la sección transversal de la tubería.

La fuerza puede relacionarse en función del esfuerzo cortante en la pared (σ_w):

$$F = \sigma_w A = \sigma_w \pi d L \quad [8.64]$$

y como la sección transversal de un conducto cilíndrico es: $S = (\pi/4) d^2$. Al combinar las ecuaciones 8.62, 8.63 y 8.64, se obtiene:

$$\hat{E}_f = 4f \frac{L}{d} \frac{v^2}{2} \quad [8.65]$$

que se denomina **ecuación de Fanning**.

De la misma manera, el esfuerzo cortante en la pared puede expresarse en función de las pérdidas de energía mecánica:

$$\sigma_w = \frac{\hat{E}_f d \rho}{4 L} \quad [8.66a]$$

8.4.2. Cálculo de factores de fricción

El factor de fricción es función de la magnitud del número de Reynolds y la denominada **rugosidad absoluta** (ϵ) de la tubería. El efecto de esta rugosidad en las pérdidas de energía mecánica es importante, ya que afecta en gran medida al factor de fricción. Esta rugosidad es un parámetro que depende del tipo y características del material con el que está fabricada la tubería, y está ligada a la altura y forma de las protuberancias internas de ella; las unidades de la rugosidad son de longitud (Charm, 1981; Foust *et al.*, 1980; McCabe *et al.*, 1985; Toledo, 1993).

Para tubos lisos, como pueden ser de vidrio y plásticos, su valor es cero. En la tabla 8.1 se proporcionan algunos valores de la rugosidad absoluta para tubos limpios construidos de distintos materiales.

Tabla 8.1. Rugosidad de tuberías

Material	ϵ (mm)
Hormigón	0,3-3
Hierro colado	0,26
Hierro colado asfaltado	0,12
Hierro galvanizado	0,15
Hierro forjado	0,046
Acero comercial	0,046
Acero remachado	1-10
Tubería de drenaje	0,0015

También suele utilizarse la denominada **rugosidad relativa** (Foust *et al.*, 1980), que se define como el cociente entre la rugosidad absoluta y el diámetro interno de la tubería, esto es (ϵ/d) . Los valores de la rugosidad, tanto absoluta como relativa, pueden obtenerse a partir del gráfico presentado en la figura 8.13. En la que ϵ/d es función del diámetro de la tubería y del tipo de material del que está construida la tubería.

Dependiendo del tipo de fluido alimentario y del régimen de flujo, existen diferentes tipos de ecuaciones y diagramas que permiten calcular el valor del factor de fricción.

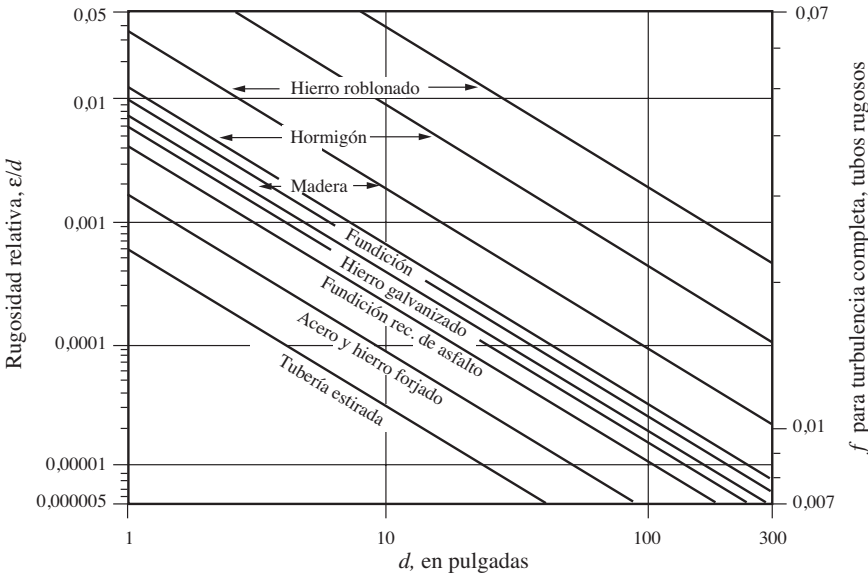


Figura 8.13. Valores del coeficiente de rugosidad relativa en función del diámetro y del material de la tubería.

8.4.2.1. Flujo en régimen laminar

Dependiendo del tipo de fluido los modelos a utilizar son distintos, por lo que a continuación se dan las correspondientes ecuaciones para fluidos newtonianos y no newtonianos (Skelland, 1968; Foust *et al.*, 1980, Coulson y Richardson, 1989, Steffe *et al.*, 1984; García y Steffe, 1988; Rao, 1992, Steffe, 1992a).

Fluidos newtonianos

$$f = \frac{16}{\text{Re}} \quad [8.67]$$

Fluidos de la ley de potencia

$$f = \frac{16}{\text{Re}_G} \quad [8.68]$$

en la que Re_G es el módulo de Reynolds generalizado, definido según la ecuación 8.7.

Plásticos de Bingham

El factor de fricción es una función implícita de los módulos de Reynolds y Hedstrom, pudiéndose calcular a partir de la ecuación 8.69:

$$\frac{1}{\text{Re}_B} = \frac{f}{16} - \frac{\text{He}}{6 (\text{Re}_B)^2} + \frac{(\text{He})^4}{3 f (\text{Re}_B)^8} \quad [8.69]$$

en la que Re_B es el módulo de Reynolds para plásticos de Bingham, mientras que He es el módulo de Hedstrom, definidos previamente (ecuaciones 8.6 y 8.12a, respectivamente).

Fluidos de Herschel-Bulkley

$$f = \frac{16}{\Psi \text{Re}_G} \quad [8.70]$$

en la que Ψ viene dada por la expresión (Steffe *et al.*, 1984; Osorio y Steffe, 1984):

$$\Psi = (3n + 1)^n (1 - m)^{1+n} \left[\frac{(1 - m)^2}{3n + 1} + \frac{2m(1 - m)}{2n + 1} + \frac{m^2}{n + 1} \right]^n \quad [8.71]$$

El factor m o relación entre esfuerzos cortantes, al ser una función implícita de los números generalizados de Reynolds y Hedstrom (ecuaciones 8.7 y 8.12b, respectivamente) puede calcularse por medio de la siguiente ecuación:

$$\text{Re}_G = 2 \text{He}_G \left(\frac{n}{3n + 1} \right)^2 \left(\frac{\Psi}{m} \right)^{(2/n) - 1} \quad [8.72]$$

Para fluidos newtonianos y de la ley de la potencia, $m = 0$ y $\Psi = 1$, por lo que es posible calcular directamente el factor de fricción a partir de la ecuación 8.67 ó 8.68. Para fluidos de Bingham y de Herschel-Bulkley, si el valor de m no es cono-

cido es necesario realizar la resolución de la ecuación 8.72 mediante iteración o prueba y error, usando las ecuaciones 8.70, 8.71 y la del módulo de Reynolds generalizado (ec. 8.7), para obtener el valor de Ψ y finalmente el valor de f .

8.4.2.2. Flujo en régimen turbulento

En régimen turbulento se utilizan otras ecuaciones, algunas de ellas obtenidas teóricamente a partir del denominado perfil universal de velocidades. Sin embargo, en el cálculo del factor de fricción suelen utilizarse ecuaciones empíricas o semiempíricas. De la misma manera que ocurre en régimen laminar las ecuaciones están condicionadas al tipo de fluido que se está transportando.

Fluidos newtonianos

Una de las ecuaciones más utilizadas para tubos rugosos es la de Colebrook (Welty, *et al.*, 1986; Levenspiel, 1993):

$$\frac{1}{(4f)^{1/2}} = -2 \log \left[\frac{2,51}{\text{Re} (4f)^{1/2}} + \frac{1}{3,5} \frac{\varepsilon}{d} \right] \quad [8.73]$$

Para régimen turbulento completamente desarrollado, el primer sumando del término logarítmico es despreciable con respecto al segundo, obteniéndose una nueva ecuación, la de Nikuradse (Skelland, 1968; Welty *et al.*, 1986; Levenspiel, 1993):

$$\frac{1}{(4f)^{1/2}} = 2 \log \left(3,7 \frac{d}{\varepsilon} \right) \quad [8.74]$$

Otra ecuación útil para evaluar el factor de fricción es la siguiente (Levenspiel, 1993):

$$\frac{1}{(4f)^{1/2}} = -2 \log \left[\frac{5,62}{\text{Re}^{0,9}} + 0,27 \frac{\varepsilon}{d} \right] \quad [8.75]$$

Para valores del módulo de Reynolds comprendidos entre $2,5 \cdot 10^3$ y 10^5 y tubos lisos, Blasius (Levenspiel, 1993) obtuvo la siguiente correlación:

$$4f = \frac{0,316}{(\text{Re})^{1/4}} \quad [8.76]$$

Otra correlación que frecuentemente se utiliza para tubos lisos (Coulson y Richardson, 1989) es:

$$\frac{1}{(4f)^{1/2}} = 1,80 \log \left(\frac{\text{Re}}{6,81} \right) \quad [8.77]$$

Además de estas ecuaciones, varios investigadores han propuesto otras correlaciones que pueden tener mayor o menor aplicación dependiendo de las características particulares del sistema de transporte.

Un modo práctico de calcular el factor de fricción, es a partir del diagrama de **Moody** (figura 8.14), en la que este factor ($4f$ ó f_D) es función del módulo de Reynolds (Re) y de la rugosidad relativa (ϵ/d). Este diagrama permite el cálculo del factor de fricción, tanto en régimen laminar como turbulento, así como en el de transición. Se puede observar que para valores del número de Reynolds menores que 2.100, la variación de $4f$ con Re es lineal, lo que está en concordancia con la ecuación 8.65. En la zona turbulenta, las curvas se ajustan con poco error a la ecuación de Colebrook (Welty *et al.*, 1986; Levenspiel, 1993). En la zona de transición, para valores del módulo de Reynolds comprendidos entre 2.100 y 4.000, una relación que proporciona buenos resultados es:

$$f = 0,71 \cdot 10^{-9} (Re)^2 \quad [8.78]$$

Fluidos de la ley de potencia

El cálculo del factor de fricción se puede realizar mediante la siguiente ecuación (Skelland, 1968) implícita:

$$\frac{1}{(4f)^{1/2}} = \frac{2}{n^{0,75}} \log \left[Re_G f^{\left(1 - \frac{n}{2}\right)} \right] - \frac{0,4}{n^{1,2}} \quad [8.79]$$

Del mismo modo que para fluidos newtonianos puede calcularse gráficamente; el factor de fricción para fluidos de la potencia es posible obtenerlo mediante el gráfico desarrollado por Dodge y Metzner (1959) (figura 8.15).

Plásticos de Bingham

La ecuación implícita que permite el cálculo del factor de fricción en este caso es:

$$\frac{1}{(4f)^{1/2}} = 2,27 \log (1 - m) + 2,27 \log [Re_B f^{1/2}] - 1,15 \quad [8.80]$$

También puede obtenerse el factor de fricción a partir del gráfico dado por Hedstrom (figura 8.16). En la que el factor de fricción se representa frente al número de Reynolds (Re_B), y además es función del número de Hedstrom. En esta figura aparece como parámetro adicional el **número o módulo de Plasticidad** (Pl), definido por la expresión 8.81:

$$Pl = \frac{\sigma_0 d}{\nu \eta'} \quad [8.81]$$

Fluidos de Herschel-Bulkley

En este tipo de fluidos es difícil encontrar una ecuación de aplicación directa, que permita el cálculo del factor de fricción. Sin embargo, para valores del índice de flujo de 0,2 y 0,5 puede calcularse utilizando las figuras 8.17 y 8.18 (García y Steffe, 1986; Rao, 1992), en un amplio intervalo de valores de los números de Reynolds y Hedstrom generalizados.

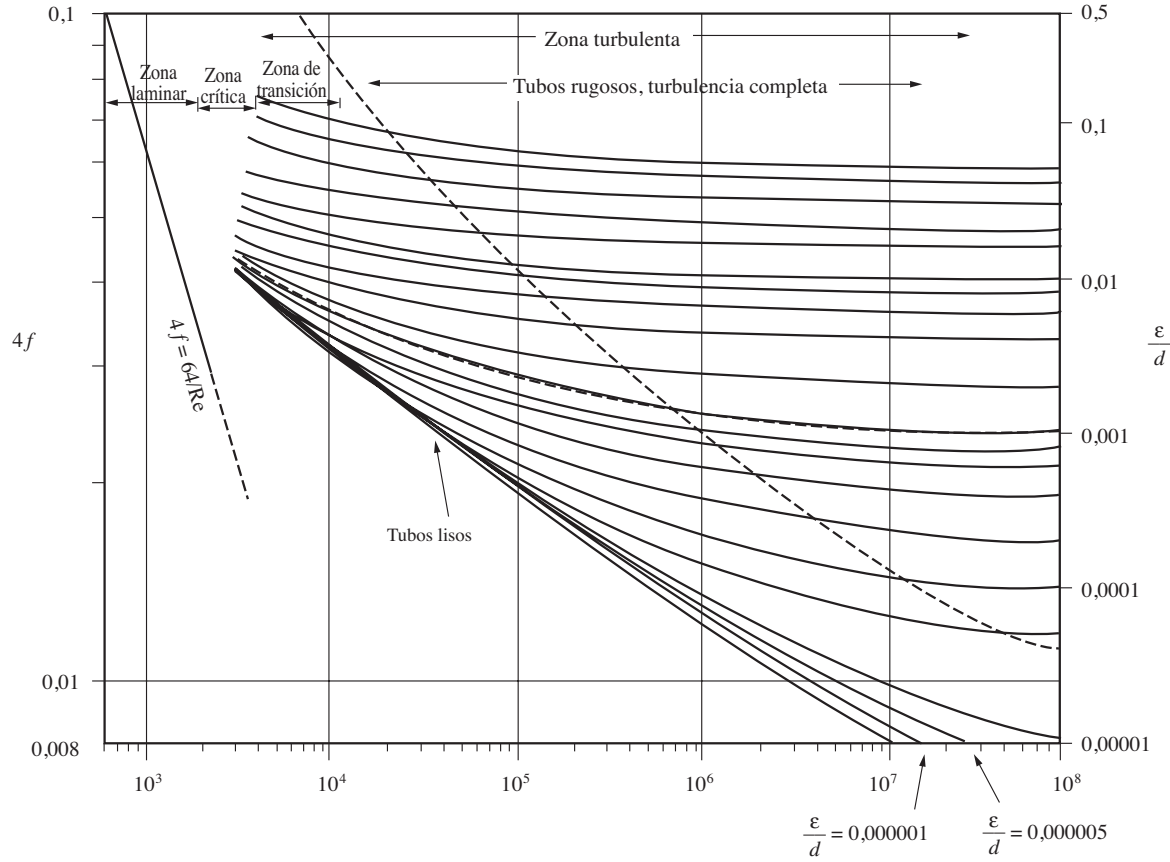


Figura 8.14. Diagrama de Moody para fluidos newtonianos.

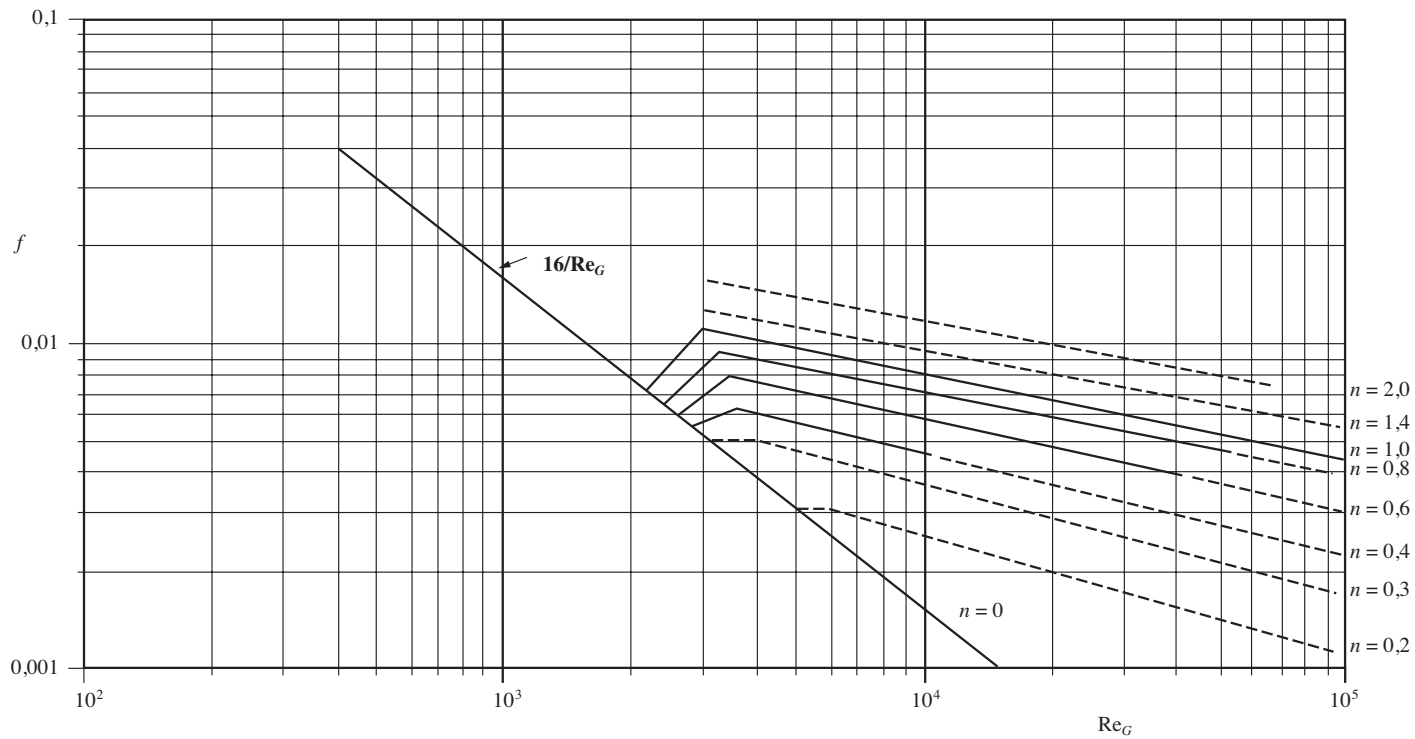


Figura 8.15. Diagrama de Dodge y Metzner para fluidos de la ley de potencia (adaptado de Dodge y Metzner, 1959).

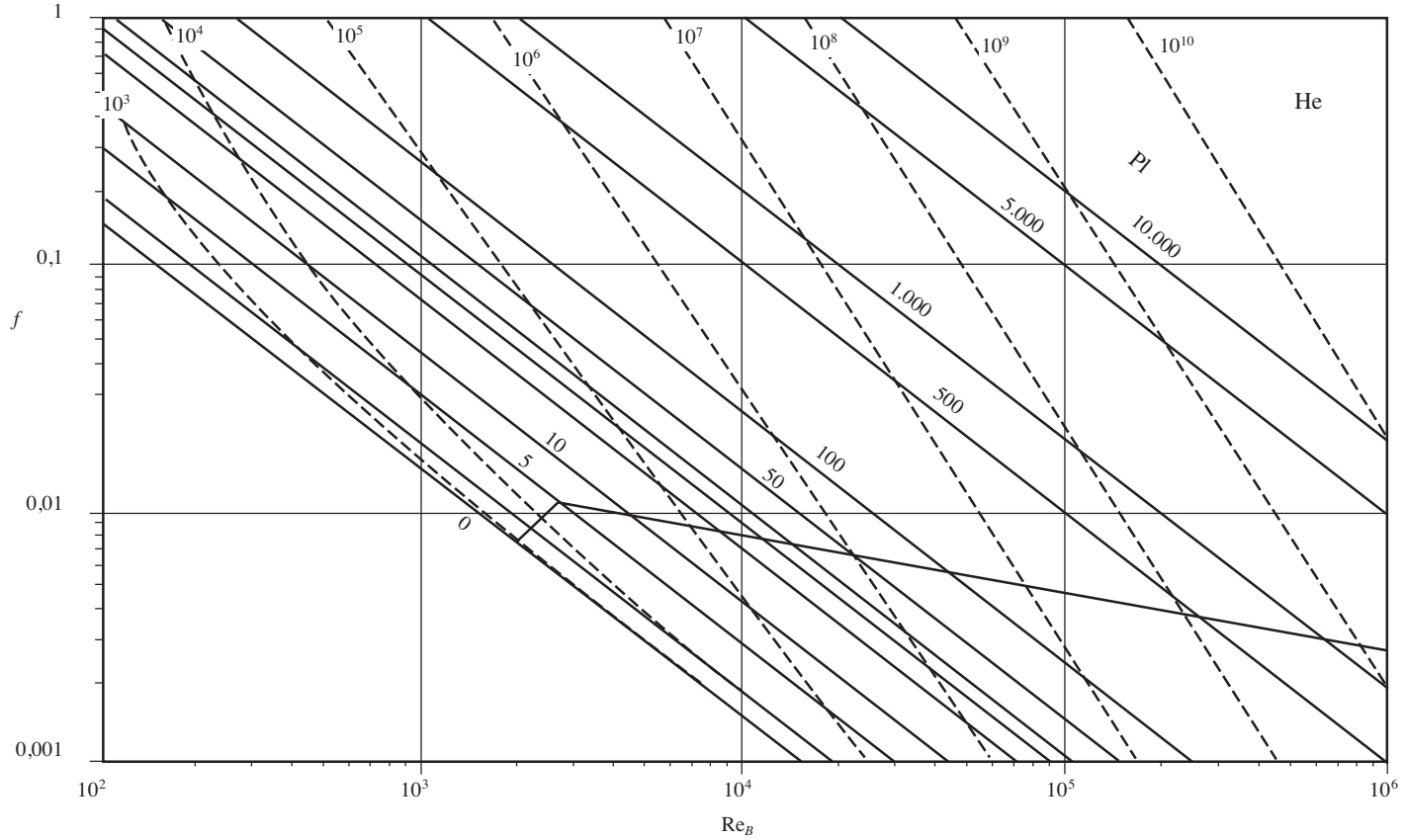


Figura 8.16. Diagrama de Hedstrom para plásticos de Bingham (Adaptado de García y Steffe, 1987).

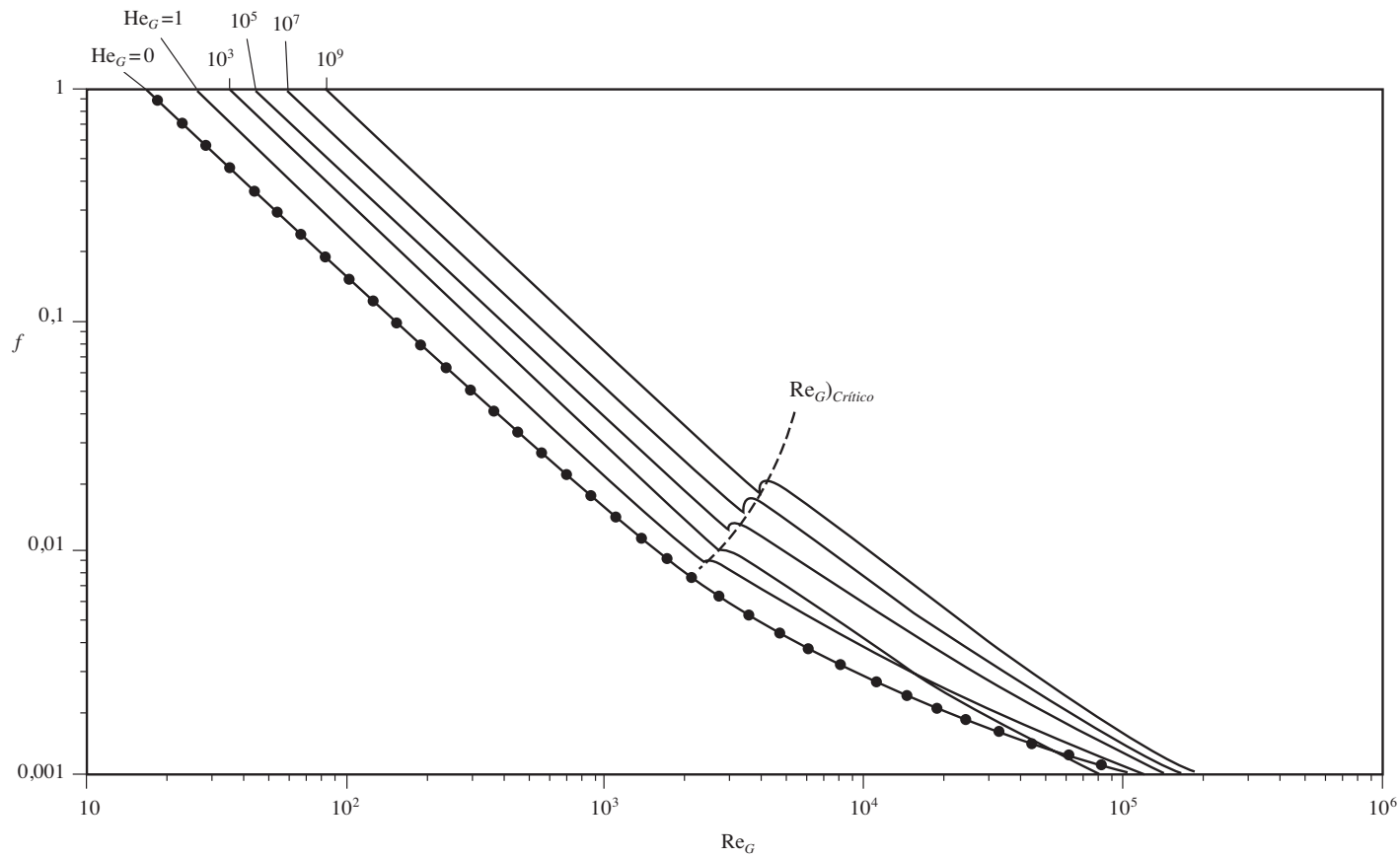


Figura 8.17. Factor de fricción para fluidos de Herschel-Bulkley ($n = 0,2$) (adaptado de García y Steffe, 1987).

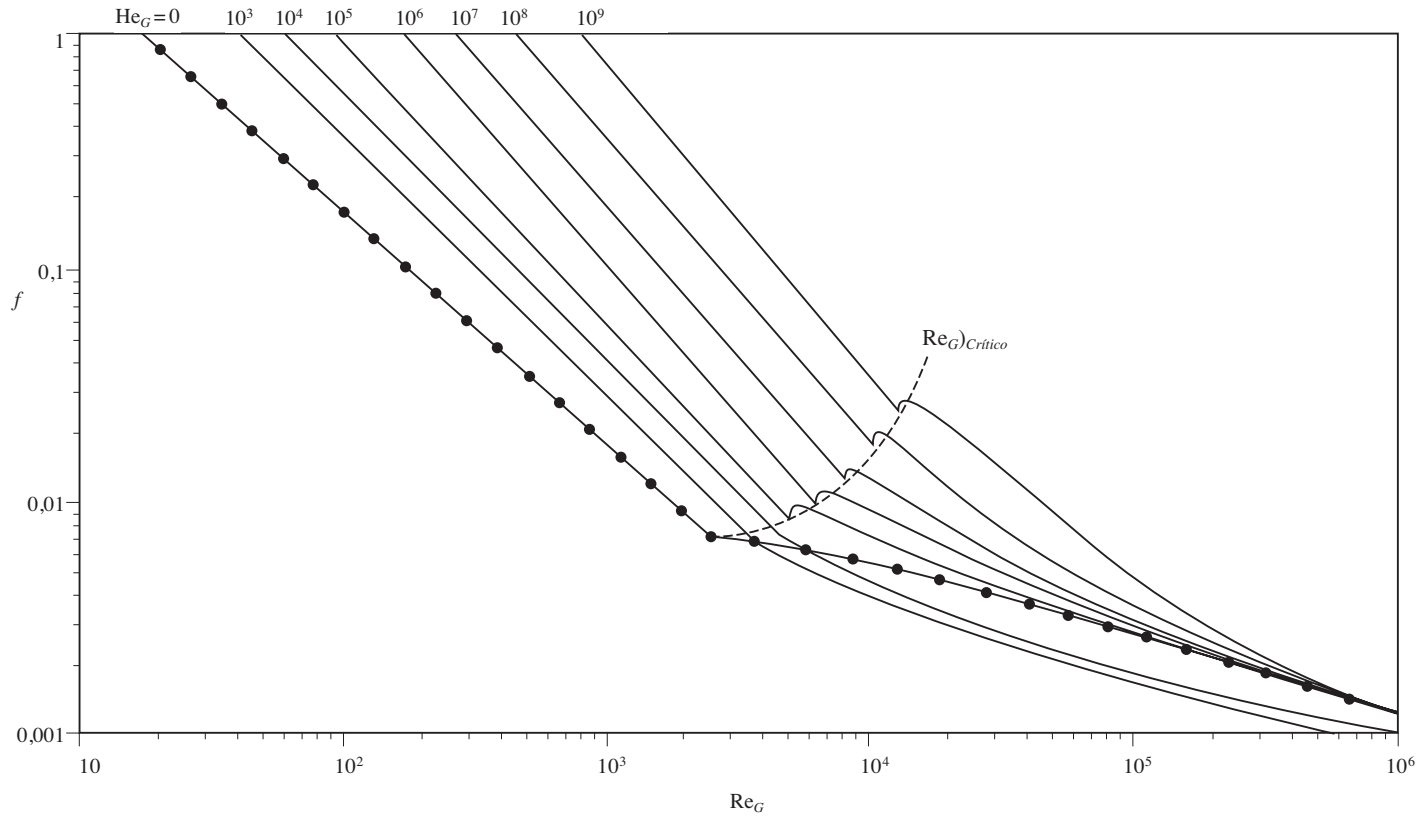


Figura 8.18. Factor de fricción para fluidos de Herschel-Bulkley ($n = 0,5$) (adaptado de García y Steffe, 1987).

8.4.3. Pérdidas menores de energía mecánica

Hasta ahora sólo se ha analizado el modo de calcular las pérdidas de energía mecánica para tramos rectos de tuberías. Sin embargo, en todas ellas aparecen una serie de elementos, conocidos como accesorios, que provocan pérdidas de energía mecánica adicionales, las cuales se conocen como **pérdidas menores**. Estas pérdidas son debidas a ensanchamientos y estrechamientos en la tubería, presencia de válvulas, aparatos de medición, así como a cambios en la dirección y/o diversificación del flujo del fluido, debidos generalmente a codos, tes, yes y cruces (Charm, 1971; Heldman, 1975; Geankoplis, 1978; Foust *et al.*, 1980; McCabe *et al.*, 1985; Toledo, 1993).

En general, las pérdidas debidas a cada uno de estos elementos son pequeñas e inclusive podrían despreciarse, pero en tuberías que contengan un número considerable de estos accesorios, dichas pérdidas pueden llegar a ser importantes.

Existen dos modos de calcular estas pérdidas menores, uno de ellos está basado en la longitud equivalente del accesorio, mientras que el otro utiliza los factores adimensionales de resistencia.

8.4.3.1. Longitud Equivalente

Se entiende por **longitud equivalente** (L_e) de un accesorio, la longitud de un tramo recto de tubería que provocaría la misma pérdida de energía mecánica correspondiente al accesorio colocado como parte de la tubería. De esta forma, para el cálculo de la pérdida de energía mecánica se utiliza la misma ecuación de Fanning (ec. 8.65), sustituyendo la longitud por la equivalente:

$$\hat{E}_f = \frac{L_e}{d} \frac{v^2}{2} \quad [8.82]$$

El valor de la longitud equivalente de un accesorio puede obtenerse a partir de tablas o nomogramas, como la tabla 8.2, o bien la figura 8.19.

Dependiendo del accesorio de interés, se lee de la tabla 8.2 el valor adimensional L_e/d que puede ser directamente sustituido en la ecuación 8.82. O bien con el nomograma o ábaco de doble entrada (figura 8.19), en el que en un eje se especifica el tipo de accesorio y en el otro el diámetro de la tubería. Al unir los puntos respectivos de estos ejes se obtiene la longitud equivalente que corresponde a la intersección de la línea de unión de un tercer eje situado entre los anteriores.

8.4.3.2. Factores de Resistencia

Al utilizar los **factores adimensionales de resistencia** k (Foust *et al.*, 1980; Singh y Heldman, 1993), las pérdidas de energía mecánica debidas a cada accesorio se calculan por medio de la siguiente expresión:

$$\hat{E}_f = k \frac{v^2}{2} \quad [8.83]$$

Tabla 8.2. Longitud equivalente de distintos accesorios sólo para flujo turbulento)

Accesorio	L_e/d
Codo de 45° estándar	15
Codo de 90° estándar	30
Codo de 90° de radio largo	20
Codo de retorno de 180°	75
<i>T</i> estándar:	
• utilizada como codo, entrada central	90
• utilizada como codo, entrada por brazo lateral	60
• paso recto	20
Válvula de asiento abierta	300
Válvula de ángulo abierta	170
Válvula de compuerta:	
• abierta	7
• 1/4 abierta	900
• 1/2 abierta	200
• 3/4 abierta	40
Entrada ordinaria	16
Entrada Borda	30
Entrada redondeada, unión, acoplamiento	Despreciable
Ensanchamiento brusco desde d_1 a d_2 ($d_1 < d_2$)	
• Flujo laminar en d_1 :	$\frac{Re}{32} \left[1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^{2.72} \right]$
• Flujo turbulento en d_1 (f evaluado en d_1):	$\frac{f}{4} \left[1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^{2.72} \right]$
Reducción brusca desde d_2 a d_1 ($d_2 > d_1$)	
• Flujo laminar en d_1 :	$\frac{Re}{160} \left[1.25 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^{2.72} \right]$
• Flujo turbulento en d_1 (f evaluado en d_1):	$\frac{f}{10} \left[1.25 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^{2.72} \right]$

Fuente: Levenspiel (1993).

El valor del factor de resistencia depende del tipo de accesorio presente en la tubería. Así, para un **ensanchamiento brusco**, en el que el fluido circula por una tubería de sección transversal, S_1 y existe un ensanchamiento de la tubería hasta una sección de paso, S_2 ($S_1 < S_2$), el factor de resistencia se calcula mediante la relación (Geankoplis, 1978; Foust *et al.*, 1980):

$$k = \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2 \tag{8.84}$$

la velocidad media que debe utilizarse en la ecuación 8.83 es la de mayor magnitud, que es la correspondiente a la sección S_1 .

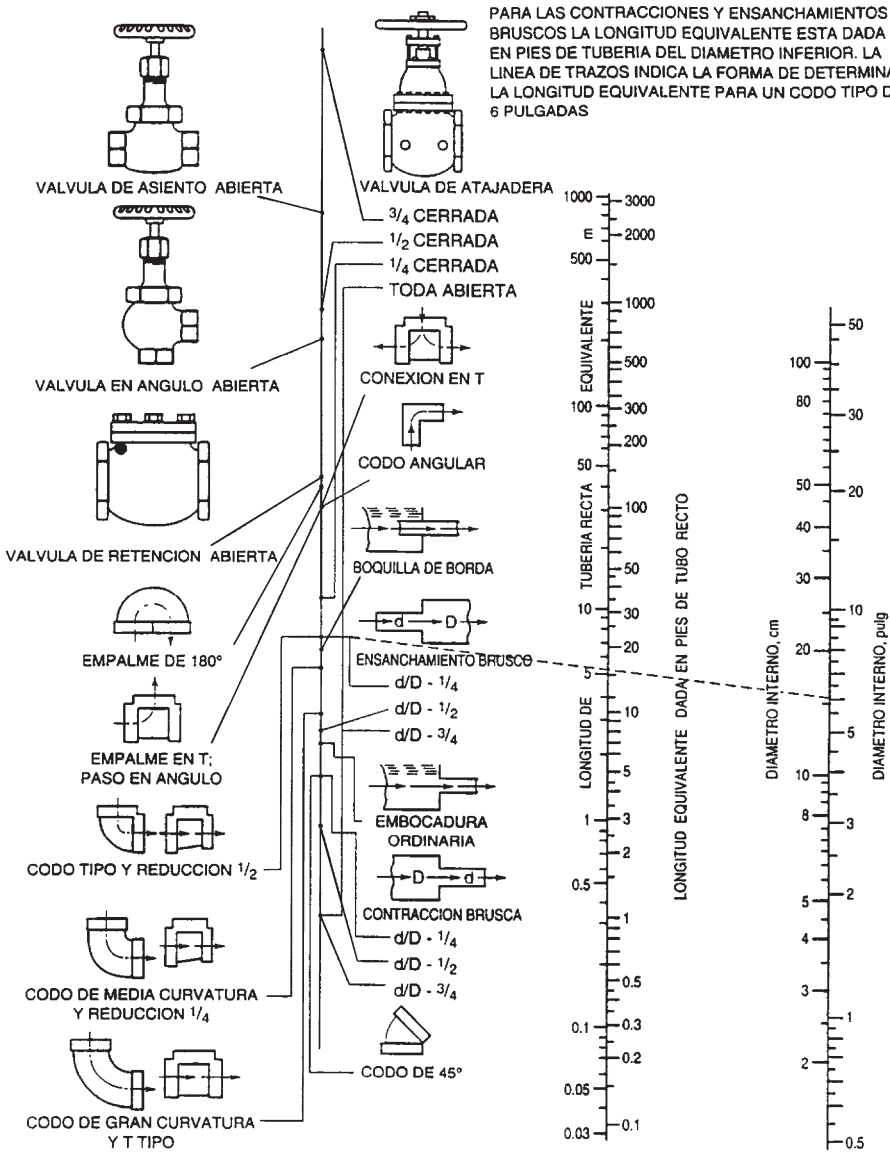


Figura 8.19. Ábaco para el cálculo de la longitud equivalente de accesorios.

Para una **contracción brusca** de la tubería, en la que se pasa de una sección S_1 a una sección menor S_2 , el valor de k se obtiene por la expresión:

$$k = 0,4 \left(1 - \frac{S_2}{S_1} \right)^2 \quad [8.85]$$

la velocidad media que se utiliza en la ecuación 8.83, nuevamente es la de mayor magnitud y en este caso es la correspondiente a la sección S_2 . En ambos casos, el hecho de tomar la velocidad con mayor magnitud se debe a que en los balances de momento para ensanchamiento y contracción (Geankoplis, 1978), éstos han sido dispuestos de tal manera que k permanece en los términos expresados por las ecuaciones 8.84 y 8.85

En la práctica existen tablas que permiten calcular las pérdidas de energía mecánica de los distintos accesorios. En la tabla 8.3 se muestran los valores de k para algunos de ellos.

El cálculo de los factores de resistencia que ha sido expuesto, sólo sirve para fluidos que tienen un comportamiento newtoniano. En el manejo de fluidos no newtonianos la información disponible es más limitada. Steffe *et al.* (1984) han reportado algunos valores de k , que muestran dependencia del régimen de circulación. Así, para fluidos no newtonianos que circulen con valores del número de Reynolds menores a 500, los factores k se calculan mediante la expresión:

$$k_{NN} = \frac{500 k_N}{\text{Re}} \quad [8.86]$$

en que k_N corresponde al factor de resistencia de un fluido newtoniano.

Steffe *et al.* (1984), observaron que estos factores aumentan con la disminución del módulo generalizado de Reynolds, para tres tipos de accesorios específicos obtuvieron las siguientes ecuaciones:

$$\text{Válvula de tres vías:} \quad k = 30,3 (\text{Re}_G)^{-0,492} \quad [8.87a]$$

$$\text{Accesorio en } T: \quad k = 29,4 (\text{Re}_G)^{-0,504} \quad [8.87b]$$

$$\text{Codos (90°):} \quad k = 191 (\text{Re}_G)^{-0,896} \quad [8.87c]$$

Tabla 8.3. Factores de resistencia k

Accesorio	k
Codo de 45° estándar	0,35
Codo de 45° gran curvatura	0,20
Codo de 90° estándar	0,75
Codo de 90° gran curvatura	0,45
Codo de 90° pequeña curvatura	1,30
Curva de 180°	1,50
<i>T</i> estándar:	
• con bifurcación cerrada	0,40
• usada como codo	1,00
• con división del caudal	1,00
Unión roscada	0,04
Manguito de unión	0,04

Tabla 8.3. Factores de resistencia k (continuación)

Accesorio	k
Válvula de compuerta:	
• abierta	0,17
• 3/4 abierta	0,90
• 1/2 abierta	4,50
• 1/4 abierta	24,00
Válvula de asiento:	
• abierta	9,00
• 3/4 abierta	13,0
• 1/2 abierta	36,0
• 1/4 abierta	112,0
Válvula de diafragma:	
• abierta	2,30
• 3/4 abierta	2,60
• 1/2 abierta	4,30
• 1/4 abierta	21,00
Válvula angular abierta	2,00
Válvula de retención (abierta):	
• de charnela	2,00
• de bola	70,00
• de disco	10,00
Válvula de bola:	
• cerrada 5°	0,05
• cerrada 10°	0,29
• cerrada 20°	1,56
• cerrada 40°	17,30
• cerrada 60°	206,00
Válvula de mariposa:	
• cerrada 5°	0,24
• cerrada 10°	0,52
• cerrada 20°	1,54
• cerrada 40°	10,80
• cerrada 60°	118,00
Válvula de fondo	15,0
Caudalímetros mecánicos:	
• de disco	7,00
• de pistón	15,00
• rotatorio	10,00
• de turbina	6,0
Entradas:	
• encañonada	0,78
• cantos vivos	0,50
• ligeramente redondeada	0,23
• bien redondeada	0,04
Salidas:	
• encañonada	1,00
• cantos vivos	1,00
• redondeada	1,00

8.5. Diseño de tuberías

En el estudio de la circulación de fluidos por tuberías pueden presentarse diferentes problemas a resolver. De entre éstos, los más frecuentes son el cálculo de las pérdidas de energía mecánica o pérdida de presión en la tubería, el cálculo del flujo másico o de la velocidad de circulación, el cálculo del diámetro de la tubería y de redes de tuberías.

8.5.1. Cálculo de la velocidad y flujo de circulación

Un problema típico que se presenta en el diseño de tuberías es el cálculo de la velocidad de circulación del fluido, o lo que es lo mismo su caudal, conocidas las características del fluido y de la tubería, así como las pérdidas de presión que experimenta el fluido. Al aplicar la ecuación de Bernoulli a un tramo de tubería de sección constante ($\Delta v = 0$), en la que no existe trabajo desarrollado por una bomba, se obtiene:

$$g\Delta z + \frac{\Delta P}{\rho} + \hat{E}_f = 0$$

simplificación que permite el cálculo de las pérdidas de energía mecánica en el tramo de tubería considerado.

Conocidas las pérdidas, al aplicar la ecuación de Fanning, es posible encontrar la velocidad media de circulación del fluido:

$$v_m = \left(\frac{2d \hat{E}_f}{4fL} \right)^{1/2} \quad [8.88]$$

Esta ecuación permite el cálculo de la velocidad media de circulación, siempre y cuando se conozca el valor del factor de fricción, pero como el factor de fricción depende a su vez de la velocidad, la resolución de la ecuación 8.88 se puede hacer por un proceso iterativo o bien utilizando el gráfico de Kármán.

- a) **Proceso iterativo:** Se supone una velocidad media de circulación y se calcula el módulo de Reynolds, con este valor y mediante las ecuaciones pertinentes o gráficos adecuados (Moody, Dodge-Metzner, etc.) se calcula el valor del factor de fricción, que al introducirlo en la ecuación 8.88 permite evaluar el valor de la velocidad media. Si este valor calculado coincide con el supuesto, ésta es la velocidad de circulación que se intenta calcular, en caso contrario se repite el proceso de cálculo con la velocidad obtenida como punto de partida, hasta coincidencia de valores.

La ventaja en este procedimiento es que existen valores de la velocidad de circulación para diferentes situaciones en un sistema de transporte (Geankoplis, 1978), lo que permite acelerar el proceso de convergencia.

- b) **Método gráfico de Kármán.** En el gráfico de Kármán (Foust *et al.*, 1980) se representa $1/(4f)^{1/2}$ frente al valor de $\text{Re}(4f)^{1/2}$ (figura 8.20), en la que aparece ε/d como parámetro de las curvas. A partir de este gráfico es posible obtener la velocidad de circulación del fluido sin necesidad de iterar.

A partir de la ecuación de Fanning se obtiene la expresión:

$$v = \frac{1}{(4f)^{1/2}} \left(\frac{2d \hat{E}_f}{L} \right)^{1/2} \quad [8.89]$$

y además, al combinar la ecuación de Fanning con el número de Reynolds es posible encontrar la relación:

$$Re (4f)^{1/2} = \frac{d \rho}{\eta} \left(\frac{2d \hat{E}_f}{L} \right)^{1/2} \quad [8.90]$$

El segundo término de esta última expresión puede calcularse fácilmente de los datos del problema, con lo que se obtiene el valor de $Re (4f)^{1/2}$. Este valor se lleva en abscisas a la gráfica de Kármán y con el valor de la rugosidad relativa ε/d se elige la curva correspondiente que permite calcular el valor de $1/(4f)^{1/2}$. Con este valor y la ecuación 8.89 se puede calcular la velocidad de circulación.

Una vez conocida la velocidad, el caudal volumétrico con el que circula el fluido se obtiene multiplicando el valor de la velocidad media por el área de flujo. Si se desea obtener el flujo másico es preciso aplicar la ecuación 8.42.

8.5.2. Cálculo del diámetro mínimo de tubería

Cuando se requiere determinar el diámetro mínimo que debe poseer una tubería de longitud L , por la que circula un fluido de características conocidas con un caudal volumétrico q y en la que se produce una pérdida de presión ΔP , debe realizarse un proceso iterativo. Para ello, las variables que se van a utilizar, y que son desconocidas, deben ponerse en función de los datos conocidos.

$$v = \frac{q}{S} = \frac{4q}{\pi d^2} \quad [8.91]$$

que se sustituye en la ecuación de Fanning, obteniéndose:

$$d^5 = 4f \frac{8 q^2 L}{\pi^2 \hat{E}_f} \quad [8.92]$$

y si la ecuación 8.91 se sustituye en la expresión del módulo de Reynolds generalizado se tiene:

$$Re_G = \left(\frac{4q}{\pi} \right)^{2-n} \frac{\rho}{8^{n-1} k} \left(\frac{4n}{1+3n} \right)^n d^{3n-4} \quad [8.93a]$$

que para fluidos newtonianos ($n = 1$ y $k = \eta$) se convierte en:

$$Re = \frac{4q \rho}{\pi \eta} \frac{1}{d} \quad [8.93b]$$

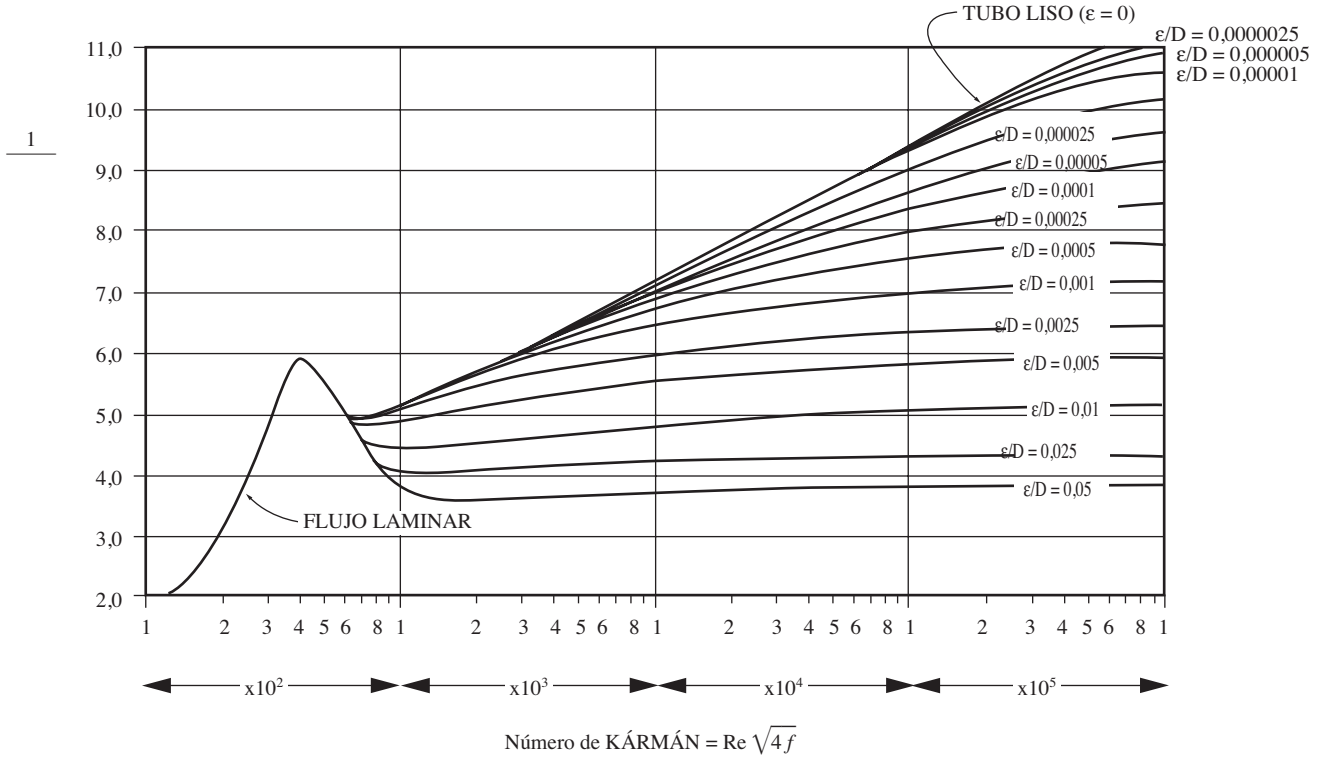


Figura 8.20. Gráfica de Kármán.

El proceso iterativo a seguir es el siguiente, se supone un valor de $4f$ (alrededor de 0,025), con éste y la ecuación 8.92 se calcula el diámetro, a partir del cual se evalúa el número de Reynolds con la ecuación 8.93a. Al ser una tubería de características conocidas se sabe el valor de la rugosidad absoluta ϵ , y con el diámetro calculado se puede hallar ϵ/d . Con los valores del módulo de Reynolds y de la rugosidad relativa se calcula f , utilizando las diferentes ecuaciones o gráficas existentes. Si el valor obtenido coincide con el supuesto, este valor del factor de fricción se utiliza en la ecuación 8.92 para calcular el diámetro de la tubería, en caso contrario se repite la iteración con el nuevo valor de $4f$ hallado. El proceso iterativo puede ser acelerado utilizando algún método numérico, tal como bisección o Newton-Raphson.

8.5.3. Redes de tuberías

En muchos sistemas de transporte a nivel industrial, se presenta la situación de que el fluido no sólo circula por una tubería, sino que lo hace por distintos tramos. En dichos sistemas pueden presentarse básicamente tres tipos de variante: circulación por tuberías en paralelo, en serie o bien en ramificaciones. A continuación, se expone con detalle el análisis de cada uno de estos casos.

8.5.3.1. Redes de tuberías en paralelo

Se supone un conjunto de tuberías tal como se muestra en la figura 8.21, en la que en un punto A se distribuye el fluido a través de tres tuberías, que convergen nuevamente en un punto B , próximo a la descarga. Al aplicar la ecuación de Bernoulli entre los puntos A y B , para cualquier tramo de la red, se cumple que:

$$g(z_B - z_A) + \frac{P_B - P_A}{\rho} + \hat{E}_{fi} = 0$$

a partir de la cual se puede hacer la siguiente generalización:

$$g(z_A - z_B) + \frac{P_A - P_B}{\rho} = \hat{E}_{f1} = \hat{E}_{f2} = \hat{E}_{f3} \quad [8.94]$$

es decir:

$$\hat{E}_{f1} = \hat{E}_{f2} = \hat{E}_{f3}$$

Además, de la ecuación de continuidad para un fluido con la densidad constante se tiene que:

$$q_A = q_B = q_1 + q_2 + q_3 \quad [8.95]$$

En este tipo de redes de tuberías en paralelo suelen presentarse dos tipos de problemas. Uno es el cálculo de la presión en el punto B conocidas las características del fluido y de las tuberías, la presión en el punto A , así como el caudal global

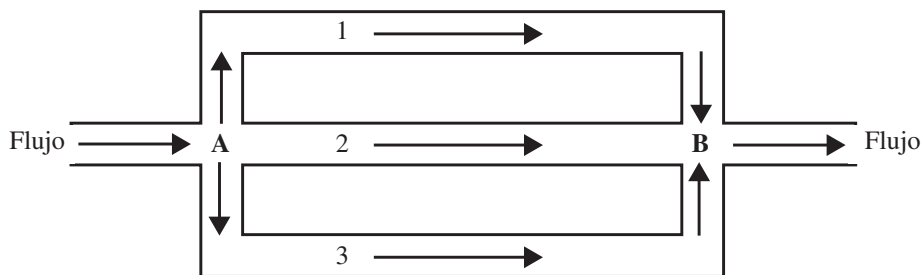


Figura 8.21. Tuberías en paralelo.

de circulación. Otro es el cálculo de los caudales volumétricos de cada rama y el global, conocidas las características del fluido y de la tubería y la pérdida de presión que experimenta el fluido entre los puntos A y B.

En el primer caso debe aplicarse un proceso iterativo, que a continuación se explica:

- i) Se supone el caudal en una de las ramas, calculando las pérdidas de energía mecánica en dicha rama utilizando la ecuación de Fanning.
- ii) Aplicando la ecuación 8.94 se puede calcular la presión en el punto B (P_B).
- iii) Las pérdidas de energía mecánica son iguales para cada rama, por lo que las calculadas para la primera serán las mismas para las otras dos. Esto permite calcular el caudal en cada rama tal como se ha indicado en el apartado 8.5.1.
- iv) Con los tres caudales de las ramas correspondientes se obtiene la suma total ($q_1 + q_2 + q_3$) y si coincide con el caudal total, que es un dato, el proceso iterativo se da por finalizado.

8.5.3.2. Tuberías en serie

Si en el conjunto global de tuberías existen tramos con distinto diámetro, al aplicar la ecuación de Bernoulli entre los puntos extremos A y B de todo el conjunto de tuberías, se tiene que:

$$g\Delta z + \frac{\Delta P}{\rho} + \frac{1}{2} \left(\frac{v_n^2}{\alpha_n} - \frac{v_1^2}{\alpha_1} \right) - \hat{W} + \sum_{i=1}^n \hat{E}_{fi} = 0 \quad [8.96]$$

en la que el subíndice i representa el tramo i de tubería, mientras que 1 y n son los que se refieren al primer y último tramos, respectivamente.

El problema más usual que suele presentarse en este tipo de sistemas, es el del cálculo de la caída de presión global que experimenta el fluido desde su entrada al primer tramo hasta que abandona el último. En este tipo de problemas no es neces-

sario aplicar ningún proceso iterativo de cálculo, ya que la velocidad en cada tramo se evalúa a partir de la ecuación de continuidad:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 = v_3 S_3 = \dots = v_n S_n$$

Con las velocidades de cada tramo se pueden calcular las pérdidas de energía mecánica de cada uno de ellos a partir de la ecuación de Fanning:

$$\hat{E}_{fi} = 4 f_i \frac{L_i}{d_i} \frac{v_i^2}{2}$$

en la que el factor de fricción se calcula utilizando las ecuaciones o diagramas pertinentes.

Con los valores calculados de \hat{E}_{fi} se determina la caída de presión global utilizando la ecuación 8.96.

8.5.3.3. Tuberías en ramificación

Los problemas que pueden presentarse en este caso son muy variados, de forma general las conducciones en ramificación son las que se representan en la figura 8.22, en la que se puede apreciar la existencia de un punto o nudo A en el que convergen diferentes ramales o tuberías de distinto diámetro.

Para cualquier ramal i de este sistema, se toma que la velocidad de circulación del fluido es positiva si el sentido del flujo es de A hacia i , y negativa en caso contrario. Normalmente se toma como referencia el punto A , con lo cual al aplicar la ecuación de Bernoulli a cualquiera de las tuberías se tiene:

$$g(z_i - z_A) + \frac{P_i - P_A}{\rho} + \hat{E}_{fi} = 0$$

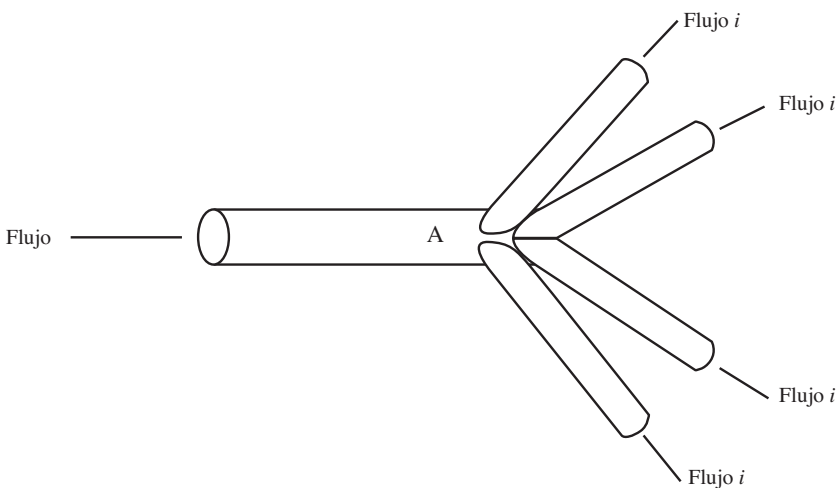


Figura 8.22. Tuberías ramificadas.

es decir:

$$\hat{E}_{fi} = \frac{P_A}{\rho} + gz_A - \left(\frac{P_i}{\rho} + gz_i \right) \quad [8.97]$$

Y como las pérdidas de energía mecánica siempre son positivas, por lo que si:

$$\left(\frac{P_i}{\rho} + gz_i \right) < \left(\frac{P_A}{\rho} + gz_A \right)$$

el flujo del fluido va desde el punto A hacia el punto i , lo que indica que la velocidad de circulación v_i es positiva.

Por otro lado, si
$$\left(\frac{P_i}{\rho} + gz_i \right) > \left(\frac{P_A}{\rho} + gz_A \right)$$

el flujo del fluido es en sentido contrario al anterior, y va desde el punto i hasta el A , lo que indica que la velocidad de circulación v_i es negativa.

Generalmente, los problemas que suelen presentarse son aquellos en los que se desea calcular la presión en el punto A de confluencia y las velocidades de circulación del fluido en cada una de las ramificaciones. Siempre y cuando las características del fluido y de las tuberías sean conocidas.

Para resolver este tipo de problemas, se puede seguir el siguiente algoritmo:

- i) Se supone inicialmente la velocidad en una de las tuberías (v_i), con lo que es posible calcular el factor de fricción, utilizando las ecuaciones o diagramas correspondientes.
- ii) A partir de este valor del factor de fricción se calculan las pérdidas de energía mecánica, a través de la ecuación de Bernoulli aplicada a esta ramificación.
- iii) Mediante la ecuación 8.97 se puede calcular: el término de energía de presión y potencial ($P_A/\rho + gz_A$), y con ello calcular las pérdidas de energía mecánica en el resto de las tuberías, al aplicar la misma ecuación 8.97 para cada tramo.
- iv) Una vez conocidas estas pérdidas de energía mecánica, las velocidades y los flujos de circulación de cada tramo se calculan como en el apartado 8.5.1.
- v) Se realiza un balance de materia por medio de la ecuación de continuidad en el punto A de confluencia, teniendo presente el signo de la velocidad de cada tramo. Es decir: $\sum v_i S_i = 0$.

Si el balance de materia se cumple, la velocidad supuesta es la que se buscaba, y el problema se da por terminado. En caso contrario, si el sumatorio de esta última ecuación es un valor positivo, se disminuye el valor de la velocidad supuesta v_i , y se repite el proceso de cálculo. Por el contrario si dicho sumatorio genera un valor negativo, la iteración se repite aumentando el valor de v_i .

8.6. Bombas

Para que los líquidos puedan circular a través de las tuberías, en la mayoría de los sistemas es necesario comunicarles energía mecánica, mediante dispositivos mecánicos conocidos como bombas.

La razón por la que se debe suministrar energía al fluido que se está transportando, es debido a que cuando el líquido circula por una tubería pierde energía mecánica por la fuerza de rozamiento que existe en las paredes de la tubería, o bien, porque el trabajo suministrado por la bomba se convierte en energía cinética, potencial o de presión. Esta energía que se le debe transferir al sistema es precisamente el término \hat{W} que aparece en el balance de energía mecánica o ecuación de Bernoulli:

$$g\Delta z + \frac{\Delta P}{\rho} + \frac{\Delta v^2}{2\alpha} + \hat{E}_f = \hat{W}$$

Generalmente, en los problemas de bombeo de fluidos, los términos de esta ecuación suelen utilizarse en forma de las denominadas **cargas** (Perry y Chilton, 1973; Coulson y Richardson, 1979; Foust *et al.*, 1980; McCabe *et al.*, 1985; Singh y Heldman, 1993), que son los diferentes términos de energía divididos por el valor de g . Puede observarse que el análisis de dimensiones de estas cargas resulta en una sola que es la de longitud, la cual corresponde a unidades de metros en el Sistema Internacional. De esta observación, se puede interpretar que la energía de cada término de la ecuación representa la altura a la que puede elevarse la masa de 1 kg de fluido.

De este modo, la ecuación de Bernoulli, aplicada entre los puntos 1 y 2 del sistema mostrado en la figura 8.23 conduce a la forma explícita siguiente:

$$\frac{\hat{W}}{g} = (z_2 - z_1) + \left(\frac{v_2^2}{2\alpha_2 g} - \frac{v_1^2}{2\alpha_1 g} \right) + \frac{P_2 - P_1}{\rho g} + \frac{\hat{E}_f}{g} \quad [8.98]$$

Expresión en la que $\frac{\hat{W}}{g}$ se suele representar por H , que es la carga que realiza la bomba sobre el fluido. Los demás términos se denominan carga estática, carga cinética o de velocidad, carga de presión y pérdida de carga por fricción.

8.6.1. Características de una bomba

En las bombas aparecen ciertas variables características, que son las que a continuación se exponen. Para ello, todas las definiciones que se realizarán están referidas a la figura 8.23.

8.6.1.1. Carga de aspiración

La carga de aspiración se identifica a la suma de las cargas estática, cinética y de presión en el punto de succión de la bomba. Es decir, es el valor de la energía

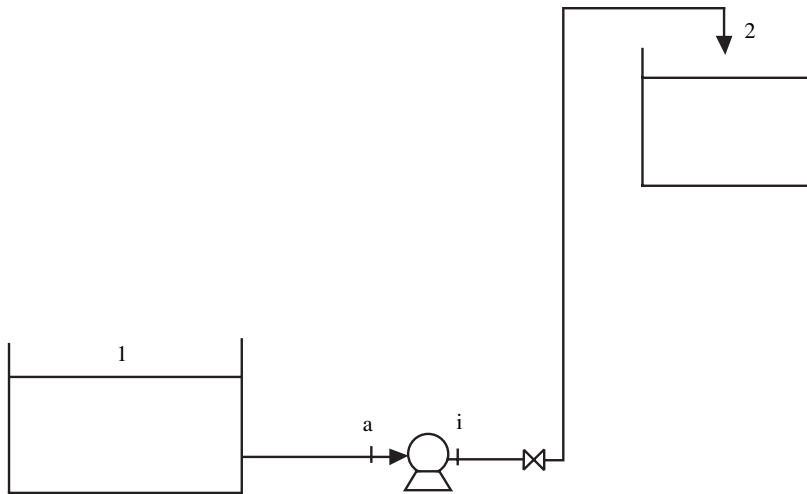


Figura 8.23. Sistema de transporte de fluidos.

que posee el fluido en la boca de succión o de aspiración, y por tratarse de una carga, está expresada en metros de líquido. Esto es:

$$H_a = z_a + \frac{1}{g} \left(\frac{P_a}{\rho} + \frac{v_a^2}{2\alpha} \right) \quad [8.99]$$

Como en los sistemas reales es difícil conocer las condiciones a la entrada de la bomba, para evaluar H_a se puede efectuar un balance de energía mecánica entre los puntos 1 y a , lo que genera la siguiente igualdad:

$$(z_a - z_1) + \left(\frac{v_a^2}{2\alpha g} - \frac{v_1^2}{2\alpha g} \right) + \frac{(P_a - P_1)}{\rho g} + \frac{\hat{E}_{f1}}{g} = 0$$

es decir, la carga de aspiración queda expresada de la siguiente manera:

$$H_a = z_a + \left(\frac{P_a}{\rho g} + \frac{v_a^2}{2\alpha g} \right) = z_1 + \left(\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2\alpha g} \right) - \frac{\hat{E}_{f1}}{g} \quad [8.100]$$

por lo que la carga de aspiración puede determinarse si se saben las condiciones del punto 1 y las pérdidas de carga por fricción en el tramo 1- a . Es de resaltar que el valor de la carga de aspiración disminuye al aumentar el caudal de circulación del líquido, ya que aumentan las pérdidas por fricción.

8.6.1.2. Carga de impulsión

De manera análoga a la carga de aspiración, la de impulsión es la suma de las cargas estática, cinética y de presión en el punto de descarga de la bomba. Repre-

senta la energía disponible, expresada en metros de líquido, que posee el fluido a la salida de la bomba para que circule hasta el punto final del sistema.

$$H_i = z_i + \frac{1}{g} \left(\frac{P_i}{\rho} + \frac{v_i^2}{2\alpha} \right) \quad [8.101]$$

Al realizar un balance de energía mecánica entre los puntos de impulsión y el final (puntos i y 2 en la figura 8.23), se obtiene la igualdad

$$(z_2 - z_i) + \left(\frac{v_2^2}{2\alpha g} - \frac{v_i^2}{2\alpha g} \right) + \frac{(P_2 - P_i)}{\rho g} + \frac{\hat{E}_{f2}}{g} = 0$$

que permite evaluar la carga de impulsión, a partir de términos conocidos en el sistema de transporte, es decir, las condiciones del punto final y las pérdidas de carga por fricción entre los puntos de impulsión y el final:

$$H_i = z_i + \left(\frac{P_i}{\rho g} + \frac{v_i^2}{2\alpha g} \right) = z_2 + \left(\frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2\alpha g} \right) + \frac{\hat{E}_{f2}}{g} \quad [8.102]$$

La carga de impulsión aumenta a medida que aumenta el caudal de líquido, ya que ello implica un aumento de las pérdidas por fricción.

8.6.1.3. Carga total de la bomba

La carga total que puede desarrollar la bomba se define como la diferencia entre las cargas de impulsión y de aspiración:

$$H = H_i - H_a \quad [8.103a]$$

con lo cual, si se tienen presentes las ecuaciones obtenidas anteriormente, la carga total se expresa según las ecuaciones:

$$H = (z_i - z_a) + \left(\frac{v_i^2}{2\alpha g} - \frac{v_a^2}{2\alpha g} \right) + \frac{P_i - P_a}{\rho g} \quad [8.103b]$$

que expresada en función de los puntos 1 y 2, según las ecuaciones 8.100 y 8.102, se tiene:

$$H = (z_2 - z_1) + \left(\frac{v_2^2}{2\alpha_2 g} - \frac{v_1^2}{2\alpha_1 g} \right) + \frac{P_2 - P_1}{\rho g} + \frac{\hat{E}_{f2} + \hat{E}_{f1}}{g} \quad [8.103c]$$

en la que $\hat{E}_{f1} + \hat{E}_{f2} = \hat{E}_f$ son las pérdidas totales de energía mecánica. Como es lógico, esta ecuación corresponde al balance total de energía mecánica a través de todo el sistema de transporte entre los puntos 1 y 2, en la figura 8.23.

La carga total necesaria para impulsar el líquido es mayor cuanto más grande es el flujo que debe circular a través de la tubería, ya que las pérdidas de carga aumentan en proporción a la cantidad de volumen desplazado.

8.6.1.4. Carga neta positiva de aspiración. Cavitación

La **cavitación** es un fenómeno que se produce cuando la presión en algún punto de la corriente líquida se hace menor que la presión de vapor del líquido a la temperatura de trabajo. Este descenso en la presión hace que el líquido se vaporice, apareciendo burbujas («cavidades») en el seno de la corriente líquida. Esta corriente arrastra las burbujas hasta zonas de mayor presión en las que desaparecen, produciéndose un aumento local de la presión que puede afectar al sistema de transporte, lo que ocasiona el deterioro de la misma. Este fenómeno de cavitación produce una disminución de las presiones de aspiración y de descarga de la bomba, pudiendo provocar que ésta se vacíe de líquido. Para evitar este fenómeno, la bomba debe trabajar bajo ciertas condiciones. Para conocer estas condiciones de trabajo se define la **carga neta positiva de aspiración CNPA** (en inglés NPSH, *net positive suction head*), que es la diferencia entre la carga de aspiración y la presión de vapor del líquido (Coulson y Richardson, 1979; McCabe *et al.*, 1985):

$$\text{CNPA} = H_a - h_v \quad [8.104]$$

en esta ecuación la presión de vapor del líquido, h_v , viene expresada en metros. Como los fluidos alimentarios poseen un alto porcentaje de agua, para la presión de vapor h_v se suele tomar la del agua pura, que además asegura la situación más desfavorable en este fenómeno físico.

Una vez que la CNPA ha sido definida, cabe distinguir dos distintos tipos que se utilizan en el diseño y aplicaciones prácticas de sistemas para el transporte de fluidos.

1. La carga neta positiva de aspiración **absoluta** (CNPA)_A es característica de cada sistema específico, y depende de la altura de dicho sistema, situación de la bomba, y de las características particulares de la tubería. Puede calcularse según la ecuación:

$$(\text{CNPA})_A = H_a - h_v = z_a + \frac{v_a^2}{2\alpha g} + \frac{P_a - P_v}{\rho g} \quad [8.105a]$$

$$(\text{CNPA})_A = z_1 + \frac{v_1^2}{2\alpha g} + \frac{P_1 - P_v}{\rho g} - \frac{\hat{E}_{f1}}{g} \quad [8.105b]$$

2. La carga neta positiva de aspiración **requerida** (CNPA)_R es característica de cada bomba y los datos vienen especificados por el fabricante, siendo función del diseño de la bomba y de la velocidad de rotación de la misma, para el caso de bombas centrífugas. La (CNPA)_R representa la carga mínima de aspiración para que no se produzca cavitación, para un determinado caudal de circulación del líquido.

Para un buen diseño, la (CNPA)_A debe ser superior a (CNPA)_R para evitar la cavitación en cualquier punto de la tubería. El valor de la carga de presión del fluido,

en el punto de aspiración, debe procurarse que exceda a la presión de vapor del líquido, expresada en metros, en por lo menos 1 metro.

Si aparece cavitación, para eliminar este fenómeno suele disminuirse el caudal de circulación del líquido mediante una válvula colocada en el punto de impulsión, o bien disminuyendo la temperatura del líquido, ya que con ello se logra disminuir la presión de vapor del mismo.

8.6.2. Punto de instalación de una bomba

Uno de los aspectos más conflictivos en el diseño de tuberías es saber en qué punto debe colocarse la bomba, para que el fluido pueda circular sin que se produzca cavitación. El punto de instalación debe ser tal que la carga neta positiva de aspiración absoluta sea por lo menos igual a la requerida.

Puede ocurrir que se disponga de una bomba de la que se desconoce su $(CNPA)_R$, en cuyo caso, se debe colocar en un punto en el que la presión estática del punto de aspiración, P_a , sea algo superior a la presión de vapor del líquido que circula.

Al aplicar la ecuación de energía mecánica entre los puntos 1 y a , de la figura 8.23, se puede calcular la longitud total de tubería (tramos rectos más accesorios) que deben existir antes del punto de aspiración de la bomba, obteniéndose de esta manera el punto de colocación. Es decir:

$$g(z_a - z_1) + \left(\frac{v_a^2}{2\alpha} - \frac{v_1^2}{2\alpha} \right) + \frac{P_a - P_1}{\rho} + 4f \frac{v^2}{2} \frac{L_T}{d} = 0$$

Si en esta ecuación se sustituye la presión de aspiración por el valor de la presión de vapor del líquido ($P_a = P_v$), se podrá calcular la longitud total de tubería máxima entre los puntos 1 y el de aspiración.

Puede presentarse el caso de dispositivos ya instalados y mal calculados, en los que se produce cavitación, es decir, $P_a < P_v$. Para evitar esta cavitación existen diferentes soluciones. Una de ellas es aumentar el valor de la presión en el punto de aspiración bajando la altura a la que se halla la bomba, o bien cambiando su punto de instalación disminuyendo la distancia del punto 1 hasta el de aspiración. También se puede aumentar la presión del punto de aspiración disminuyendo el caudal de circulación, que hace que las pérdidas de energía mecánica disminuyan. Otra forma de evitar la cavitación es disminuir la presión de vapor del líquido, disminuyendo la temperatura de circulación del mismo.

8.6.3. Potencia de la bomba

Una vez calculado el punto en que se va a instalar la bomba, debe determinarse la potencia que se necesita para hacer circular el fluido entre los puntos de carga y descarga (1 y 2 de la figura 8.23). Para ello, nuevamente se aplica el balance de energía mecánica entre dichos puntos:

$$g(z_2 - z_1) + \left(\frac{v_2^2}{2\alpha} - \frac{v_1^2}{2\alpha} \right) + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + \hat{E}_f = \hat{W}$$

A partir de esta ecuación se obtiene \hat{W} , que es la energía o trabajo por unidad de masa que debe suministrarse al fluido para que circule desde el punto 1 al 2.

La potencia de la bomba se calcula a partir de la siguiente ecuación:

$$Pot = P_w = \hat{W}w \quad [8.106]$$

en la que w es el flujo o caudal másico de circulación del fluido.

De esta manera, si \hat{W} está expresado en J/kg y w en kg/s la potencia de la bomba tendrá unidades de vatios (J/s).

8.6.4. Rendimiento de una bomba

La potencia de la bomba expresada en el apartado anterior corresponde a la potencia teórica o útil que debe recibir el fluido para que pueda circular a través del sistema. Sin embargo, se observa que en la realidad es necesario aplicar una potencia superior a la teórica. Ello se debe a que existen pérdidas de energía mecánica en las partes móviles de la bomba (Coulson y Richardson, 1979), debidas tanto a rozamientos con las superficies como a la forma de los álabes, así como a las pérdidas de caudal hacia el exterior, rozamientos en cojinetes, entre otros.

La potencia real o de accionamiento de la bomba puede calcularse a partir de la potencia teórica si se conoce la eficiencia de trabajo de la bomba y del motor que la impulsa. Si el rendimiento o eficiencia de la bomba (Φ) se define como la relación entre la energía captada por el fluido y la consumida por el motor que acciona la bomba. La potencia real de la bomba es expresada por la siguiente relación:

$$Pot)_{Real} = \frac{Pot)_{Teórica}}{\Phi} = \frac{\hat{W}w}{\Phi} \quad [8.107]$$

8.6.5. Tipos de bombas

Las distintas bombas que existen para la impulsión de líquidos a través de tuberías se pueden agrupar en tres grandes grupos: bombas de desplazamiento positivo, rotatorias y centrífugas (Badger y Banchemo, 1970; Perry y Chilton, 1973; Coulson y Richardson, 1979; Foust *et al.*, 1980; McCabe *et al.*, 1985; Singh y Heldman, 1993).

- a) Dentro de las bombas de **desplazamiento positivo**, también denominadas alternativas, las de émbolo o pistón son las más representativas. En éstas, el líquido es aspirado por el émbolo a través de una válvula de retención, para luego ser expulsado por una válvula de descarga. En este tipo de bombas el caudal de descarga no es continuo con el tiempo, y por ello, muchas veces se utilizan las de doble efecto. En estas bombas se suele manejar el concepto de rendimiento volumétrico, que está definido como el cociente entre el volumen del fluido que se descarga y el volumen barrido por el émbolo.

- b) Las bombas **rotatorias** no necesitan válvulas de retención para la carga y descarga del líquido, de modo que las partes giratorias de la misma lo hacen confinadas en una carcasa, creando un espacio de volumen vacío, que hace que el líquido penetre. Posteriormente reducen este volumen expulsando el líquido. De los distintos tipos de bombas rotatorias cabe citar las de engranajes, de tornillo y las peristálticas. Las bombas rotatorias son frecuentemente utilizadas para el transporte de polvos alimenticios, tales como leche deshidratada y café soluble.
- c) Las bombas **centrífugas** que son las más utilizadas para el transporte de fluidos alimenticios, están formadas por una serie de paletas que giran alrededor de un eje en el interior de una carcasa. El líquido entra por el centro y debido al giro de las paletas, se le confiere una fuerza centrífuga, logrando de esta manera el desplazamiento del fluido.

La carga total desarrollada por una bomba centrífuga, para un flujo determinado, es independiente de la densidad del fluido, por lo que cuanto mayor sea la densidad del mismo, mayor será el incremento de presiones (ΔP) desarrollado por la bomba. Y como la presión estática depende de la altura de líquido, según la expresión:

$$\Delta P = g \rho z$$

en el caso de que la bomba esté llena de aire, ΔP será pequeña, por lo que no se puede bombear el fluido, así que para poderla utilizar la bomba debe cebarse o purgarse previamente.

Cada bomba presenta ciertas características definidas, en las que la potencia, carga y eficiencia son función del caudal volumétrico de circulación. Generalmente el fabricante proporciona dichas características específicas de la bomba, por lo que calculando la carga total del sistema, se podrá determinar el punto de servicio. La mayoría de los datos que presentan los fabricantes de bombas están referidos a fluidos newtonianos.

Es interesante resaltar que la mayoría de fluidos alimentarios presentan comportamiento no newtoniano al flujo. Además, casi en su totalidad circulan en condiciones de régimen laminar.

Una forma adecuada para el cálculo y selección de bombas es el presentado por Steffe y Morgan (1986). Los datos proporcionados (usando fluidos newtonianos como agua y aceite) por el fabricante pueden aplicarse con fluidos no newtonianos si se utiliza la denominada **viscosidad efectiva** (η_e). Para un fluido no newtoniano, que circula en régimen laminar, Skelland (1967) definió la viscosidad efectiva a partir de la ecuación de Hagen-Poiseuille, de la siguiente manera:

$$\eta_e = \frac{\Delta P}{L} \frac{\pi d^4}{128 q} \quad [8.108]$$

Considerando que la relación entre el flujo másico (w) y volumétrico (q):

$$w = q \rho$$

y que la caída de presión se relaciona con las pérdidas de energía mecánica según la expresión:

$$\Delta P = \hat{E}_f \rho$$

en la que \hat{E}_f viene dada por la ecuación de Fanning.

Al combinar estas ecuaciones, la viscosidad efectiva puede ser expresada como:

$$\eta_e = \frac{4fw}{16\pi d} = \frac{fw}{4\pi d} \quad [8.109]$$

Las expresiones de la viscosidad efectiva [ecs. 8.108 y 8.109], pueden ser utilizadas en el procedimiento desarrollado por Steffe y Morgan (1986).

Las curvas características de las bombas que proporcionan los fabricantes de las mismas suelen darse en función de la **viscosidad cinemática**. Esta viene definida como la relación entre la viscosidad dinámica y la densidad:

$$\nu = \eta/\rho \quad [8.110]$$

Una de las unidades más utilizadas para expresar la viscosidad cinemática es el Stoke (St), definido como:

$$\text{St} = \frac{\text{Poise}}{\text{g/cm}^3} = \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$$

La viscosidad cinemática también puede expresarse en otras unidades, como son Segundos Saybolt Universal (SSU), Segundos Redwood Standard (SRS) y grados Engler. En la tabla 8.4 se dan las equivalencias entre las diferentes unidades de viscosidad cinemática.

Tabla 8.4. Equivalencias entre unidades de viscosidad cinemática

cSt	SSU	SRS	°Engler
7,4	5	44,3	1,58
20,6	100	85,6	3,02
43,2	200	170,0	5,92
87,6	400	338,0	11,70
110,0	500	423,0	14,60
132,0	600	508,0	17,50
176,0	800	677,0	23,35
220,0	1.000	896,0	29,20
330,0	2.000	1.690,0	58,40
550,0	2.500	2.120,0	73,00
660,0	3.000	2.540,0	87,60
880,0	4.000	3.380,0	117,00
1.100,0	5.000	4.230,0	146,00
2.200,0	10.000	8.460,0	292,00
4.400,0	20.000	18.400,0	584,00

Para valores superiores a 300 SSU, puede utilizarse la conversión: SSU = 4,62 cSt.

Fuente: Baquero y Llorente (1985).

PROBLEMAS

Problema 8.1

En los tratamientos térmicos de pasteurización de alimentos fluidos, suelen utilizarse dispositivos en los que el fluido circula dentro de un tubo a la temperatura de tratamiento. Para asegurar una buena pasteurización es necesario que los microorganismos que circulan con la velocidad máxima permanezcan el tiempo suficiente para que reciban el tratamiento térmico adecuado. Un fluido alimentario que posee una densidad de 1.250 kg/m^3 circula a través de una tubería de $26,7 \text{ mm}$ de diámetro interno ($3/4''$ de diámetro nominal) con un caudal de 10.000 kg/h . Determinar el valor de la velocidad máxima de circulación para los dos casos siguientes: a) zumo clarificado o zumo de melocotón de 45°Brix , de viscosidad $9 \text{ mPa}\cdot\text{s}$, y b) yema de huevo que presenta un comportamiento de fluido de la ley de potencia, con $k = 880 \text{ mPa}\cdot\text{s}^n$ y $n = 0,20$.

La velocidad media de circulación se obtiene a partir de la ecuación 8.42:

$$v_m = \frac{w}{S \rho} = \frac{4 w}{\rho \pi d^2}$$

por lo que al sustituir los datos, resulta que la velocidad será: $v_m = 3,97 \text{ m/s}$.

a) Para el zumo de melocotón, cuyo comportamiento es de fluido newtoniano, la magnitud del módulo de Reynolds se obtiene al sustituir los datos en la ecuación 8.5:

$$(\text{Re}) = \frac{\left(1.250 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \left(3,97 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) (0,0267 \text{ m})}{9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}} = 14.718$$

A partir de la figura 8.8, para $(\text{Re}) = 14.718$ se obtiene que $v_m/v_{m\max} = 0,78$; por lo que la velocidad máxima será: $v_{m\max} = 5,09 \text{ m/s}$.

b) En el caso de la yema de huevo que tiene un comportamiento no-newtoniano, el módulo de Reynolds generalizado se obtiene de la ecuación 8.7:

$$\text{Re}_G = \frac{(0,0267)^{0,2} \left(3,97 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^{2-0,2} \left(1.250 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)}{8^{(0,2-1)} \left(0,88 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}\right)} \frac{[4(0,2)]^{0,2}}{[1+3(0,2)]^{0,2}} = 37.828$$

A partir de la figura 8.9, para $\text{Re}_G = 37828$ y $n = 0,2$, se obtiene que $v_m/v_{m\max} = 0,92$; por lo que la velocidad máxima será: $v_{m\max} = 4,31 \text{ m/s}$.

Problema 8.2

Un fluido alimentario, de densidad 1.200 kg/m^3 , circula a 25°C por una tubería de 5 cm de diámetro con un flujo másico de 5.000 kg/h . Determinar el flujo de energía cinética que transporta el fluido, si se trata de los siguientes fluidos: a) zumo concentrado de melocotón de 69°Brix , cuya viscosidad es de $324 \text{ mPa}\cdot\text{s}$; b) zumo de frambuesa no clarificado (sin despectinizar) de 41°Brix , que tiene comportamiento pseudoplástico, con $n = 0,73$ y $k = 1,6 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$; c) puré de manzana con comportamiento Herschel-Bulkley, $\sigma_0 = 58,6 \text{ Pa}$, $k = 5,63 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ y $n = 0,47$. En las condiciones de transporte se puede suponer una relación entre el umbral de fluencia y el esfuerzo cortante en la pared de $0,2$, y d) mayonesa que se comporta como plástico de Bingham, con $\sigma_0 = 85 \text{ Pa}$, $\eta' = 0,63 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$, en este caso $m = 0,219$.

La velocidad media de circulación, de acuerdo a la ecuación 8.42 es $v_m = 0,59 \text{ m/s}$. Mientras que el flujo de energía cinética se obtiene a partir de la ecuación 8.52 multiplicada por el flujo másico:

$$\dot{K} = w \frac{1}{2} \frac{(v_m)^2}{\alpha}$$

expresión en que falta conocer el valor de α .

a) Para el concentrado de melocotón, que se comporta como fluido newtoniano, α depende del número de Reynolds, por lo tanto al sustituir en la ecuación 8.5 se tiene:

$$(\text{Re}) = \frac{(1.200) (0,59) (0,05)}{(0,324)} = 109$$

que indica un flujo en régimen laminar, al que corresponde un valor de $\alpha = 0,5$, y por lo tanto la energía cinética correspondiente a este fluido es:

$$\dot{K} = 5.000 \frac{\text{kg}}{\text{h}} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{\left(0,59 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{0,5} = 1.740,5 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{h}}$$

es decir, $\dot{K} = 1.740,5 \text{ J/h}$

b) Para el zumo de frambuesa que se comporta como fluido pseudoplástico, α depende del número de Reynolds generalizado, por lo tanto al sustituir en la ecuación 8.7 se tiene:

$$\text{Re}_G = \frac{(0,05)^{0,73} (0,59)^{2-0,73} (1.200)}{8^{0,73-1} (1,60)} \frac{[4 (0,73)]^{0,73}}{[1 + 3 (0,73)]^{0,73}} = 70,8$$

Por otro lado, el valor del número de Reynolds crítico, se calcula a partir de la ecuación 8.8:

$$Re_G)_{crítico} = \frac{6.464 (0,73)}{[1 + 3 (0,73)]^2 \left[\frac{1}{2 + (0,73)} \right]^{(2 + 0,73)/(1 + 0,73)}} = 2.262$$

lo que indica que un flujo en régimen laminar, al que corresponde un valor de α dado por la ecuación 8.54:

$$\alpha = \frac{[2 (0,73) + 1] [5 (0,73) + 3]}{3 [3 (0,73) + 1]^2} = 0,563$$

Por lo tanto,
$$\dot{K} = 5.000 \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{0,59^2}{0,536} \right) = 1.623,6 \text{ J/h}$$

es decir,
$$\dot{K} = 1.623,6 \text{ J/h}$$

c) Para el puré de manzana que se comporta como fluido no newtoniano con umbral de fluencia, α depende del número de Reynolds generalizado, por lo tanto al sustituir en la ecuación 8.7 se tiene $Re_G = 62,3$, mientras que el valor crítico del número de Reynolds (figura 8.4), depende del número de Hedstrom, por lo tanto sustituyendo en la ecuación 8.12b:

$$He_G = \frac{(0,05 \text{ m})^2 \left(1.200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)}{5,63 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^{1,53}}} \left(\frac{58,6 \text{ Pa}}{5,63 \text{ Pa} \cdot \text{s}^{0,47}} \right)^{\left(\frac{2}{0,47} \right) - 1} = 1.093,6$$

que corresponde a un valor de $Re_G)_{Crítico}$ alrededor de 2.200, lo que indica que este fluido circula laminarmente. Para evaluar el factor de corrección α , se pueden seguir dos alternativas, la primera es utilizando la ecuación 8.56 de la que se obtiene $\alpha = 0,644$; o bien por medio de la figura 8.12, que es menos exacto, dando $\alpha \sim 0,62-0,64$.

Por tanto:
$$\dot{K} = 5.000 \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{0,59^2}{0,644} \right) = 1.351,3 \text{ J/h}$$

para este caso:
$$\dot{K} = 1.315,3 \text{ J/h}$$

d) Finalmente, para la mayonesa que tiene un comportamiento de plástico de Bingham, el valor del número de Reynolds se calcula con la ecuación 8.6, mientras que α se evalúa por medio de la ecuación 8.55:

$$\text{Re}_B = \frac{\left(1.200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \left(0,59 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) (0,05 \text{ m})}{0,63 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}} = 56,2$$

$$\alpha = \frac{1}{2 - 0,219} = 0,561$$

Obteniéndose que:

$$\dot{K} = 5.000 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{0,59^2}{0,561}\right) = 1.549,4 \text{ J/h}$$

es decir, el flujo de mayonesa lleva asociada una energía cinética: $\dot{K} = 1.549,4 \text{ J/h}$.

Problema 8.3

Se desea calcular la velocidad y el caudal másico con el que circula un puré de manzana que se transporta a través de una tubería de 15 cm de diámetro interno, a una temperatura de 25 °C. La distancia total que debe recorrer el puré es de 300 metros, existiendo entre los puntos de salida y llegada una caída de presión de 250 kPa, estando el punto de llegada a 5 metros por encima del punto de salida. A la temperatura de trabajo, el puré sigue la ley potencia, con un índice de consistencia de 2,4 Pa·sⁿ y un índice de comportamiento al flujo de 0,44, siendo su densidad 1.200 kg/m³.

La velocidad se calcula mediante un proceso iterativo, según se describe en el apartado 8.5.1. El número de Reynolds crítico correspondiente a este flujo, se obtiene con la ecuación 8.8, obteniéndose $\text{Re}_G)_{\text{Crítico}} = 2.396$.

Las pérdidas de energía mecánica se obtienen al aplicar la ecuación de Bernoulli entre los puntos de entrada y salida:

$$\hat{E}_f = \frac{\Delta P}{\rho} - g \Delta z = \frac{250 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2}}{1.200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} - \left(9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) (5 \text{ m}) = 159,3 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

El proceso iterativo es el siguiente:

1. Se supone una velocidad a partir de la cual se evalúa el valor del módulo de Reynolds generalizado [ec. 8.7].
2. Mediante el diagrama de Dodge y Metzner (figura 8.15), o bien por medio de las ecuaciones 8.79 ó 8.68 se calcula el valor del factor de fricción.
3. A partir de f y la ecuación 8.88, $v_m = (2d\hat{E}_f/4fL)^{1/2}$, se determina la velocidad. Si el valor calculado no coincide con el supuesto, se repite el proceso.

Las ecuaciones previamente mencionadas quedan de la siguiente forma:

$$\text{Re}_G = 615,73 (v)^{1,56} \qquad v_m = \frac{0,19955}{f^{1/2}}$$

Los valores obtenidos en cada iteración se presentan en la tabla de abajo:

Iteración	v_{supuesta} (m/s)	Re_G	$4f$	$v_{\text{calculada}}$ (m/s)
1	2,20	2.107	0,03038	2,29
2	2,29	2.243	0,02854	2,36
3	2,36	2.350	0,02723	2,42
4	2,42	2.444	0,02619	2,47
5	2,47	2.524	0,02536	2,51
6	2,51	2.588	0,02473	2,54
7	2,54	2.636	0,02428	2,56
8	2,56	2.668	0,02400	2,58
9	2,58	2.700	0,02370	2,59
10	2,59	2.717	0,02356	2,60
11	2,60	2.734	0,02341	2,60

La velocidad media de circulación es de: $v_m = 2,60$ m/s.

El flujo másico se obtiene con la ecuación 8.42b:

$$w = \left(1.200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \left(2,6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \left\{ \frac{[3,1416 \cdot (0,15 \text{ m})^2]}{4} \right\} = 55,14 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

es decir,

$$w = 198.504 \text{ kg/h}$$

Problema 8.4

El comportamiento reológico de una mermelada de albaricoque puede describirse mediante la ecuación de Herschel-Bulkley, presentando un umbral de fluencia de 19 Pa, siendo su índice de consistencia 4,43 Pa·sⁿ y su índice de comportamiento al flujo 0,65. Determinar el menor diámetro de tubería de acero que debe emplearse para transportar dicha mermelada con un flujo de 8.000 kg/h. La longitud total de la tubería es de 200 metros, si las pérdidas de energía mecánica son de 75 J/kg. La densidad de la mermelada es 1.165 kg/m³.

El caudal volumétrico con el que circula el fluido es:

$$q = \frac{\left(8.000 \frac{\text{kg}}{\text{h}} \right) \left(\frac{\text{h}}{3.600 \text{ s}} \right)}{1.165 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 1,907 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

La sustitución del caudal volumétrico en la ecuación 8.92, genera la siguiente expresión:

$$d^5 = 4f \frac{8 \left(1,907 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right)^2 (200 \text{ m})}{\pi^2 \left(75 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right)} = (7,86 \cdot 10^{-6}) (4f) \text{ m}^5$$

Usando las ecuaciones 8.93a y 8.12b, se obtienen el Re_G y He_G en función del diámetro interno, que debe expresarse en metros:

$$Re_G = 0,148 d^{-2,05} \quad \text{y} \quad He_G = 5.410,8 d^2$$

Utilizando la figura 8.18 ya que no se dispone de otras gráficas y siguiendo el proceso iterativo descrito en el apartado 8.5.2:

1. Se supone el valor de f , a partir del cual se evalúa el diámetro
2. A partir del diámetro pueden ser calculados Re_G y He_G .
3. De la figura 8.18 se obtiene f , si los valores supuesto y calculado coinciden el proceso termina, de lo contrario el proceso iterativo se repite.

En la siguiente tabla se resumen los resultados obtenidos en este problema:

iteración	f	d (m)	Re_G	He_G	f
1	0,0063	0,0456	83,2	11,2	0,3069
2	0,3069	0,0993	16,1	53,4	0,3392
3	0,3392	0,1013	15,5	55,5	0,3401
4	0,3401	0,1014	15,5	55,6	0,3401

Las tuberías que se fabrican comercialmente, y cuyos diámetros se aproximan al valor previamente calculado son:

Diámetro de 3 1/2" y número de catálogo 80 corresponde a un diámetro interno de 0,08545 m. Para el diámetro de 4" y número de catálogo 40 corresponde un diámetro de 0,10226 m. Finalmente si el diámetro es de 4" y número de catálogo 80, le corresponde un diámetro de 0,09718 m.

Por lo tanto, la tubería de acero inoxidable que debe emplearse para este sistema de transporte es de 4", número de catálogo 40.

Problema 8.5

Una salsa de tomate circula a 30 °C, con un caudal másico de 7.200 kg/h por una tubería de 8 cm de diámetro interno, desde un depósito hasta un tanque de almacenamiento donde descarga a una presión de 150 kPa. La salsa de tomate se comporta como plástico de Bingham con un umbral de fluencia de 14 Pa y una vis-

cosidad plástica de 80 mPa·s. Determinar cuál debe ser la presión de impulsión de la bomba, colocada a la salida del primer depósito, si desde este punto al tanque de almacenamiento la salsa debe superar una altura de 3 metros y una longitud total de 20 m. Densidad de la salsa 1.275 kg/m³.

El esquema de la instalación es semejante al mostrado en la figura 8.23.

La velocidad de circulación calculada a partir de la ecuación 8.42, es $v_m = 0,312$ m/s; mientras que el número de Reynolds y Hedstrom correspondientes [ecs. 8.6 y 8.12a] son de 398 y 17.850, respectivamente.

Aplicando la ecuación de Bernoulli [ec. 8.61 ó 8.101b] entre los puntos de impulsión de la bomba y el final de la tubería, se obtiene que:

- i) al no existir una bomba entre estos dos puntos de referencia, $\hat{W} = 0$;
- ii) como la velocidad entre el punto de impulsión y de descarga es la misma ($v_i = v_2$);
- iii) la expresión simplificada de la ecuación de Bernoulli es la siguiente:

$$g(z_2 - z_i) + \frac{P_2 - P_i}{\rho} + \hat{E}_f = 0$$

En esta ecuación las energías potencial y de presión se conocen y sólo es necesario evaluar las pérdidas de energía por fricción, a partir de la ecuación de Fanning [ec. 8.65], previo obtención del valor de f (figura 8.16): $Re_B = 400$ y $He = 1,78 \cdot 10^4$, $f \cong 0,33$. Para mayor precisión, utilizando la ecuación 8.69:

$$f = 0,313$$

Por lo tanto, las pérdidas de energía mecánica son:

$$\hat{E}_f = 4(0,313) \left(\frac{20 \text{ m}}{0,08 \text{ m}} \right) \left[\frac{\left(0,312 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{2} \right] = 15,23 \text{ J/kg}$$

Sustituyendo en (iii), se tiene:

$$\left(9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (3 \text{ m}) + \frac{150 \text{ kPa} - P_i}{1.275 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} + 15,23 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 0$$

de donde se despeja P_i , resultando que la presión de impulsión es:

$$P_i = 206,9 \text{ kPa}$$

Como se trata de un plástico de Bingham, el esfuerzo cortante en la pared debe ser superior al umbral de fluencia, esto implica que el parámetro m debe ser menor a la unidad. Si se utiliza la ecuación 8.66a para calcular el valor de σ_w :

$$\sigma_w \frac{\left(15,23 \frac{\text{J}}{\text{kg}}\right) \left(1,275 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) (0,08 \text{ m})}{4 (20 \text{ m})} = 19,42 \text{ Pa}$$

$$y \quad m = \frac{\sigma_0}{\sigma_w} = \frac{14 \text{ Pa}}{19,42 \text{ Pa}} = 0,721$$

por lo que no existirán problemas con el flujo de este material.

Problema 8.6

Se transporta salsa de tomate ketchup entre dos depósitos abiertos a la atmósfera, con un flujo de 10.000 kg/h, a través de una tubería de acero inoxidable de 1 1/2" catálogo 40. Desde el punto de impulsión de la bomba hasta el de llegada al segundo depósito, la longitud de tubería recta es de 12 metros, y lleva instaladas una válvula de asiento y tres codos angulares. El punto final en donde se descarga la salsa se encuentra 8 metros por encima del nivel de la bomba. Además, la distancia desde el primer depósito al punto de aspiración de la bomba es de 0,5 m de tubería recta, manteniéndose el nivel del depósito a 2 m por encima de la misma. En las condiciones de transporte la salsa ketchup posee una densidad de 1.250 kg/m³ y su comportamiento reológico puede describirse mediante la ecuación de Herschel-Bulkley, siendo el valor del umbral de fluencia 32 Pa, su coeficiente de consistencia 18,7 Pa·sⁿ y su índice de comportamiento al flujo 0,28. Determinar la potencia de la bomba.

Las tuberías de diámetro nominal 1 1/2" tipo 40 poseen un diámetro interno de $d = 0,04089 \text{ m}$.

Las longitudes equivalentes de los accesorios se pueden determinar a partir del ábaco de la figura 8.19. Así, los valores obtenidos son:

- codo angular: $L_e = 6,5 \text{ m}$;
- válvula de asiento: $L_e = 30,7 \text{ m}$.

Los caudales máscicos y volumétricos son:

- $w = 10.000 \text{ kg/h} = 2,78 \text{ kg/s}$;
- $q = 133,33 \text{ l/min} = 35,23 \text{ gal USA/min}$.

La velocidad media de circulación es: $v = 1,69 \text{ m/s}$.

El módulo de Reynolds generalizado se obtiene de la ecuación 8.7, siendo su valor $Re_G = 262$. Este valor indica que la salsa circula en régimen laminar.

El módulo de Hedstrom generalizado se obtiene de la ecuación 8.12b, siendo su valor $He_G = 3,03$.

Para calcular el factor de fricción y el parámetro m es necesario utilizar las ecuaciones 8.70, 8.71 y 8.72. La resolución de estas ecuaciones supone realizar un cálculo iterativo, obteniéndose los valores:

$$m = 0,219; \quad \psi = 0,745; \quad 4f = 0,3279$$

El parámetro cinético α es función de $m = 0,219$ y $n = 0,28$ y se calcula a partir de la figura 8.12. Su valor es $\alpha = 0,79$.

La presión en el punto de aspiración de la bomba se obtiene al aplicar la ecuación de Bernoulli [ec. 8.61] entre los puntos 1 y α

$$\hat{E}_{\beta 1} = 0,3279 \frac{0,5}{0,04089} \frac{(1,69)^2}{2} = 5,73 \text{ J/kg}$$

$$(9,8) (-2) + \frac{(P_a - 101,33) \cdot 10^3}{1.250} + \frac{(1,69)^2}{2(0,79)} + 5,73 = 0$$

De la que se obtiene la presión de aspiración: $P_a = 116,41$ kPa.

Sin embargo, si se considerase el caso más desfavorable en el que el depósito inicial estuviese casi vacío ($\Delta z = 0$), se obtendría que la presión en el punto de aspiración de la bomba sería: $P_a = 91,91$ kPa.

La presión de vapor del agua a 25°C es: $P_v = 3,165$ kPa.

La carga neta positiva de aspiración absoluta se calculará para el caso más desfavorable (con el depósito casi vacío): $(\text{CNPA})_A = P_a - P_v = 88,75$ kPa.

La presión en el punto de **impulsión** de la bomba se obtiene al aplicar la ecuación de Bernoulli entre este punto y el final de descarga (puntos i y 2):

$$\hat{E}_{\beta 2} = 0,3279 \frac{(12 + 30,7 + 3 \cdot 6,5)}{0,04089} \cdot \frac{(1,69)^2}{2} = 712,29 \text{ J/kg}$$

$$(9,8) (8 - 0) + \frac{(101,33 - P_i) \cdot 10^3}{1.250} + \frac{(1,69)^2}{2(0,79)} + 712,29 = 0$$

De la que se obtiene la presión de impulsión:

$$P_i = 1.089,7 \text{ kPa} = 10,9 \text{ bar} = 158 \text{ psi}$$

El trabajo de bomba se obtiene al aplicar la ecuación de Bernoulli entre los puntos de impulsión y de aspiración:

$$\hat{W} = \frac{(1.089,7 - 91,91) \text{ kPa}}{1.250 \text{ kg/m}^3} = 0,798 \text{ kJ/kg}$$

Con lo que la potencia teórica de la bomba será:

$$P_{bt} = \hat{W}_w = (0,798 \text{ kJ/kg}) \cdot (2,78 \text{ kg/s}) = 2,22 \text{ kW}$$

El gradiente de velocidad en la tubería varía desde cero en el centro de la tubería hasta el valor máximo en la pared, el cual puede calcularse a partir de la expresión:

$$\dot{\gamma}_w = \left(\frac{\sigma_w - \sigma_0}{k} \right)^{1/n} = 639 \text{ s}^{-1}$$

La presión de descarga de la bomba, en el punto de impulsión, debe ser tal que venza el umbral de fluencia y eleve el fluido los 8 metros que separan el punto de impulsión y el final de descarga (puntos *i* y 2). Así:

$$\Delta P > \frac{\sigma_0 4L}{d} + \rho g (z_2 - z_1)$$

$$\Delta P > \frac{(32) (4) (12 + 30,7 + 19,5)}{0,04089} + (1.250) (9,8) (8 - 0)$$

$$\Delta P > 2,93 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Luego la presión de descarga de la bomba para iniciar el flujo debe ser superior a 293 kPa (2,93 bar).

Circulación de fluidos a través de lechos porosos. Fluidización **9**

9.1. Introducción

El flujo de fluidos a través de lechos de partículas sólidas aparece en numerosos procesos técnicos. Así, en operaciones de filtración y flujo a través de columnas de relleno, utilizadas en operaciones de destilación, absorción, adsorción e intercambio iónico, se presentan ejemplos de este tipo de circulación. En el caso de la filtración, las partículas sólidas se depositan en un medio filtrante, y el fluido pasa a través de la masa filtrante depositada. En otros procesos, como la adsorción, intercambio iónico y otros, el fluido se mueve a través de un lecho de partículas sólidas, que no suelen cambiar sus características. En este capítulo, se presenta el estudio del flujo de una sola fase fluida a través de una columna de partículas sólidas estacionarias. Un lecho de partículas se considera estacionario cuando todas sus características no varían.

9.2. Ley de Darcy. Permeabilidad

Después de una serie de experimentos Darcy demostró que la velocidad media, en una sección del lecho, era directamente proporcional a la caída de presión que experimenta el fluido al atravesar dicho lecho, e inversamente proporcional al espesor del mismo:

$$v = K \frac{(-\Delta P)}{L} \quad [9.1]$$

en la que: $(-\Delta P)$ = Caída de presión a través del lecho.

L = Espesor o altura del lecho.

K = Constante de proporcionalidad.

La constante K depende de las propiedades físicas del lecho y del fluido que circula a través del lecho.

Esta ecuación indica que la relación entre la velocidad de circulación del fluido y la caída de presión que experimenta es lineal, lo que hace suponer que el régimen de circulación es laminar. Esto es así, ya que la velocidad a través de los intersti-

cios del lecho granular es baja, y además, la sección de cada uno de ellos es pequeña; por lo que el valor del módulo de Reynolds no es elevado.

Todo ello, presupone que la resistencia que ofrece el lecho al flujo del fluido es debida principalmente a rozamientos viscosos. Por lo que la ecuación anterior se suele expresar de la forma:

$$v = \frac{1}{\alpha} \frac{(-\Delta P)}{\eta L} \quad [9.2]$$

en la que η es la viscosidad del fluido, mientras que la constante $1/\alpha$ recibe el nombre de **coeficiente de permeabilidad**.

La unidad de la permeabilidad es el *Darcy*, que se define como la permeabilidad de un medio poroso al flujo viscoso para el paso de $1 \text{ ml}/(\text{s}\cdot\text{cm}^2)$ de un líquido con una viscosidad de 1 centiPoise, bajo una caída de presión de $1 \text{ atm}/\text{cm}$.

9.3. Definiciones previas

Los lechos porosos están constituidos por un conjunto de partículas sólidas, dispuestas generalmente al azar. Para la caracterización de la estructura de dichos lechos se deben definir una serie de variables, utilizadas en el estudio de la circulación de los fluidos a través de estos lechos.

Superficie específica. También denominada área superficial específica, puede ser referida a todo el lecho o a la partícula. Para el lecho (a_s) se define como el área de la superficie de lecho presentada al fluido por unidad de volumen del lecho.

$$a_s = \frac{\text{Área presentada al fluido}}{\text{Volumen del lecho}} \quad \text{expresada en m}^{-1}$$

De modo análogo se puede definir el área superficial específica de las partículas (a_{s0}) como la relación entre el área de su superficie y su volumen.

$$a_{s0} = \frac{\text{Área de partícula}}{\text{Volumen de partícula}} \quad \text{expresada en m}^{-1}$$

En el caso de una partícula esférica de diámetro d_r , la superficie específica de partícula es $a_{s0} = 6/d_r$.

Cuando las partículas no son esféricas, se define un diámetro equivalente de partícula (d_p), como aquel diámetro que poseería una esfera cuya relación área superficial a su volumen fuese la misma que la que posee la partícula. Este diámetro equivalente está relacionado con d_r mediante un factor Γ , de tal forma que:

$$d_p = \Gamma d_r$$

en la que Γ es el denominado **factor de forma** o **esfericidad**, cuyo valor depende de la forma de la partícula. Para el caso de partículas esféricas este factor de

forma es la unidad; sin embargo, para partículas diferentes este valor es menor que la unidad. En la tabla 9.1 se dan valores de la esfericidad para diferentes tipos de partículas.

Además, el diámetro equivalente de la partícula se relaciona con su superficie específica según la expresión:

$$d_p = \frac{6 \Gamma}{a_{s0}}$$

Porosidad. El lecho de partículas no es compacto, sino que existen zonas libres de partículas, definiéndose la porosidad del lecho o fracción de huecos (ϵ) como el volumen del lecho no ocupado por el material sólido.

Debido a la porosidad del lecho, la superficie específica del lecho y de partícula no coinciden, sino que están relacionadas según la ecuación:

$$a_s = a_{s0} (1 - \epsilon) \quad [9.3]$$

En la bibliografía pueden encontrarse valores de a_{s0} y ϵ para distintos tipos de lechos de partículas. Es fácil observar que cuando la porosidad aumenta, el flujo a través del lecho es mucho mejor, con lo que la permeabilidad aumenta.

Para poder continuar estudiando las características del lecho, se va suponer que está compuesto por partículas dispuestas al azar, de forma que en el interior del lecho se forman unos canales por los que circulará el fluido. Se supone que la longitud de estos canales (L') es la misma para todos ellos, poseyendo el mismo diáme-

Tabla 9.1. Esfericidad de partículas

Forma de la partícula	Esfericidad
Esfera	1
Cubo	0,81
Cilindros	
$h = d$	0,87
$h = 5 d$	0,70
$h = 10 d$	0,58
Discos	
$h = d/3$	0,76
$h = d/6$	0,60
$h = d/10$	0,47
Arena de playa	Tan alta como 0,86
Arena de río	Tan baja como 0,53
Distintos tipos de arena	0,75
Sólidos triturados	0,5-0,7
Partículas granulares	0,7-0,8
Trigo	0,85
Anillos Raschig	0,26-0,53
Sillas Berl	0,30-0,37

Fuente: Levenspiel (1993).

tro equivalente (D_e). Todas las partículas están contenidas en una columna cilíndrica de diámetro D y cuya altura de lecho es L .

A continuación se presentan una serie de variables, que se utilizarán para relacionar las diferentes características del lecho.

- Número de canales por m^2 de sección transversal de lecho: n'
- Número total de canales del lecho: $n = n' \frac{\pi}{4} D^2$
- Área interfacial de 1 canal: $\pi \cdot D_e \cdot L'$
- Área interfacial del lecho: $\left(n' \frac{\pi}{4} D^2\right) (\pi D_e L')$
- Volumen del lecho: $V_L = \frac{\pi}{4} D^2 L$
- Volumen de lecho ocupado por las partículas: $V_L (1 - \varepsilon)$

A partir de estas definiciones, es posible encontrar los valores de las superficies específicas:

$$\alpha_{s0} = \frac{\left(n' \frac{\pi}{4} D^2\right) (\pi D_e L')}{\frac{\pi}{4} D^2 L (1 - \varepsilon)} = \frac{n' L' \pi D_e}{L (1 - \varepsilon)} \quad [9.4]$$

$$\alpha_s = \frac{\left(n' \frac{\pi}{4} D^2\right) (\pi D_e L')}{\frac{\pi}{4} D^2 L} = \frac{n' L' \pi D_e}{L} \quad [9.5]$$

por lo que es fácil correlacionar la superficie específica del lecho y de la partícula:

$$a_s = a_{s0} \cdot (1 - \varepsilon)$$

Es posible definir el diámetro equivalente de un canal como cuatro veces el radio hidráulico, siendo éste la relación entre el área de la sección de paso del canal y su perímetro mojado.

$$D_e = 4 R_H = 4 \frac{\text{Área de paso}}{\text{Perímetro mojado}}$$

$$D_e = 4 \frac{(\text{Área de paso}) L' n}{(\text{Perímetro mojado}) L' n} = \frac{4 (\text{Volumen de un canal}) n}{(\text{Área interfacial de un canal}) n}$$

$$D_e = 4 \frac{\text{Volumen de huecos}}{\text{Área interfacial total}} = \frac{4 \frac{\pi}{4} D^2 L \varepsilon}{\frac{\pi}{4} D^2 L a_S}$$

De esta forma, el diámetro equivalente de un canal será función de la fracción de huecos y de las superficies específicas, expresándose como:

$$D_e = \frac{4 \varepsilon}{a_S} = \frac{4 \varepsilon}{a_{S0} (1 - \varepsilon)} \quad [9.6]$$

Para futuras aplicaciones, es imprescindible correlacionar la velocidad de circulación del fluido a través de un canal (v_C) con la correspondiente al flujo a través de la columna libre de partículas (v). Para ello, se aplicará la ecuación de continuidad:

$$\rho \cdot S \cdot v = \rho \cdot S_C \cdot v_C$$

en la que ρ es la densidad del fluido, S y S_C son las secciones de paso de la columna libre de partículas y para el conjunto total de canales, respectivamente.

- Sección de paso de la columna: $S = \frac{\pi}{4} D^2$
- Sección de paso de los canales: Será la suma de las secciones de paso de todos los canales, que como se han supuesto idénticos, se obtendrá multiplicando el número de canales por la sección de paso de un canal.

$$S_C = n \frac{\pi}{4} D_e^2 = n' \frac{\pi}{4} D^2 \frac{\pi}{4} D_e^2$$

Al introducir estas expresiones, de S y S_C , en la ecuación de continuidad, es posible despejar la velocidad de circulación a través de un canal en función de la global, obteniendo la expresión:

$$v_C = \frac{4 v}{n \pi D_e}$$

Pero si se tienen en cuenta las ecuaciones 9.4 y 9.6, es posible despejar de la 9.4 el número de canales y de la 9.6 el diámetro equivalente del canal, que al sustituirlas en esta última expresión se obtiene:

$$v_C = v \frac{L'}{L \varepsilon} \quad [9.7]$$

expresión en que la velocidad de un canal es función de la global, y de las longitudes del lecho y del canal, así como de la porosidad.

9.4. Ecuaciones para el flujo a través de lechos porosos

En el estudio de la circulación de fluidos a través de lechos porosos es de suma importancia el cálculo de la caída de presión que el fluido experimenta al atravesar dicho lecho de partículas. Esta pérdida de presión dependerá del régimen con el que circula el fluido, obteniéndose diferentes ecuaciones según sea el régimen laminar o turbulento.

9.4.1. Régimen laminar. Ecuación de Kozeny-Carman

Si el flujo del fluido a través de los canales es laminar se podrá aplicar la ecuación de Fanning para cada uno de ellos:

$$\frac{(-\Delta P)}{\rho} = \frac{64}{\text{Re}} \frac{L' v_C^2}{2 D_e}$$

pero si se tiene presente que el módulo de Reynolds es:

$$(\text{Re}) = \frac{\rho v_C D_e}{\eta}$$

y que la velocidad de circulación del fluido a través de un canal v_C viene dada por la ecuación 9.7, se obtiene:

$$(-\Delta P) = 2 v \eta \frac{(a_{s0})^2 (1 - \epsilon)^2}{\epsilon^3} \frac{(L')^2}{L}$$

se observa que la pérdida de presión depende, entre otros, de las longitudes de cada canal y del lecho. La longitud de cada canal L' es superior a la del lecho. Si se supone que dichas longitudes son proporcionales $L' = K'L$, y definiendo una constante $K'' = 2 (K')^2$, resulta:

$$(-\Delta P) = 2 v \eta \frac{(a_{s0})^2 (1 - \epsilon)^2}{\epsilon^3} \frac{(K'L)^2}{L}$$

de la que se obtiene:

$$v = \frac{(-\Delta P)}{\eta L} \frac{\epsilon^3}{K'' (1 - \epsilon)^2 (a_{s0})^2} \quad [9.8]$$

que se denomina ecuación de Kozeny-Carman.

Al comparar esta ecuación con la de Darcy (ecuación 9.2), se obtiene que la permeabilidad será:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{K''} \frac{\epsilon^3}{(1 - \epsilon)^2 (a_{s0})^2}$$

La constante K'' se denomina constante de Kozeny. En lechos en los que la porosidad y superficie específica no varían con el espesor del lecho, se ha encontrado experimentalmente que esta constante posee un valor de $5 \pm 0,5$. En realidad su valor depende del tipo de relleno y de la porosidad, tomando distintos valores según sea la forma de las partículas y porosidad del lecho. En el caso que las partículas sean de forma esférica, el valor de esta constante es de $4,8 \pm 0,3$. En la bibliografía se pueden encontrar valores de esta constante para diferentes tipos de relleno.

El valor de la constante de Kozeny no es el mismo para todos los tipos de relleno, sino que depende de la relación L'/L . Carman ha demostrado que:

$$K'' = K_0 (L'/L)$$

La relación L'/L recibe el nombre de **tortuosidad**, mientras que K_0 es un factor que depende de la sección transversal del canal. A pesar de que la tortuosidad y el factor K_0 pueden variar, esta variación es tal que cuando una aumenta la otra disminuye, y viceversa, de forma que su producto posee valores próximos a 5.

En la práctica se observa que en los lechos de partículas, las que se hallan en contacto con la pared están menos compactadas, lo que implica que la resistencia que ofrece el lecho al flujo es menor que el dado por la ecuación de Kozeny Carman. De forma experimental Coulson ha obtenido un factor de corrección K_p , de modo que se tenga presente este efecto. Dicho valor viene dado por la ecuación:

$$K_p = \left(1 + 0,5 \frac{A_p}{a_{s0}} \right)^2 \quad [9.9]$$

en la que A_p es la superficie de la pared de la columna que contiene el lecho por unidad de volumen de dicho lecho

Para el cálculo de la caída real de presión, deberá multiplicarse la calculada a partir de la ecuación de Kozeny-Carman por el valor de este factor K_p :

$$(-\Delta P)_{REAL} = K_p (-\Delta P)$$

9.4.2. Régimen turbulento. Ecuación de Burke-Plummer

En el apartado anterior se ha supuesto que el fluido circula por los canales de forma laminar, pero la ecuación obtenida no es válida en muchos casos. Por ello, si el régimen de circulación es turbulento puede pensarse en aplicar la ecuación de Fanning a la circulación del fluido por un canal; así:

$$\frac{(-\Delta P)}{\rho} = 4f \frac{L' (v_c)^2}{2 D_e}$$

teniendo en cuenta las expresiones del diámetro equivalente y de la velocidad por un canal [ecuaciones 9.6 y 9.7]:

$$\frac{(-\Delta P)}{\rho} = 4f \frac{1}{2} \frac{(vL')^2}{(\epsilon L)^2} \frac{L' a_{s0} (1 - \epsilon)}{4 \epsilon}$$

Al igual que antes, si se supone que $L' = K'L$, y que la superficie específica está relacionada con el diámetro de la misma por la expresión $a_{50} = 6/d_p$, se obtiene:

$$\frac{(-\Delta P)}{\rho} = 3 (K')^3 f \frac{\rho v^2 (1 - \varepsilon)}{d_p \varepsilon^3}$$

si se define un factor de fricción modificado $f' = f(K')^3$ se obtiene la ecuación:

$$\frac{(-\Delta P)}{\rho} = 3 f' \frac{\rho v^2 (1 - \varepsilon)}{d_p \varepsilon^3} \quad [9.10]$$

Esta ecuación se denomina de Burke-Plummer, en la que el valor de f' se obtiene a partir de experimentación, dependiendo del número de Reynolds. En el apartado siguiente se verá el modo de obtener el valor del factor de fricción modificado.

9.4.3. Flujo global laminar-turbulento. Ecuaciones de Ergun y Chilton-Colburn

Hasta ahora se han obtenido ecuaciones para la circulación en régimen laminar y turbulento, por separado. Por tanto, sería conveniente obtener una sola ecuación que se pudiera utilizar para los dos tipos de regímenes de circulación a la vez. Observando las ecuaciones de Kozeny-Carman y de Burke-Plummer, puede pensarse que la pérdida de presión por unidad de longitud del lecho será una expresión del tipo:

$$\frac{(-\Delta P)}{L} = a v + b v^2$$

o bien una combinación lineal de dichas ecuaciones:

$$\frac{(-\Delta P)}{L} = \alpha' \frac{36 K'' (1 - \varepsilon)^3}{\varepsilon^3 d_p^2} v + \beta' \frac{3 f' (1 - \varepsilon) \rho}{\varepsilon^3 d_p} v^2 \quad [9.11]$$

Para la obtención de las distintas constantes (α' y β') que aparecen en esta ecuación se recurre a datos obtenidos por experimentación, ajustándolos a ella.

En la circulación de fluidos por el exterior de sólidos, no sólo se utiliza el módulo de Reynolds para un canal, sino que en algunos casos se suele modificar, o bien se utiliza el módulo de Reynolds de partícula. A continuación se dan las expresiones para cada uno de ellos:

- Reynolds para 1 canal: $Re = \frac{\rho v_c D_e}{\eta} = \frac{4\rho vL'}{a_{50}(1-\varepsilon)\eta L}$

- Reynolds modificado: $Re' = \frac{\rho v}{a_{50}(1-\varepsilon)\eta}$

• Reynolds de partícula:
$$\text{Re}_p = \frac{\rho v d_p}{\eta}$$

Cuando el valor del módulo de Reynolds de partícula es menor de 40 ($\text{Re}_p < 40$) el régimen de circulación se considera laminar, mientras que para valores superiores ($\text{Re}_p > 40$) el régimen se considera turbulento.

De la ecuación 9.10, es fácil obtener la expresión para el factor de fricción modificado:

$$3f' = \frac{(-\Delta P)d_p \varepsilon^3}{L(1-\varepsilon)\rho v^2} \quad [9.12]$$

Este factor de fricción suele obtenerse a partir de gráficas, en las que $3f'$ se representa frente a $\text{Re}_p/(1-\varepsilon)$, en coordenadas doble logarítmicas (figura 9.1).

También puede obtenerse en otro tipo de gráfica, en la que $f'/2$ se representa frente al módulo de Reynolds modificado (Re'), también en coordenadas doble logarítmicas (figura 9.2).

A partir de una serie de datos experimentales, de valores del factor de fricción modificado $3f'$, calculados a partir de la ecuación 9.10, se obtienen los valores correspondientes de sus Reynolds de partícula. Se busca una función que correlacione $3f'$ con Re_p :

$$3f' = \phi(\text{Re}_p)$$

Del ajuste de los datos experimentales la ecuación obtenida es la siguiente:

$$3f' = \frac{150(1-\varepsilon)}{\text{Re}_p} + 1,75$$

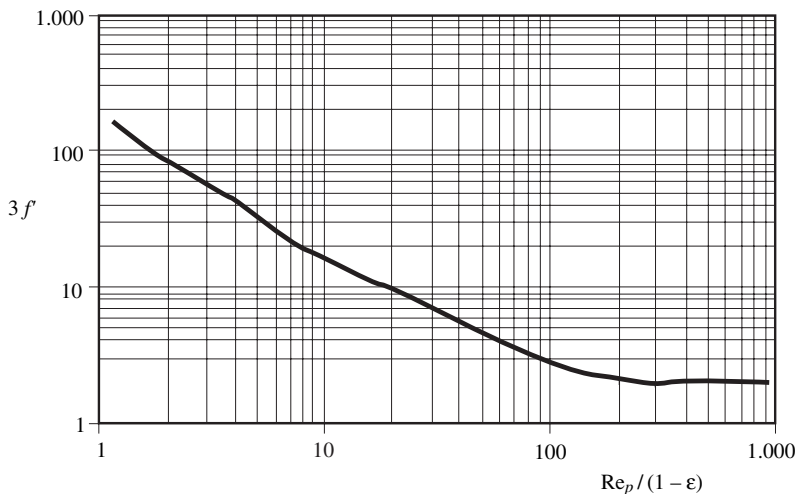


Figura 9.1. Factor de fricción modificado ($3f'$) en función del módulo de Reynolds de partícula (Re_p) (Adaptado de Foust et al., 1980).

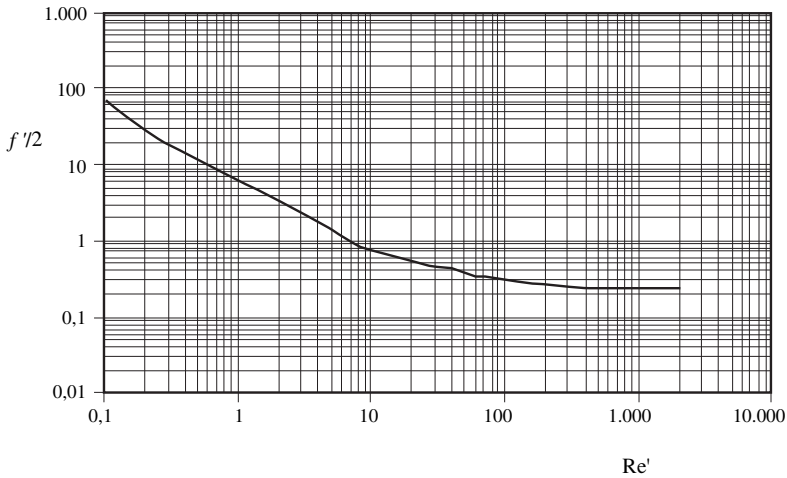


Figura 9.2. Factor de fricción modificado (f') en función del módulo de Reynolds modificado (Re') (Adaptado de Coulson y Richardson, 1981).

Si en esta ecuación se sustituyen los valores de $3f'$, dados por la ecuación 9.12, y el correspondiente al módulo de Reynolds de partícula, se obtiene la expresión:

$$\frac{(-\Delta P)}{L} = 150 \frac{(1 - \epsilon)^2 \eta}{\epsilon^3 d_p^2} v + 1,75 \frac{(1 - \epsilon) \rho}{\epsilon^3 d_p} v^2 \quad [9.13]$$

Esta última expresión se denomina ecuación de Ergun, y puede utilizarse para el cálculo de la pérdida de presión que experimenta el fluido al atravesar un lecho relleno, independientemente de cual sea el tipo de régimen de circulación.

Al comparar las ecuaciones 9.11 y 9.13, fácilmente se observa que:

$$36 K'' \alpha' = 150$$

$$3f' \beta' = 1,75$$

Cuando en una columna rellena de partículas circulan en contracorriente un gas con un líquido, es conveniente utilizar la denominada ecuación de Chilton-Colburn, que es una ecuación empírica basada en la de Fanning:

$$\frac{(-\Delta P)}{L} = 2f' \frac{\rho v^2}{d_p} \quad [9.14]$$

El factor de fricción modificado f' puede calcularse a partir de las figuras 9.1 ó 9.2, o bien pueden utilizarse las siguientes expresiones:

- Para régimen laminar ($Re_p < 40$): $f' = 850/Re_p$
- Para régimen turbulento ($Re_p > 40$): $f' = \frac{38}{(Re_p)^{0,15}}$

La ecuación de Chilton-Colburn se puede utilizar cuando el lecho está formado por partículas macizas, pero cuando las partículas son huecas, debe multiplicarse el segundo miembro de la ecuación por un factor K_r , que viene dado por la ecuación:

$$K_r = \frac{0,24}{(d_p)^{1/2}}$$

en la que d_p es el diámetro nominal de las partículas expresado en pulgadas.

Los huecos creados en las inmediaciones de la pared también pueden afectar al cálculo de la caída de presión, siendo necesario introducir un nuevo factor de corrección de pared K_p , que depende del régimen de circulación y de la relación diámetro partícula a diámetro del lecho (d_p/D). En el caso que esta relación sea menor de 1/6 no se considera el efecto de pared. Para el cálculo de este nuevo factor K_p se utiliza la figura 9.3, en la que K_p se halla representado frente a la relación d_p/D ; existiendo dos curvas, una para régimen laminar y otra para turbulento.

Por tanto, en general, la caída real que experimentará el fluido se obtendrá multiplicando la caída de presión calculada a partir de la ecuación de Chilton-Colburn por estos dos factores; es decir:

$$(-\Delta P)_{Real} = K_r K_p (-\Delta P)_{Teórico}$$

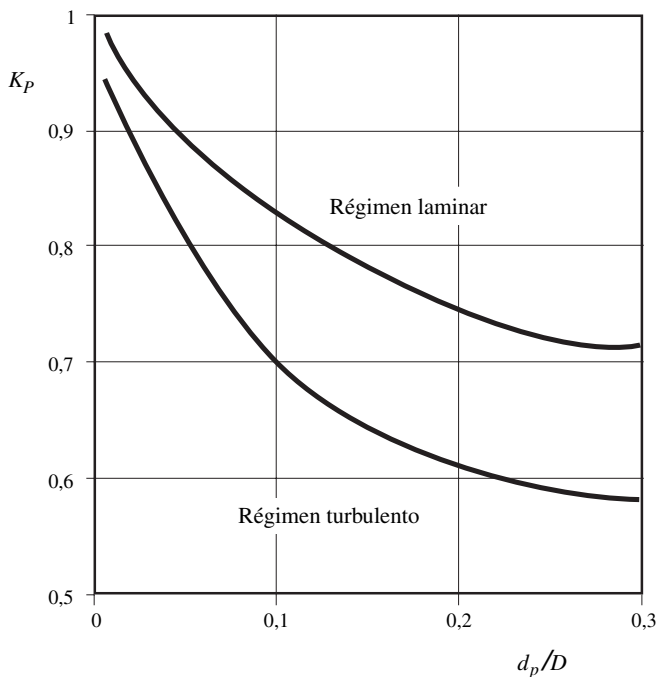


Figura 9.3. Factor de corrección del efecto de pared (K_p) en función de la relación diámetro partícula/diámetro de columna (d_p/D) (adaptado de Sawistowski y Smith, 1967).

9.5. Fluidización

Cuando un fluido circula a través de un lecho de partículas, si su velocidad de circulación es baja, el lecho permanece estático. Pero si su velocidad aumenta, puede ocurrir que el lecho se expanda, existiendo una reordenación de las partículas, con el consiguiente aumento de la porosidad del lecho.

Si se supone un lecho de partículas, a través de las cuales circula un fluido al que se le va aumentando paulatinamente la velocidad de circulación. A velocidades bajas el lecho permanece estático, sin aumento de su altura, por lo que al representar en coordenadas doble logarítmicas la caída de presión frente a la velocidad de circulación se obtiene una recta, tal como la representada en la figura 9.4 por el segmento OA.

Si se aumenta más la velocidad, las partículas empiezan a separarse, pero todavía permanecen en contacto, aunque la relación entre la caída de presión y la velocidad continúa siendo lineal, pero la pendiente es menor (segmento AB). En el punto B, en el que las partículas no se hallan en contacto se dice que el lecho es fluidizado. A partir de este punto, si se aumenta la velocidad puede haber una pequeña caída de presión (segmento BC), pero si se sigue aumentando la velocidad, la caída de presión aumenta linealmente con la velocidad, pero con una pendiente menor, hasta que la velocidad es lo suficientemente elevada como para arrastrar las partículas, cosa que ocurre a partir del punto D.

La velocidad para la cual ocurre la fluidización se conoce como mínima de fluidización; mientras que la correspondiente al punto de arrastre es la velocidad de arrastre.

En el tramo en que el lecho está fluidizado, la velocidad del fluido en contacto con las partículas es superior a cuando las ha superado, ello hace que las partículas

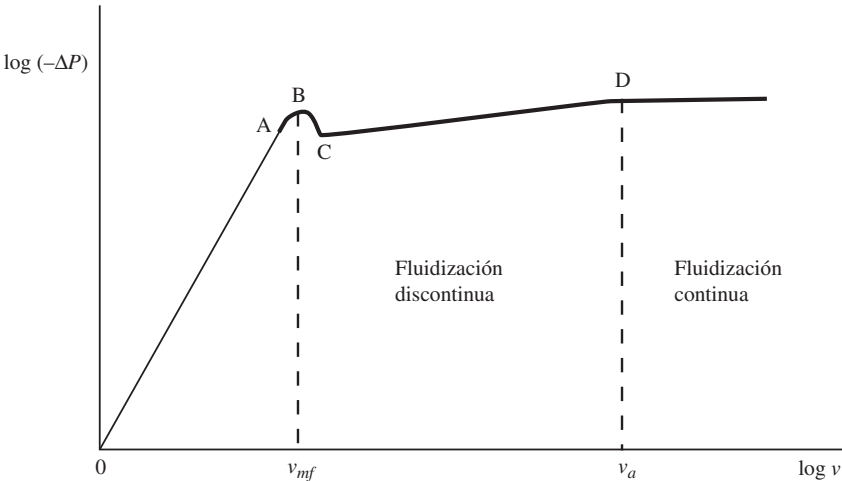


Figura 9.4. Caída de presión en lechos fluidizados.

no queden arrastradas, sino que vuelven a caer el lecho. El conjunto de partículas posee un movimiento desordenado, presentando un aspecto como si las partículas estuvieran en ebullición, denominándose lechos hirvientes o fluidización discontinua a este tipo de proceso. Cuando las partículas son arrastradas, el tipo de fluidización se denomina continua, y es un tipo de circulación de dos fases, que es la base del transporte neumático.

9.5.1. Velocidad mínima de fluidización

La velocidad a la que empieza la fluidización del lecho se conoce como velocidad mínima de fluidización. En este punto existe un equilibrio dinámico entre la fuerza que el campo gravitatorio y el fluido ejercen sobre las partículas.

La fuerza gravitatoria ejercida sobre las partículas viene dada por la expresión:

$$F_G = (\rho_p - \rho) S L (1 - \varepsilon) g \quad [9.15]$$

en la que ρ_p y ρ son las densidades de las partículas y del fluido, respectivamente; S la sección de paso de la columna que contiene las partículas; L la altura del lecho; ε su porosidad, y g la constante de gravedad.

La fuerza que el fluido ejerce sobre el lecho de partículas es la de presión, y que se calcula por la expresión:

$$F_P = (-\Delta P) S \quad [9.16]$$

en la que $(-\Delta P)$ es la caída de presión que experimenta el fluido al atravesar el lecho, y cuya expresión depende del régimen de circulación del fluido.

Por tanto, para el cálculo de la velocidad mínima de fluidización deben igualarse las dos fuerzas, la de gravedad y la de presión $F_G = F_P$, o lo que es lo mismo:

$$(\rho_p - \rho) S L (1 - \varepsilon) g = (-\Delta P) S \quad [9.17]$$

La expresión de la caída de presión viene dada por la ecuación de Ergun:

$$\frac{(-\Delta P)}{L} = 150 \frac{(1 - \varepsilon)^2 \eta}{\varepsilon^3 d_p^2} v + 1,75 \frac{(1 - \varepsilon) \rho}{\varepsilon^3 d_p} v^2$$

A pesar de que ésta es la ecuación general para el cálculo de la caída de presión, según sea el régimen de circulación del fluido podrá simplificarse. A continuación se obtendrán las diferentes ecuaciones que permitirán el cálculo de la velocidad mínima de fluidización, dependiendo del tipo de régimen de circulación del fluido.

9.5.1.1. Régimen laminar

Cuando el régimen de circulación del fluido sea laminar, el segundo término del segundo miembro de la ecuación de Ergun es despreciable frente al primero, con lo que su expresión se simplifica:

$$\frac{(-\Delta P)}{L} = 150 \frac{(1 - \varepsilon)^2 \eta}{\varepsilon^3 d_p^2} v$$

por lo que al sustituir esta expresión en la ecuación 9.17, es posible determinar la velocidad mínima de fluidización en régimen laminar

$$v_{mf} = \frac{1}{150} \frac{(\varepsilon_{mf})^3}{(1 - \varepsilon_{mf})} \frac{\rho_p - \rho}{\eta} g d_p^2 \quad [9.18]$$

9.5.1.2. Régimen turbulento

Cuando el régimen de circulación es turbulento, en la ecuación de Ergun, es el término de velocidad el que es despreciable frente al del cuadrado de la velocidad. Por tanto, la caída de presión que experimenta el fluido se podrá expresar como:

$$\frac{(-\Delta P)}{L} = 1,75 \frac{(1 - \varepsilon) \rho}{\varepsilon^3 d_p} v^2$$

Al sustituir esta expresión en la ecuación 9.17, es posible determinar la velocidad mínima de fluidización en régimen turbulento:

$$v_{mf} = 0,756 \left[\frac{\rho_p - \rho}{\rho} g (\varepsilon_{mf})^3 d_p \right]^{1/2} \quad [9.19]$$

9.5.1.3. Régimen de transición

Puede ocurrir que el fluido circule con un régimen superior al laminar, pero no esté completamente desarrollado el turbulento. En estos casos es necesario aplicar la ecuación de Ergun para el cálculo de la caída de presión. A pesar de ello, se aconseja utilizar esta ecuación cualquiera que sea el régimen de circulación.

En estos casos, al sustituir la expresión de Ergun en la ecuación 9.17 se obtiene una ecuación de segundo grado, que es necesario resolver para hallar la velocidad mínima de fluidización:

$$(1 - \varepsilon_{mf}) (\rho_p - \rho) g = 150 \frac{(1 - \varepsilon_{mf})^2 \eta}{(\varepsilon_{mf})^3 d_p^2} v_{mf} + 1,75 \frac{(1 - \varepsilon_{mf}) \rho}{(\varepsilon_{mf})^3 d_p} (v_{mf})^2 \quad [9.20]$$

9.5.2. Porosidad mínima de fluidización

Lo mismo que ocurría con la caída de presión del fluido, que variaba con la velocidad de circulación, la porosidad del lecho también experimenta variación. Para velocidades bajas, la fuerza de presión no es suficiente para variar la estructura del lecho, y su porosidad no varía, pero a velocidades más altas, el lecho se expande aumentando el volumen de huecos.

Si se representa en coordenadas doble logarítmicas la variación de la porosidad con la velocidad lineal de circulación se obtiene una gráfica como la representada en la figura 9.5. A velocidades bajas la porosidad no varía, pero llega un momento en que aumenta con la velocidad, siendo esta variación lineal. La porosidad en el momento que empieza la fluidización no se corresponde al punto en que la porosidad empieza a aumentar, sino que ocurre a una velocidad más alta, que es la mínima de fluidización.

Para el cálculo de la porosidad mínima de fluidización pueden utilizarse unas gráficas, que existen para cierto número de materiales (McCabe y Smith, 1968). Sin embargo, cuando no se dispone de datos, es posible utilizar la expresión:

$$\varepsilon_{mf} = 1 - 0,356 (\log d_p - 1) \quad [9.21]$$

ecuación en la que el diámetro de partícula debe expresarse en micrones (10^{-6} m), y es válida para valores de d_p comprendidos entre 50 y 500 micrones.

9.5.3. Altura del lecho

Evidentemente, al aumentar la velocidad de circulación del fluido a través del lecho poroso, no sólo aumenta la caída de presión, sino que el aumento de la porosidad es debido a que la altura del lecho también aumenta. Este aumento de altura de lecho está íntimamente ligado al aumento de porosidad, de forma que las porosidades correspondientes a dos alturas cualesquiera están relacionadas por la expresión:

$$L_1 (1 - \varepsilon_1) = L_2 (1 - \varepsilon_2) \quad [9.22]$$

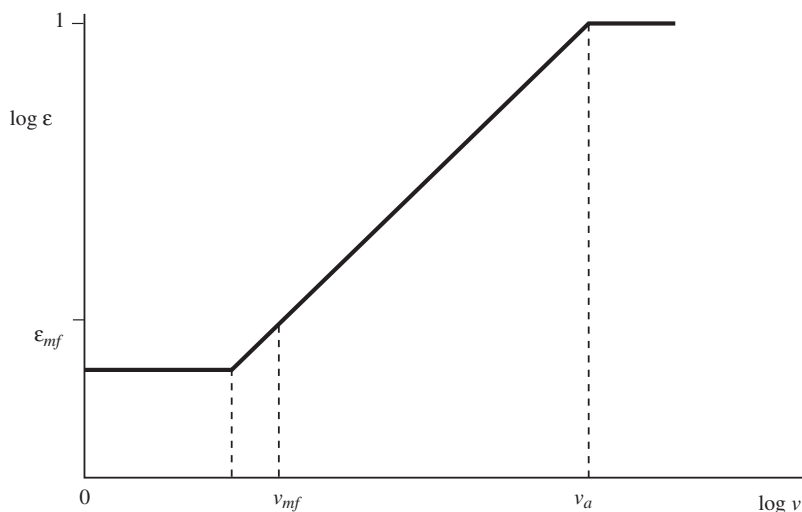


Figura 9.5. Porosidad de lechos fluidizados.

De forma particular, si para el lecho fijo le corresponde una porosidad ϵ_0 y una altura de lecho L_0 , la altura y porosidad para otro instante están relacionadas con ésta por la ecuación:

$$L(1 - \epsilon) = L_0(1 - \epsilon_0)$$

Si el lecho fuese compacto, las partículas ocuparían todo el lecho y no existirían huecos, por lo que la expresión que correlaciona las alturas se simplificaría:

$$L(1 - \epsilon) = L_C$$

en la que L_C es la altura del lecho compacto.

PROBLEMAS

Problema 9.1

Un gas circula a través de un lecho de partículas de forma cúbica de 5 mm de arista, a una velocidad de 1,2 m/s. La densidad de las partículas es de 2.050 kg/m³, siendo la densidad aparente del lecho de 1.000 kg/m³. Calcular: a) El diámetro equivalente de la partícula. b) La fracción de huecos. c) La pérdida de presión que experimenta el fluido al atravesar un metro de lecho relleno, si la densidad del gas es de 0,750 kg/m³ y su viscosidad 0,018 mPa·s.

a) El diámetro equivalente de la partícula se calcula a partir de la expresión:

$$d_p = 6\Gamma/a_{50}$$

al tratarse de partículas cúbicas el factor de forma $\Gamma = 0,81$, mientras que la superficie específica será: $a_{50} = 6/l = 1,2 \text{ mm}^{-1}$

por tanto: $d_p = (6 \cdot 0,81/1,2) \text{ mm} = 4,05 \text{ mm}$

b) La porosidad o fracción de huecos:

$$\varepsilon = \frac{\text{Volumen hueco}}{\text{Volumen lecho}} = \frac{\text{Volumen lecho} - \text{Volumen partículas}}{\text{Volumen lecho}} = 1 - \frac{\text{Volumen partículas}}{\text{Volumen lecho}}$$

Si m_p es la masa total de las partículas y ρ_p su densidad, el volumen ocupado por las partículas será:

$$\text{Volumen partículas} = m_p/\rho_p$$

De igual modo, si m_L es la masa del lecho y ρ_L su densidad:

$$\text{Volumen lecho} = m_L/\rho_L$$

La masa del lecho es la correspondiente a las partículas que contiene ($m_L = m_p$), mientras que la densidad del lecho es la denominada densidad aparente ($\rho_L = \rho_a$).

Por tanto:
$$\varepsilon = 1 - \frac{\rho_a}{\rho_L} = 1 - \frac{1.000 \text{ kg/m}^3}{2.050 \text{ kg/m}^3} = 0,512$$

c) La pérdida de presión que experimenta el gas al atravesar el lecho de partículas se calcula a partir de la ecuación de Ergun:

$$\frac{(-\Delta P)}{L} = 150 \frac{(1-\varepsilon)^2 \eta}{\varepsilon^3 d_p^2} v + 1,75 \frac{(1-\varepsilon) \rho}{\varepsilon^3 d_p} v^2$$

En esta ecuación se sustituyen los datos:

$$\varepsilon = 0,512 \quad d_p = 4,05 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad v = 1,2 \text{ m/s}$$

$$\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s} \quad \rho = 0,750 \text{ kg/m}^3$$

con lo que: $(-\Delta P/L) = (350 + 1.697) \text{ Pa/m} = 2.047 \text{ Pa/m}$

Para saber el tipo de régimen de circulación del gas se calcula el módulo de Reynolds de la partícula:

$$\text{Re}_p = \frac{\rho v d_p}{\eta} = \frac{(0,75 \text{ kg/m}^3) (1,2 \text{ m/s}) (4,05 \cdot 10^{-3} \text{ m})}{1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pas}} = 203$$

luego el gas circula en régimen turbulento.

Problema 9.2

Un gas que posee una viscosidad de 0,020 mPa·s se hace circular a través de un lecho relleno con una densidad de flujo volumétrica de 4.000 m³/(h·m²). El lecho está constituido por partículas cúbicas de 4 mm de arista, con una densidad de 1.300 kg/m³. Para el cálculo de la densidad aparente se utiliza una probeta de 5 cm de diámetro y 50 cm de altura, obteniéndose que el relleno que ocupa toda la probeta pesa 835 gramos. Calcular: a) La porosidad del relleno. b) Si la densidad media del gas es de 0,85 kg/m³, calcular la pérdida de presión que experimenta al atravesar 3 m de lecho de partículas.

a) Cálculo de la porosidad del lecho:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\rho_a}{\rho_L}$$

Densidad aparente:

$$\rho_a = \frac{m_p}{(\pi/4) D^2 L} = \frac{835 \text{ g}}{(\pi/4) (5^2) (50) \text{ cm}^3} = 0,8505 \text{ g/cm}^3 = 850,5 \text{ kg/m}^3$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{850,5 \text{ kg/m}^3}{1.300 \text{ kg/m}^3} = 0,3458$$

Cálculo del diámetro equivalente de partícula. Al tratarse de partículas cúbicas, su factor de forma se puede considerar 0,81, además $a_{s0} = \Gamma (6/l)$, por lo que:

$$d_p = \Gamma \cdot l = 3,24 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

b) Para el cálculo de la caída de presión que experimenta el gas al atravesar los 3 m de lecho relleno se aplicará la ecuación de Ergun.

Previamente debe calcularse la velocidad de circulación del gas. Para ello, como la densidad de flujo volumétrica es la relación entre el flujo volumétrico y la sección de paso, coincide con la velocidad:

$$v = \frac{q}{S} = 4.000 \frac{\text{m}^3}{\text{hm}^2} \frac{1 \text{ h}}{3.600 \text{ s}} = 1,111 \text{ m/s}$$

En la ecuación de Ergun se sustituyen los datos:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0,3458 & d_p &= 3,24 \cdot 10^{-3} \text{ m} & v &= 1,11 \text{ m/s} \\ \eta &= 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s} & \rho &= 0,850 \text{ kg/m}^3 & L &= 3 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\text{luego: } (-\Delta P) = 3 (3.287 + 8.967) = 36.762 \text{ Pa (N/m}^2\text{)}$$

El módulo de Reynolds de partícula será:

$$\text{Re}_p = \frac{\rho v d_p}{\eta} = \frac{(0,85 \text{ kg/m}^3) (1,11 \text{ m/s}) (3,24 \cdot 10^{-3} \text{ m})}{2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}} = 153$$

por lo que el gas circula en régimen turbulento.

Problema 9.3

En un proceso de secado se hace circular aire a través de un lecho de semillas de arveja, que están contenidas en una columna cilíndrica de 85 cm de diámetro, presentando su lecho una fracción hueca de 0,40. El aire circula con un caudal de 5.000 m³/h, medidos en las condiciones de entrada a la columna (1,5 atm y 90 °C), siendo su viscosidad de 0,0135 mPa·s. Calcular la pérdida de presión, por unidad de longitud del lecho, que experimenta el aire al pasar a través de las semillas.

Para el cálculo de la caída de presión que experimenta el gas al atravesar el lecho relleno se aplicará la ecuación de Ergun [ec. 9.13].

Cálculo de la densidad del aire:

$$\rho = \frac{PM_{\text{AIRE}}}{RT} = \frac{(1,5 \text{ atm}) (29 \text{ kg/kmol})}{\left(0,082 \frac{\text{atm m}^3}{\text{kmol K}}\right) (363 \text{ K})} = 1,461 \text{ kg/m}^3$$

Cálculo de la velocidad:

$$v = \frac{w}{\rho S} = \frac{q}{S} = \frac{5.000 \text{ m}^3/\text{h}}{(\pi/4) (0,85 \text{ m})^2} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3.600 \text{ s}} = 2,448 \text{ m/s}$$

Cálculo de la pérdida de presión. En la ecuación de Ergun se sustituyen los datos:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0,40 & d_p &= 0,003 \text{ m} & v &= 2,448 \text{ m/s} \\ \eta &= 1,35 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s} & \rho &= 1,461 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

$$\text{por lo que: } (-\Delta P)/L = (3.098 + 47.881) \text{ Pa/m} = 50.979 \text{ Pa/m (= 0,52 at)}$$

El módulo de Reynolds de partícula será:

$$\text{Re}_p = \frac{\rho v d_p}{\eta} = \frac{(1,461 \text{ kg/m}^3) (2,448 \text{ m/s}) (0,003 \text{ m})}{1,35 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}} = 795$$

por lo que el gas circula en régimen turbulento.

Problema 9.4

Se hace circular aire a 50 °C a través de una columna de vidrio de 10 cm de diámetro y 1 m de altura, la cual está rellena de anillos cilíndricos huecos de vidrio de 1 cm × 1 cm con un espesor de pared de 1,5 mm. Si la presión del aire a la entrada de la columna es de 730 mm Hg y la pérdida de presión que experimenta el fluido al pasar a través del relleno es de 100 cm de columna de agua; calcular el caudal de aire que circula a través del relleno. ¿Cuál es el régimen de circulación del aire?

Datos y notas. Para determinar la porosidad del lecho se llena la columna con agua, alcanzando una altura de 40 cm. A continuación se añaden anillos hasta que la altura del agua y anillos sea la misma (1 metro). Para la viscosidad del aire a 50 °C puede tomarse el valor de 0,020 mPa·s.

Para el cálculo de la caída de presión que experimenta el gas al atravesar el lecho relleno se aplicará la ecuación de Ergun [ecuación 9.13]. Esta ecuación puede expresarse en función de la densidad de flujo másica, la cual es: $G = \rho \cdot v$.

$$\frac{(-\Delta P)}{L} = 150 \frac{(1 - \varepsilon)^2 \eta}{\varepsilon^3 d_p^2} \frac{G}{\rho} + 1,75 \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon^3 d_p \rho} G^2$$

Previamente se calcularán aquellas variables que son desconocidas.

- Cálculo de la porosidad:

$$\varepsilon = \frac{\text{Volumen hueco}}{\text{Volumen lecho}} = \frac{S \cdot 40 \text{ cm}^3}{S \cdot 100 \text{ cm}^3} = 0,4$$

- Sección de paso de la columna:

$$S = (\pi/4) D^2 = (\pi/4) 0,1^2 \text{ m}^2 = 7,854 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

- Caída de presión:

$$(-\Delta P) = 100 \text{ cm} \cdot \text{c.a.} \cdot \frac{9,8 \times 10^4 \text{ N/m}^2}{1.000 \text{ cm} \cdot \text{c.a.}} = 9.800 \text{ Pa} = 0,0967 \text{ atm}$$

- Presión a la entrada de la columna:

$$P_e = (730/760) \text{ atm} = (0,9650 \text{ atm}) (1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa/atm}) = 97.301 \text{ Pa}$$

- Presión a la salida: $P_s = P_e - (-\Delta P) = 0,8639 \text{ atm}$

Cálculo de la densidad del aire: $\rho = \frac{PM_{\text{AIRE}}}{RT}$

- Densidad a la entrada:

$$\rho = \frac{(0,9605 \text{ atm}) (29 \text{ kg/kmol})}{\left(0,082 \frac{\text{atm m}^3}{\text{kmol K}}\right) (323 \text{ K})} = 1,052 \text{ kg/m}^3$$

- Densidad a la salida:

$$\rho = \frac{(0,8638 \text{ atm}) (29 \text{ kg/kmol})}{\left(0,082 \frac{\text{atm m}^3}{\text{kmol K}}\right) (323 \text{ K})} = 0,946 \text{ kg/m}^3$$

- Densidad media: $\rho_m = 0,999 \text{ kg/m}^3$

Cálculo de la superficie específica de partícula. Como se trata de partículas huecas, la superficie de partícula estará formada por las áreas laterales interna y externa del cilindro, a las que debe añadirse las áreas de las coronas circulares de las bases.

- Espesor de la pared de la partícula: $e = 0,0015 \text{ m}$
 - Diámetro externo de la partícula: $d_e = 0,01 \text{ m}$
 - Diámetro interno de la partícula: $d_i = d_e - 2e$
 - Altura de la partícula: $H = 0,01 \text{ m}$
 - Superficie partícula: $\pi(d_e + d_i)H + 2(\pi/4)(d_e^2 - d_i^2)$
 - Volumen de partícula: $(\pi/4)d_e^2 H$
- Obteniéndose: $a_{s0} = 782 \text{ m}^{-1}$
- Diámetro equivalente de partícula:

$$d_p = 6 \Gamma / a_{s0} = 7,673 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

se ha supuesto que el factor de forma es la unidad.

Cálculo de la densidad de flujo másica. En la ecuación de Ergun se sustituyen los datos:

$$\begin{array}{lll} \varepsilon = 0,40 & L = 1 \text{ m} & (-\Delta P) = 9.800 \text{ Pa} \\ \eta = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s} & \rho = 0,999 \text{ kg/m}^3 & d_p = 7,673 \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{array}$$

por lo que:

$$9.800 = 286,9 G + 2.140,3 G^2$$

$$G^2 + 0,134 G - 4,58 = 0$$

ecuación de segundo grado, cuya raíz negativa no tiene sentido físico. La raíz positiva da el valor de la densidad de flujo másica: $G = 2,074 \text{ kg}/(\text{m}^2\cdot\text{s})$

- El caudal másico será:

$$w = G S = 2,074 \text{ kg}/(\text{m}^2\cdot\text{s}) 7,854 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 = 1,629 \cdot 10^{-2} \text{ kg/s}$$

- El caudal volumétrico será:

$$q = \frac{w}{\rho} = \frac{1,629 \cdot 10^{-2} \text{ kg/s}}{0,999 \text{ kg/m}^3} = 0,0163 \text{ m}^3/\text{s} = 16,3 \text{ l/s}$$

- El módulo de Reynolds de partícula será:

$$\text{Re}_p = \frac{G d_p}{\eta} = \frac{(2,074 \text{ kg}/\text{m}^3 \text{ s}) (1,673 \cdot 10^{-3} \text{ m})}{2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}} = 988$$

por lo que el gas circula en régimen turbulento.

Problema 9.5

Se hace circular isotérmicamente, a 45 °C, una corriente de aire a través de un lecho de partículas contenidas en un tubo cilíndrico de 15 cm de diámetro. El lecho está constituido por partículas cilíndricas de 3 mm de diámetro y 4,5 mm de altura, siendo su densidad 1,4 g/cm³. La presión del aire a la entrada del lecho es 1,3 at, experimentando una pérdida de carga de 75 cm·c.a. (cm columna de agua) al atravesar 1 m de lecho. Si la viscosidad del aire a 45 °C es 0,0195 mPa·s, y las partículas contenidas en 250 cm³ de lecho pesan 140 g; calcular: a) Superficie específica del lecho y de partícula. b) Densidad del aire después de recorrer 1 m de lecho. c) Caudal másico con el que circula el aire.

Datos. Para el peso molecular del aire puede tomarse el valor de 29 kg/kmol.

a) Cálculo de la superficie específica de la partícula:

$$a_{s0} = \frac{\text{Superficie partícula}}{\text{Volumen partícula}}$$

Dimensiones de la partícula cilíndrica: Diámetro: $d_p = 0,003$ m

Altura: $H = 0,0045$ m

• Superficie partícula: $2(\pi/4)d_p^2 + \pi d_p H = 5,655 \cdot 10^{-5}$ m²

• Volumen partícula: $(\pi/4)d_p^2 H = 3,181 \cdot 10^{-8}$ m³

Por tanto: $a_{s0} = 1.777,74$ m⁻¹

A partir de este valor es posible calcular el diámetro equivalente de partícula:

$$d_p = 6 \Gamma / a_{s0}.$$

si se supone que el factor de forma es la unidad ($\Gamma = 1$), se obtiene que el diámetro equivalente de partícula es: $d_p = 3,375 \cdot 10^{-3}$ m.

Cálculo de la fracción de huecos:

• Densidad aparente: $\rho_a = 140 \text{ g} / 250 \text{ cm}^3 = 0,56 \text{ g/cm}^3$

• Porosidad: $\varepsilon = 1 - (\rho_a / \rho_p) = 1 - (0,56 / 1,41) = 0,6$

Superficie específica del lecho:

$$a_s = a_{s0} (1 - \varepsilon) = 1.777,74 \text{ m}^{-1} (1 - 0,6) = 711,1 \text{ m}^{-1}$$

b) Cálculo de la densidad del aire después de recorrer 1 metro de lecho.

La caída de presión que experimenta el fluido es de 75 cm·c.a.:

$$(-\Delta P) = 75 \text{ cm·c.a.} \cdot \frac{1 \text{ at}}{1.000 \text{ cm·c.a.}} \cdot \frac{9,8 \cdot 10^4 \text{ Pa}}{1 \text{ at}} \cdot \frac{1 \text{ atm}}{101,2 \cdot 10^3 \text{ Pa}} = 0,0726 \text{ atm}$$

$$\text{Presión a la entrada: } P_e = 1,3 \text{ at} \cdot \frac{1 \text{ atm}}{1,033 \text{ at}} = 1,258 \text{ atm}$$

$$\text{Presión a la salida: } P_s = P_e - (-\Delta P) = 1,1855 \text{ atm}$$

Densidad del aire después de recorrer 1 m:

$$\rho = \frac{(1,1855 \text{ atm}) (29 \text{ kg/kmol})}{\left(0,082 \frac{\text{atm m}^3}{\text{kmol K}}\right) (318 \text{ K})} = 1,319 \text{ kg/m}^3$$

Densidad del aire a la entrada:

$$\rho = \frac{(1,258 \text{ atm}) (29 \text{ kg/kmol})}{\left(0,082 \frac{\text{atm m}^3}{\text{kmol K}}\right) (318 \text{ K})} = 1,399 \text{ kg/m}^3$$

Densidad media: $\rho_m = 1,359 \text{ kg/m}^3$

c) Para el cálculo del caudal másico es necesario calcular previamente la velocidad de circulación, para lo que se utiliza la ecuación de Ergun.

En esta ecuación de Ergun se sustituyen los datos:

$$\begin{array}{lll} \varepsilon = 0,60 & d_p = 3,375 \cdot 10^{-3} \text{ m} & (-\Delta P) = 7,350 \text{ Pa} \\ \eta = 1,95 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s} & \rho = 1,359 \text{ kg/m}^3 & L = 1 \text{ m} \end{array}$$

por lo que:

$$\begin{aligned} 7,350 &= 190,2 v + 1,304,94 v^2 \\ v^2 + 0,1458 v - 5,633 &= 0 \end{aligned}$$

ecuación de segundo grado, de la cual su raíz negativa no tiene sentido físico. Del valor de su raíz positiva se obtiene la velocidad lineal de circulación del aire, obteniéndose: $v = 2,30 \text{ m/s}$.

El caudal másico se obtiene de la expresión:

$$\begin{aligned} w &= \rho_m v S = \rho_m v (\pi/4) D^2 \\ w &= (1,359 \text{ kg/m}^3) (2,30 \text{ m/s}) (\pi/4) (0,15 \text{ m})^2 (3.600 \text{ s/h}) = 190 \text{ kg/h} \end{aligned}$$

Problema 9.6

En un trabajo experimental se ha aplicado la técnica de lecho fluidizado al secado de semillas de sorgo. Para ello, se cargan $95,8 \text{ kg}$ de semillas/ m^2 de sección transversal de lecho a una columna de $0,2 \text{ m}$ de diámetro, por la que se hace circular aire, cuyas condiciones a la entrada de la columna son $40 \text{ }^\circ\text{C}$ y 1 atm ósfera. Se ha encontrado que la altura del lecho varía con el caudal de circulación de aire según los datos de la tabla:

$q \text{ (m}^3/\text{h)}$	60	71	79	107	131	149	182	212
$h \text{ (mm)}$	135	135	138	152	175	187	215	240

Calcular la velocidad mínima de fluidización, así como la altura del lecho en ese instante.

Datos y notas. El lecho de sorgo presenta una porosidad de 0,38 cuando a su través no circula aire, siendo 0,98 la esfericidad (factor de forma) de las semillas. Además, en un experimento previo se ha obtenido que 500 granos de esta semilla desplazan 12 cm^3 del agua contenida en una probeta.

$$\text{Sección transversal del lecho: } S = (\pi/4) D^2 = (\pi/4) (0,2 \text{ m})^2 = 0,03142 \text{ m}^2$$

El diámetro de partícula se calculará suponiendo que son equivalentes a esferas de diámetro d_r . Los 500 granos tendrán un volumen de 12 cm^3 :

$$500 (\pi/6) (d_r)^3 = 12 \text{ cm}^3; \quad \text{luego: } d_r = 0,358 \text{ cm}$$

El diámetro equivalente de partícula se obtiene modificando este valor con el factor de forma: $d_p = d_r \Gamma = 0,358 \text{ cm} \cdot 0,98 = 0,351 \text{ cm}$.

El cálculo de la caída de presión que experimenta el aire al pasar a través del lecho se calculará a partir de la ecuación de Ergun.

La porosidad del lecho depende de la altura, y se calcula a partir de la expresión:

$$\epsilon = 1 - \frac{L_0 (1 - \epsilon_0)}{L}$$

en la que ϵ_0 y L_0 son la porosidad y la altura del lecho cuando éste permanece fijo, en las condiciones iniciales.

La densidad del aire se calcula con la ecuación:

$$\rho = \frac{(1 \text{ atm}) (29 \text{ kg/kmol})}{\left(0,082 \frac{\text{atm m}^3}{\text{kmol K}}\right) (313 \text{ K})} = 1,3 \text{ kg/m}^3$$

Para el cálculo de la velocidad lineal se usa el caudal volumétrico: $v = q/S$.

A partir de los datos de la tabla del enunciado del problema, es posible calcular la velocidad lineal de circulación del aire, la porosidad del lecho y la caída de presión para cada caudal volumétrico de aire (tabla P9.6).

Con los datos de la tabla se representan en coordenadas doble logarítmicas ($-\Delta P$) y la porosidad frente a la velocidad (figura P9.6).

Tabla P9.6. Datos de la fluidización de semillas de sorgo

q (m ³ /h)	L (m)	ϵ	v (m/s)	$(-\Delta P)$ (N/m ²)
60	0,135	0,38	0,531	395,9
71	0,135	0,38	0,628	447,4
79	0,138	0,393	0,700	488,1
107	0,152	0,449	0,946	554,6
131	0,175	0,522	1,158	503,8
149	0,187	0,552	1,318	541,2
182	0,215	0,611	1,609	576,7
212	0,240	0,651	1,875	637,6

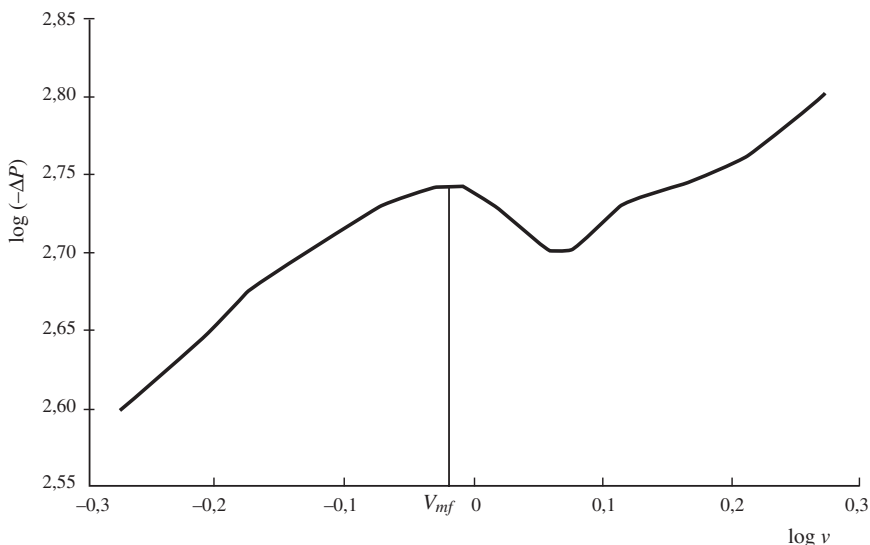


Figura P9.6. Problema 9.6.

En la gráfica se observa que la velocidad mínima de fluidización corresponde aproximadamente a 0,90 m/s. Para la porosidad mínima se obtiene un valor de 0,442. La altura que alcanza el lecho para esta porosidad será:

$$L = L_0 \frac{1 - \epsilon_0}{1 - \epsilon} = 135 \frac{1 - 0,380}{1 - 0,442} = 150 \text{ mm}$$

Problema 9.7

Se fluidizan 20.000 kg de arena cuya luz de malla es de 0,175 mm (Serie Tyler, n.º 80), utilizando una corriente de aire a 350 °C de temperatura y 20 atmósferas de presión, en una columna cilíndrica de 2 m de diámetro. La densidad de las partículas es de 2.700 kg/m³. En las condiciones de operación la viscosidad del aire puede tomarse igual a 0,021 mPa·s. Calcular: a) La porosidad mínima para la fluidización. b) La altura mínima de lecho fluidizado. c) La pérdida de presión que experimenta el aire al atravesar el lecho de arena. d) La velocidad mínima de fluidización.

a) Para el cálculo de la porosidad mínima de fluidización se utiliza la ecuación 9.21:

$$\epsilon_{mf} = 1 - 0,356 (\log d_p - 1) = 0,557$$

b) La altura mínima de lecho fluidizado se obtiene a partir de la expresión:

$$L = L_0 \frac{1 - \epsilon_0}{1 - \epsilon_{mf}}$$

en la que L_0 es la altura correspondiente a una porosidad ε_0 . En el caso que el lecho fuese compacto $\varepsilon_0 = 0$.

- Volumen de lecho compacto: $V_C = (\pi/4) D^2 L_C$
- Masa del lecho compacto: $m_C = 20.000 \text{ kg}$

Como la densidad de las partículas del lecho es:

$$\rho_p = \frac{m_C}{V_C} = \frac{m_C}{(\pi/4) D^2 L_C}$$

de donde es posible calcular la altura correspondiente al lecho compacto:

$$L_C = \frac{m_C}{\rho_p (\pi/4) D^2} = \frac{20.000 \text{ kg}}{(2.700 \text{ kg/m}^3) (\pi/4) (2^2 \text{ m}^2)} = 2,36 \text{ m}$$

Por lo que la altura del lecho en el punto de fluidización será:

$$L = 2,36 \frac{1 - 0}{1 - 0,557} = 5,33 \text{ m}$$

c) En el momento de la fluidización se equilibran las fuerzas de gravedad y la fuerza de flotación debida al fluido desalojado:

$$F_G = (\rho_p - \rho) S L_{mf} (1 - \varepsilon_{mf}) g$$

$$F_p = (-\Delta P) S$$

es decir:

$$(-\Delta P) = L_{mf} (\rho_p - \rho) (1 - \varepsilon_{mf}) g$$

Densidad del aire:

$$\rho = \frac{(20 \text{ atm}) (29 \text{ kg/kmol})}{\left(0,082 \frac{\text{atm m}^3}{\text{kmol K}}\right) (623 \text{ K})} = 11,35 \text{ kg/m}^3$$

Por tanto, la caída de presión que experimenta el aire será:

$$(-\Delta P) = 5,33 \text{ m} (2.700 - 11,35) \text{ kg/m}^3 (1 - 0,557) 9,8 \text{ m/s}^2 = 62.214 \text{ Pa}$$

d) La velocidad mínima de fluidización se calcula a partir de la ecuación:

$$(\rho_p - \rho) g = 150 \frac{(1 - \varepsilon_{mf}) \eta}{(\varepsilon_{mf})^3 d_p^2} v_{mf} + 1,75 \frac{\rho}{(\varepsilon_{mf})^3 d_p} (v_{mf})^2$$

Al sustituir las variables por sus valores:

$$\rho_p = 2.700 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho = 11,35 \text{ kg/m}^3$$

$$\varepsilon_{mf} = 0,557$$

$$d_p = 1,75 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\eta = 2,1 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

se obtiene una ecuación de segundo grado:

$$26.348,7 = 300.476,8 v_{mf} + 720.990,2 (v_{mf})^2$$

$$(v_{mf})^2 + 0,417 v_{mf} - 0,0365 = 0$$

La raíz negativa de esta ecuación no tiene sentido físico, por lo que la velocidad mínima de fluidización será la solución positiva:

$$v_{mf} = 0,074 \text{ m/s}$$

El módulo de Reynolds de partícula correspondiente a esta velocidad es:

$$Re_p = \frac{\rho v d_p}{\eta} = \frac{(11,53 \text{ kg/m}^3) (0,0744 \text{ m/s}) (1,75 \cdot 10^{-4} \text{ m})}{2,1 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}} = 7$$

Con lo que el régimen de circulación es laminar.

10.1. Introducción

La filtración es una operación unitaria cuya finalidad es la separación de un sólido insoluble que está presente en una suspensión sólido-líquido, haciendo pasar dicha suspensión a través de una membrana porosa que retiene las partículas sólidas. A la membrana porosa se la denomina **medio filtrante**, mientras que las partículas retenidas en la membrana forman una capa que se llama **torta** y el líquido que atraviesa la membrana porosa y está exento de sólidos se denomina **filtrado**.

En la filtración puede ocurrir que la fase deseada sea el filtrado, la torta o ambos. Cuando lo que se desea obtener es la parte sólida, una vez obtenida la torta, ésta debe lavarse para eliminar las impurezas que pueda contener.

Para obtener el flujo de filtrado a través del medio filtrante se puede operar por simple gravedad, o bien aplicando una presión superior a la atmosférica en la parte anterior del medio filtrante o vacío en su parte posterior, denominándose **filtración a presión** y **filtración a vacío**, respectivamente.

La filtración es una operación muy utilizada en la industria en general, y en el caso particular de la industria alimentaria se distinguen tres tipos característicos de filtración. En uno de ellos se incluyen las suspensiones que contienen cantidades apreciables de sólidos insolubles, y al ser filtrados forman una torta sobre el medio filtrante, pudiendo interesar la obtención del sólido, del filtrado o de ambos. Otro tipo es el que incluye las suspensiones con pocos sólidos insolubles, que por regla general suelen ser indeseables, y en cuyo caso la filtración se denomina **clarificación**. Por último, se debe citar la **microfiltración**, que se da en el caso que las partículas sólidas a separar son de tamaños del orden de 0,1 mm.

10.2. Fundamentos de la filtración

El estudio que se realiza a continuación se aplica a filtros en los que se forman tortas sobre el medio filtrante. De estos tipos de filtros los más utilizados son los filtros prensa de marcos y placas.

Inicialmente, la papilla pasa a través del medio filtrante, pero a medida que se va filtrando se forma la torta, que va aumentando su espesor, por lo que el fluido

de la papilla debe atravesar, no sólo el medio filtrante, sino también la torta formada. Esto supone que la caída de presión a través del filtro es cada vez mayor, o bien el caudal de filtrado es menor. Esto indica que la forma de trabajar puede ser a caída de presión constante o a caudal constante de filtrado. En el primer caso, al mantener la caída de presión constante, el caudal de filtrado irá disminuyendo a lo largo del tiempo de filtración. Por contra, si se desea que el caudal de filtrado sea constante, la caída de presión se hará cada vez mayor. A medida que se va filtrando, va aumentando el espesor del sólido depositado, con lo que constituye un caso no estacionario de circulación de fluidos a través de alturas de relleno variables. En el filtro podrán distinguirse dos zonas, la de la torta filtrante y la del medio filtrante. La primera de ellas constituye un relleno que puede cambiar de características (superficie específica, porosidad...), mientras que el medio filtrante posee características fijas.

En general, para un filtro en el que se forma una torta, la caída de presión total que experimenta el fluido ($-\Delta P$) es la suma de la que experimenta a través del medio filtrante ($-\Delta P_m$) y a través de la torta ($-\Delta P_t$):

$$(-\Delta P) = -(\Delta P_t + \Delta P_m) = (-\Delta P_t) + (-\Delta P_m) \quad [10.1]$$

10.2.1. Resistencia de la torta de filtración

Si se supone un filtro prensa de marcos y placas, la superficie filtrante es plana y vertical, tal como se indica en la figura 10.1b. El fluido pasa a través de una torta de espesor z , en la que la caída de presión es ΔP_t . Al aplicar la ecuación de Bernoulli a la parte de la torta se obtiene:

$$\frac{\Delta P}{\rho} + \frac{\Delta v^2}{2\alpha} + g \Delta z + \hat{E}_f = 0 \quad [10.2]$$

Según las condiciones del filtro, se tiene:

$$\frac{\Delta P}{\rho} + \hat{E}_f = 0$$

La circulación del fluido es laminar, con lo que \hat{E}_f puede obtenerse a partir de la ecuación de Kozeny:

$$\hat{E}_f = \frac{\Delta P}{\rho} + \frac{\eta v K'' (1 - \epsilon)^2 (a_{s0})^2}{\rho \epsilon^3} z \quad [10.3]$$

en la que v es la velocidad en la zona libre:

$$v = \frac{1}{A} \frac{dV}{dt} \quad [10.4]$$

siendo V el volumen de filtrado y A la sección transversal de paso.

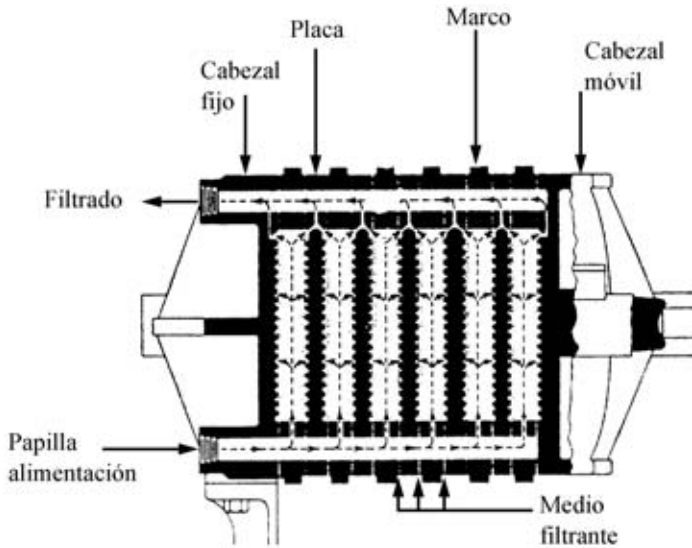


Figura 19.1a. Filtro prensa de marcos y placas (adaptado de Ocón y Tojo, 1968).

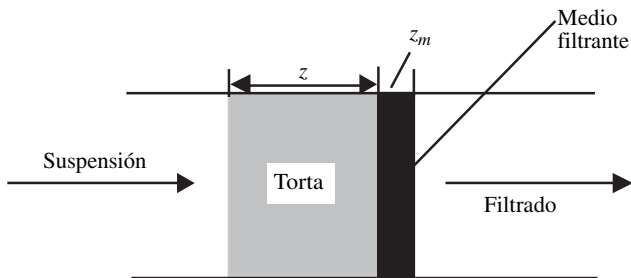


Figura 10.1b. Esquema de formación de la torta.

Al combinar las ecuaciones anteriores resulta:

$$\frac{1}{A} \frac{dV}{dt} = \frac{\varepsilon^3}{\eta K'' (1 - \varepsilon)^2 (a_{s0})^2 z} (-\Delta P) \quad [10.5]$$

Si se define la **resistencia específica** de la torta como:

$$\alpha = \frac{K'' (1 - \varepsilon) (a_{s0})^2}{\varepsilon^3 \rho_s} \quad [10.6]$$

siendo las unidades de α de m/kg. La resistencia específica físicamente representa la caída de presión necesaria para proporcionar una velocidad superficial unidad de filtrado de viscosidad unidad, a través de la torta que contiene la unidad de masa de sólido por unidad de área de filtro.

Al introducir la expresión de la resistencia específica de la torta en la ecuación 10.5 se obtiene:

$$\frac{1}{A} \frac{dV}{dt} = \frac{(-\Delta P_t)}{\eta \rho_S (1 - \epsilon) \alpha z} \quad [10.7]$$

Para poder integrar esta ecuación, el espesor de la torta debe ponerse en función del volumen de filtrado. Para ello, a continuación se definirán ciertas variables que van a permitir que dicho espesor se pueda poner en función del volumen de líquido filtrado.

El espesor de la torta z es función del peso de la torta seca (m_{TS}) depositada:

$$m_{TS} = A z \rho_S (1 - \epsilon) \quad [10.8]$$

Para obtener la relación entre la torta seca depositada (m_{TS}) y el volumen de filtrado (V) se define M como la **relación entre el peso de torta húmeda y torta seca**:

$$M = \frac{m_{TH}}{m_{TS}} = \frac{m_{TS} + m_{LR}}{m_{TS}} = 1 + \frac{A z \epsilon \rho}{A z (1 - \epsilon) \rho_S} \quad [10.9]$$

en la que los subíndices TH y TS indican torta húmeda y torta seca, respectivamente, mientras que m_{LR} es la masa de líquido retenido por la torta, siendo su valor:

$$m_{LR} = m_{TS} (M - 1) \quad [10.10]$$

Si S es la fracción másica de sólido en la suspensión que se filtra:

$$S = \frac{\text{Masa sólido}}{\text{Masa total}} = \frac{m_{TS}}{m_{TS} M + \rho V} \quad [10.11]$$

Se obtiene:

$$m_{TS} = \frac{\rho V S}{1 - M S} \quad [10.12]$$

esta última ecuación y la 10.8 permiten obtener la relación entre el espesor de la torta y el volumen de filtrado:

$$z = \frac{\rho V S}{1 - M S} \frac{1}{\rho_S (1 - \epsilon) A} \quad [10.13]$$

Al sustituir esta expresión en la ecuación 10.7, y reordenando se obtiene:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{A^2 (-\Delta P_t)}{\eta \alpha \frac{\rho V S}{1 - M S}} \quad [10.14]$$

En esta ecuación se puede observar que el caudal de filtrado es directamente proporcional a la caída de presión que el fluido experimenta al atravesar la torta, e in-

versamente proporcional al volumen de filtrado. Si se opera a caída de presión constante, el caudal de filtrado disminuye con el tiempo de filtración, ya que el volumen de filtrado es cada vez mayor.

10.2.2. Resistencia del medio filtrante

El caudal de filtrado que atraviesa el medio filtrante es el mismo que atraviesa la torta. En esta zona puede aplicarse la ecuación de Kozeny para el cálculo de la pérdida de presión $-\Delta P_m$; pero en realidad se utiliza una **resistencia del medio filtrante** R_f , de forma que el caudal de filtrado será:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{A(-\Delta P_m)}{\eta R_f} \quad [10.15]$$

Las unidades de R_f son m^{-1} , y es una resistencia que engloba varias constantes del filtro. Comparando con la ecuación de Kozeny, esta constante será:

$$R_f = \frac{(\epsilon_m)^3}{K_m'' (1 - \epsilon_m)^2 (a_{50})^2 z_m} \quad [10.16]$$

en la que z_m es el espesor del medio filtrante, siendo todas las demás variables características del medio filtrante. El subíndice m indica que estas características son referidas al medio filtrante.

Resulta conveniente considerar la resistencia que ofrece el medio filtrante como equivalente a la que ofrecería un cierto espesor de torta z_f que se hubiera depositado con el paso de un volumen V_f de filtrado. Como es lógico V_f es un valor ficticio constante. Por analogía con la ecuación 10.14, obtenida para la torta, el caudal de filtrado se podrá expresar en función de este volumen ficticio de filtrado según la expresión:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{A^2(-\Delta P_m)}{\eta \alpha \frac{\rho V_f S}{1 - MS}} \quad [10.17]$$

Al comparar esta última expresión con la ecuación 10.15 se observa que:

$$R_f = V_f \frac{\rho S \alpha}{A(1 - MS)} \quad [10.18]$$

en la que la resistencia del medio filtrante es función de este volumen ficticio de filtrado.

10.2.3. Resistencia total de filtración

Como se ha visto anteriormente, la pérdida de presión total que experimenta el fluido es la suma de las pérdidas debidas al atravesar la torta y el me-

dio filtrante. Esto supone que el caudal de filtrado se podrá expresar según las ecuaciones:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{A^2 (-\Delta P)}{\eta \frac{\alpha \rho S}{1 - M S} (V + V_f)} \quad [10.19a]$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{A^2 (-\Delta P)}{\eta \left(\frac{\alpha \rho S}{1 - M S} V + AR_f \right)} \quad [10.19b]$$

Una vez obtenidas estas ecuaciones, deben integrarse. Pueden presentarse dos casos, uno en que la caída de presión que experimenta el fluido sea constante, o bien que se opere a caudal volumétrico de filtrado constante.

10.2.4. Tortas compresibles

Cuando la resistencia específica de la torta no varía con el espesor de la torta, y es independiente de la presión $-\Delta P_t$, la torta se denomina **incompresible**. Esto ocurre cuando la torta está formada por partículas sólidas rígidas e indeformables, en la que los valores de la porosidad de la torta y superficie específica de las partículas no se ven afectadas por la compresión aplicada sobre el lecho.

En general, las partículas que forman la torta son flexibles y deformables. En este tipo de tortas, la resistencia al flujo depende de la caída de presión, variando a lo largo de todo el espesor de la torta. Estas tortas se denominan **compresibles**. En este caso la resistencia específica de la torta α varía en todo el espesor de la torta, y se debe utilizar un valor medio si se desean integrar las expresiones anteriores [ecs. 10.19].

Existen fórmulas empíricas que permiten calcular la resistencia específica de la torta α . Una de estas ecuaciones es la dada por Almy y Lewis, siendo una de las utilizadas:

$$\alpha = \alpha_0 (-\Delta P_t)^n \quad [10.20]$$

en la que α_0 es la resistencia específica de la torta cuando no existe caída de presión, n es el **factor de compresibilidad**, cuyo valor está comprendido entre 0,1 y 1, correspondiendo los valores mayores a las tortas más compresibles. Se supone que n es independiente de la presión, aunque en realidad se ha comprobado que existe cierta dependencia.

Los valores de α_0 y n deben obtenerse experimentalmente, a partir de medidas de α con una caída de presión en la torta conocida, y representando en papel doble logarítmico los pares de valores α y ΔP_t correspondientes. La pendiente de la recta ajustada será el valor del factor de compresibilidad n , mientras que la ordenada en el origen permite obtener el valor de α_0 . Otra expresión que da la va-

riación de la resistencia específica de la torta con la caída de presión, es la ecuación de Ruth:

$$\alpha = \alpha'_0 [1 + \beta (-\Delta P_t)^{n'}] \quad [10.21]$$

en la que α'_0 , β y n' son parámetros que deben obtenerse de modo empírico.

10.3. Filtración a caída de presión constante

Cuando la operación de filtración se lleva a cabo a caída de presión constante interesa saber cuál será la variación del volumen de filtrado con el tiempo. Para ello, se parte de la ecuación 10.19b, y se integra. Esta ecuación es en variables separables, pudiendo expresarse como:

$$\left(\frac{\alpha \rho S}{1 - M S} V + A R_f \right) dV = \frac{A^2 (-\Delta P)}{\eta} dt \quad [10.22]$$

Si se define una nueva constante C :

$$C = \frac{1 - M S}{\alpha \rho S} \quad [10.23]$$

la ecuación anterior se puede expresar como:

$$\left(\frac{V}{C} + A R_f \right) dV = \frac{A^2 (-\Delta P)}{\eta} dt$$

ecuación que se puede integrar con la condición límite:

para $t = 0$ $V = 0$ obteniéndose:

$$\frac{V^2}{2 C} + A R_f V = \frac{A^2 (-\Delta P)}{\eta} t \quad [10.24]$$

que reordenada se expresará:

$$\frac{t}{V} = \frac{\eta}{2 A^2 (-\Delta P) C} V + \frac{R_f \eta}{A (-\Delta P)}$$

en la que si se definen unas nuevas constantes K_1 y K_2 :

$$K_1 = \frac{\eta}{2 A^2 (-\Delta P) C} \quad [10.25]$$

$$K_2 = \frac{R_f \eta}{A (-\Delta P)} \quad [10.26]$$

se obtiene:

$$\frac{t}{V} = K_1 V + K_2 \quad [10.27]$$

que se corresponde a la ecuación de una recta al representar t/V frente al volumen de filtrado. La pendiente de esta recta es la constante K_1 , mientras que la constante K_2 es el valor de la ordenada en el origen.

La obtención de las constantes K_1 y K_2 debe realizarse de forma experimental. Si se lleva a cabo una filtración a presión constante y se anotan los valores del volumen de filtrado obtenido para distintos tiempos de filtración, puede construirse una gráfica de t/V frente a V . Al ajustar estos valores por el método de los mínimos cuadrados a la recta dada en la ecuación 10.27, se obtendrán las constantes K_1 y K_2 , a partir de los valores de la pendiente y ordenada en el origen, respectivamente.

De K_1 es posible obtener el valor de la constante C , y a partir de éste el de la resistencia específica de la torta α . De la ordenada en el origen se puede llegar a obtener el valor de la resistencia del medio filtrante R_f .

Una vez que son conocidos α y R_f , a partir de la ecuación 10.27, es posible determinar el tiempo de filtración necesario para obtener un volumen de filtrado determinado. Asimismo, se puede calcular el volumen de filtrado para un tiempo determinado. Para ello se parte de la ecuación 10.24, que como se observa es una ecuación de segundo grado respecto al volumen de filtrado. Al resolver esta ecuación se obtienen dos raíces, de las cuales una no tiene sentido físico, pues resulta un volumen negativo. Escogiendo la raíz adecuada, el volumen de filtrado se obtiene con la ecuación:

$$V = A \left[\left(C^2 R_f^2 + \frac{2 C (-\Delta P)}{\eta} t \right)^{1/2} - C R_f \right] \quad [10.28]$$

ecuación que permite el cálculo del volumen de filtrado en función del tiempo.

Esta ecuación se puede expresar en función del volumen ficticio V_f , dado en la ecuación 10.18, de esta forma se obtiene la ecuación:

$$V = \left(V_f^2 + \frac{2 C A^2 (-\Delta P)}{\eta} t \right)^{1/2} - V_f \quad [10.29]$$

El caudal que pasa a través de la torta y del medio filtrante se obtiene al derivar la ecuación anterior con respecto al tiempo:

$$q = \frac{dV}{dt} = \frac{A C (-\Delta P)}{\eta \left[C^2 R_f^2 + \frac{2 C (-\Delta P)}{\eta} t \right]^{1/2}} \quad [10.30]$$

Este caudal es máximo cuando el tiempo de filtración es nulo, con lo que:

$$q_{\text{máx}} = \frac{A (-\Delta P)}{\eta R_f} \quad [10.31]$$

10.4. Filtración a caudal volumétrico constante

De la definición de caudal volumétrico instantáneo, éste se expresa como la variación del volumen filtrado con el tiempo de filtración:

$$q = \frac{dV}{dt}$$

Si el caudal volumétrico permanece constante, éste será igual al volumen de filtrado que se ha recogido en un determinado tiempo:

$$q = \frac{V}{t}$$

por lo que al sustituirlo en la ecuación 10.19b se obtiene:

$$q = \frac{dV}{dt} = \frac{A^2 (-\Delta P)}{\eta \left(\frac{\alpha \rho S}{1 - MS} V + A R_f \right)} = \frac{A^2 (-\Delta P)}{\eta \left(\frac{V}{C} + A R_f \right)} \quad [10.32]$$

Ecuación que permite obtener la variación de la caída de presión para poder mantener el caudal volumétrico constante:

$$(-\Delta P) = \frac{\eta}{CA^2} q V + \frac{\eta R_f}{A} q$$

o lo que es lo mismo:

$$(-\Delta P) = \frac{\eta}{CA^2} q^2 t + \frac{\eta R_f}{A} q \quad [10.33]$$

en la que si se definen unas nuevas constantes K_3 y K_4 :

$$K_3 = \frac{\eta q^2}{CA^2} \quad [10.34]$$

$$K_4 = \frac{\eta R_f q}{A} \quad [10.35]$$

se obtiene:

$$(-\Delta P) = K_3 t + K_4 \quad [10.36]$$

De modo análogo a lo que se ha realizado en el apartado anterior, mediante una serie experimental, si se representa la caída de presión frente a los tiempos de filtración se obtienen una serie de puntos, que ajustados a una recta [ecuación 10.36] permiten encontrar las constantes K_3 y K_4 de la pendiente y ordenada en el origen, respectivamente. A partir de estos valores se podrán encontrar los de α y R_f .

La expresión que relaciona el volumen de filtrado recogido con el tiempo de filtración y la caída de presión, se puede obtener a partir de la ecuación 10.32, que de forma ordenada se expresa según la ecuación:

$$\frac{V^2}{C} + A R_f V - A^2 (-\Delta P) \frac{t}{\eta} = 0$$

Al resolver esta ecuación de segundo grado, tomando la raíz adecuada, se obtiene el volumen de filtrado en función del tiempo:

$$V = A \left[\left(\frac{C^2 R_f^2}{4} + \frac{C (-\Delta P)}{\eta} t \right)^{1/2} - \frac{C R_f}{2} \right] \quad [10.37]$$

Se puede observar que esta expresión es similar a la obtenida para filtración a presión constante [ec. 10.28].

10.5. Lavado de la torta

Una vez obtenida la torta de filtración, por lo general se lava para eliminar los sólidos indeseables que pueda contener. Este lavado se realiza sobre el mismo filtro, haciendo pasar el líquido de lavado a través de la torta. Esta operación se realiza a caída de presión y caudal volumétrico constantes, pudiendo el líquido de lavado seguir el mismo camino que el filtrado, o bien uno distinto. De cualquier modo, el líquido de lavado, una vez haya atravesado la torta, contendrá sólidos solubles, de forma que su concentración va disminuyendo con el tiempo.

Para el caso que el líquido de lavado siga el mismo camino que el filtrado, la variación de la concentración de los sólidos del lavado se eliminan hasta un 90% en el período inicial, para luego descender bruscamente la concentración (figura 10.2). Cuando el líquido de lavado no sigue el mismo camino que el filtrado, la eliminación de los sólidos solubles es más gradual.

En la mayoría de los filtros el agua de lavado sigue el mismo camino que el filtrado, sin embargo, en los filtros prensa de marcos y placas, el camino es distinto. Las figuras 10.3 y 10.4 muestran las operaciones de filtración y lavado, respectivamente, de un filtro prensa. Puede observarse que el área de lavado es la mitad de la del filtrado, mientras que la resistencia del medio filtrante es doble en el lavado que en el filtrado.

Es muy importante resaltar que el caudal del líquido de lavado coincide con el caudal del final del filtrado. Así si se toma la ecuación 10.19b:

$$q_L = q_{FINAL} = \frac{(A_L)^2 (-\Delta P)}{\eta \left(\frac{\alpha \rho S}{1 - M S} V + A_L R_f \right)} \quad [10.38]$$

en la que A_L es el área de lavado.

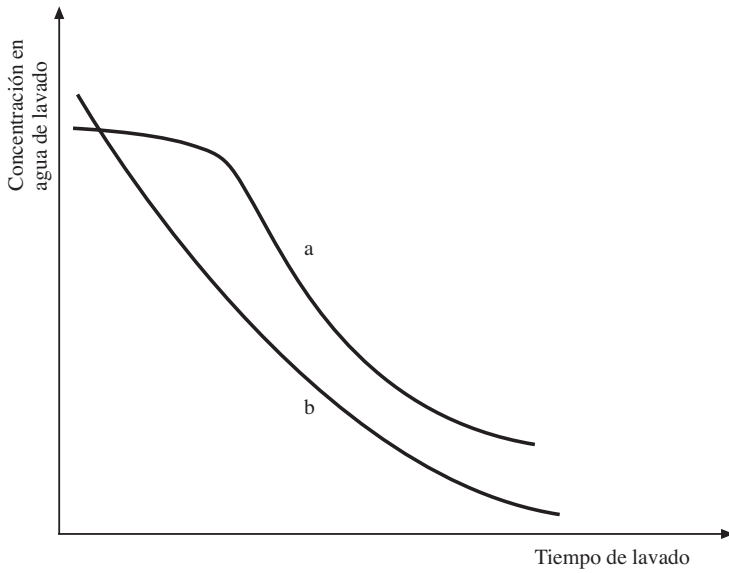


Figura 10.2. Concentración de sólidos solubles en el agua de lavado: a) Mismo camino. b) Distinto camino.

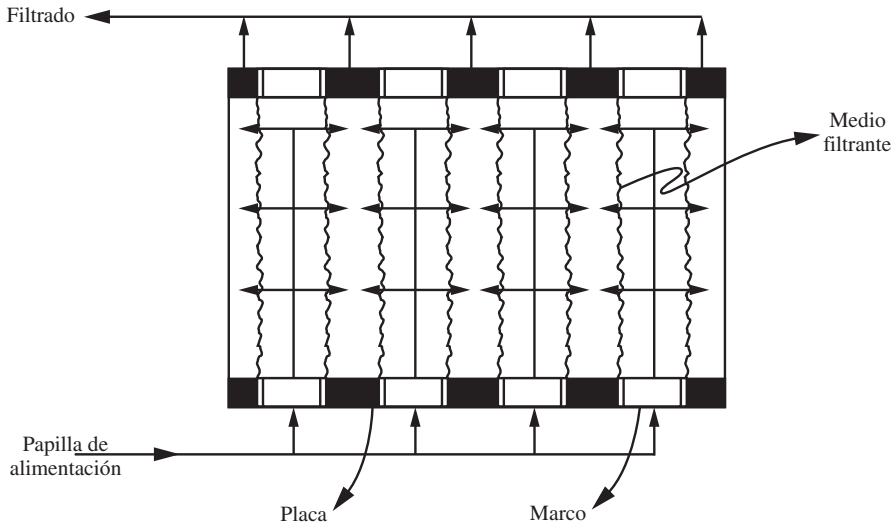


Figura 10.3. Operación de filtración en un filtro prensa de marcos y placas.

En el caso que el área de lavado coincida con la del filtrado ($A_L = A$), se utilizará esta expresión para el cálculo del caudal de lavado, en la que V es el volumen de líquido filtrado al final de la operación de filtración.

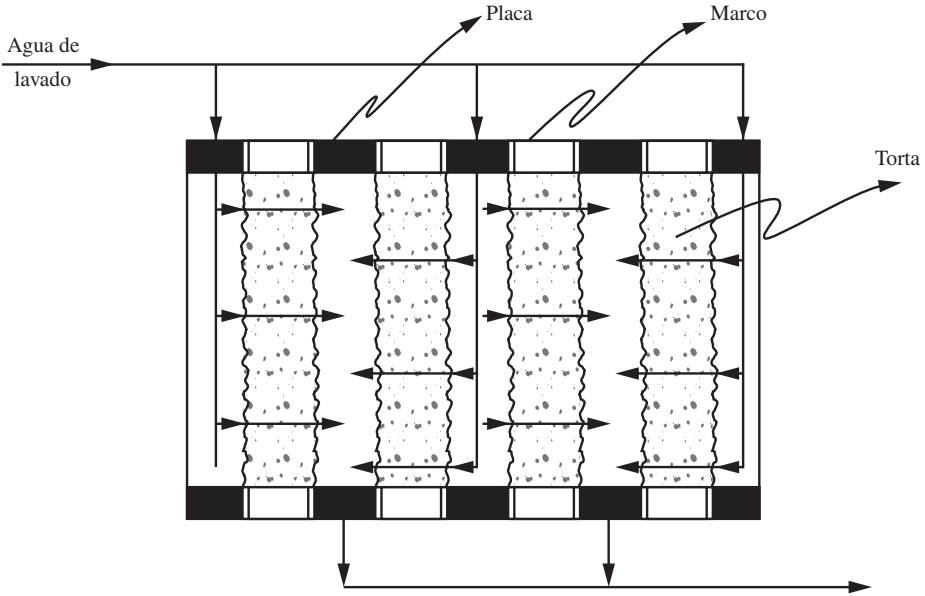


Figura 10.4. Operación de lavado de la torta.

Para filtros prensa de marcos y placas el área de lavado es la mitad de la del filtrado, sin embargo, el líquido de lavado debe atravesar dos veces el medio filtrante, con lo que la ecuación 10.38 se deberá utilizar $2R_f$ en lugar de R_f , además de que $A_L = A/2$. Todo ello hace que se obtenga la siguiente expresión:

$$q_L = \frac{1}{4} \frac{A^2 (-\Delta P)}{\eta \left(\frac{\alpha \rho S}{1 - MS} V + A R_f \right)} \quad [10.39a]$$

que en función de las constantes K_1 y K_2 definidas en las ecuaciones 10.25 y 10.26 permite expresar el caudal de lavado como:

$$q_L = \frac{1}{8 K_1 V + 4 K_2} \quad [10.39b]$$

El tiempo de lavado se obtiene al dividir el volumen de líquido necesario para la operación de lavado por el caudal, es decir:

$$t_L = \frac{V_L}{q_L} \quad [10.40]$$

siendo V_L el volumen de líquido que se va a utilizar para lavar la torta.

10.6. Capacidad de filtración

La capacidad de filtración se define como el cociente entre el volumen filtrado y el tiempo de un ciclo de filtración:

$$F(c) = \frac{V}{t_{\text{CICLO}}} \quad [10.41]$$

El tiempo de un ciclo es la suma de los tiempos de filtrado (t), y el no operativo (t'); entendiéndose como tiempo no operativo el de lavado (t_L) y un tiempo complementario (t^*), que es el tiempo necesario para la descarga, limpieza, montaje y puesta a punto del filtro, para empezar una nueva etapa de filtración.

$$t_C = t + t' = t + t_L + t^* \quad [10.42]$$

10.7. Condiciones óptimas de filtración a presión constante

Es evidente que en los procesos de filtración a caída de presión constante, a medida que transcurre el tiempo de filtración, el caudal de filtrado es menor. Es por ello, que deberá existir un momento en que el continuar el proceso de filtración no será rentable, por lo que existe un óptimo que es el que se intentará buscar. Este óptimo se cumple para el tiempo en que la capacidad de filtración es máxima.

Las condiciones óptimas de filtración se obtendrán al maximizar la función capacidad de filtración, es decir:

$$\frac{dF(c)}{dV} = 0$$

que es la condición de máximo. Al igualar a cero la derivada de la capacidad filtración con respecto al volumen filtrado será posible obtener el volumen óptimo. De igual modo puede obtenerse el tiempo óptimo de filtración si la derivada se realiza con respecto al tiempo. La diferencia estriba en que para el primer caso el tiempo debe expresarse en función del volumen de filtrado, mientras que en el segundo es el volumen el que debe expresarse en función del tiempo de filtrado.

Para el caso concreto que el tiempo no operativo, t' , sea un valor determinado, el modo de obtener el óptimo se describe a continuación.

El tiempo de filtración es función del volumen filtrado, que de la ecuación 10.27 se obtiene:

$$t = K_1 V^2 + K_2 V \quad [10.43]$$

con lo que la capacidad de filtración se puede expresar como:

$$F(c) = \frac{V}{(K_1 V^2 + K_2 V) + t'}$$

el óptimo se encuentra derivando esta expresión, e igualando a cero:

$$\frac{dF(c)}{dV} = \frac{d}{dt} \left[\frac{V}{(K_1 V^2 + K_2 V) + t'} \right] = 0$$

Operando se obtiene:

$$t' = K_1 V^2 \quad [10.44]$$

que es el tiempo no operativo para que el volumen de filtrado resulte óptimo.

Si se da un tiempo no operativo de terminado, el volumen de filtrado para que la capacidad de filtración sea óptima, será:

$$V_{\text{ÓPTIMO}} = \sqrt{\frac{t'}{K_1}} \quad [10.45]$$

El tiempo óptimo se obtendrá al sustituir este valor del volumen en la ecuación 10.43:

$$t_{\text{ÓPTIMO}} = t' + K_2 \sqrt{\frac{t'}{K_1}} \quad [10.46]$$

Existe el método gráfico de Sbarbaugh, que permite obtener directamente los valores del $V_{\text{ópt}}$ y $t_{\text{ópt}}$, a partir de la curva del volumen de filtrado en función del tiempo (figura 10.5). Para obtener $V_{\text{ópt}}$ y $t_{\text{ópt}}$, desde el punto de coordenadas $(-t', 0)$ se traza la tangente a la curva de filtración. El punto de tangencia posee como coordenadas los valores del tiempo y volumen de filtrado óptimos.

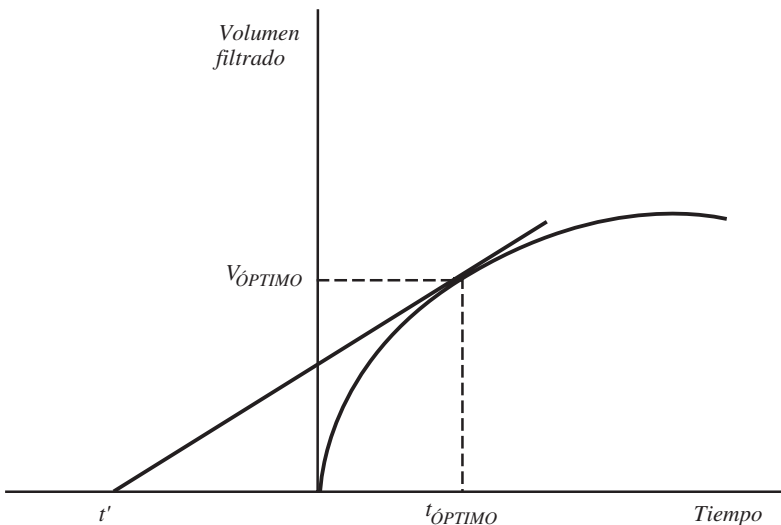


Figura 10.5. Método gráfico de la determinación de las condiciones óptimas de filtrado.

10.8. Filtros de vacío de discos rotativos

Otro tipo de filtros muy utilizados en la industria son los filtros rotativos, que operan a vacío. Estos filtros constan de un tambor en forma cilíndrica con distintos sectores, que va girando sobre su eje axial, y en el que se ejerce un vacío en su interior, para facilitar el paso del fluido, quedando retenidos los sólidos sobre la superficie cilíndrica lateral (figura 10.6). Tal como se observa en esta figura, una parte del cilindro se halla sumergida en la suspensión a filtrar. La torta depositada en la superficie es lavada mediante unas duchas de líquido de lavado. Tanto en la zona de filtración como en la de lavado, existe un vacío en el interior del cilindro, pero una vez superadas estas zonas, se elimina el vacío con el fin de que la torta pueda ser separada fácilmente con una cuchilla rascadora. De este modo, el filtro puede volver a empezar un nuevo ciclo de filtración. Este tipo de operación se realiza a caída de presión y caudal volumétrico constantes.

El tratamiento matemático, y posteriores cálculos, se realiza suponiendo que el área filtrante total (A) está formada por n superficies A_i , lo suficientemente pequeñas para suponer que se comportan como un filtro plano: $A = nA_i$.

El volumen filtrado V_i por una de las secciones A_i , al tratarse de un filtro plano, se puede obtener a partir de la ecuación 10.28:

$$V_i = A_i \left[\left(C^2 R_f^2 + \frac{2 C (-\Delta P)}{\eta} t_s \right)^{1/2} - C R_f \right]$$

en la que t_s es el tiempo en que la sección A_i se halla sumergida, que se corresponde al tiempo que se está filtrando.

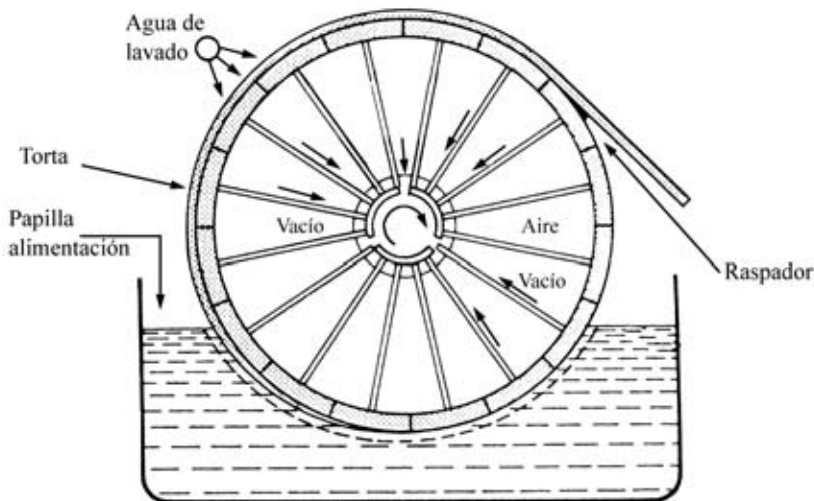


Figura 10.6. Filtro rotativo a vacío.

Si el tambor filtrante gira a una velocidad de rotación N , y su ángulo de inmersión es ϕ , el tiempo que se halla sumergido será:

$$t_s = \frac{\phi}{2\pi N} \quad [10.47]$$

en la que el ángulo de inmersión se expresa en radianes.

El volumen total filtrado se obtiene al sumar los volúmenes de cada una de las secciones de filtrado consideradas:

$$V = nV_i = A \left[\left(C^2 R_f^2 + \frac{2C(-\Delta P)}{\eta} \frac{\phi}{2\pi N} \right)^{1/2} - C R_f \right] \quad [10.48]$$

El caudal de filtrado es función del volumen de filtrado, y se obtiene multiplicando el volumen filtrado por la velocidad de giro del tambor:

$$q = N V = N A \left[\left(C^2 R_f^2 + \frac{2C(-\Delta P)}{\eta} \frac{\phi}{2\pi N} \right)^{1/2} - C R_f \right] \quad [10.49]$$

A veces resulta interesante calcular el espesor de torta que se deposita en la superficie del filtro. En un ciclo de filtración, cuando un punto de la superficie del filtro penetra en la suspensión a filtrar, se empiezan a depositar los sólidos insolubles. A medida que transcurre el tiempo en este punto se van depositando mayor cantidad de sólidos, lo que acarrea que el espesor de torta depositada vaya aumentando, dependiendo evidentemente del tiempo que este punto haya estado sumergido. Tal como se ha visto en la ecuación 10.47, este tiempo depende del ángulo de inmersión.

Para una de las áreas A_i , la masa de sólidos depositada se obtiene a partir de la ecuación 10.13:

$$z = \frac{\rho V_i S}{1 - M S} \frac{1}{\rho_s (1 - \varepsilon) A_i}$$

en la que el espesor de torta depositada es función del volumen V_i filtrado. Pero como este volumen viene dado por la ecuación 10.48, siendo el área de filtración A_i , si se tiene presente la definición de la constante C en función de la resistencia de la torta α ; el espesor se obtendrá mediante la ecuación:

$$z = \frac{1}{\rho_s (1 - \varepsilon) \alpha} \left[\left(R_f^2 + \frac{2(-\Delta P)}{\eta C} \frac{\phi}{2\pi N} \right)^{1/2} - R_f \right] \quad [10.50]$$

Esta ecuación permite obtener el espesor de torta que se forma, para un ángulo de filtro sumergido de ϕ radianes.

PROBLEMAS

Problema 10.1

Un filtro de placas y marcos, que opera a presión constante, requiere una hora para separar 600 litros de filtrado de una suspensión acuosa. Calcular la capacidad de filtración si la velocidad inicial de filtración es de 60 l/min, y además, se necesitan 8 litros de agua para lavar la torta depositada y se emplean 35 minutos para la descarga, limpieza y montaje del filtro.

El caudal de filtrado viene dado por la ecuación 10.19b, que con la definición de la constante C [ec. 10.23] se transforma en:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{A^2 (-\Delta P)}{\eta \left(\frac{V}{C} + A R_f \right)}$$

Para filtración a caída de presión constante $(-\Delta P) = \text{cte}$, la integración de esta ecuación permite obtener:

$$K_1 V^2 + K_2 V - t = 0$$

en la que las constantes K_1 y K_2 se han definido en las ecuaciones 10.25 y 10.26.

Para $t = 0$: $[dV/dt] = 0$

$$\left(\frac{dV}{dt} \right)_{t=0} = 60 \frac{1}{\text{min}} = \frac{A (-\Delta P)}{\eta R_f} = \frac{1}{K_2}$$

de la que se obtiene: $K_2 = 1.000 \text{ s/m}^3$

Para $t = 60 \text{ min}$:

$V = 600 \text{ litros} = 0,6 \text{ m}^3$, con lo que:

$$K_1 (0,6)^2 + K_2 (0,6) - 3.600 = 0$$

obteniéndose: $K_1 = 8.333,33 \text{ s/m}^6$

Es importante resaltar que el caudal de lavado coincide con el del final de filtrado, y para filtros prensa de marcos y placas, la ecuación 10.39b permite el cálculo del caudal de filtrado.

$$q_L = \frac{1}{8 K_1 V + 4 K_2}$$

Como al final del filtrado se han obtenido $0,6 \text{ m}^3$ y las constantes K_1 y K_2 se han obtenido anteriormente, el caudal de lavado será: $q_L = 2,273 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$.

El tiempo de lavado se obtiene al dividir el volumen de lavado por el caudal:

$$t_L = \frac{80 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{2,273 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}} = 3.520 \text{ s}$$

La capacidad de filtración se obtiene a partir de la ecuación 10.41, en la que el tiempo de un ciclo viene dado por la ecuación 10.42; por tanto:

$$F(c) = \frac{V}{t + t_L + t^*}$$

en la que: $V = 0,6 \text{ m}^3$ $t = 3.600 \text{ s}$ $t_L = 3.520 \text{ s}$ $t^* = 35 \cdot 60 \text{ s} = 2.100 \text{ s}$

Con lo que la capacidad de filtración será:

$$F(c) = 6,51 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s} = 3,91 \text{ litros/min}$$

Problema 10.2

Para filtrar una suspensión acuosa se utiliza un filtro prensa de marcos y placas. Trabajando a velocidad constante de filtración, al cabo de 45 minutos se obtienen 250 litros de filtrado. En este periodo de tiempo, la caída de presión aumenta desde 0,40 kp/cm² hasta 3,5 kp/cm². Si se deseara trabajar a presión constante de 3,5 kp/cm², ¿qué cantidad de filtrado se obtendría al cabo de los 45 minutos?

La expresión que da la variación del volumen de filtrado con el tiempo viene dada por la ecuación 10.32:

$$q = \frac{dV}{dt} = \frac{A^2 (-\Delta P)}{\eta \left(\frac{V}{C} + A R_f \right)}$$

Filtración a caudal volumétrico constante $q = (dV/dt) = \text{constante}$:

$$q = \frac{250 \text{ litros}}{45 \text{ min}} = 5,556 \text{ litros/min} = 9,26 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$$

Como se opera a caudal volumétrico constante no es necesario integrar la ecuación anterior, sino que la caída de presión ($-\Delta P$) puede obtenerse directamente en función del tiempo de filtrado [ec. 10.36]:

$$(-\Delta P) = K_3 t + K_4$$

en la que las constantes K_3 y K_4 vienen dadas por las ecuaciones 10.34 y 10.35:

$$K_3 = \frac{\eta q^2}{CA^2} \quad K_4 = \frac{\eta R_f q}{A}$$

Para $t = 0$: $(-\Delta P) = 0,4 \text{ kp/cm}^2 = 39.200 \text{ Pa}$

$$K_4 = (-\Delta P) = 39.200 \text{ Pa}$$

Para $t = 45 \text{ min} = 2.700 \text{ s}$: $(-\Delta P) = 3,5 \text{ kp/cm}^2 = 343.000 \text{ Pa}$

$$K_3 = \frac{(-\Delta P) - K_4}{t} = \frac{(343.000 - 39.200) \text{ Pa}}{2.700 \text{ s}} = 112,52 \text{ Pa/s}$$

Filtración a caída de presión constante $(-\Delta P) = 3,5 \text{ kp/cm}^2$

Al integrar la ecuación diferencial, con la condición límite para $t = 0$, $V = 0$, se obtiene una ecuación de segundo grado, respecto al volumen de filtrado [ec. 10.27]:

$$V^2 + 2 C A R_f V - \frac{2 C A^2 (-\Delta P) t}{\eta} = 0$$

De la expresión de K_3 se obtiene:

$$\frac{C A^2}{\eta} = \frac{q^2}{K_3} = \frac{(9,26 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s})^2}{112,52 \text{ Pa/s}} = 7,62 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^6}{\text{Pa}\cdot\text{s}}$$

De la relación:

$$\frac{K_4}{K_3} = \frac{\eta R_f q}{A} = \frac{C A^2}{\eta q^2} = \frac{C A^2 R_f}{q}$$

se obtiene:

$$C A R_f = q \frac{K_4}{K_3} = (9,26 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}) \frac{(39.200 \text{ Pa})}{(112,52 \text{ Pa/s})} = 32,26 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Los diferentes valores obtenidos se sustituyen en la ecuación de segundo grado:

$$V^2 + 2 (32,26 \cdot 10^{-3}) V - 2 (7,62 \cdot 10^{-11}) (3,5 \cdot 9,8 \cdot 10^4) \cdot 2700 = 0$$

$$V^2 + 0,0645 V - 0,1411 = 0$$

Al resolver esta ecuación, la raíz negativa no tiene sentido físico, por lo que sólo se toma la positiva: $V = 0,345 \text{ m}^3$.

Por tanto, al cabo de 45 minutos de filtración a caída de presión constante de $3,5 \text{ kp/cm}^2$ se obtienen 345 litros de filtrado.

Problema 10.3

Una suspensión acuosa que contiene un 7% en sólidos insolubles es filtrada, a razón de 10 tn/h , utilizando un filtro prensa de marcos y placas, que trabaja a presión constante de 3 at. Experimentalmente se ha encontrado que la torta depositada contiene un 50% de humedad, siendo la densidad del sólido seco $3,5 \text{ g/cm}^3$, y

el diámetro equivalente de las partículas depositadas 0,002 mm. El lavado de la torta depositada empieza cuando se han filtrado 10.000 kg/h de la papilla de alimentación, utilizándose 150 litros de agua; mientras que en las operaciones de descarga, limpieza y montaje se emplean 30 minutos. Si se considera despreciable la resistencia que el medio filtrante ofrece a la filtración; calcular: a) La resistencia específica de la torta. b) Volumen de agua filtrada al cabo de una hora c) Tiempo necesario para realizar el lavado. d) Capacidad de filtración

Datos. Para la constante de Kozeny puede tomarse $K'' = 5$.

Propiedades del agua: Densidad 1.000 kg/m³; Viscosidad 1 mPa·s

En una hora se filtran 10.000 kg de la suspensión.

Sólido seco depositado: $W = (10.000) (0,07) = 700$ kg.

$$M = \frac{\text{Peso torta húmeda}}{\text{Peso torta seca}} = \frac{100 \text{ kg torta húmeda}}{50 \text{ kg torta seca}} = 2$$

$$M = \frac{\text{Masa sólido seco} + \text{Masa líquido retenido}}{\text{Masa sólido seco}}$$

Si V_T = Volumen de torta depositada

$$M = 1 + \frac{V_T \varepsilon \rho}{V_T (1 - \varepsilon) \rho_p} = 1 + \frac{\varepsilon \rho}{(1 - \varepsilon) \rho_p}$$

sustituyendo las variables por su valor se obtiene que la porosidad es $\varepsilon = 0,778$.

Superficie específica de la partícula:

$$a_{s0} = 6/d_p = 6/(0,002 \cdot 10^{-3} \text{ m}) = 3 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$$

La resistencia específica de la torta se obtiene a partir de la ecuación 10.6:

$$\alpha = \frac{K'' (1 - \varepsilon) (a_{s0})^2}{\varepsilon^3 \rho_s} = \frac{5 (1 - 0,778) (3 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1})^2}{(0,778)^3 (3.500 \text{ kg/m}^3)} = 6,07 \cdot 10^9 \frac{\text{m}}{\text{kg}}$$

Para filtración a caída de presión constante, el volumen de filtrado viene dado por la ecuación 10.28. Como la resistencia del medio es despreciable $R_f = 0$, dicha ecuación se simplifica y queda de la forma:

$$V = A \left[\left(\frac{2 C (-\Delta P)}{\eta} t \right)^{1/2} \right]$$

en la que:

$$(-\Delta P) = 3 \text{ at} \frac{9,8 \cdot 10^4 \text{ Pa}}{1 \text{ at}} = 2,94 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Además, de la definición de la constante C [ec. 10.23]:

$$C = \frac{1 - MS}{\alpha \rho S} = \frac{1 - (2) \cdot (0,07)}{(6,07 \cdot 10^9 \text{ m/kg}) (10^3 \text{ kg/m}^3) (0,07)} = 2,024 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$$

Volumen de filtrado recogido en 1 hora:

$$V = \frac{W(1 - MS)}{\rho S} = \frac{(700 \text{ kg s.s.}) (1 - 2 \cdot 0,07)}{(1.000 \text{ kg/m}^3) (0,07)} = 8,6 \text{ m}^3$$

con lo que, el área de filtración se obtiene de la ecuación 10.28, con $R_f = 0$:

$$8,6 \text{ m}^3 = A \left[\frac{2 (2,024 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2) (2,94 \cdot 10^5 \text{ Pa})}{(10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s})} (3.600 \text{ s}) \right]^{1/2}$$

Obteniéndose un área de filtración: $A = 4,155 \text{ m}^2$.

El caudal de lavado coincide con el del final del filtrado, y como $R_f = 0$, la ecuación 10.39 se simplifica:

$$q_L = \frac{1}{4} \frac{CA^2(-\Delta P)t}{\eta V}$$

$$\text{como: } \begin{array}{lll} A = 4,155 \text{ m}^2 & C = 2,024 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2 & V = 8,6 \text{ m}^3 \\ \eta = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s} & (-\Delta P) = 2,94 \cdot 10^5 \text{ Pa} & \end{array}$$

se obtiene: $q_L = 2,99 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$

$$\text{El tiempo de lavado será: } t_L = \frac{V_L}{q_L} = \frac{(0,15 \text{ m}^3)}{(2,99 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s})} = 502 \text{ s}$$

Cálculo de la capacidad de filtración:

$$F(c) = \frac{V}{t + t_L + t^*} = \frac{8,6 \text{ m}^3}{(3.600 + 502 + 1.800) \text{ s}} = 1,457 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$F(c) = 1,457 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 87,42 \text{ litros/min}$$

Problema 10.4

Una solución acuosa que contiene un 10% de sólidos en suspensión es filtrada en un filtro prensa de marcos y placas. En un experimento previo se ha obtenido que la relación torta húmeda/torta seca es de 2,2, siendo la torta incompresible de resistencia específica $2,5 \cdot 10^{10} \text{ m/kg}$. A lo largo de una operación a presión constante de 3 at, la variación de la cantidad de filtrado con el tiempo se recoge en la siguiente tabla:

Tiempo (minutos)	8	18	31	49	70	95
Masa filtrado (kg)	1.600	2.700	3.720	4.900	6.000	7.125

A partir de estos datos calcular: a) Área total del filtro y resistencia del medio filtrante. b) Si el tiempo no operativo de cada ciclo filtrante son 26 minutos, calcular el volumen de filtrado que se recogerá al cabo de 10 horas, si se opera con el ciclo óptimo de filtración. c) Se desea filtrar la misma disolución, pero trabajando a caudal volumétrico constante. Si al cabo de 142 minutos la caída de presión que experimenta el fluido al atravesar la torta y el medio filtrante es de 4,5 at, calcular el volumen de filtrado que se obtiene y el caudal con el que circula.

Datos. Propiedades del agua: Densidad 1.000 kg/m³; Viscosidad 1,2 mPa·s.

Filtración a caída de presión constante

En este tipo de operación, la variación del volumen de filtrado y el tiempo se correlacionan mediante una ecuación de segundo grado [ec. 10.27]:

$$K_1 V^2 + K_2 V - t = 0$$

en la que las constantes K_1 y K_2 vienen dadas por las ecuaciones 10.25 y 10.26. La ecuación 10.27 es la de una recta si se representa t/V frente a V , con una pendiente K_1 y ordenada en el origen K_2 .

a) De los datos del enunciado puede construirse la tabla:

t (s)	480	1.080	1.860	2.940	4.200	5.700
V (m ³)	1,6	2,7	3,72	4,9	6,0	7,125
t/V (s/m ³)	300	400	500	600	700	800

Del ajuste de estos datos, por el método de los mínimos cuadrados, se obtienen las constante K_1 y K_2

$$K_1 = 90,40 \text{ s/m}^6 \qquad K_2 = 157,58 \text{ s/m}^3$$

El valor de la constante C se obtiene a partir de la ecuación 10.23:

$$C = \frac{1 - M S}{\alpha \rho S} = \frac{1 - (2,2) \cdot (0,1)}{(2,5 \cdot 10^{10} \text{ m/kg}) (1.000 \text{ kg/m}^3) (0,1)} = 3,12 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2$$

Cálculo del área de filtración: De la expresión de la constante K_1 (Ec. 10.25) es posible obtener este área:

$$A^2 = \frac{\eta}{2 K_1 C (-\Delta P)} = \frac{1,2 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}}{2 (90,4 \text{ s/m}^6) (3,12 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2) (3 \cdot 9,8 \cdot 10^4 \text{ Pa})} = 72,357 \text{ m}^2$$

luego: $A = 8,506 \text{ m}^2$.

Cálculo de la resistencia del medio filtrante

De la expresión de la constante K_2 [ec. 10.26] es posible obtener el valor de la resistencia del medio filtrante:

$$R_f = \frac{K_2 A (-\Delta P)}{\eta} = \frac{(157,58 \text{ s/m}^3) (8,506 \text{ m}^2) (3 \cdot 9,8 \cdot 10^4 \text{ Pa})}{1,2 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}} = 3,284 \cdot 10^{11} \text{ m}^{-1}$$

b) Capacidad de filtración: Viene dada por la ecuación 10.41, que en este caso es:

$$F(c) = \frac{V}{t + t^*} \quad \text{en la que } t^* = 26 \cdot 60 \text{ s} = 1.560 \text{ s}$$

De la ecuación 10.27 se tiene: $t = K_1 V^2 + K_2 V$

y la capacidad de filtración será:

$$F(c) = \frac{V}{K_1 V^2 + K_2 V + t^*}$$

El ciclo óptimo se obtiene al derivar esta función con respecto al volumen de filtrado, e igualar a cero esta derivada:

$$\frac{d}{dt} [F(c)] = \frac{K_1 V^2 + K_2 V + t^* - V(2K_1 V + K_2)}{(K_1 V^2 + K_2 V + t^*)^2} = 0$$

por lo que el numerador de esta expresión es igual a cero, o lo que es lo mismo:

$$K_1 V^2 = t^*$$

de la que se obtiene $V_{\text{ópt}} = (t^*/K_1)^{1/2}$

Como $t^* = 1.560 \text{ s}$ y $K_1 = 90,40 \text{ s/m}^6$ se obtiene un volumen óptimo de filtrado:

$$V_{\text{ópt}} = 4,154 \text{ m}^3$$

Tiempo de filtración. Se obtiene de la expresión:

$$\begin{aligned} t &= K_1 V^2 + K_2 V \\ t &= (90,4 \text{ s/m}^6) (4,154 \text{ m}^3)^2 + (157,58 \text{ s/m}^3) \cdot (4,154 \text{ m}^3) \\ t &= 2.215 \text{ s} = 36 \text{ min } 55 \text{ s} \end{aligned}$$

Tiempo de un ciclo $t_{\text{ciclo}} = t + t^* = 2.215 \text{ s} + 1.560 \text{ s} = 3.775 \text{ s}$

Número de ciclos: $n.^\circ \text{ de ciclos} = \frac{(10 \text{ h}) (3.600 \text{ s/h})}{3.775 \text{ s}} = 9,536 \text{ ciclos}$

Se han cumplido 9 ciclos completos más la parte de 0,536 ciclos, que se corresponden a: $[0,5364 \text{ ciclos}] \cdot (3.775 \text{ s/ciclo}) = 2.025 \text{ s}$.

Para este tiempo el volumen de filtrado obtenido se calcula mediante la ecuación de segundo grado:

$$t = K_1 V^2 + K_2 V$$

$$2.025 = 90,4 V^2 + 157,58 V$$

La raíz negativa de esta ecuación no tiene sentido físico, por lo que la positiva da el volumen de filtrado obtenido en los 2.025 s: $V = 3,941 \text{ m}^3$.

El volumen de filtrado en las 10 horas de operación serán:

$$V = (9 \text{ ciclos}) \cdot (4,154 \text{ m}^3/\text{ciclo}) + 3,941 \text{ m}^3 = 41,327 \text{ m}^3$$

Filtración a caudal volumétrico constante

c) El volumen de filtrado se obtiene a partir de la ecuación 10.37:

$$V = A \left[\left(\frac{C^2 R_f^2}{4} + \frac{C(-\Delta P)}{\eta} t \right)^{1/2} - \frac{C R_f}{2} \right]$$

Los valores de las diferentes variables de esta ecuación son:

$$A = 8,506 \text{ m}^2; \quad R_f = 3,284 \cdot 10^{11} \text{ m}^{-1};$$

$$C = 3,12 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2; \quad (-\Delta P) = (4,5) (9,8 \cdot 10^4) \text{ Pa};$$

$$t = 8.520 \text{ s}$$

de donde se obtiene un volumen de filtrado de: $V = 7,983 \text{ m}^3$.

Caudal de filtrado:

$$q = \frac{V}{t} = \frac{7,983 \text{ m}^3}{142 \text{ min}} = 0,0562 \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$$

$$q = 0,0562 \text{ m}^3/\text{min} = 56,2 \text{ litros}/\text{min} = 3,373 \text{ m}^3/\text{h}$$

Problema 10.5

A partir de una suspensión acuosa que contiene 0,25 kg de sólidos insolubles por cada kg de agua, se desean obtener 60 l/min de filtrado, utilizando un filtro de tambor rotativo. La caída de presión que experimenta el fluido es de 300 mm de Hg, obteniéndose una torta que contiene un 50% de humedad y un filtrado que posee una viscosidad de 1,2 mPa·s y una densidad de 1.000 kg/m³. El tiempo del ciclo del filtro es 5 minutos, hallándose sumergido en un 30% de la superficie total. Las partículas que forman la suspensión pueden considerarse esféricas de 6·10⁻³ mm de diámetro y 900 kg/m³ de densidad. Si se supone que la resistencia que el medio filtrante ofrece a la filtración es despreciable, y que para la constante de Kozeny se puede tomar el valor de 5; calcular: a) Resistencia específica de la torta. b) Área del filtro. c) Espesor de la torta que se deposita.

$$\text{Sólidos en suspensión: } S = \frac{0,25 \text{ kg sólidos}}{(1 + 0,25) \text{ kg totales}} = 0,2 \quad (20 \% \text{ de sólidos})$$

$$M = \frac{\text{Torta húmeda}}{\text{Torta seca}} = \frac{1 \text{ kg torta húmeda}}{0,5 \text{ kg torta seca}} = 2$$

Como:

$$M = 1 + \frac{V_T \varepsilon \rho}{V_T (1 - \varepsilon) \rho_P}$$

con los valores de $\rho = 1.000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_P = 900 \text{ kg/m}^3$, es posible obtener el valor de la porosidad: $\varepsilon = 0,4737$.

$$\text{Superficie específica de partícula: } a_{S0} = \frac{6}{d_p} = \frac{6}{6 \cdot 10^{-6} \text{ m}} = 10^6 \text{ m}^{-1}$$

Resistencia específica de la torta: Se obtiene a partir de la ecuación 10.6:

$$\alpha = \frac{K'' (1 - \varepsilon) (a_{S0})^2}{\varepsilon^3 \rho_S} = \frac{5 (1 - 0,4737) (10^6 \text{ m}^{-1})^2}{(0,4737)^3 (900 \text{ kg/m}^3)} = 2,75 \cdot 10^{10} \text{ m/kg}$$

La constante C se obtiene de la ecuación 10.23:

$$C = \frac{1 - MS}{\alpha \rho S} = \frac{1 - 2 (0,2)}{(2,75 \cdot 10^{10} \text{ m/kg}) (1.000 \text{ kg/m}^3) (0,2)} = 1,09 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2$$

Número de rps: $N = 1/(5 \text{ min}) = 0,2 \text{ rpm} = 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ rps}$

Caída de presión:

$$(-\Delta P) = \left(\frac{300}{760} \text{ atm} \right) \left(\frac{1,0333 \text{ at}}{1 \text{ atm}} \right) \left(\frac{9,8 \cdot 10^4 \text{ Pa}}{1 \text{ at}} \right) = 39.973 \text{ Pa}$$

Para un filtro rotatorio, el caudal de filtrado se obtiene de la ecuación 10.49, que para el presente caso se simplifica, ya que la resistencia del medio filtrante se puede despreciar ($R_f = 0$):

$$q = NV = NA \left[\left(\frac{2C(-\Delta P)}{\eta} \frac{\phi}{2\pi N} \right)^{1/2} \right]$$

Con los datos que se dispone:

$$\phi = 0,3 \cdot (2\pi) \text{ radianes}; \quad \eta = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s} \quad q = 60 \text{ litros/min} = 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s};$$

$$(-\Delta P) = 39.972,4 \text{ Pa}; \quad C = 1,09 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2; \quad N = 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

Al sustituir estos datos en la ecuación anterior es posible calcular el área del filtro, obteniéndose: $A = 11,73 \text{ m}^2$.

El espesor de la torta formada se obtiene a partir de la ecuación 10.50, pero como $R_f = 0$, la ecuación se simplifica:

$$z = \frac{1}{\rho_s (1 - \varepsilon) \alpha} \left(\frac{2 (-\Delta P)}{\eta C} \frac{\phi}{2 \pi N} \right)^{1/2}$$

en la que $(-\Delta P)$; η , ϕ , C y N poseen los valores arriba indicados, y además:

$$\rho_p = 900 \text{ kg/m}^3; \quad \varepsilon = 0,4737; \quad \alpha = 2,75 \cdot 10^{10} \text{ m/kg}$$

Estos datos permiten obtener el espesor de torta formado: $z = 0,018 \text{ m} = 18 \text{ mm}$.

Procesos de separación por membranas 11

11.1. Introducción

En general, para llevar a cabo un proceso de separación o concentración es necesario aportar cantidades elevadas de energía. Sin embargo, en los denominados procesos de separación por membrana el consumo de energía requerido para realizar una separación es bajo, por lo que estos procesos han ido adquiriendo cierta importancia en los últimos años. En estos procesos se logran separar ciertos componentes de una mezcla utilizando una membrana porosa, la cual es selectiva al paso de algunos de los componentes de la mezcla. Entre estos procesos cabe destacar la ósmosis inversa y la ultrafiltración, que se basan en lograr la separación mediante una membrana semipermeable. La diferencia entre ambas es difícil de discernir, aunque en la ósmosis inversa la membrana suele retener moléculas de bajo peso molecular; mientras que en la ultrafiltración suelen ser las moléculas de pesos moleculares más elevados las que quedan retenidas. En la figura 11.1 se muestra una clasificación de las operaciones de separación según sea el tamaño de partícula retenida.

En general, una etapa basada en la separación por membranas puede representarse según el esquema de la figura 11.2. El alimento F con una concentración C_0 de cierto componente se introduce en el sistema, en el que una parte permea a través de la membrana, obteniéndose una corriente denominada **permeado** (P) con una concentración C_P en el componente considerado. Cierta parte de la alimentación no pasa a través de la membrana, lo que da una corriente de **retenido** (S) con una concentración C_S .

Resulta conveniente realizar ciertas definiciones previas que se utilizan en los procesos de membrana, y que a continuación se exponen.

Retención o rechazo:

$$R = \frac{C_C - C_P}{C_C} = 1 - \frac{C_P}{C_C} \quad [11.1]$$

El punto de retención de una membrana es aquél que corresponde al peso molecular por encima del cual se retienen todas las moléculas. Este concepto en ultrafiltración se denomina **corte** («*cut-off*»). El que se dé un valor a este parámetro no quiere decir que todas las moléculas con tamaño inferior vayan a atravesar la mem-

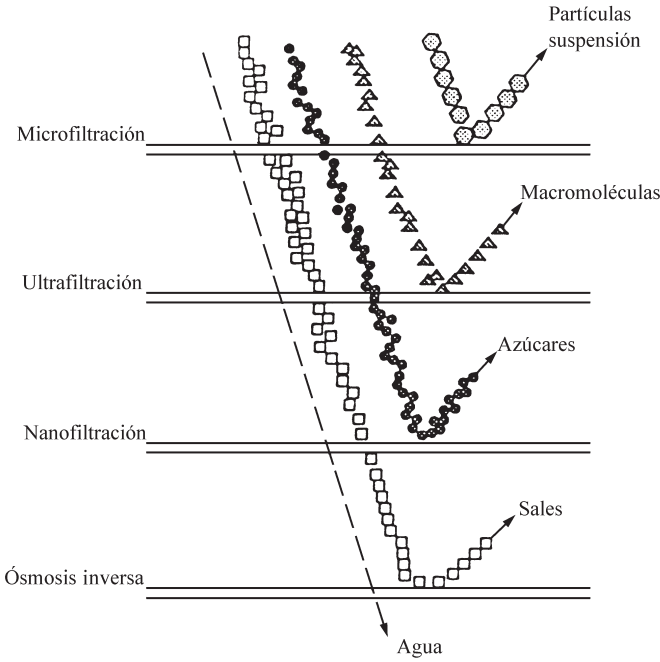


Figura 11.1. Clasificación de los procesos de membrana (adaptado de Cheryan, 1992).

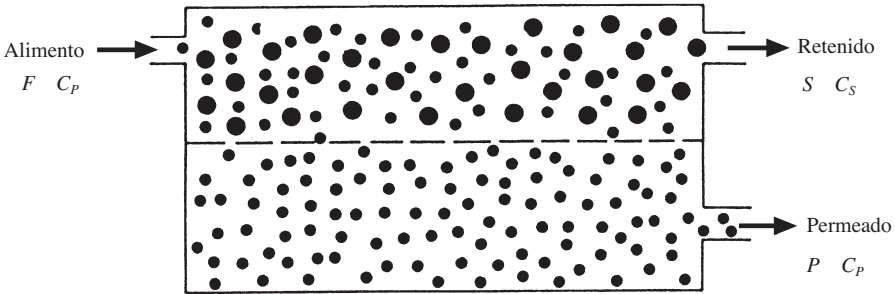


Figura 11.2. Unidad básica de separación por membrana.

brana, sino que cierta cantidad de ellas van a quedar retenidas. Por ello, cuando se da el valor de corte debe especificarse qué porcentaje de moléculas menores de este valor son rechazadas.

Factor de concentración (F_C): Es el cociente entre la concentración de la corriente de retenido y la de alimentación:

$$F_C = \frac{C_S}{C_C} \quad [11.2]$$

Factor de recuperación (Q): Es la relación entre la cantidad de permeado obtenido y la cantidad de alimento:

$$Q = \frac{P}{F} \quad [11.3]$$

El fenómeno de transferencia de materia a través de una membrana ya fue observado en 1748 por el abate Nollet, en una experiencia en que guardaba vino en botas fabricadas con estómago de animales, sumergiéndolas en agua. Al cabo de cierto tiempo el vino quedaba diluido debido al paso de agua hacia el interior de la bota.

Este fenómeno es conocido como **ósmosis**, y se basa en el hecho de que al poner dos soluciones de distinta concentración, separadas por una membrana semipermeable, existe una transferencia del disolvente desde la solución más diluida hacia la más concentrada. Ello hace que exista un aumento en la presión hidrostática, conocida como **presión osmótica**. Este proceso puede visualizarse en la figura 11.3A. Si en la zona de la solución concentrada se ejerce una presión suficiente para vencer la osmótica, el flujo de disolvente se invierte, es decir, pasa de la solución concentrada a la diluida. Este proceso es conocido como **ósmosis inversa** (figura 11.3B).

Para el cálculo de la presión osmótica se utiliza la ecuación de van't Hoff, dada a conocer en 1860, que se corresponde con la expresión:

$$p = iCRT \quad [11.4]$$

en la que p es la presión osmótica, C la concentración molar de soluto de la disolución, i el número de iones para solutos ionizables, R la constante de gases y T la temperatura absoluta.

Para fluidos alimentarios que contengan constituyentes de bajo peso molecular, su presión osmótica resulta más elevada. En la tabla 11.1 se dan las presiones osmóticas de algunos de estos fluidos.

Tabla 11.1. Presión osmótica de ciertos fluidos alimentarios a temperatura ambiente

Alimento	Concentración	Presión osmótica (kPa)
Ácido láctico	1% (p/v)	552
Café (extracto)	28% sólidos totales	3.450
Cloruro sódico	1% (p/v)	862
Lactosa	5% (p/v)	380
Leche	9% sólidos no grasos	690
Suero	6% sólidos totales	690
Zumos		
Manzana	15% sólidos totales	2.070
Naranja	11% sólidos totales	1.587
Uva	16% sólidos totales	2.070

Fuente: Cheryan (1986).

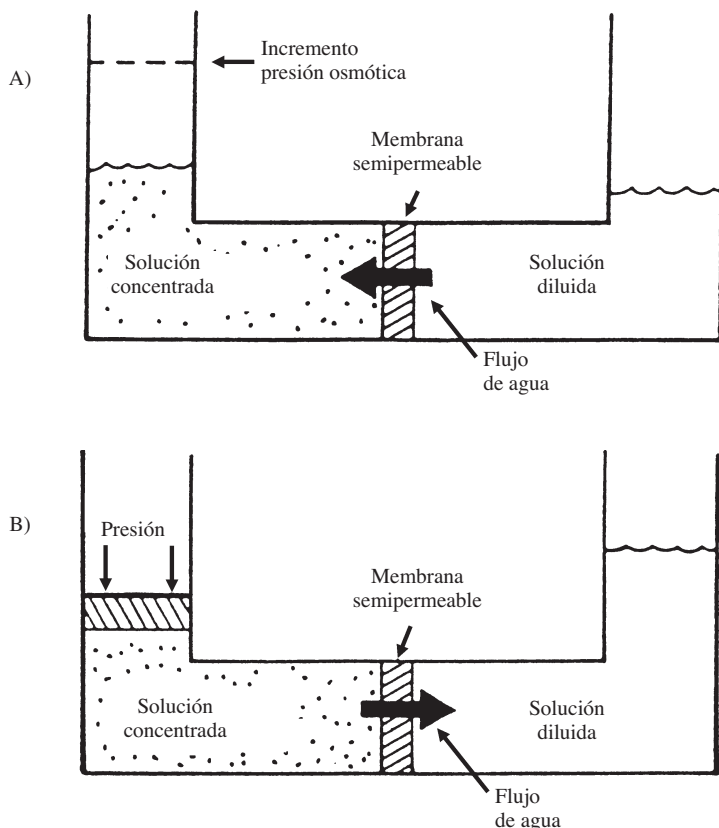


Figura 11.3. Esquema de los fenómenos de ósmosis (A) y de ósmosis inversa (B).

11.1.1. Etapas en la transferencia de materia

En los procesos de Ultrafiltración y Ósmosis inversa, los componentes que se transfieren a través de la membrana semipermeable deben atravesar una serie de resistencias desde la solución más concentrada a la más diluida. Esto supone que en la transferencia global de masa aparecen una serie de etapas sucesivas que pueden resumirse en las cuatro que a continuación se exponen:

- 1) Transferencia desde el seno de la solución concentrada hasta la pared de la membrana.
- 2) Paso del componente de la solución a la membrana.
- 3) Transferencia a través de las diferentes capas de la membrana, desde la pared en contacto con la solución concentrada hasta la pared en contacto con la solución diluida.
- 4) Transferencia desde la pared de membrana hasta el líquido menos concentrado.

Como se verá más adelante, a estas etapas será necesario añadir alguna más. Ello es debido a que puede formarse una capa de polarización.

11.1.2. Polarización por concentración

En los procesos de separación por membranas, la transferencia de materia es prácticamente selectiva para el disolvente, es decir, el disolvente es el que se transfiere a través de la membrana. Como en la primera etapa de transferencia de materia, desde el seno de la solución concentrada hasta la pared de la membrana, se transfiere soluto, y éste no atraviesa la membrana, sino que sólo lo hace el disolvente; el efecto final que se produce es un aumento de la concentración de soluto en las inmediaciones de la pared de la membrana. Esta capa de mayor concentración se la denomina **capa de polarización**.

Si C_m es la concentración de soluto en las inmediaciones de la membrana y C_C la correspondiente al seno de la solución, se define el **factor de polarización** como el cociente entre ambas concentraciones:

$$F_p = \frac{C_m}{C_C} \quad [11.5]$$

El efecto de esta capa es desfavorable en el proceso global de transferencia de materia, ya que el aumento de concentración de esta capa ($C_m > C_C$) provoca corrientes difusivas desde esta capa hacia el seno de la disolución. Al mismo tiempo provoca un aumento de la presión osmótica, con lo que el flujo de permeado disminuirá, tal como se verá más adelante. Otro factor negativo es que debido al aumento de la concentración se produzcan precipitaciones del soluto sobre la pared de la membrana, lo que interferirá en el proceso global de transferencia de materia.

Para evitar estos efectos nocivos, en el diseño de los procesos de separación por membranas se incorpora agitación, o bien se hace circular el fluido en régimen turbulento. A pesar de todo ello, no se logra eliminar por completo la capa de polarización.

11.2. Modelos de transferencia a través de la membrana

Para explicar la transferencia de materia a través de la membrana se han desarrollado diferentes modelos, de entre los cuales, a continuación se exponen algunos de una forma somera.

11.2.1. Modelo de solución-difusión

En este modelo se supone que los diferentes componentes de la disolución (disolvente y solutos) cuando llegan a la pared de la membrana se disuelven en ella para luego difundir a su través de forma independiente.

La etapa de disolución se realiza de acuerdo con una ley de distribución de equilibrio, pudiéndose hablar de un coeficiente de partición análogo al de otras operaciones básicas (p. ej.: extracción líquido-líquido). Según esta ley de distribución la membrana resulta selectiva a la disolución de ciertos componentes. La etapa de difusión a través de la membrana viene impulsada por gradientes de presión y concentración entre los dos lados de las paredes de la membrana.

El flujo de cada componente de la disolución a través de la membrana viene dado por una expresión del tipo:

$$J_i = - \frac{D_i C_i}{RT} \text{ grad } (m_i) = - \frac{D_i C_i}{RT} \left(\frac{\partial m_i}{\partial m} \text{ grad } C_i + \bar{V}_i \text{ grad } P_i \right) \quad [11.6]$$

en la que: J_i = Densidad de flujo de componente i .

D_i = Coeficiente de difusión del componente i en la membrana.

C_i = Concentración del componente i en la membrana.

μ_i = Potencial químico.

V_i = Volumen molar parcial.

P_i = Presión aplicada.

11.2.2. Modelo simultáneo difusión y flujo capilar

En este modelo se supone que los dos mecanismos que intervienen son la difusión y flujo capilar a través de la membrana, de forma simultánea.

La difusión de los componentes se realiza de modo análogo al descrito en el modelo anterior, de tal forma que la difusión a través de la membrana es debida a la existencia de un gradiente de potencial químico. A este mecanismo de transferencia debe sumársele el debido a que la solución pasa desde la pared en contacto con la disolución concentrada hacia la otra a través de los canales existentes en el seno de la membrana. Este flujo adicional es proporcional al gradiente de presión existente entre ambos lados de la membrana, y ocurre de tal modo que la concentración no varía.

El hecho que el flujo de disolvente sea mayor al de los solutos es debido a que el coeficiente de difusión del primero es mucho mayor que el correspondiente a los solutos:

$$D_{\text{Disolvente}} \gg D_{\text{Soluta}}$$

En este modelo los flujos para disolvente y soluto vendrán dados por la expresión:

$$J_i = J_{\text{Difusión}} + J_{\text{Capilar}}$$

en la que $J_{\text{Difusión}}$ puede obtenerse según la expresión dada para el modelo solución-difusión; mientras que J_{Capilar} es la componente capilar que puede calcularse según la expresión:

$$J_{\text{Capilar}} = K C_i \text{ grad } P$$

en la que: K = Constante.

C_i = Concentración del componente i .

P = Presión aplicada.

11.2.3. Modelo simultáneo flujo viscoso y de fricción

En este modelo se supone que toda la transferencia se realiza a través de pequeños canales de la membrana. Estos canales se supone que no son rectos, y además que todos son iguales. Se supone que el fluido circula a través de los canales de la membrana en régimen laminar, por lo que es posible aplicar la ecuación de Fanning para calcular la velocidad de circulación en función de la caída de presión que experimenta el fluido al atravesar la membrana. De esta forma, se parte de la ecuación:

$$\frac{(-DP)}{r} = \frac{64}{Re} \frac{(v_C)^2}{2} \frac{d}{D_e} \quad [11.7]$$

en la que d es la longitud de cada canal, D_e el diámetro equivalente de cada canal, v_C la velocidad con la que el fluido circula por el canal, y Re el módulo de Reynolds. En esta ecuación puede sustituirse el módulo de Reynolds por su valor:

$$Re = \frac{r v_C D_e}{h}$$

El valor de la velocidad global puede expresarse en función de la velocidad lineal del fluido en cada canal, si se aplica la ecuación de continuidad, obteniéndose:

$$v = v_C \frac{d_m e}{d} \quad [11.8]$$

siendo: v = Velocidad global.

d_m = Espesor de la membrana.

d = Longitud de cada canal.

e = Porosidad de la membrana.

Si además se define la tortuosidad (τ^o) como la relación entre la longitud de un canal y el espesor de la membrana ($\tau^o = d/d_m$), al combinar las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$v = \frac{e (D_e)^2}{32 h d_m (\tau^o)^2} (-DP)$$

Con lo que la densidad de flujo será:

$$J = r v = \frac{r e (D_e)^2}{32 h d_m (\tau^o)^2} (-DP) \quad [11.9]$$

11.2.4. Modelo de adsorción preferencial y flujo capilar

Se supone que la membrana presenta un comportamiento preferencial de adsorción hacia ciertos componentes de la disolución, por lo que se creará una capa de estos componentes en la interfase membrana-disolución. En la figura 11.4 se muestra de modo esquemático este modelo, para el caso de una solución acuosa de

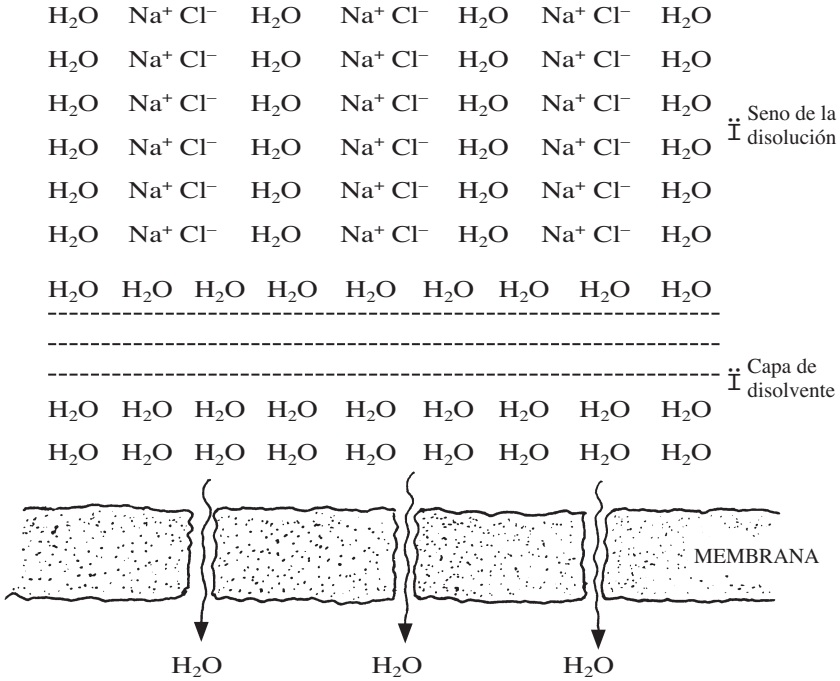


Figura 11.4. Modelo de adsorción preferencial-flujo capilar.

cloruro sódico. En este modelo se presupone que existirá un tamaño crítico de poro que pueda permitir que el componente adsorbido en la interfase pueda atravesarlo, y circular por los canales de la membrana en régimen de flujo capilar.

El cálculo de la cantidad adsorbida en la interfase (G) pueda calcularse en función de la tensión interfacial (τ), mediante la ecuación de Gibbs:

$$G = \frac{1}{RT} \frac{d\tau}{d \ln a} \quad [11.10]$$

en la que a es la actividad del soluto.

11.2.5. Modelo basado en la termodinámica de procesos irreversibles

El proceso más general para describir la transferencia de materia a través de las membranas se obtiene al aplicar la termodinámica de procesos irreversibles, en que se considera la membrana como una caja negra, analizándose la variación entrópica que tiene lugar. El incremento entrópico es la fuerza impulsora que produce la transferencia a través de la membrana. En este modelo, en la transferencia de cada componente, además de la fuerza impulsora primaria que la provoca, se tiene en cuenta el flujo debido a los fenómenos acoplados. De esta

forma, la expresión general para la transferencia de una de los componentes viene dada por la ecuación:

$$J_i = L_{ii} f(DG_i) + \sum_j L_{ij} f(DG_j) \quad [11.11]$$

El primer sumando del segundo miembro representa el flujo de materia por unidad de área del componente i debido a la diferencia de energía libre entre las dos caras de la membrana, siendo $f(DG_i)$ precisamente la fuerza impulsora función de la energía libre a través de la membrana, para dicho componente i . El coeficiente de proporcionalidad L_{ii} es función del coeficiente de difusión del componente i . El segundo sumando representa el aporte adicional de transferencia del componente i debido a las diferencias de energía libre de los otros componentes, que el flujo del componente i lleva acoplados.

Según Onsager, los valores de los coeficientes L presentan ciertas restricciones, de tal modo que debe cumplirse:

$$L_{ij} = L_{ji} \\ L_{ii} - (L_{ij})^2 \geq 0$$

Generalmente, los flujos acoplados son pequeños en comparación con el flujo primario, por lo que el flujo para un componente suele darse en función de una única fuerza impulsora, la primaria.

11.3. Modelos de transferencia a través de la capa de polarización

Tal como se ha indicado en un apartado anterior, la membrana semipermeable impide el paso de ciertos componentes, por lo que en la interfase membrana-disolución se produce una acumulación de estos componentes, formándose la denominada **capa de polarización**.

Cuando la disolución es de macromoléculas, y además su concentración es elevada, puede ocurrir que la capa de polarización adquiera propiedades de gel a partir de un cierto valor de la concentración del componente rechazado en dicha capa, expresándose por C_g el valor de esta concentración. Cuando se alcanza dicho valor empieza a formarse una capa gelatinosa, cuyo efecto es la aparición de una nueva resistencia al flujo de permeado.

En forma esquemática este proceso se puede visualizar en la figura 11.5. La disolución con una concentración de soluto C_C se transfiere a través de la membrana hasta la corriente de permeado, cuya concentración C_p es menor que C_C . Sin embargo, la capa de polarización produce un aumento de concentración hasta un valor C_m justo en la pared de la membrana. Si $C_m < C_g$ no se formará la capa de gel, mientras que si $C_m = C_g$ se forma la capa gelatinosa, e irá aumentando su espesor a medida que transcurra el tiempo de operación. Para explicar la transferencia a tra-

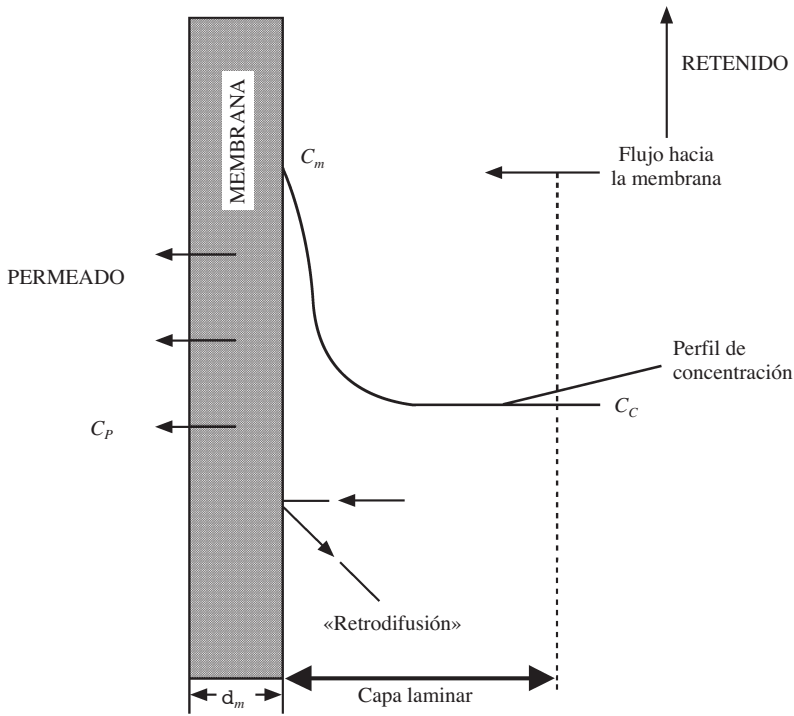


Figura 11.5. Capa de polarización por concentración.

vés de la capa de polarización existen diferentes modelos, de entre los cuales, a continuación, se expondrán dos de ellos.

11.3.1. Modelo hidráulico

Este modelo está basado en la teoría de la película, es decir, se supone, tal como se ha expuesto anteriormente, que en las inmediaciones de la membrana se forma una capa en la que existe un gradiente de concentración, aumentando la concentración desde C_C hasta C_m . Este gradiente de concentración hace que exista transferencia de materia desde la capa de polarización hacia el seno de la disolución. Por ello, al realizar un balance del componente en la capa de polarización, se obtiene que la cantidad de componente que atraviesa la membrana es igual a la cantidad que llega a ella desde el seno de la disolución por el flujo global, menos el que se transfiere por difusión desde la capa hacia el seno de la disolución. Este balance conduce a la expresión:

$$C_p J = C J - D_s \frac{dC}{dx} \quad [11.12]$$

en la que J es la densidad de flujo global y D_s la difusividad del soluto.

Esta ecuación es válida si se cumplen los siguientes requisitos:

- El coeficiente de difusión es independiente de la concentración.
- Sólo existe gradiente de concentración en la capa de polarización, suponiéndose que la transferencia desde el seno de la disolución hasta la capa se realiza por mecanismos convectivos.
- No existen corrientes de convección debidas a la diferencia de densidad.

La expresión anterior es una ecuación diferencial de primer orden no homogénea, que puede integrarse con las condiciones límite:

- Para $x = 0$ $C = C_C$
- Para $x = d_p$ $C = C_m$

siendo d_p el espesor de la capa de polarización.

La integración de la ecuación diferencial permite calcular la concentración de soluto en la interfase membrana-disolución concentrada:

$$C_m = C_p + (C_C - C_p) \exp\left(\frac{J d_p}{D_S}\right)$$

Si se define un **coeficiente de transferencia** de soluto (k_S) como la relación entre la difusividad y el espesor de la capa de polarización ($k_S = D_S/d_p$), se obtiene:

$$C_m = C_p + (C_C - C_p) \exp\left(\frac{J}{k_S}\right) \quad [11.13]$$

La densidad de flujo de disolvente se obtiene al multiplicar la global por la concentración de disolvente:

$$J_D = J C_D$$

que sustituido en la ecuación anterior da la expresión de la concentración al lado de la membrana en función de la densidad de flujo del disolvente:

$$C_m = C_p + (C_C - C_p) \exp\left(\frac{J_D}{C_D k_S}\right) \quad [11.14]$$

El cálculo del coeficiente de transferencia de soluto k_S puede realizarse a partir de la analogía de Colburn:

$$j_D = j_H$$

teniendo en cuenta la definición del factor de Colburn para la difusividad se tiene:

$$(\text{Sh}) = j_H (\text{Re}) (\text{Sc})^{1/3} \quad [11.15]$$

- siendo:
- Sh = Módulo de Sherwood $(\text{Sh}) = k_S d_e/D_S$
 - Re = Módulo de Reynolds $(\text{Re}) = r v d_e/\eta$
 - Sc = Módulo de Schmidt $(\text{Sc}) = \eta/(\tau D_S)$
 - j_H = Factor de Colburn para transmisión de calor
 - d_e = Diámetro equivalente

El factor de Colburn depende del régimen de circulación del fluido, de tal modo que se podrá calcular a partir de las ecuaciones:

• Régimen laminar ($Re < 2.100$): $j_H = 0,023 (Re)^{-0,2}$ [11.16]

• Régimen turbulento ($Re > 10^4$): $j_H = 1,86 (Re)^{-2/3} (d_e/l_c)^{1/3}$ [11.17]

donde l_c es una longitud característica, que al igual que el diámetro equivalente, depende del tipo de configuración utilizada. En la tabla 11.2 se dan los parámetros geométricos característicos de las configuraciones más usuales, que se muestran en la figura 11.6.

Tabla 11.2. Parámetros geométricos característicos de módulos de ósmosis inversa, para configuraciones plana, espiral y tubular

Configuración	a	A_m	d_e	l_c	l_{pd}	l_{pc}
PLANA						
1) Anular	$\frac{p}{2} (R_e - R_i)$	$p (R_e^2 - R_i^2)$	$2 h$	$(R_e - R_i)$	$(R_e - R_i)$	$70 d_e$
2) Rectangular	$H h$	$H L$	$2 h$	L	L	$70 d_e$
ESPIRAL	$H h$	$\frac{H L}{N}$	$2 h$	L	$\frac{L}{N}$	0
TUBULAR	$\frac{p}{4} D_i^2$	$\frac{p D_i L}{N}$	D_i	L	$\frac{L}{N}$	0

Fuente: Lombardi y Moresi (1987).

La difusividad del soluto en la disolución es difícil de calcular. Sin embargo, podría evaluarse mediante la correlación de Wilke y Chang:

$$D_S = 7,4 \cdot 10^{-8} \frac{T (\gamma M)^{1/2}}{h (\bar{V}_m)^{0,6}} \tag{11.18}$$

- siendo: \bar{V}_m = Volumen molar del soluto a la temperatura de ebullición (cm^3/mol).
 h = Viscosidad de la disolución (cP).
 γ = Parámetro de asociación del disolvente (para agua es 2,6).
 T = Temperatura absoluta.
 M = Peso molecular del disolvente.

Otra forma de evaluar la difusividad del soluto sería a partir de la ecuación:

$$D_S = 7,7 \cdot 10^{-16} \frac{T}{h (\bar{V}^{1/3} - \bar{V}_0^{1/3})} \tag{11.19}$$

en la que la difusividad D_S se expresa en m^2/s , la viscosidad h en Pa·s y la temperatura T en Kelvin. Para difusión de solutos en agua el valor de \bar{V}_0 es 0,008. La variable \bar{V} es el volumen molecular, que se define como el volumen en m^3 de un kmol

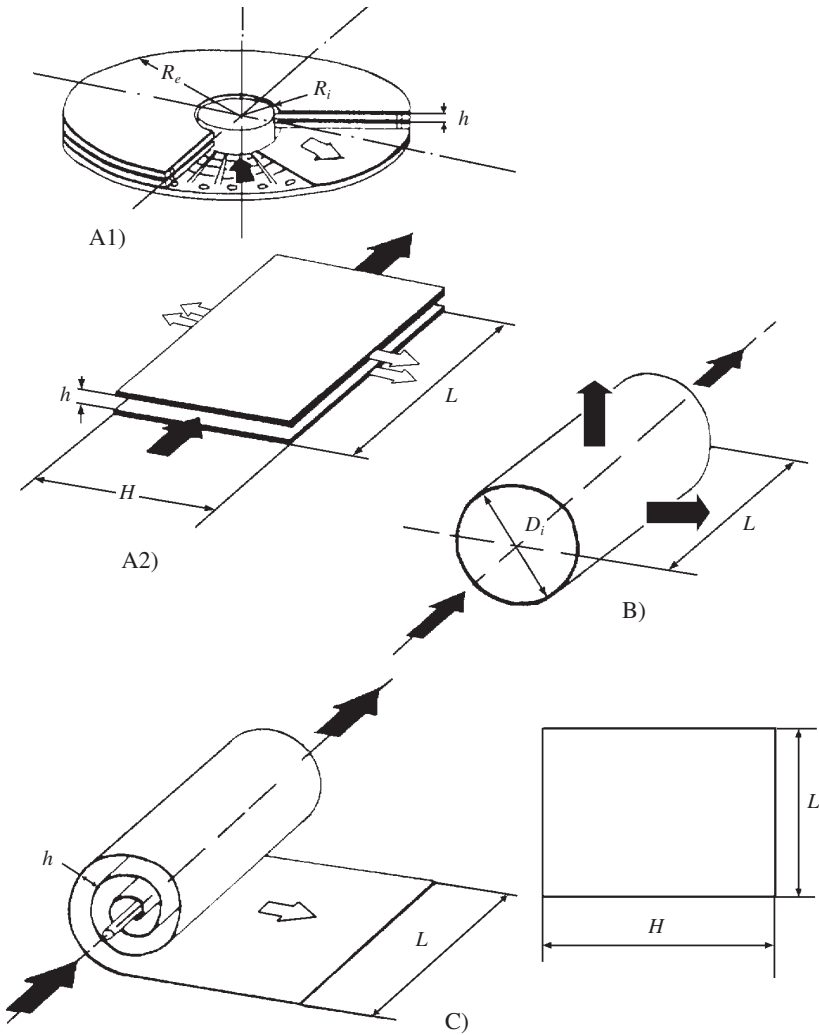


Figura 11.6. Configuración geométrica de módulos de separación por membranas: A1) Plana anular. A2) Plana rectangular. B) Tubular. C) Espiral (adaptado de Lombardi y Moresi, 1987).

de sustancia en forma líquida a su temperatura de ebullición. En la tabla 11.3 se dan valores del volumen molecular para diferentes sustancias.

11.3.2. Modelo osmótico

En este modelo se considera que en el caso concreto de la ultrafiltración se presentan características de ósmosis inversa y filtración mecánica, por lo que deberán tenerse presentes tanto los factores osmóticos como la variación del coeficiente de

Tabla 11.3. Valores del volumen molecular

Sustancia	\bar{V} [m ³ /kmol]
Carbono	0,0148
Hidrógeno	0,0037
Oxígeno	
doble enlace	0,0074
en aldehídos y cetonas	0,0074
en ésteres metílicos	0,0091
en ésteres etílicos	0,0099
en éteres y otros ésteres	0,0110
en ácidos	0,0120
unido a S, P, N	0,0083

Fuente: Perry&Chilton (1982).

difusión y viscosidad con la concentración. Se considera el proceso como una filtración a través de la capa de polarización.

El flujo de disolvente que atraviesa la membrana se obtiene al realizar un balance másico en la capa de polarización, de tal forma que dicho flujo será igual a la cantidad que llega a la membrana con el flujo global menos el que se devuelve desde la capa de polarización hacia el seno de la disolución, debido a la retrodifusión por diferencia de potencial químico. Además, se le debe añadir la cantidad debida a la contribución hidráulica, causada por la caída de presión a través de la capa de polarización.

En el caso que se considere que la disolución esté formada por el disolvente y un solo soluto, la densidad de flujo molar de difusión para el disolvente se expresará según la ecuación de la primera ley de Fick para mezclas binarias:

$$N_D = X_D(N_D + N_S) - C_T D_D \frac{\partial X_D}{\partial x} \quad [11.20]$$

siendo: N_D = Densidad de flujo molar de disolvente.

N_S = Densidad de flujo molar de soluto.

X_D = Fracción molar de disolvente.

C_T = Concentración molar global.

D_D = Difusividad del disolvente.

x = Distancia.

El primer término del segundo miembro, de esta ecuación, es la densidad de flujo molar del disolvente, resultante del movimiento global de la disolución; mientras que el segundo sumando es la densidad de flujo de disolvente debida a la difusión superpuesta al flujo global. En esta ecuación los términos de flujo global y de difusión para el disolvente son del mismo sentido, ya que difunde a favor de la corriente; sin embargo, para el soluto son de sentido contrario, debido a que el soluto difunde contracorriente.

En el modelo osmótico se tiene en cuenta un nuevo término de contribución hidráulica, por lo que la densidad de flujo para el disolvente será:

$$N_D = X_D (N_D + N_S) - C_T D_D \left[\frac{\partial X_D}{\partial x} + X_D \frac{\bar{V}_D}{RT} \frac{\partial P}{\partial x} \right] \quad [11.21]$$

en la que \bar{V}_D es el volumen molar parcial del disolvente y P la presión.

11.4. Ósmosis inversa

La ósmosis inversa puede definirse como un proceso de separación por membrana en el que se produce la retención o rechazo selectivo de solutos ionizables. Esta retención es debida a la repulsión electrostática y efectos de tensión dieléctrica en la interfase. Ello provoca que puedan retenerse partículas cuyo tamaño es menor que el del poro de la membrana. En general, se admite que pueden rechazarse moléculas con pesos moleculares menores que 300 Daltons, siendo el tamaño de las partículas retenidas del orden de 1 a 10 Amstrong.

11.4.1. Modelo matemático

Para la descripción de la transferencia a través de la membrana podría aplicarse cualquiera de los modelos descritos anteriormente, sin embargo, es el modelo de disolución-difusión uno de los más utilizados, aunque el basado en la termodinámica de procesos irreversibles también es bastante utilizado.

Cualquiera que sea el modelo adoptado, en su aplicación se supone que deben cumplirse ciertos requisitos, que se exponen a continuación:

- Cada componente atraviesa la membrana por efecto de su potencial químico.
- No existen fenómenos de flujos acoplados, es decir, $L_{ij} = 0$.
- El coeficiente de difusión se considera independiente de la concentración, suponiéndose que se cumple la ley de Fick.
- Se considera que en toda la zona de trabajo la concentración molar total es constante.
- La velocidad con que se transfiere cada componente viene determinada por su coeficiente de difusión y por la capacidad de disolución en la membrana.

Con estas hipótesis, la ecuación de transferencia a través de la membrana se simplifica a una expresión cuya fuerza impulsora es debida al gradiente de potencial químico de los componentes. Dicho potencial puede expresarse en términos de presión y concentración.

En el caso de una disolución en la que se considere el disolvente y un solo soluto, al aplicar la ecuación del modelo de solución-difusión [ec. 11.6] deberá tenerse presente que el potencial químico de una disolución está más influenciado por el gradiente de concentración que por el gradiente de presión.

Para el cálculo del flujo de disolvente a través de la membrana se considera que su gradiente de concentración es despreciable, por lo que debe integrarse la ecuación:

$$J_D = \frac{D_D C_D}{RT} \bar{V}_D \frac{dP}{dx} \quad [11.22]$$

con las condiciones límite:

- Para $x = 0$ $P = P_c + p_c$
- Para $x = d_m$ $P = P_m + p_m$

obteniéndose la expresión:

$$J_D = \frac{D_D C_D \bar{V}_D}{RT} (DP - Dp) \quad [11.23]$$

Para el cálculo del flujo de soluto a través de la membrana se supone que el gradiente de presión no afecta a la transferencia de soluto, sino que ésta depende exclusivamente del gradiente de concentración del soluto entre ambas caras de la membrana, con lo que se obtiene:

$$J_S = - \frac{D_S C_{Sm}}{RT} \frac{\partial m_{Sm}}{\partial C_{Sm}} \frac{d C_{Sm}}{dx} \quad [11.24]$$

en la que el subíndice «Sm» indica soluto en la membrana. El potencial químico del soluto en la membrana se expresa según la ecuación:

$$m_{Sm} = m_{Sm}^o + RT \ln (\gamma_S C_{Sm}) \quad [11.25]$$

siendo γ_S el coeficiente de actividad del soluto.

Por tanto, para la densidad de flujo global de soluto se obtiene la ecuación:

$$J_S = - D_S \frac{d C_{Sm}}{dx} \quad [11.26]$$

que puede integrarse con las condiciones límite:

- Para $x = 0$ $C_{Sm} = C_{Sm}^C$
- Para $x = d_m$ $C_{Sm} = C_{Sm}^P$

en la que C_{Sm}^C es la concentración del soluto en el seno de la membrana en la pared del lado de alta presión, mientras que C_{Sm}^P lo es para la cara de baja presión.

La integración conduce a la expresión:

$$J_S = \frac{D_S}{d_m} (C_{Sm}^C - C_{Sm}^P)$$

Teniendo en cuenta un coeficiente de partición o distribución de soluto entre la membrana y la disolución, definido por:

$$K_P = \frac{C_{Sm}}{C_S} = \frac{\text{Concentración de soluto en la membrana}}{\text{Concentración de soluto en la disolución}}$$

la cantidad de soluto transferida se obtiene por la expresión:

$$J_S = \frac{K_P D_S}{d_m} (C_C - C_P) \quad [11.27]$$

Si ninguna de las propiedades de la membrana dependen de la presión o concentración, pueden definirse los siguientes coeficientes de permeabilidad de la membrana al disolvente y soluto:

- **Permeabilidad de la membrana al disolvente:**

$$A = \frac{D_D C_D \bar{V}_D}{RT d_m} \quad [11.28]$$

- **Permeabilidad de la membrana al soluto:**

$$A = \frac{D_S K_P}{d_m} \quad [11.29]$$

Con lo que las expresiones de las densidades de flujo de disolvente y soluto serán:

$$J_D = A (DP - DP) \quad [11.30]$$

$$J_S = B (C_C - C_P) \quad [11.31]$$

El rechazo de soluto viene dado por la ecuación 11.1:

$$R = \frac{C_C - C_P}{C_C} = 1 - \frac{C_P}{C_C}$$

Pero las densidades de flujo de disolvente y soluto están relacionadas por la expresión:

$$J_D = J C_D \quad \text{y} \quad J_S = J C_P$$

luego:

$$J_S = \frac{J_D}{C_D} C_P$$

Obteniéndose que la concentración de soluto en el permeado se expresa por:

$$C_P = \frac{J_S}{J} = \frac{B C_D}{A (DP - DP) + B C_D} C_C \quad [11.32]$$

por lo que el rechazo de soluto será:

$$R = \frac{A (DP - Dp)}{A (DP - Dp) + B C_D} \quad [11.33]$$

11.4.2. Capa de polarización por concentración

En los apartados anteriores se ha supuesto que la transferencia de materia únicamente encontraba resistencia por parte de la membrana semipermeable; sin embargo, en realidad en las inmediaciones de la membrana se forma una capa debido a la acumulación del soluto. Esta capa ofrece una nueva resistencia a la transferencia de materia, observándose varios efectos perjudiciales para dicha transferencia, siendo de destacar:

- a) Al aumentar la concentración de soluto, la presión osmótica también aumentará, con lo que la cantidad de disolvente transferido disminuye, pues la fuerza impulsora es menor. En la ecuación 11.30 el término Dp aumenta, por lo que J_D disminuye.
- b) Deberá aumentarse la potencia de bombeo para compensar esta disminución.
- c) Aumenta la cantidad de soluto en la corriente de permeado, ya que aumenta la diferencia de concentración que impulsa dicha transferencia. En la ecuación 11.31 si C_C aumenta, también lo hace J_S .
- d) Se producen deposiciones en el lado de la pared de la membrana, con lo que pueden obstruirse ciertos poros, con el inconveniente que presentan todos los procesos de ensuciamiento.
- e) Además, estas sustancias depositadas pueden provocar el deterioro de la membrana.

Ciertos autores indican que la polarización por concentración puede medirse por el cociente entre la concentración de soluto en la superficie de la membrana y la correspondiente al seno de la disolución.

Si se aplica el modelo hidráulico para la descripción de la transferencia de materia a través de la capa de polarización, se llega a obtener la ecuación 11.13:

$$C_m = C_p + (C_c - C_p) \exp\left(\frac{J}{k_s}\right)$$

En el caso que el rechazo de soluto sea total, es decir, la concentración de soluto en el permeado sea nula, esta ecuación se simplifica a:

$$C_m = C_c \exp\left(\frac{J}{k_s}\right) \quad [11.34]$$

Para algunos casos, de geometrías definidas, tales como láminas paralelas y tubulares en flujo laminar, existen soluciones que pueden encontrarse en la bibliografía.

11.4.3. Influencia de distintos factores

Resulta interesante estudiar el efecto que sobre el proceso global ejercen diversos factores operativos, tales como presión, temperatura y tipo de soluto.

11.4.3.1. Influencia de la presión

La presión es uno de los factores que más pueden afectar a la transferencia de los componentes. Así, si se observa la ecuación 11.33, que da la fracción de retenido, se puede deducir que para altos valores de la presión aplicada, el segundo sumando del denominador ($B C_D$) es despreciable frente al primero, con lo que el valor de R tiende a la unidad. Es decir, si el término de presión aplicado tiende a infinito, R adquiere el valor uno. Sin embargo, esto no se cumple exactamente, sino que el valor a que tiende R es próximo a la unidad, pero no exactamente 1. Ello es debido a que al aumentar la presión eficaz también aumenta el caudal de soluto. Esto puede observarse gráficamente en la figura 11.7.

La presión también afectará el caudal de disolvente, ya que si en la ecuación 11.30 el valor de DP aumenta, la variación del caudal de disolvente será lineal con el aumento de la presión aplicada. Sin embargo, en realidad no ocurre exactamente

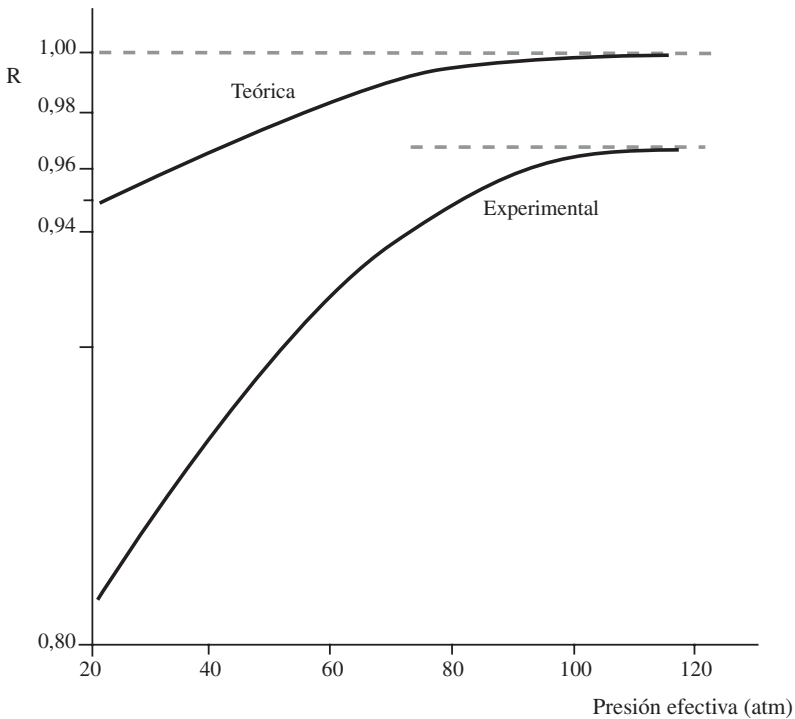


Figura 11.7. Influencia de la presión en el flujo de permeado.

esto, pues al aumentar la presión se produce cierta compactación de la membrana, lo que hace que disminuya su permeabilidad. Además, con el aumento de la presión, el fenómeno de polarización por concentración aumenta, dificultando la transferencia de disolvente.

11.4.3.2. Efecto de la temperatura

El efecto que produce un aumento de la temperatura sobre el flujo de disolvente es de aumentarlo, debido al crecimiento de la permeabilidad de la membrana al disolvente, y a una disminución de la viscosidad del disolvente.

La variación de la permeabilidad A con la temperatura puede correlacionarse mediante una ecuación tipo Arrhenius:

$$A = A_0 \exp(-E_0/RT) \quad [11.35]$$

en la que: A_0 = Permeabilidad a 0 °C.

A = Permeabilidad a t °C.

E_0 = Energía de activación del agua impregnada en la membrana (16-25 kJ/mol).

R = Constante de gases.

T = Temperatura absoluta.

Generalmente, los valores de la permeabilidad se dan a 20 °C, por lo que a una temperatura cualquiera deben correlacionarse con los correspondientes a esta temperatura. De este modo:

$$A = A_{20} \exp \left[\frac{E_0}{R} \left(\frac{1}{293} - \frac{1}{T} \right) \right] \quad [11.36]$$

Para E_0 suele tomarse el valor de 23 kJ/mol, y como la constante de gases vale $R = 8,314 \cdot 10^3$ kJ/(mol·K), se obtiene:

$$A = A_{20} \exp \left[9,45 - \frac{2,768}{T} \right] \quad [11.37]$$

La temperatura también afecta la viscosidad del disolvente, pero en este caso, al aumentar la temperatura la viscosidad disminuye. La variación de la viscosidad con la temperatura también puede correlacionarse mediante una ecuación tipo Arrhenius:

$$h = h_0 \exp(E/RT) \quad [11.38]$$

en la que: h = Viscosidad del disolvente.

h_0 = Factor de frecuencia.

E = Energía de activación al flujo.

En el caso de soluciones acuosas, el disolvente es agua, que presenta una energía de activación al flujo de 16,7 kJ/mol.

Tanto para el caso de la permeabilidad A , como para la viscosidad h , al representar sus logaritmos frente al inverso de la temperatura absoluta se obtienen rectas cuya pendiente es la correspondiente energía de activación (figura 11.8).

Para una operación determinada, en la que se mantenga constante la presión eficaz y la osmótica, a partir de la ecuación 11.30, y teniendo en cuenta las ecuaciones 11.35 y 11.38, se puede escribir:

$$J_D h = A (DP - Dp) h = K A_0 \exp\left(-\frac{E_0}{RT}\right) h_0 \exp\left(\frac{E}{RT}\right)$$

$$J_D h = K A_0 h_0 \exp\left(\frac{E - E_0}{RT}\right) \quad [11.39]$$

en la que K es una constante. En el caso que los valores de las energías de activación coincidan ($E = E_0$), el producto de la densidad de flujo por la viscosidad es constante.

11.4.3.3. Efecto del tipo de soluto

El tipo de soluto tiene una influencia en la transferencia de materia, de tal modo que a mayor tamaño molecular mayor será la retención. Además, cuando aumenta la valencia de carga de los iones aumenta la retención. También se observa que las moléculas que tienen tendencia a formar puentes de hidrógeno con la membrana aumentan el flujo a su través, siendo mayor cuanto mayor es la fuerza de dichos puentes de hidrógeno.

Es conocido que las membranas presentan cierta selectividad para diversos componentes, de tal forma que las sales que contienen iones divalentes son mejor retenidas que los monovalentes. En cuanto a cationes se sabe que el sodio es mejor retenido que el amonio; mientras que para aniones, el cloruro se retiene mejor que otros iones tales como nitrato, perclorato y cianuro. Todo lo expuesto en cuanto a la selectividad de los solutos se ha observado mediante experimentación.

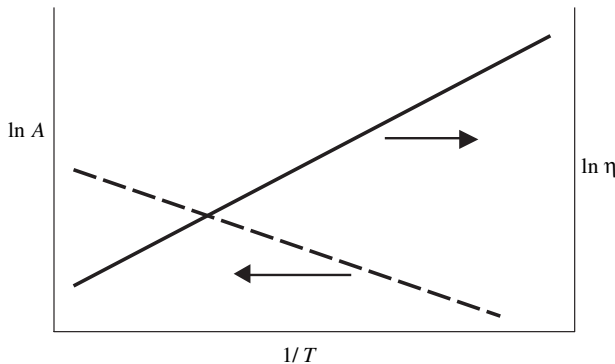


Figura 11.8. Influencia de la temperatura sobre la viscosidad del fluido y la permeabilidad de la membrana.

11.5. Ultrafiltración

Al igual que la ósmosis inversa, la ultrafiltración es un proceso de separación por membrana, pero capaz de retener selectivamente solutos no ionizables. Esta retención está basada en el tamaño molecular de los solutos, siendo, generalmente, retenidas moléculas de peso molecular comprendido entre 300 y 500.000 Dalton, que se corresponden a tamaños moleculares entre 10 y 200 Amstrong. A diferencia de la ósmosis inversa, la ultrafiltración no está controlada por la presión osmótica, pudiéndose llevar a cabo la separación a bajas presiones de trabajo (de 34 a 690 kPa).

11.5.1. Modelo matemático

En la ultrafiltración el mecanismo predominante de transferencia a través de la membrana es la filtración selectiva a través de los poros. Es por ello que para un compuesto determinado el rechazo que presenta una membrana viene determinado por el peso molecular del compuesto, además de su forma, tamaño, flexibilidad, así como de las condiciones de trabajo.

Por ello, el flujo de permeado puede obtenerse suponiendo que la membrana funciona como un tamiz molecular, formado por un conjunto de canales de igual tamaño, forma y longitud, a través de los que fluye el disolvente y las moléculas, cuyo tamaño sea menor que el de los canales. Como el diámetro de los canales es pequeño se supone que el permeado circula en régimen laminar, pudiéndose aplicar la ecuación de Fanning para el cálculo del flujo a través de la membrana. Por lo que el modelo que mejor describe la transferencia a través de la membrana es el de flujo viscoso y de fricción simultáneos.

El cálculo de la densidad de flujo de disolvente, al aplicar este modelo, conduce a la expresión:

$$J_D = \frac{e D_e^2 r}{32 h d_m (\tau^e)^2} (-DP)$$

en la que e es la porosidad de la membrana, D_e el diámetro equivalente de los canales, d_m el espesor de la membrana, τ^e es el factor de tortuosidad de los canales, r y h son la densidad y viscosidad del fluido, respectivamente, mientras que $(-DP)$ es la caída de presión que el fluido experimenta al atravesar la membrana.

Si se define la **permeabilidad hidráulica** de la membrana como:

$$K_m = \frac{e D_e^2 r}{32 d_m (\tau^e)^2} \quad [11.40]$$

se obtiene:

$$J_D = \frac{K_m}{h} (-DP) \quad [11.41]$$

ecuación que puede expresarse en función de la **resistencia hidráulica** de la membrana R_m , de tal forma que:

$$J_D = \frac{(-DP)}{R_m} \quad [11.42]$$

lo que indica que el flujo de disolvente es directamente proporcional a la diferencia de presión existente entre ambos lados de la membrana, e inversamente proporcional a la resistencia hidráulica que dicha membrana ofrece a la transferencia de disolvente a su través.

A pesar de que esta última es la ecuación que normalmente se utiliza para el cálculo de la transferencia de disolvente, pueden introducirse factores que tengan presente la probabilidad de que una molécula penetre en un canal, además de la distribución de tamaño de canales. Es evidente que esto complica el cálculo de transferencia de disolvente a través de la membrana.

Para el cálculo del flujo de soluto se utiliza la ecuación de Ferry-Faxen, en la que se tienen en cuenta la interacción de las moléculas con las paredes de los canales de la membrana, además de los efectos estéricos, tamaño y forma de las moléculas y sección transversal de los canales. De este modo, la densidad de flujo de soluto se expresa según la ecuación:

$$J_S = J_D C_C s \quad [11.43]$$

en la que s es una constante adimensional, cuyo valor está comprendido entre 0 y 1. Físicamente, esta constante representa la fracción de soluto que pasa a través de los canales cuya sección de paso es suficiente, y que no puede retener las moléculas de soluto de tamaño menor. Este factor se puede expresar en función de la probabilidad de que una molécula de soluto penetre en un canal y de la fuerza de fricción con las paredes del canal. Así, la ecuación que permite calcular esta constante viene dada por la expresión:

$$s = [2(1-c)^2 - (1-c)^4] [1 - 2,104c + 2,09c^3 - 0,95c^5] \quad [11.44]$$

en la que c es la relación entre el diámetro molecular (D_m) y el diámetro de la sección transversal de los canales de la membrana (D_e), es decir: $c = D_m/D_e$.

11.5.2. Capa de polarización por concentración

Tal como ocurre con los procesos de ósmosis inversa, en la ultrafiltración también aparece, en la zona de alta presión, una capa junto a la membrana en la que su concentración de soluto es superior a la del seno del fluido. En este caso el problema es mayor, ya que a partir de cierta concentración empieza a gelificarse, con lo que si se continúa la transferencia, la capa de gel va aumentando de espesor a medida que transcurre el tiempo de operación.

La capa de polarización gelificada ofrece una nueva resistencia a la transferencia de materia (figura 11.9), con lo que, si se define una **permeabilidad hi-**

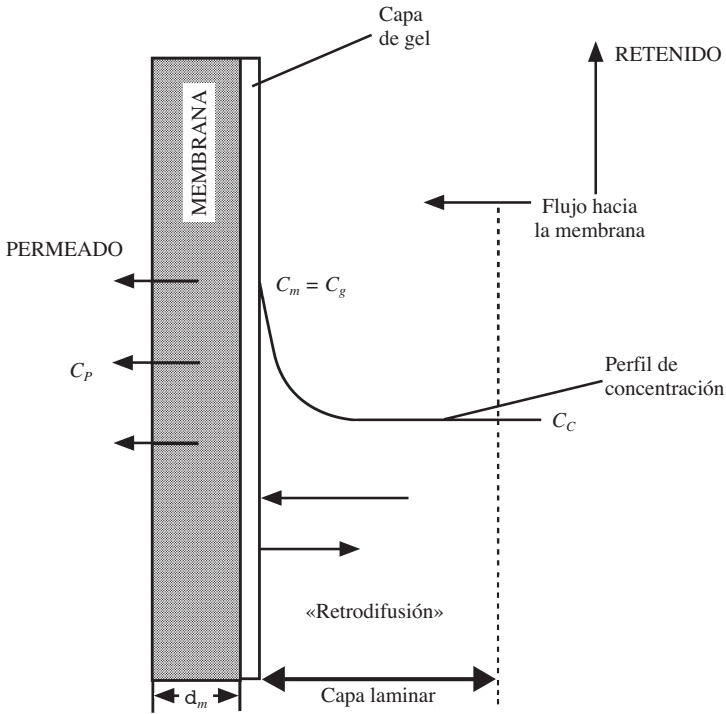


Figura 11.9. Capa de polarización por concentración y capa de gel.

dráulica del gel (K_g), se obtiene que la densidad de flujo de disolvente se expresará según la ecuación:

$$J_D = \frac{(-DP)}{h \left(\frac{1}{K_m} + \frac{1}{K_g} \right)} \quad [11.45]$$

en la que $(-DP)$ es la diferencia de presión global desde la disolución concentrada a la solución de permeado. Por ello, la densidad de flujo de disolvente será directamente proporcional al incremento de presión, e inversamente proporcional a las resistencias que ofrecen la membrana (R_m) y la capa de gel (R_g):

$$J_D = \frac{(-DP)}{R_m + R_g} \quad [11.46]$$

En el caso que se considere que la concentración de soluto en la corriente de permeado sea mucho menor que la de la disolución concentrada ($C_p \ll C_c$), o bien cuando el rechazo de soluto es total, en estado estacionario, se igualan la corriente de transporte de soluto desde el seno de la disolución concentrada a la

capa de polarización, con la difusional desde dicha capa hacia el seno de la disolución:

$$J C = D_S \frac{dC}{dx} \quad [11.47]$$

La integración de esta ecuación conduce a la expresión:

$$J = k_S \ln \left(\frac{C_g}{C_C} \right) \quad [11.48]$$

siendo k_S un coeficiente de transferencia global, cuyo valor será $k_S = D_S/d_p$, en la que d_p es el espesor de la capa de polarización. Este coeficiente se determina tal como se ha expuesto en el apartado 11.3, utilizando la ecuación 11.15.

En este caso, la transferencia de soluto desde la capa de gel hacia el seno de la disolución («retrodifusión») se expresa como función del coeficiente global de transferencia de materia, de tal forma que:

$$D_S \frac{dC}{dx} = K (C_g - C_C) \quad [11.49]$$

Por ello, en el caso que la transferencia a través de la capa de gel controle el proceso global, la densidad de flujo del disolvente se expresará como:

$$J_D = k_S \ln \left(\frac{C_g}{C_C} \right) \quad [11.50]$$

ecuación análoga a la obtenida para ósmosis inversa [ec. 11.34].

Para evitar la formación de las capas de polarización por concentración se debe operar a altas velocidades de alimentación.

11.5.3. Influencia de diferentes factores

11.5.3.1. Influencia de la presión

Si no existiese capa de gel, el flujo variaría linealmente con la presión. Sin embargo, esto no es del todo cierto, de tal modo que siempre debe tenerse presente la influencia de dicha capa. En la figura 11.10 puede verse la influencia de la presión en los distintos casos que puedan presentarse. Así, cuando la resistencia de la capa de gel es despreciable ($K_g \ll \infty$ o $R_g \ll 0$) la variación es lineal; mientras que si es esta capa la que controla la transferencia ($K_g \ll K_m$ o $R_g \gg R_m$) la cantidad de materia transferida es independiente de la presión.

En cuanto al rechazo o retención, en principio, es independiente de la presión aplicada; ya que el parámetro s viene determinado únicamente por las dimensiones de las moléculas, y por la sección transversal de los poros de la membrana. Sin embargo, experimentalmente se observa que el rechazo disminuye cuando la presión aumenta. La explicación a este fenómeno podría ser que debido a las altas presio-

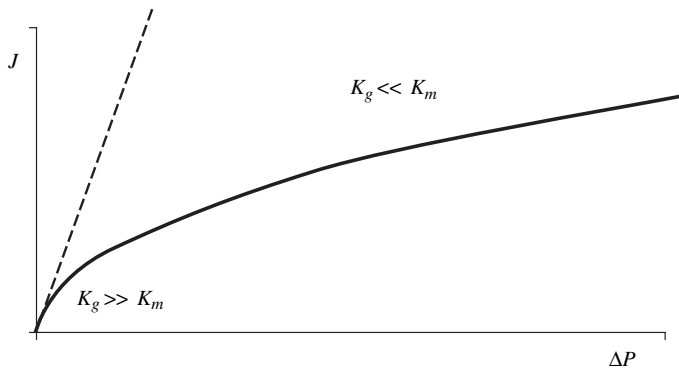


Figura 11.10. Influencia de la presión en el flujo de permeado en la ultrafiltración.

nes aplicadas, la membrana puede deformarse elásticamente, aumentando con ello la sección transversal de los canales, lo que facilitaría el paso de soluto a su través. Aunque, también las moléculas pueden deformarse, siendo el resultado final el mismo.

11.5.3.2. Efecto de la temperatura

Un aumento de la temperatura produce una disminución de la viscosidad del disolvente, lo que se traduce en un aumento del flujo de disolvente. Si se observa la ecuación 11.41, para el cálculo del flujo de disolvente, al disminuir la viscosidad η , que está en el denominador de dicha ecuación, hará que aumente la densidad de flujo del disolvente (J_D). Se admite que por cada grado centígrado que aumenta la temperatura, el flujo de disolvente aumenta entre 1,1 y 1,7%.

Al aumentar la temperatura también aumenta la retrodifusión de la capa de gel, con lo que la concentración crítica a la que se forma el gel aumenta, es decir, se retarda la formación de dicha capa.

Todo ello indica que sería conveniente trabajar a temperaturas elevadas, sin embargo, el límite de la temperatura de trabajo viene determinado por la resistencia que las membranas ofrecen a la temperatura.

11.5.3.3. Efecto del tipo de soluto

La retención que las membranas realizan sobre las moléculas de soluto es función de su tamaño y masa molecular. Al representar la variación del porcentaje de soluto rechazo frente a su masa molecular se obtiene una curva sigmoideal, tal como se muestra en la figura 11.11. Para solutos con masas moleculares bajas, las membranas no presentan rechazo. Cuando la masa molecular es superior a 1.000 Da, el rechazo aumenta hasta que para valores superiores a 10^5 Da, el rechazo es total.

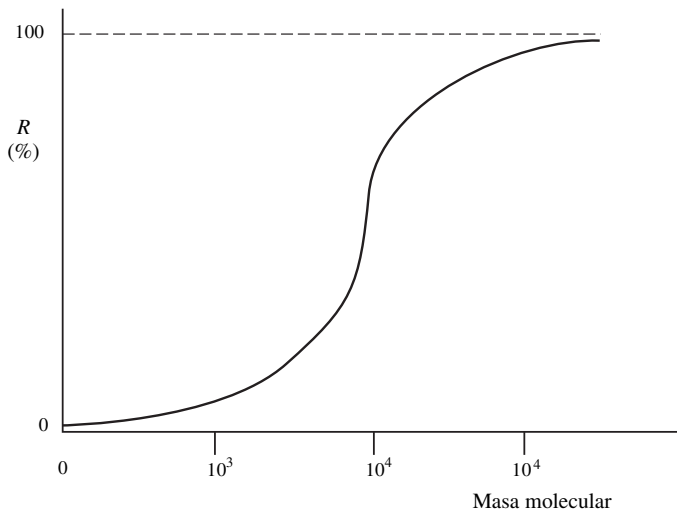


Figura 11.11. Influencia de la masa molecular de soluto sobre el porcentaje de rechazo.

11.6. Diseño de sistemas de ósmosis inversa y ultrafiltración

En el diseño de las unidades de ósmosis inversa aparecen ciertas dificultades que deben tenerse presentes para que la unidad resultante pueda aplicarse con éxito al problema de separación que se pueda plantear. Entre estas dificultades podrían citarse:

- Las membranas suelen ser frágiles y no pueden aguantar altas presiones de trabajo.
- La capa de polarización por concentración, que se debe intentar eliminar, dificulta la transferencia de materia, y además, produce el ensuciamiento de las membranas.
- Las membranas suelen ser voluminosas, por lo que deben buscarse diseños que presenten una densidad de empaquetamiento elevada, con el fin de reducir las dimensiones del recipiente que las contiene, pues éste debe operar a presión.
- Deben evitarse los altos costos que representa el remplazamiento de las membranas.

Los diseños que se realizan para solventar estas dificultades han conducido a diferentes tipos de módulos. Los más utilizados son: *a)* placa y marco; *b)* tubos largos; *c)* en espiral, y *d)* fibra fina hueca.

En todo proceso de diseño se manejan cierto número de variables ligadas entre sí mediante las ecuaciones cinéticas de transferencia y las propias de los balances. Esto permite, una vez resueltas, obtener el mejor diseño posible. Generalmente, las variables de diseño son el factor de recuperación que se desea obtener, la concentración de permeado, la temperatura y presión de trabajo, las operaciones de pre-

tratamiento a realizar, los métodos para poder mantener el flujo a través de la membrana, el caudal de retenido, además de los tratamientos finales que deben realizarse para obtener el grado de concentración deseado.

Los problemas que se plantean pueden ser diversos, aunque, en general, los datos de los que se dispone suelen ser el caudal de alimentación y su concentración, la temperatura de trabajo, el factor de recuperación o caudal de permeado y el tipo de membrana a utilizar. Fijando el tipo de membrana es posible conocer el rechazo al soluto, así como la presión de trabajo que puede soportar. Estos datos deben correlacionarse mediante las ecuaciones adecuadas con el fin de obtener las concentraciones de permeado y retenido, así como el área de membrana necesaria y la potencia de bombeo para realizar la separación deseada.

A continuación se expondrán dos métodos de cálculo descritos en la bibliografía, que permiten llegar a resolver los problemas de diseño de unidades de ósmosis inversa y ultrafiltración. En el primero de ellos no se tienen en cuenta los posibles efectos de la capa de polarización, suponiendo que no existe. En el segundo sí se realizan los cálculos con la capa de polarización, pero por contra se supone que el rechazo del soluto por la membrana es total, es decir, se supone que la corriente de permeado no contiene soluto

11.6.1. Primer método de diseño

Este primer método se basa en la suposición que no existe capa de polarización, y sus fundamentos básicos han sido aplicados en algunos cálculos descritos en la bibliografía (Weber, 1979).

Se considera una etapa de separación como la mostrada en la figura 11.2, en la que F , P y S son los caudales de alimento, permeado y retenido, respectivamente, siendo sus concentraciones respectivas C_0 , C_p y C_s . Inicialmente se deberán plantear los balances másicos global y de componente:

$$F = P + S \quad [11.51]$$

$$F C_0 = P C_p + S C_s \quad [11.52]$$

Se define una concentración promedio de la disolución concentrada como una media ponderada entre las correspondientes al alimento y retenido, de tal forma que:

$$C_c = \frac{F C_0 + S C_s}{F + S} \quad [11.53]$$

con lo que el rechazo promedio será:

$$R = \frac{C_c - C_p}{C_c} \quad [11.54]$$

ecuación que permite obtener la concentración de permeado en función de la concentración promedio (C_c) y del rechazo:

$$C_p = C_c (1 - R) \quad [11.55]$$

Sin embargo, para calcular C_C es preciso conocer previamente la concentración de retenido (C_S), la cual debe obtenerse a partir del balance de componente de soluto, pero para ello debe conocerse la concentración de permeado, que es precisamente una de las variables que se debe determinar. Por ello, es preciso recurrir a un proceso iterativo de cálculo, que empieza suponiendo que el rechazo es total, o lo que es lo mismo que la concentración de soluto en el permeado es nula ($C_P = 0$).

Por tanto: $F C_0 = S C_S$, obteniéndose que la concentración media ponderada será:

$$C_C = \frac{2 F C_0}{2 F - P} = \frac{2 C_0}{2 - Q} \quad [11.56]$$

siendo $Q = P/F$, que es el denominado factor de recuperación.

Al sustituir este valor de C_C en la ecuación 11.55 se obtiene que la concentración de permeado se expresará como:

$$C_P = \frac{2 C_0}{2 - Q} (1 - R) \quad [11.57]$$

A continuación se exponen las etapas de cálculo que deben seguirse en la resolución de un problema típico de separación por membrana, del que se conocen como datos las siguientes variables: caudal de alimento y su composición, caudal de permeado o factor de recuperación, factor de rechazo, caída de presión entre las caras de la membrana, temperatura de trabajo y permeabilidad de la membrana al disolvente.

Etapas del procedimiento de cálculo

- 1) Cálculo de la concentración de permeado a partir de la ecuación 11.57.
- 2) Cálculo del caudal de retenido, a partir del balance global [ec. 11.51].
- 3) Cálculo de la concentración de la corriente de retenido, a partir de la ecuación 11.52, de balance global de componente.
- 4) Cálculo de la concentración media ponderada de la solución concentrada, utilizando la ecuación 11.53.
- 5) Determinación de la concentración de la corriente de permeado, usando la ecuación 11.55.
- 6) Con este valor de la concentración de permeado se repiten las etapas 3, 4 y 5 para obtener un nuevo valor de dicha concentración. Si este valor final coincide con el anterior, se da por terminado el proceso, en caso contrario se repiten de forma iterativa las etapas 3, 4 y 5 hasta coincidencia de valores.
- 7) Cálculo de la presión osmótica de la disolución concentrada, utilizando como valor de la concentración el de la media ponderada: $p = i C_C R T$.
- 8) Determinación de la densidad de flujo de disolvente, a partir de la ecuación 11.30: $J_D = A (D_P - D_p)$.

- 9) Cálculo del área de la membrana necesaria para realizar la separación. Para ello, se divide el caudal de permeado por su densidad de flujo:

$$A_m = \frac{P}{J_D} \quad [11.58]$$

- 10) Se calcula la potencia necesaria para vencer la caída de presión que experimenta el fluido al atravesar la membrana, mediante el producto del caudal volumétrico de permeado por el valor de dicha caída de presión.

En este proceso de cálculo no se han tenido en cuenta los efectos de la polarización por concentración; sin embargo, la capa de polarización puede producir efectos negativos, aunque pueden minimizarse con una regulación adecuada de los caudales de circulación dentro de las unidades operativas. Otro factor a tener en cuenta es la compactación de las membranas y su ensuciamiento, lo que acarrea que a medida que transcurre el tiempo, la presión neta de trabajo sea menor, por lo que disminuirá la corriente que atraviesa la membrana. Todo ello hace que las plantas se sobredimensionen, por lo que inicialmente no será necesario operar a las presiones que se precisan cuando la membrana se ha compactado o ensuciado.

11.6.2. Segundo método de diseño

Este método ha sido descrito por Lombardi y Moresi (1987), y está basado en el hecho de suponer que la retención del soluto por la membrana es total ($B = 0$). Con ello, la concentración de la solución en la pared de la membrana se obtiene de la ecuación 11.13, en la que la concentración de soluto en el permeado es nula ($C_p = 0$), es decir:

$$C_m = C_c \exp(J/k_s) \quad [\text{ec. 11.34}]$$

Se supone que los datos conocidos son las condiciones de operación, presión transmembrana y temperatura de trabajo, caudal y concentración del alimento, y las propiedades físicas y reológicas de la solución.

Etapas del procedimiento de cálculo

- 1) Cálculo de la presión osmótica del soluto p_c para la concentración de soluto en la pared de la membrana (C_m). En la primera iteración se supondrá que esta concentración es la del alimento ($C_m = C_0$).
- 2) Se estiman las propiedades físicas de la disolución: densidad y viscosidad. Es conveniente resaltar que para fluidos no newtonianos la viscosidad que debe utilizarse es la efectiva, que para fluidos de la potencia se define según la expresión:

$$h_e = K \left(\frac{8 v}{d_e} \right)^{n-1} \left(\frac{3n+1}{4n} \right)$$

en la que K es el índice de consistencia y n el índice de comportamiento al flujo.

- 3) Se calcula el coeficiente de difusión D_S .
- 4) Se determina la densidad de flujo del disolvente, mediante la ecuación 11.30.

$$J_D = A (DP - Dp)$$

- 5) Se calcula la velocidad lineal del alimento: $v = \frac{F}{\tau a}$

en la que a es la sección transversal de paso, y depende del tipo de dispositivo. En la tabla 11.2 se dan las expresiones que permiten el cálculo de esta sección transversal, según el tipo de módulo utilizado.

- 6) Se evalúan las condiciones de flujo según sea el valor que toma el módulo de Reynolds:

$$Re = \frac{\tau v d_e}{h}$$

El diámetro característico d_e depende de la configuración utilizada, y puede calcularse según se indica en la tabla 11.2.

- 7) Se calcula el coeficiente de transferencia k_S , mediante la ecuación 11.15, y la 11.16 ó 11.17 según sea el régimen de circulación.
- 8) Se determina la concentración en la pared de la membrana, utilizando la ecuación 11.34: $C_m = C_C \exp(J/k_S)$.
- 9) Se calcula la presión osmótica de la solución con este nuevo valor de C_m .
- 10) Se recalcula la densidad de flujo del disolvente mediante la ecuación 11.30.
- 11) Se compara este valor con el obtenido en la etapa anterior de cálculo. Si la diferencia entre estos valores es mayor que un factor determinado de antemano, se itera de nuevo a partir de la etapa 8. En caso que dicha diferencia sea menor, se da por acabado el cálculo. El valor del factor que no debe sobrepasar la diferencia de las densidades de flujo en dos etapas sucesivas del proceso iterativo se suele tomar $0,05 \text{ kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{h})$.
- 12) Se realizan los balances másicos globales y de componente [ecuaciones 11.51 y 11.52], para determinar las variables desconocidas.
- 13) Se calcula el área de membrana necesaria, mediante la ecuación 11.58:

$$A_m = P/J_D$$

11.7. Disposición operativa de los módulos

En el procedimiento de diseño que se ha expuesto en el apartado anterior podía llegarse a calcular las concentraciones de permeado y retenido globales, así como el área de membrana necesaria. Sin embargo, no se indica de qué forma se dispone la unidad o módulo osmótico, pudiendo ser variada la configuración de dichas unidades. Generalmente, el tipo en que se disponen estas unidades puede ser en etapa

única, en cascada simple y dos etapas con recirculación de concentrado. Aunque pueden existir otros tipos de disposiciones, alternando las unidades en serie y paralelo.

11.7.1. Etapa única

Como su nombre indica es una única etapa, en que la disposición es la mostrada en la figura 11.12. Los balances globales y de componente son los obtenidos en las ecuaciones 11.51 y 11.52:

$$F = P + S$$

$$F C_0 = P C_P + S C_S$$

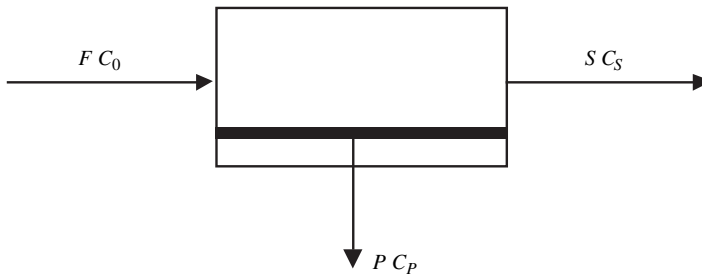


Figura 11.12. Etapa simple de separación por membrana.

11.7.2. Cascadas simples en serie

En esta disposición, las unidades se colocan de tal forma que la corriente de retenido en una etapa sirve de alimento a la etapa siguiente, obteniendo un conjunto de permeados en cada etapa, que se juntan en una sola corriente. En la figura 11.13 se da un esquema de este tipo de disposición.

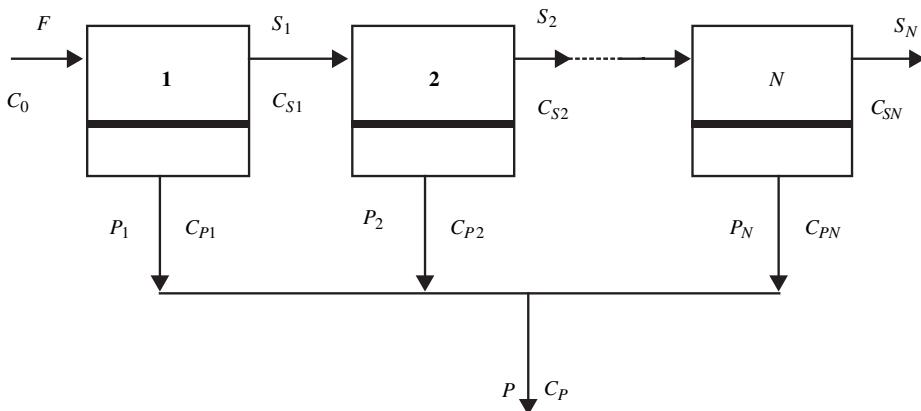


Figura 11.13. Disposición en cascada simple.

En el planteamiento del modelo matemático deben realizarse los balances global y de soluto en cada una de las etapas. Por nomenclatura se ha tomado que las variables tendrán como subíndice el correspondiente a la etapa que abandona.

Balances globales:

$$F = P + S_N \quad [11.59]$$

$$F C_0 = P C_P + S_N C_{SN} \quad [11.60]$$

Balace en una etapa i :

$$S_{i-1} = P_i + S_i \quad [11.61]$$

$$S_{i-1} C_{Si-1} = P_i C_{Pi} + S_i C_{Si} \quad [11.62]$$

11.7.3. Dos etapas con recirculación

Este tipo de disposición se halla representado en la figura 11.14. Puede observarse que en la primera etapa, el retenido es el que se obtiene finalmente como uno de los productos, mientras que el permeado de esta etapa sirve de alimento a una segunda etapa. El permeado de la segunda etapa es la corriente final de permeado, mientras que el retenido es recirculado y mezclado con el alimento fresco de la primera etapa. En este tipo de disposición se consigue un rendimiento máximo si las unidades trabajan de tal forma que la concentración del retenido de la segunda etapa coincide con el de la corriente de alimento fresco ($C_{S2} = C_0$).

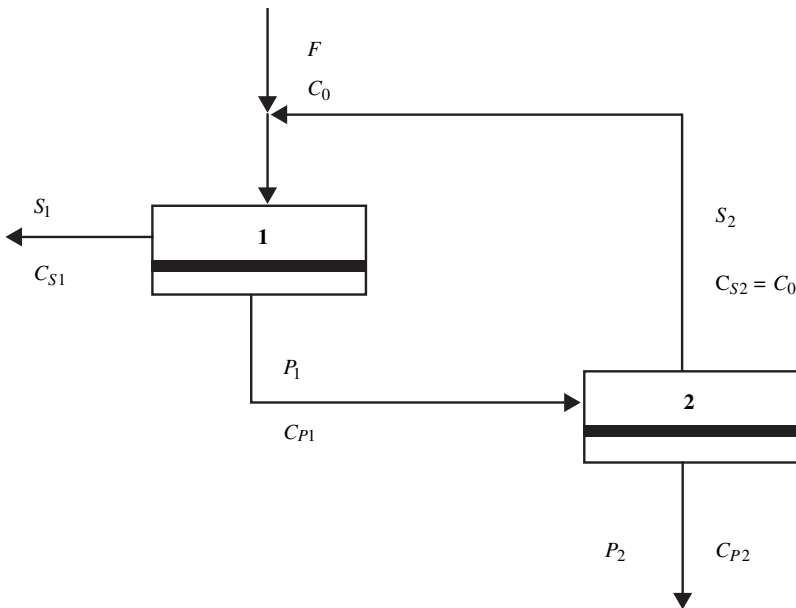


Figura 11.14. Sistema de dos etapas con recirculación de retenido.

El modelo matemático de este tipo de operación se obtiene al realizar los balances globales y de componente en cada una de las dos etapas.

Balances en la primera etapa:

$$F + S_2 = P_1 + S_1 \quad [11.63]$$

$$(F + S_2) \cdot C_0 = P_1 C_{P1} + S_1 C_{S1} \quad [11.64]$$

$$C_0 = (1 - Q_1) \cdot C_{S1} + Q_1 C_{P1} \quad [11.65]$$

Balances en la segunda etapa:

$$P_1 = P_2 + S_2 \quad [11.66]$$

$$P_1 C_{P1} = P_2 C_{P2} + S_2 C_0 \quad [11.67]$$

$$C_{P1} = (1 - Q_2) C_0 + Q_2 C_{P2} \quad [11.68]$$

Recuperación global:

$$Q = \frac{Q_1 Q_2}{[1 - Q_1 (1 - Q_2)]} \quad [11.69]$$

PROBLEMAS

Problema 11.1

Una corriente de agua salina a 20 °C, que contiene 2,1 g/l de cloruro sódico en disolución, se desaliniza haciéndola pasar a través de un sistema de ósmosis inversa a razón de 20.000 l/h. El factor de recuperación del agua es del 89% y la membrana osmótica presenta un rechazo del 95% para el cloruro sódico a una presión diferencial de 4,13 MPa siendo su coeficiente de permeabilidad al agua $2 \cdot 10^{-4} \text{ kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{atm})$. Calcular: a) Caudales de permeato y retentato. b) Densidad de flujo y concentración del agua que abandona la instalación osmótica. c) Área de membrana osmótica. d) Potencia de la bomba para hacer funcionar la unidad osmótica.

$$\Delta P = 4,13 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 40,79 \text{ atm}$$

El dispositivo utilizado es una etapa simple como la mostrada en la figura 11.12.

a) El factor de recuperación es $Q = 0,89$ y como $Q = P/F$, se obtiene que el caudal de permeado es de $P = 17.800$ litros/h. Además, del balance global [ec. 11.51] es posible obtener el caudal de retenido $S = 2.200$ litros/h.

b) Utilizando el proceso iterativo descrito en el apartado 11.6, se inicia la iteración suponiendo que la concentración del permeado es nula, lo que permite obtener la ecuación 11.57. A partir de ésta se recalcula C_p . Con este valor y los datos del problema se calcula C_s . Se calcula la concentración media del retenido C_c con la ecuación 11.53. Finalmente se obtiene el valor de C_p mediante la ecuación 11.55.

De la ecuación 11.57:

$$C_p = \frac{(2)(2.100)}{2 - 0,89} (1 - 0,95) = 189,2 \text{ mg/l}$$

Iteración	C_p (mg/l)	C_s (mg/l)	C_c (mg/l)	C_p (mg/l)
1	189,2	17.560,2	3.632,1	181,6
2	181,6	17.621,6	3.638,2	181,9
3	181,9	17.619,2	3.637,9	181,9

Luego la concentración del permeado es $C_p = 181,9 \text{ mg/l}$.

Cálculo de la presión osmótica:

$$C_c = 3.637,9 \text{ mg NaCl/l} = 0,06225 \text{ moles NaCl/l}$$

$$\Delta p = (2)(0,06225)(0,082)(293) = 2,99 \text{ atm}$$

La densidad de flujo del disolvente (agua) se obtiene a partir de la ecuación 11.30.

$$J_D = 2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s atm}} (40,79 - 2,99) \text{ atm} = 7,56 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}$$

$$J_D = 7,56 \cdot 10^{-3} \text{ litros agua}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$$

c) El área de la membrana se obtiene a partir de la ecuación 11.58:

$$A_m = \frac{P}{J_D} = \frac{17.800 \text{ litros agua}/\text{h}}{7,56 \cdot 10^{-3} \text{ litros agua}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})} \frac{1 \text{ h}}{3.600 \text{ s}} = 654 \text{ m}^2$$

d) Cálculo de la potencia de bombeo:

$$Pot = (F) (DP)$$

$$Pot = (20 \text{ m}^3/\text{h}) (4,13 \cdot 10^6 \text{ N}/\text{m}^2) (1 \text{ h}/3.600 \text{ s}) (1\text{kW}/10^3 \text{ W}) = 23 \text{ kW}$$

Problema 11.2

Para cubrir las necesidades energéticas de una industria alimentaria se utiliza una caldera de vapor, a la que es necesario alimentar 8.000 l/h de agua. El agua de que se dispone procede de una corriente acuífera que posee una dureza en CaCO_3 de 8,5 g/l, y para evitar problemas de incrustaciones en la caldera debe rebajarse su contenido hasta 250 ppm.

El tratamiento de depuración se realiza con un sistema de ósmosis inversa, que consta de una cascada simple de dos unidades, trabajando a una temperatura de 25 °C y una presión de 204 atm. Las membranas de cada unidad presentan una permeabilidad al agua de $1,29 \cdot 10^{-6}$ moles $\text{H}_2\text{O}/(\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{atm})$ y una permeabilidad al CaCO_3 de $9,8 \cdot 10^{-6}$ cm/s. Si los factores de recuperación de la primera y segunda etapa son del 80% y 90%, respectivamente; calcular: a) El caudal de agua que debe tomarse de la corriente acuífera para satisfacer las necesidades de la instalación de vapor. b) El caudal y concentración de los permeados que se obtienen en cada etapa. c) El área de membrana necesaria de cada etapa.

La disposición de las dos etapas es la mostrada en la figura 11.13.

a) El factor de recuperación total puede obtenerse a partir de los correspondientes de cada etapa. Así:

$$Q_1 = P_1/F_1 = 0,80 \quad ; \quad Q_2 = P_2/S_1 = 0,90$$

$$Q = P/F = Q_1 + (1 - Q_1) Q_2 = 0,98$$

El caudal de agua a tratar será: $F = P/Q = 8.163,3$ litros/h.

b) Las concentraciones molares de las corrientes del alimento y permeado final son:

$$C_0 = 8,5 \text{ g}/\text{l} = 0,085 \text{ moles } \text{CaCO}_3/\text{l}$$

$$C_p = 0,25 \text{ g}/\text{l} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ moles } \text{CaCO}_3/\text{l}$$

Balances global y de componentes de todo el sistema:

$$F = P + S_2$$

$$F C_0 = P C_P + S_2 C_{S2}$$

al sustituir datos se obtiene:

$$S_2 = 163,3 \text{ litros/h}$$

$$C_{S2} = 4,127 \text{ moles CaCO}_3/\text{l}$$

Balances en la primera etapa: $F = P_1 + S_1$

$$Q_1 = P_1/F$$

sustituyendo datos se obtiene: $P_1 = 6.530,6 \text{ litros/h}$

$$S_1 = 1.632,7 \text{ litros/h}$$

Balances en la segunda etapa: $S_1 = P_2 + S_2$

$$Q_2 = P_2/S_1$$

sustituyendo datos se obtiene: $P_2 = 1.469,4 \text{ litros/h}$

$$S_2 = 163,3 \text{ litros/h}$$

La densidad de flujo que atraviesa la membrana es la suma de las del disolvente y soluto: $J = J_D + J_S$, y además $J_S = J C_P$.

Al combinar estas ecuaciones con la 11.30 y 11.31, se obtiene:

$$A' (DP - i C_S R T) = B (C_S - C_P) \left(\frac{1 - C_P}{C_P} \right) \quad [11.70]$$

Al aplicar esta ecuación en la segunda etapa, y sustituir todos los datos conocidos, se obtiene una ecuación de segundo grado, cuya incógnita es C_{P2} :

$$(C_{P2})^2 - 306 C_{P2} + 4,127 = 0$$

De las dos raíces, una no tiene sentido físico, mientras que la otra permite conocer el valor de la concentración del permeado de la segunda etapa:

$$C_{P2} = 0,0135 \text{ moles CaCO}_3/\text{l}$$

Balace de componente en la segunda etapa:

$$S_1 C_{S1} = S_2 C_{S2} + P_2 C_{P2}$$

que al sustituir datos se obtiene la concentración del retenido de la primera etapa:

$$C_{S1} = 0,425 \text{ moles CaCO}_3/\text{l}$$

Al aplicar le ecuación 11.70 a la primera etapa se obtiene:

$$(C_{P1})^2 - 24.121 C_{P1} + 0,425 = 0$$

De las dos raíces, una no tiene sentido físico, mientras que la otra permite conocer el valor de la concentración del permeado de la segunda etapa:

$$C_{P1} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ moles CaCO}_3/\text{l}$$

c) Para calcular el área de la membrana de cada etapa es necesario calcular previamente la densidad de flujo. Si se aplica la ecuación 11.30 en cada etapa se obtiene:

$$J_{D1} = 1,29 \cdot 10^{-6} \frac{\text{moles agua}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s atm}} (204 - 2 \cdot 0,425 \cdot 0,082 \cdot 298) \text{ atm} = 2,364 \cdot 10^{-4} \frac{\text{moles agua}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}}$$

$$J_{D2} = 1,29 \cdot 10^{-6} \frac{\text{moles agua}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s atm}} (204 - 2 \cdot 4,127 \cdot 0,082 \cdot 298) \text{ atm} = 2,95 \cdot 10^{-6} \frac{\text{moles agua}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}}$$

Las corrientes de permeado contienen agua y sales, sin embargo, como la concentración es muy baja, se puede considerar que es prácticamente agua lo que contienen estas corrientes. Además, en el cálculo del área, si se realiza esta consideración se obtienen superficies algo superiores, que desde el punto de vista del diseño es positivo.

$$P_1 = 6.530,6 \text{ litros agua/h} = 100,78 \text{ moles agua/s}$$

$$P_2 = 1.469,4 \text{ litros agua/h} = 22,68 \text{ moles agua/s}$$

Como el área se obtiene de la ecuación 11.58: $A_m = P/J_D$

$$A_1 = 43 \text{ m}^2 \quad A_2 = 769 \text{ m}^2$$

Problema 11.3

Se está estudiando la posibilidad de instalar una planta para concentrar zumos de frutas. Para ello, se piensa combinar una primera etapa de ósmosis inversa, que concentrará el zumo hasta un contenido intermedio de sólidos solubles; y una segunda etapa convencional de evaporación, que lo concentrará hasta 70 °Brix. El sistema de ósmosis inversa constará de dos etapas con recirculación de concentrado. Se sabe que cuando se tratan 18.000 kg/h de zumo clarificado de melocotón de 11,5 °Brix se obtienen 8.950 kg/h de zumo cuyo contenido en sólidos solubles es de 23 °Brix. La permeabilidad que la membrana osmótica presenta para el agua es de 0,0117 moles/(s.m².atm). La unidad osmótica opera a 50 °C, bajo una presión de 30 atm, condiciones en las que se pueden despreciar los efectos de polarización por concentración. Calcular: a) Caudal másico y concentración de la corriente final de permeado. b) El valor de la permeabilidad de la membrana al transporte de sólidos solubles. c) La concentración de la corriente de recirculación y del permeado que abandona la primera etapa. d) La superficie de membrana osmótica necesaria en cada etapa.

Datos y notas. Para el cálculo de la presión osmótica suponer que se puede aplicar la ecuación de van't Hoff, y que los sólidos solubles que contiene el zumo son mayoritariamente sacarosa ($C_{12}H_{22}O_{11}$).

A 50 °C la densidad del zumo clarificado de melocotón varía con el contenido en sólidos solubles según la expresión:

$$\rho = 0,991 + 3,5 \cdot 10^{-3} C + 2,32 \cdot 10^{-5} C^2 \text{ g/cm}^3$$

para $C > 10$, donde C se expresa en °Brix. Para $C < 10$ °Brix puede tomarse igual a la del agua a la temperatura de 50 °C (0,988 g/cm³).

En los diseños de dos etapas con recirculación del retenido de la segunda etapa, su funcionamiento es óptimo cuando la concentración de la corriente recirculada coincide con la del alimento ($C_{S2} = C_0$).

a) A partir de los balances global y de componente aplicados a todo el sistema:

$$F = P_2 + S_1$$

$$F C_0 = P_2 \cdot C_{P2} + S_1 \cdot C_{S1}$$

Al sustituir los datos del problema se obtiene: $P_2 = 9.050 \text{ kg/h}$
 $C_{P2} = 0,127 \text{ °Brix}$

b) Las densidades de las corrientes de alimento, permeado final y zumo concentrado se obtienen a partir de la expresión dada en el enunciado:

$$\rho_{0,127 \text{ °Brix}} = 0,988 \text{ g/cm}^3$$

$$\rho_{11,5 \text{ °Brix}} = 1,034 \text{ g/cm}^3$$

$$\rho_{23 \text{ °Brix}} = 1,084 \text{ g/cm}^3$$

Las concentraciones molares de las correspondientes corrientes serán:

$$C_0 = C_{S2} = 11,5 \text{ °Brix} = 0,3477 \text{ moles sacarosa/l}$$

$$C_{S1} = 23 \text{ °Brix} = 0,729 \text{ moles sacarosa/l}$$

$$C_{P2} = 0,127 \text{ °Brix} = 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ moles sacarosa/l}$$

Tal como se ha visto en el problema anterior, existe una relación entre la concentración del retenido y permeado [ec. 11.70]. Al aplicarlo a la segunda etapa se obtiene la expresión:

$$A' (DP - i C_{S2} R T) = B (C_{S2} - C_{P2}) \left(\frac{1 - C_{P2}}{C_{P2}} \right)$$

Al sustituir datos es posible obtener el valor de la permeabilidad al soluto (sacarosa):

$$B = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ litros/(s} \cdot \text{m}^2) = 2,6 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$$

c) Para el cálculo de la concentración del permeado de la primera etapa se utiliza la ecuación 11.70, que permite obtener la ecuación de segundo grado:

$$(C_{P1})^2 - 49,84 C_{P1} + 0,729 = 0$$

De las dos raíces, una no tiene sentido físico, mientras que la otra permite conocer el valor de la concentración del permeado de la segunda etapa:

$$C_{P1} = 0,0146 \text{ moles sacarosa/l} = 0,506 \text{ }^\circ\text{Brix}$$

d) Las áreas de las membranas osmóticas se calculan a partir del cociente entre el caudal de permeado de disolvente y la densidad de flujo. Es por ello que previamente deben calcularse dichos valores.

$$J_{D1} = 1,17 \cdot 10^{-2} \frac{\text{moles agua}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s atm}} (30 - 0,729 \cdot 0,082 \cdot 323) \text{ atm} = 0,125 \frac{\text{moles agua}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}$$

$$J_{D2} = 1,17 \cdot 10^{-2} \frac{\text{moles agua}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s atm}} (30 - 0,3477 \cdot 0,082 \cdot 323) \text{ atm} = 0,243 \frac{\text{moles agua}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}$$

$$J_{D1} = 0,125 \text{ moles agua}/(\text{s} \cdot \text{m}^2) = 2,252 \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{s} \cdot \text{m}^2)$$

$$J_{D2} = 0,243 \text{ moles agua}/(\text{s} \cdot \text{m}^2) = 4,38 \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{s} \cdot \text{m}^2)$$

El cálculo de P_1 se obtiene a partir de los balances másicos global y de componente, aplicados a la segunda etapa:

$$P_1 = P_2 + S_2$$

$$P_1 C_{P1} = P_2 C_{P2} + S_2 C_{S2}$$

Al sustituir los datos del problema se obtiene: $S_2 = 312 \text{ kg/h}$

$$P_1 = 9.362 \text{ kg/h}$$

Los caudales de permeado pueden considerarse que prácticamente son de disolvente (agua), ya que su contenido en sólidos solubles es muy bajo. Además, en el cálculo del área, si se realiza esta consideración se obtienen superficies algo superiores, que desde el punto de vista del diseño es positivo.

Como el área se obtiene de la ecuación 11.58:

$$A_m = P/J_D$$

$$A_1 = 1.155 \text{ m}^2 \quad A_2 = 575 \text{ m}^2$$

Problema 11.4

En un proceso de clarificación se alimenta un zumo de manzana de 12 °Brix a un módulo tubular de ultrafiltración. Debido a la presencia de pectinas, en las inmediaciones de la pared de la membrana tubular se forma una capa gelificada cuando la concentración de pectinas alcanza un valor de 4,5% (p/V). El zumo circula por el interior de la membrana tubular a una velocidad de 1 m/s. Los tubos de ultrafiltración poseen un diámetro de 1 cm y una longitud de 2 m. Si el contenido en pectinas del zumo alimentado al módulo de ultrafiltración es 0,5% (p/V), calcu-

lar: a) La densidad de flujo de zumo clarificado. b) El número de tubos necesarios si se desean obtener 100 litros/h de dicho zumo.

Datos. Propiedades del zumo: densidad 1.020 kg/m^3 . Viscosidad $1,2 \text{ mPa}\cdot\text{s}$. Difusividad del soluto $8 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}$.

a) Al formarse la capa de gel se supone que el rechazo de pectinas es total, y éstas no aparecen en el permeado. Por ello, el cálculo de la densidad de flujo de zumo clarificado (permeado) se realizará utilizando la ecuación 11.48.

En esta ecuación es necesario determinar el valor de la constante de transferencia de materia, mediante la ecuación 11.15:

$$(\text{Sh}) = j_H (\text{Re}) (\text{Sc})^{1/3}$$

como el factor de Colburn j_H depende del módulo de Reynolds, se determinará previamente su valor:

$$\text{Re} = \frac{r v d_e}{h} = \frac{\left(1.020 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) (0,01)}{(1,2 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s})} = 8.500$$

Para este valor de $\text{Re} = 8.500$, el factor de Colburn puede tomarse:

$$j_H = 0,023 (\text{Re})^{-0,2}$$

De esta forma el módulo de Sherwood será función de los módulos de Reynolds y Schmidt según la expresión:

$$(\text{Sh}) = 0,023 (\text{Re})^{0,8} (\text{Sc})^{1/3}$$

Módulo de Schmidt:

$$(\text{Sc}) = \frac{h}{r D_s} = \frac{(1,2 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s})}{\left(1.020 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \left(8 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right)} = 1,47 \cdot 10^4$$

por lo que:

$$(\text{Sh}) = 0,023 (8.500)^{0,8} (1,47 \cdot 10^4)^{1/3} = 784$$

A partir del módulo de Sherwood es posible calcular el coeficiente de transferencia de materia:

$$k_S = 784 \frac{(8 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s})}{(0,01 \text{ m})} = 6,27 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 6,27 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{m}^2\cdot\text{s}}$$

La densidad de flujo de zumo clarificado será:

$$J_D = \left(6,27 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{m}^2\cdot\text{s}}\right) \ln\left(\frac{4,5}{0,5}\right) = 1,38 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{m}^2\cdot\text{s}}$$

$$J_D = 1,38 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/(\text{m}^2\cdot\text{s}) = 49,62 \text{ litros}/(\text{m}^2\cdot\text{h})$$

b) El área total del módulo de ultrafiltración se obtiene por la ecuación 11.58:

$$A_m = P/J_D \quad A_m = 2,015 \text{ m}^2$$

Esta es el área lateral de los tubos del módulo de ultrafiltración, es decir: $A_m = n p d_e L$ en la que n es el número de tubos. Por tanto:

$$n = \frac{(2,015 \text{ m}^2)}{p (0,01 \text{ m}) (2 \text{ m})} = 32 \text{ tubos}$$

De este resultado se desprende que se necesitan 32 tubos.

12.1. Conductividad térmica

En los procesos de transmisión de calor por conducción, en estado estacionario, el caudal de calor transmitido (\dot{Q}) a través de un sólido es directamente proporcional al área de transmisión (A) y al incremento de temperaturas (ΔT), e inversamente proporcional al espesor del sólido (e). La constante de proporcionalidad recibe el nombre de conductividad térmica:

$$\dot{Q} = k \frac{A \Delta T}{e}$$

La conducción de calor en estado estacionario ha sido utilizada en distintos experimentos para calcular la conductividad térmica de alimentos. Aunque también pueden utilizarse experimentos en estado no estacionario para determinarla. De cualquier modo, lo que interesa obtener son relaciones matemáticas que permitan calcular la conductividad térmica de un determinado alimento en función de la temperatura y composición.

Para soluciones azucaradas, zumos de frutas y leche, una ecuación que permite el cálculo de la conductividad térmica es (Riedel, 1949):

$$k = (326,8 + 1,0412 T - 0,00337 T^2) (0,44 + 0,54 X_{AGUA}^m) 1,73 \cdot 10^{-3} \quad [12.1]$$

en la que k se expresa en $J/(s \cdot m \cdot ^\circ C)$; T en $^\circ C$ y X_{AGUA}^m es la fracción másica de agua. Esta ecuación es válida en el intervalo de temperaturas de 0 a 180 $^\circ C$.

Para diferentes frutas y vegetales Sweat (1974) da la ecuación:

$$k = 0,148 + 0,493 X_{AGUA}^m \quad [12.2]$$

válida para contenidos de agua superiores al 60%, aunque no se puede utilizar con alimentos de baja densidad y en aquéllos que poseen huecos (como es el caso de manzanas).

En el caso de leches (Fernández-Martín, 1982) da una expresión polinómica de segundo grado con respecto a la temperatura:

$$k = A + B T + C T^2 \quad [12.3]$$

en la que los parámetros A , B y C son función del contenido graso y no graso de la leche.

Para natas una ecuación que permite obtener su conductividad térmica es (Gromov, 1974):

$$k = \frac{[411,6 - 4,26 (f - 10)] \cdot 10^{-6}}{1 - 0,0041 (T - 30)} \rho \quad [12.4]$$

en la que la conductividad térmica se expresa en kcal/(h·m·°C), siendo f el porcentaje en grasa, entre 10 y 60; ρ es la densidad de la muestra a la temperatura y composición correspondiente, expresada en kg/m³; mientras que T es la temperatura en °C, en el intervalo de 30 a 70 °C.

También para natas, Fernández-Martín y Montes (1977), dan la expresión:

$$k = [12,63 + 0,051 T - 0,000175 T^2] [1 - (0,843 + 0,0019 T) X_G^V] \cdot 10^{-4} \quad [12.5]$$

expresándose la conductividad térmica en cal/(s·cm·°C), la temperatura T en °C, en el intervalo de 0 a 80°C. Además, f es el porcentaje en grasa entre 0,1 y 40%; mientras que X_G^V es la fracción volumétrica de la fase grasa, para valores inferiores a 0,52.

Si se conoce la composición del alimento, es posible encontrar su conductividad térmica a partir de la ecuación:

$$k = \sum_i (k_i X_i^V) \quad [12.6]$$

en la que k_i es la conductividad térmica del componente i , y X_i^V es la fracción volumétrica de dicho componente.

La fracción volumétrica del componente i viene dada por la expresión:

$$X_i^V = \frac{\frac{X_i^m}{\rho_i}}{\sum_i \left(\frac{X_i^m}{\rho_i} \right)} \quad [12.7]$$

en la que X_i^m es la fracción másica del componente i , y ρ_i su densidad.

En la tabla 12.1 se hallan recogidos los valores de la conductividad térmica de algunos alimentos. En la tabla 12.3 se dan las conductividades térmicas de los componentes puros mayoritarios en los alimentos, mientras que en la tabla 12.4 se da la conductividad del agua y el hielo en función de la temperatura.

12.2. Calor específico

El calor específico se define como la energía necesaria para elevar un grado la temperatura de la unidad de masa.

Tabla 12.1. Conductividad térmica de algunos alimentos

Producto	Contenido en agua(%)	Temperatura (°C)	Conductividad térmica (J/s·m·°C)
<i>Aceite</i>			
Oliva		15	0,189
	—	100	0,163
Soja	13,2	7 a 10	0,069
Vegetal y animal	—	4 a 187	0,169
<i>Azúcares</i>	—	29 a 62	0,087 a 0,22
<i>Bacalao</i>	83	2,8	0,544
<i>Carnes</i>			
<i>Cerdo</i>			
Perpendicular a las fibras	75,1	6	0,488
		60	0,54
Paralelas a las fibras	75,9	4	0,443
		61	0,489
Carne grasa	—	25	0,152
<i>Cordero</i>			
Perpendicular a las fibras	71,8	5	0,45
		61	0,478
Paralela a las fibras	71,0	5	0,415
		61	0,422
<i>Ternera</i>			
Perpendicular a las fibras	75	6	0,476
		62	0,489
Paralela a las fibras	75	5	0,441
		60	0,452
<i>Vaca</i>			
Deshidratada por congelación			
1.000 mm Hg	—	0	0,065
0,001 mm Hg	—	0	0,035
<i>Magra</i>			
Perpendicular a las fibras	78,9	7	0,476
	78,9	62	0,485
Paralela a las fibras	78,7	8	0,431
	78,7	61	0,447
Grasa	—	24 a 38	0,19
<i>Fresas</i>	—	-14 a 25	0,675
<i>Guisantes</i>	—	3 a 17	0,312
<i>Harina</i> (trigo)	8,8	43	0,45
		65,5	0,689
		1,7	0,542
<i>Huevo</i>			
Entero congelado	—	-10 a -6	0,97
Clara	—	36	0,577
Yema	—	33	0,45
<i>Leche</i>			
Condensada	90	24	0,571
	—	78	0,641
	50	26	0,329
	—	78	0,364

Tabla 12.1. Conductividad térmica de algunos alimentos (continuación)

Producto	Contenido en agua(%)	Temperatura (°C)	Conductividad térmica (J/s·m·°C)
<i>Leche</i>			
Desnatada	—	1,5	0,538
	—	80	0,635
Secada sin grasa	4,2	39	0,419
<i>Mantequilla</i>	15	46	0,197
<i>Manzana</i>	85,6	2 a 36	0,393
Salsa	78,8	2 a 36	0,516
Zumo	87,4	20	0,559
	87,4	80	0,632
	36,0	20	0,389
	36,0	80	0,436
<i>Miel</i>			
	12,6	2	0,502
	80	2	0,344
	14,8	69	0,623
	80	69	0,415
<i>Naranja</i>			
	—	30	0,431
<i>Patata</i>			
Pulpa cruda	81,5	1 a 32	0,554
Almidón gel	—	1 a 67	0,04
<i>Pavo (pechuga)</i>			
Perpendicular	74	3	0,502
	74	3	0,523
<i>Pescado (músculo)</i>			
	—	0 a 10	0,557
<i>Pollo (músculo)</i>	69,1 a 74,9	4 a 27	0,412
<i>Pomelo (entero)</i>	—	30	0,45
<i>Sal</i>	—	87	0,247
<i>Salchicha</i>	64,72	24	0,407
<i>Salmón</i>			
Perpendicular a las fibras	73	4	0,502
<i>Suero</i>		80	0,641

Fuente: Reidy (1968).

Para alimentos con un alto contenido en agua, por encima del punto de congelación, puede utilizarse la ecuación (Siebel, 1982):

$$\hat{C}_p = 0,837 + 3,349 X_{AGUA}^m \quad [12.8]$$

en la que \hat{C}_p se expresa en kJ/(kg·°C), y X_{AGUA}^m es la fracción másica de agua del alimento.

Una ecuación dada por Charm (1971) es:

$$\hat{C}_p = 2,309 X_G^m + 1,256 X_S^m + 4,187 X_{AGUA}^m \quad [12.9]$$

en la que X_G^m y X_S^m son las fracciones másicas de grasa y sólidos, respectivamente.

Para leche, a temperaturas superiores al punto final de fusión de la grasa de leche, puede utilizarse la siguiente expresión (Fernández-Martín, 1972):

$$\hat{C}_P = X_{AGUA}^m + (0,238 + 0,0027 T) X_{ST}^m \quad [12.10]$$

en la que el calor específico se expresa en kcal/(kg·°C), la temperatura T en °C, en el intervalo de 40 a 80 °C, y en la que X_{AGUA}^m y X_{ST}^m son las fracciones másicas de agua y sólidos totales, respectivamente.

Para natas, Gromov (1979), da la ecuación:

$$\hat{C}_P = 4,187 X_{AGUA}^m + (16,8 T - 3,242) (1 - X_{AGUA}^m) \quad [12.11]$$

expresando el calor específico en J/(kg·K), la temperatura T en Kelvin, para el intervalo de 273 a 353 K, y contenido en grasa entre 9 y 40%.

Para zumos de tamarindo, Manohar *et al.* (1991) han dado la siguiente expresión:

$$\hat{C}_P = 4,18 + (6,839 \cdot 10^{-5} T - 0,0503) C \quad [12.12]$$

en la que el calor específico se expresa en kJ/(kg·K) si la temperatura se da en Kelvin y C es el contenido en sólidos solubles expresados en °Brix

Conociendo las composiciones de los distintos componentes del producto, Choi y Okos (1986b) proponen la ecuación:

$$\hat{C}_P = \sum_i (\hat{C}_{P_i} X_i^m) \quad [12.13]$$

en la que \hat{C}_{P_i} es el calor específico del componente i , mientras que X_i^m es la fracción másica del componente i .

En la tabla 12.2, se hallan expuestos los valores del calor específico para diferentes alimentos. En la tabla 12.3 se dan expresiones para el cálculo del calor específico de componentes puros en función de la temperatura, mientras que en la tabla 12.4 se exponen ecuaciones que permiten calcular el calor específico del agua e hielo, también en función de la temperatura.

12.3. Densidad

Se define la densidad como la relación entre la masa de una muestra dada y su volumen. En la bibliografía pueden encontrarse diferentes expresiones para el cálculo de la densidad de alimentos. Así, para zumos de frutas, la densidad se puede expresar en función del índice de refracción según la expresión (Riedel, 1949):

$$\rho = \frac{s^2 - 1}{s + 2} \frac{64,2}{0,206} 16,0185 \quad [12.14]$$

siendo ρ la densidad expresada en kg/m³ y s el índice de refracción.

Tabla 12.2. Calor específico de ciertos alimentos

Producto	Agua (%)	Calor específico (kJ/kg·K)
<i>Carne</i>		
Tocino	49,9	2,01
<i>Vaca</i>		
Carne magra	71,7	3,433
Carne asada	60,0	3,056
Hamburguesa	68,3	3,520
Ternera	68,0	3,223
<i>Gamba</i>	66,2	3,014
<i>Huevo</i>		
Yema	49,0	2,810
<i>Leche</i>		
Entera pasteurizada	87,0	3,852
Desnatada	90,5	3,977 a 4,019
<i>Mantequilla</i>	15,5	2,051 a 2,135
<i>Manzana</i> (cruda)	84,4	3,726 a 4,019
<i>Pepino</i>	96,1	4,103
<i>Patata</i>	79,8	3,517
	75,0	3,517
<i>Pescado</i>		
Fresco	80,0	3,600
	76,0	3,600
<i>Queso</i> (fresco)	65,0	3,265
<i>Sardinias</i>	57,4	3,014
<i>Zanahoria</i> (fresca)	88,2	3,810 a 3,935

Fuente: Reidy (1968).

Existen ecuaciones en las que la densidad se expresa en función de la temperatura y del contenido en sólidos solubles.

Para zumos clarificados de manzana, Constenla *et al.* (1989) dan la siguiente expresión:

$$\rho = 0,82780 + 0,34708 \exp(0,01 X) - 5,479 \cdot 10^{-4} T \quad [12.15]$$

en la que la densidad se expresa en g/cm³, X es la concentración en °Brix y T la temperatura absoluta. Esta expresión es aplicable en el intervalo de temperaturas de 20 a 80°C y en el intervalo de concentraciones de 12 a 68,5 °Brix. Estos mismos autores expresan la densidad de estos zumos en función de °Brix y de la densidad del agua:

$$\rho = \frac{\rho_{AGUA}}{0,99247 - 3,7391 \cdot 10^{-3} X} \quad [12.16]$$

Sin embargo, Aguado e Ibarz (1988), para zumos clarificados de manzana, en el intervalo de temperaturas 5 a 70 °C, en el intervalo de concentraciones 10 a 71°Brix dan diferentes expresiones, una de las cuales es:

$$\rho = 0,98998 - 5,050 \cdot 10^{-4} T + 5,1709 \cdot 10^{-3} C + 0,0308 \cdot 10^{-5} C^2 \quad [12.17]$$

en la que la densidad se expresa en g/cm³, C en °Brix y T en °C.

Tabla 12.3. Ecuaciones para el cálculo de propiedades térmicas

Propiedad térmica	Componente	Ecuación en función de la temperatura
k (W/m·°C)	Carbohidrato	$k = 0,20141 + 1,3874 \cdot 10^{-3} T - 4,3312 \cdot 10^{-6} T^2$
	Ceniza	$k = 0,32962 + 1,4011 \cdot 10^{-3} T - 2,9069 \cdot 10^{-6} T^2$
	Fibra	$k = 0,18331 + 1,2497 \cdot 10^{-3} T - 3,1683 \cdot 10^{-6} T^2$
	Grasa	$k = 0,18071 + 2,7604 \cdot 10^{-3} T - 1,7749 \cdot 10^{-7} T^2$
	Proteína	$k = 0,17881 + 1,1958 \cdot 10^{-3} T - 2,7178 \cdot 10^{-6} T^2$
$\alpha \cdot 10^6$ (m ² /s)	Carbohidrato	$\alpha = 8,0842 \cdot 10^{-2} + 5,3052 \cdot 10^{-4} T - 2,3218 \cdot 10^{-6} T^2$
	Ceniza	$\alpha = 1,2461 \cdot 10^{-1} + 3,7321 \cdot 10^{-4} T - 1,2244 \cdot 10^{-6} T^2$
	Fibra	$\alpha = 7,3976 \cdot 10^{-2} + 5,1902 \cdot 10^{-4} T - 2,2202 \cdot 10^{-6} T^2$
	Grasa	$\alpha = 9,8777 \cdot 10^{-2} + 1,2569 \cdot 10^{-4} T - 3,8286 \cdot 10^{-8} T^2$
	Proteína	$\alpha = 6,8714 \cdot 10^{-2} + 4,7578 \cdot 10^{-4} T - 1,4646 \cdot 10^{-6} T^2$
ρ (kg/m ³)	Carbohidrato	$\rho = 1,5991 \cdot 10^3 - 0,31046 T$
	Ceniza	$\rho = 2,4238 \cdot 10^3 - 0,28063 T$
	Fibra	$\rho = 1,3115 \cdot 10^3 - 0,36589 T$
	Grasa	$\rho = 9,2559 \cdot 10^2 - 0,41757 T$
	Proteína	$\rho = 1,3299 \cdot 10^3 - 0,51840 T$
\hat{C}_p (kJ/kg·°C)	Carbohidrato	$\hat{C}_p = 1,5488 + 1,9625 \cdot 10^{-3} T - 5,9399 \cdot 10^{-6} T^2$
	Ceniza	$\hat{C}_p = 1,0926 + 1,8896 \cdot 10^{-3} T - 3,6817 \cdot 10^{-6} T^2$
	Fibra	$\hat{C}_p = 1,8459 + 1,8306 \cdot 10^{-3} T - 4,6509 \cdot 10^{-6} T^2$
	Grasa	$\hat{C}_p = 1,9842 + 1,4733 \cdot 10^{-3} T - 4,8008 \cdot 10^{-6} T^2$
	Proteína	$\hat{C}_p = 2,0082 + 1,2089 \cdot 10^{-3} T - 1,3129 \cdot 10^{-6} T^2$

Fuente: Choi y Okos (1986b).

Tabla 12.4. Ecuaciones para el cálculo de propiedades térmicas para agua y hielo

Funciones de temperatura ^(a)		
Agua	$k_A = 0,57109 + 1,7625 \cdot 10^{-3} T - 6,7036 \cdot 10^{-6} T^2$	(W/m·°C)
	$\alpha_A = [0,13168 + 6,2477 \cdot 10^{-4} T - 2,4022 \cdot 10^{-6} T^2] \cdot 10^{-6}$	(m ² /s)
	$\rho_A = 997,18 + 3,1439 \cdot 10^{-3} T - 3,7574 \cdot 10^{-3} T^2$	(kg/m ³)
	$\hat{C}_{pA1} = 4,0817 - 5,3062 \cdot 10^{-3} T + 9,9516 \cdot 10^{-4} T^2$	(kJ/kg·°C)
	$\hat{C}_{pA2} = 4,1762 - 9,0864 \cdot 10^{-5} T + 5,4731 \cdot 10^{-6} T^2$	(kJ/kg·°C)
Hielo	$k_H = 2,2196 - 6,2489 \cdot 10^{-3} T + 1,0154 \cdot 10^{-4} T^2$	(W/m·°C)
	$\alpha_H = [1,1756 - 6,0833 \cdot 10^{-3} T + 9,5037 \cdot 10^{-5} T^2] \cdot 10^{-6}$	(m ² /s)
	$\rho_H = 916,89 - 0,13071 T$	(kg/m ³)
	$\hat{C}_{pH} = 2,0623 + 6,0769 \cdot 10^{-3} T$	(kJ/kg·°C)

^(a) \hat{C}_{pA1} = Para el intervalo de temperaturas -40 a 0°C.

\hat{C}_{pA2} = Para el intervalo de temperaturas de 0 a 150°C.

Fuente: Choi y Okos (1986b).

Para zumos clarificados de pera, en el intervalo de temperaturas 5 a 70°C, y en el de concentraciones 10 a 71 °Brix, Ibarz y Miguelsanz (1989), dan una expresión análoga a la anterior:

$$\rho = 1,0113 - 5,4764 \cdot 10^{-4} T + 3,713 \cdot 10^{-3} C + 1,744 \cdot 10^{-5} C^2 \quad [12.18]$$

Para diferentes zumos, en el intervalo de temperaturas 20 a 40°C y en el intervalo de concentraciones 5 a 30 °Brix, Alvarado y Romero (1989) dan la siguiente expresión:

$$\rho = 1.002 + 4,61 C - 0,460 T + 7,001 \cdot 10^{-3} T^2 + 9,175 \cdot 10^{-5} T^3 \quad [12.19]$$

en la que la densidad se expresa en kg/m³, C en °Brix y T en °C.

Para soluciones de sacarosa, de concentraciones comprendidas entre 6 y 65 °Brix, para una temperatura de 20 °C, Kimball (1986) da la ecuación:

$$\rho = 0,524484 \exp \left[\frac{(C + 330,872)^2}{170.435} \right] \quad [12.20]$$

en la que la densidad se expresa en g/cm³ y C en °Brix.

Para zumos de tamarindo a 25 °C, Manohar *et al.* (1991) presentan una ecuación polinómica de segundo grado en función del contenido en sólidos solubles totales:

$$\rho = 1.000 + 4,092 C + 0,03136 C^2 \quad [12.21]$$

en la que la densidad se obtiene en kg/m³ si la concentración C se expresa en °Brix.

Para leches, Rambke y Konrad (1970) dan ecuaciones del tipo polinómico de segundo grado en función del porcentaje en materia seca:

$$\rho = a + b X_S + c X_S^2 \quad [12.22]$$

en las que ρ se expresa en g/cm³; X_S es el porcentaje en materia seca. Los coeficientes de esta ecuación para distintas temperaturas se dan en la tabla 12.5.

Tabla 12.5. Valores de los parámetros de la ecuación 12.22

T (°C)	Leche desnatada			Leche entera (c = 0)	
	a	b · 10 ³	c · 10 ⁵	a	b · 10 ³
5	1,0000	3,616	1,827	1,0010	2,55
20	0,9982	3,519	1,782	1,0080	2,09
35	0,9941	3,504	1,664	1,0137	1,66
50	0,9881	3,568	1,366	0,9953	2,11
60	0,9806	3,601	1,308		

A temperaturas superiores al punto de ebullición se puede utilizar la ecuación (Bertsch *et al.*, 1982):

$$\rho = 1.040,51 - 0,2655 T - 0,01 T^2 - (0,967 + 0,969 \cdot 10^{-2} T - 0,478 \cdot 10^{-4} T^2) f \quad [12.23]$$

donde ρ se expresa en kg/m^3 ; T es la temperatura en $^{\circ}\text{C}$, para el intervalo de 65 a 140 $^{\circ}\text{C}$; mientras que f es el contenido en grasa para valores comprendidos entre 0,02 y 15,5%.

En natas, para el intervalo de 40 a 80 $^{\circ}\text{C}$, y contenido graso entre 30 y 83%, Andrianov *et al.* (1968) dan la ecuación:

$$\rho = 1,0435 - 1,17 \cdot 10^{-5} X_G - (0,52 \cdot 10^{-3} + 1,6 \cdot 10^{-8} X_G) T \quad [12.24]$$

en la que la densidad se expresa en g/cm^3 , la temperatura T en $^{\circ}\text{C}$ y el contenido graso X_G en fracción másica.

Choi y Okos (1986b) sugieren una expresión en función de las densidades de los componentes del producto:

$$\rho = \frac{1}{\sum_i \left(\frac{X_i^m}{\rho_i} \right)} \quad [12.25]$$

en la X_i^m que es la fracción másica del componente i , y ρ_i su densidad.

En las tablas 12.3 y 12.4 se recogen las expresiones que permiten el cálculo de las densidades de los componentes puros en función de la temperatura.

12.4. Difusividad térmica

Una propiedad muy utilizada en los cálculos de transmisión de calor por conducción es la difusividad térmica, que se define según la expresión:

$$\alpha = \frac{k}{\rho \hat{C}_P} \quad [12.26]$$

El valor de la difusividad térmica de un alimento dado puede calcularse si se conocen su conductividad térmica, densidad y calor específico.

Sin embargo, existen expresiones matemáticas que permiten calcular la difusividad térmica según su contenido en agua. Así, Martens (1980) da la siguiente ecuación:

$$\alpha = 5,7363 \cdot 10^{-8} X_{AGUA}^m + 2,8 \cdot 10^{-10} T \quad [12.27]$$

en la que α es la difusividad térmica en m^2/s , X_{AGUA}^m la fracción másica de agua y T la temperatura en Kelvin.

Por otra parte, Dickerson (1969) da una expresión en que la difusividad térmica del alimento sólo es función del contenido de agua y de la difusividad térmica de la misma:

$$\alpha = 8,8 \cdot 10^{-8} (1 - X_{AGUA}^m) + \alpha_{AGUA} X_{AGUA}^m \quad [12.28]$$

Tabla 12.6. Difusividad térmica de ciertos alimentos

Producto	Agua (%)	Temperatura ^(a) (°C)	Difusividad térmica $\times 10^5$ (m ² /s)
Frutas, hortalizas			
Aguacate (pulpa)	—	24 (0)	1,24
Semilla	—	24 (0)	1,29
Entero	—	41 (0)	1,54
Boniato	—	35	1,06
	—	55	1,39
	—	70	1,91
Cerezas (pulpa)	—	30 (0)	1,32
Calabaza	—	47 (0)	1,71
Fresa (pulpa)	92	5	1,27
Frijol media luna (puré)	—	26 - 122	1,80
Guisante (puré)	—	26 - 128	1,82
Judías (cocidas)	—	4 - 122	1,68
Limón	—	40 (0)	1,07
Manzana	85	0 - 30	1,37
Salsa Manzana	37	5	1,05
	37	65	1,12
	80	5	1,22
	80	65	1,40
	—	26 - 129	1,67
Melocotón	—	27 (4)	1,39
Nabo	—	48 (0)	1,34
Patata			
Pulpa	—	25	1,70
Puré cocinado	78	5	1,23
Plátano (pulpa)	76	5	1,18
	76	65	1,42
Pomelo (pulpa)	88,8	—	1,27
(albedo)	72,2	—	1,09
Remolacha	—	14 (60)	1,26
Tomate (pulpa)	—	4,26	1,48
Pescados y carnes			
Bacalao	81	5	1,22
	81	65	1,42
Hipogloso	76	40 - 65	1,47
Cecina	65	5	1,32
	65	65	1,18
Jamón (ahumado)	64	5	1,18
	64	40 - 65	1,38
Vaca			
Lomo ^(b)	66	40 - 65	1,23
Redondo	71	40 - 65	1,33
Lengua	68	40 - 65	1,32
Agua	—	30	1,48
	—	65	1,60
Hielo	—	0	11,82

^(a) La primera temperatura es la inicial, y entre paréntesis la de los alrededores.

^(b) Los datos sólo son aplicables si los jugos que exudan durante el calentamiento permanecen en los alimentos.

Fuente: Singh (1982).

Al igual que otras propiedades térmicas, Choi y Okos (1986b) expresan la difusividad térmica en función de los componentes:

$$\alpha = \sum_i (\alpha_i X_i^V) \quad [12.29]$$

siendo α_i la difusividad térmica del componente i y X_i^V la fracción volumétrica de dicho componente.

En la tabla 12.6 se dan valores de la difusividad térmica de determinados alimentos. En las tablas 12.3 y 12.4 se dan las expresiones que permiten calcular las difusividades térmicas de componentes puros.

PROBLEMAS

Problema 12.1

Determinar la densidad, conductividad térmica, calor específico y difusividad térmica, a 25 °C, de un producto alimentario, que ha sido analizado químicamente, y se ha obtenido que su composición en peso es: 77% de agua, 19% de hidratos de carbono, 3% de proteínas, 0,2% de grasa y 0,8% de cenizas.

Se utilizará el método de Choi y Okos, para ello se calculan previamente las propiedades térmicas de cada componente a la temperatura de 25°C. En la tabla siguiente se recogen los resultados obtenidos:

Componente	ρ_i (kg/m ³)	k_i (W/m·°C)	\hat{C}_p (kJ/kg·°C)	$\alpha_i \cdot 10^7$ (m ² /s)
Agua	994,91	0,6110	4,1773	1,458
Carbohidrato	1.591,34	0,2334	1,5942	0,927
Proteína	1.316,94	0,2070	2,0376	0,797
Grasa	915,15	0,2496	2,0180	1,019
Ceniza	2.416,78	0,3628	1,1375	1,332

Se calcula la fracción volumétrica de cada componente mediante la ecuación 12.7. Las fracciones máscas y volumétricas de cada componente se dan en la siguiente tabla:

Componente	X_i^m	X_i^v
Agua	0,77	0,8398
Carbohidrato	0,19	0,1296
Proteína	0,03	0,0247
Grasa	0,002	0,0024
Ceniza	0,008	0,0036

Conductividad térmica: Se obtiene a partir de la ecuación 12.6:

$$k = \sum (k_i X_i^v) = 0,55 \text{ W/(m}^\circ\text{C)} = 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ kJ/(s}^\circ\text{m}^\circ\text{C)}$$

Densidad: Se obtiene a partir de la ecuación 12.25:

$$\rho = \frac{1}{\sum_i \left(\frac{X_i^m}{\rho_i} \right)} = 1.085 \text{ kg/m}^3$$

Calor específico: Se obtiene a partir de la ecuación 12.13:

$$\hat{C}_p = \sum_i (\hat{C}_{pi} X_i^m) = 3,594 \text{ kJ/(kg}^\circ\text{C)}$$

Difusividad térmica: Se obtiene a partir de la ecuación 12.29:

$$\alpha = \sum_i (\alpha_i X_i^V) = 1,37 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

También podría calcularse mediante la ecuación 12.26:

$$\alpha = \frac{k}{\rho \hat{C}_p} = 1,41 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

Resultado: $\rho = 1.085 \text{ kg/m}^3$
 $k = 0,550 \text{ W/(m}\cdot\text{°C)}$
 $\hat{C}_p = 3,594 \text{ kJ/(kg}\cdot\text{°C)}$
 $\alpha = 1,37 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$

Transmisión de calor **13** *por conducción*

13.1. Ecuaciones fundamentales en la conducción de calor

Para el estudio de la conducción de calor en un sólido debe realizarse un balance de energía en un elemento de volumen del material suponiendo despreciables los mecanismos de convección y radiación.

Este balance dará lugar a una ecuación que se utiliza para los cálculos de perfiles de temperatura en el sólido, así como en la obtención del flujo de calor que lo atraviesa. La transmisión de calor por unidad de tiempo, debida a la conducción, está relacionada con la distribución de temperaturas mediante la ley de Fourier.

La ecuación fundamental se obtiene al realizar el balance energético en un volumen de control del sólido, según la expresión:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Caudal de entrada} \\ \text{de energía térmica} \\ \text{por conducción} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Caudal de} \\ \text{generación de} \\ \text{energía térmica} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Caudal de salida} \\ \text{de energía térmica} \\ \text{por conducción} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Caudal de} \\ \text{acumulación de} \\ \text{energía térmica} \end{array} \right)$$

La expresión de la ecuación resultante depende de la geometría considerada, resultando muy positivo obtener distintas expresiones según sea el tipo de coordenadas de trabajo.

13.1.1. Coordenadas rectangulares

Para realizar el balance de energía se considera un elemento de volumen del sólido, tal como se muestra en la figura 13.1. Se supone que sólo existe variación de temperatura a lo largo de la dirección x ; es decir, la temperatura del sólido es sólo función de la coordenada x y del tiempo. Además, se considera que las características del material son constantes, con lo que la conductividad térmica, k , la densidad, ρ , y calor específico, \hat{C}_p , del sólido son constantes.

Con estas suposiciones, el balance de energía aplicado al volumen de material de la figura 13.1, conduce a la expresión:

$$\rho \hat{C}_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \tilde{q}_G$$

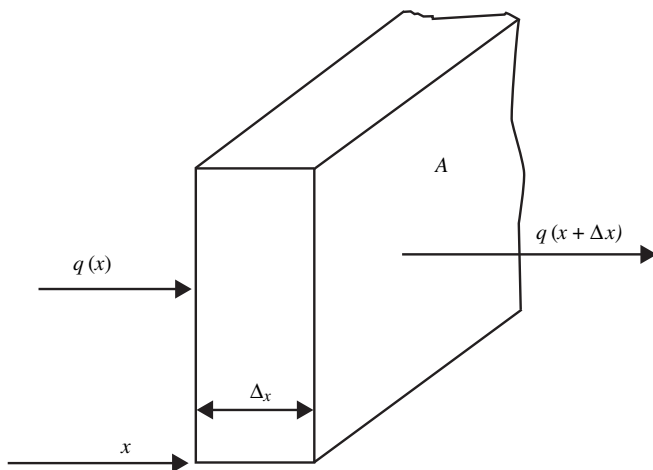


Figura 13.1. Volumen sólido en coordenadas rectangulares.

en la que: t = tiempo.

T = temperatura.

\tilde{q}_G = caudal de generación de energía por unidad de volumen.

En esta ecuación general de transmisión de calor por conducción aparecen varios términos: el de entrada y salida de calor en el volumen de sólido considerado, el de generación y el de acumulación.

Los términos de entrada y salida están regidos por la ecuación de Fourier. El término de generación no aparece en todos los casos, pero sí en aquellos en que en el volumen considerado se produzcan reacciones nucleares que generan calor, o bien cuando existen corrientes eléctricas aplicadas a dicho volumen que al paso por resistencias generan calor. Cuando exista una variación en la temperatura del sistema, producirá una variación en la energía interna, lo que trae consigo el que aparezcan términos de acumulación en la ecuación fundamental de transmisión de calor por conducción. En el caso que la temperatura del sólido permanezca constante no puede haber acumulación de energía, con lo que las condiciones son de régimen estacionario.

El balance de calor se aplica a un volumen de sólido, tal como se representa en la figura 13.1. Los distintos términos del balance energético se desarrollan a continuación.

Término de entrada

Según la ecuación de Fourier, el flujo de calor que entra al volumen de sólido considerado será:

$$\dot{Q}_e = q(x) A = -k A \frac{\partial T(x)}{\partial x}$$

en la que A es la sección transversal de paso al flujo de calor, $q(x)$ la densidad de flujo de calor y \dot{Q}_e el flujo de calor que penetra al sólido a través del área A en la posición de coordenada x .

Término de salida

De modo análogo que para la entrada de calor, se tiene:

$$\dot{Q}_s = q(x + \Delta x) A = -k A \frac{\partial T(x + \Delta x)}{\partial x}$$

siendo \dot{Q}_s el caudal de calor que sale del sólido a través del área A en la posición $(x + \Delta x)$.

Término de generación

Definiendo el caudal de energía generado por unidad de volumen de sólido, \tilde{q}_G , el caudal de generación será:

$$\dot{Q}_G = \tilde{q}_G A \Delta x$$

Término de acumulación

La energía que contiene el volumen de sólido, a la temperatura T , será:

$$E = \rho A \Delta x \hat{C}_p T$$

Si se considera que el sólido es isótropo, ρ y \hat{C}_p son constantes; por lo que el caudal de acumulación en la dirección x es:

$$\dot{Q}_A = \frac{\partial E}{\partial t} = \rho A \Delta x \hat{C}_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Por tanto, el balance energético aplicado al volumen considerado, conduce a la expresión:

$$-k A \frac{\partial T(x)}{\partial x} + \tilde{q}_G A \Delta x = -k A \frac{\partial T(x + \Delta x)}{\partial x} + \rho A \Delta x \hat{C}_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Si se dividen todos los términos de esta expresión por el volumen en el que se aplica el balance ($A \cdot \Delta x$), y reordenando adecuadamente esta ecuación, se tiene:

$$\rho \hat{C}_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\frac{\partial T(x + \Delta x)}{\partial x} - \frac{\partial T(x)}{\partial x}}{\Delta x} + \tilde{q}_G$$

Si se toma el límite para $\Delta x \rightarrow 0$, se obtiene la ecuación:

$$\rho \hat{C}_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \tilde{q}_G$$

que es la expresión de la ecuación fundamental de transmisión de calor por conducción según la dirección x .

Esta ecuación puede generalizarse incluyendo las tres direcciones x , y , z . De esta forma, se obtiene la ecuación general de conducción de calor:

$$\rho \hat{C}_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \tilde{q}_G$$

Teniendo presente que el operador laplaciano ∇^2 está definido por:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Por lo que la ecuación anterior se expresará según la expresión:

$$\rho \hat{C}_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + \tilde{q}_G \quad [13.1]$$

13.1.2. Coordenadas cilíndricas

En este tipo de coordenadas la ecuación general de conducción de calor es análoga a la obtenida para coordenadas rectangulares, con la única excepción que el operador laplaciano se expresa de forma distinta.

La ecuación general de conducción de calor en coordenadas cilíndricas será:

$$\rho \hat{C}_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \tilde{q}_G \quad [13.2]$$

en la que r , ϕ y z son las coordenadas radial, angular y axial, respectivamente, y que pueden visualizarse en la figura 13.2.

13.1.3. Coordenadas esféricas

Al igual que para el caso de coordenadas cilíndricas, la expresión general, para la conducción de calor, se obtiene al expresar el operador laplaciano en coordenadas esféricas. Si la temperatura es función de las tres coordenadas y del tiempo, la expresión resultante es:

$$\rho \hat{C}_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right] + \tilde{q}_G \quad [13.3]$$

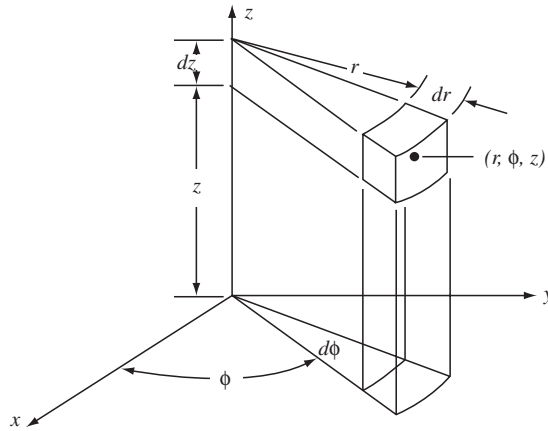


Figura 13.2. Sistema de coordenadas cilíndricas.

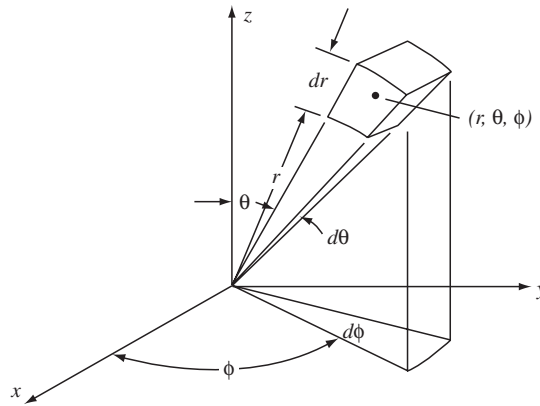


Figura 13.3. Sistema de coordenadas esféricas.

En la figura 13.3 se puede ver el significado de cada una de las coordenadas esféricas.

13.2. Conducción de calor en régimen estacionario

En el caso que se planteen problemas de conducción de calor en los que no haya generación de energía en el sistema considerado, el término \tilde{q}_G de las ecuaciones anteriores desaparece. Si además, la conducción es en régimen estacionario, el término de acumulación, que depende del tiempo, es nulo, con lo que la ecuación general de conducción de calor se transforma en:

$$\nabla^2 T = 0 \quad [13.4]$$

en donde ∇^2 es el operador laplaciano, que como se ha visto tiene distintas expresiones según sea el tipo de coordenadas utilizadas.

Esta ecuación se denomina ecuación de Laplace, siendo muy utilizada en distintos campos de la Ingeniería; pues aparece en numerosos problemas de la resolución de los modelos matemáticos planteados en diversos procesos.

13.2.1. Conducción de calor en régimen estacionario

En este apartado se estudiará la conducción de calor en una sola dirección, es decir, se considerará que la temperatura es función de una sola dirección o coordenada. Para el caso de coordenadas rectangulares se considera que la temperatura varía a lo largo de la coordenada x , mientras que para esféricas y cilíndricas esta variación de temperatura se supone a lo largo de la coordenada radial.

En cada caso se obtendrá el perfil de temperaturas a lo largo de la dirección deseada, mediante integración de la ecuación de Laplace, obteniendo las constantes de integración al aplicar las condiciones límite a la ecuación integrada. Una vez obtenido el perfil de temperaturas se aplica la ecuación de Fourier para conocer el caudal de transmisión de calor.

De los distintos casos que pueden presentarse, se estudiarán los de transmisión de calor a través de capas planas, cilíndricas y esféricas; pues son las formas geométricas que se presentan más usualmente.

13.2.1.1. Pared plana

La forma más común de disminuir las pérdidas de calor a través de una pared es colocar una capa de aislante, siendo de sumo interés poder conocer qué espesor debe tener esta capa. Para el estudio de este caso se supondrá que se trata de una lámina infinita, evitando de este modo el tener que considerar los efectos finales. Aunque se haga esta suposición, los resultados que se obtienen pueden aplicarse para el caso de láminas finitas, con una gran fiabilidad.

Si se supone una lámina de superficie infinita, con una cara a una temperatura T_0 y la otra a T_1 , siendo $T_0 > T_1$; el flujo de calor va desde T_0 a T_1 (figura 13.4).

La ecuación de Laplace en coordenadas rectangulares, en una sola dirección será:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

La temperatura es sólo función de la posición x , con lo que las derivadas parciales pueden sustituirse por derivadas totales. Al integrar esta ecuación se tiene:

$$T = C_1 x + C_2$$

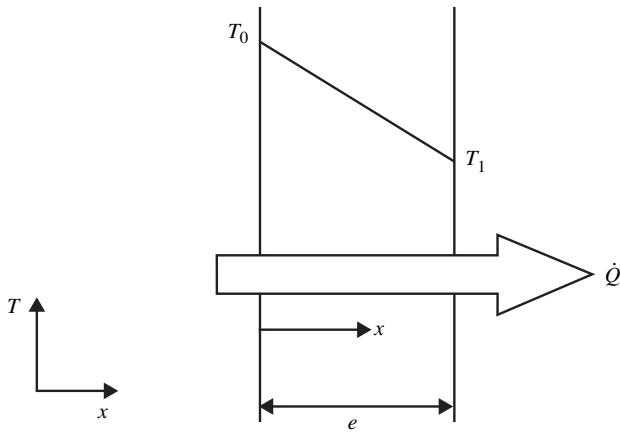


Figura 13.4. Perfil de temperaturas en una pared plana.

en la que C_1 y C_2 son constantes de integración, cuyos valores se obtienen al aplicar las condiciones límite:

$$\text{Para } x = 0 \quad T = T_0$$

$$\text{Para } x = e \quad T = T_1$$

con lo que:

$$T = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{e} x \quad [13.5]$$

es decir, la temperatura varía linealmente con la posición. Cuanto mayor es la conductividad térmica del sólido, más plano es el perfil de temperaturas.

Para calcular el caudal de calor que atraviesa dicha lámina se multiplicará la densidad de flujo calorífico por el área de la placa:

$$\dot{Q} = qA = -kA \frac{dT}{dx}$$

pero del perfil de temperaturas se puede conocer dT/dx con lo que:

$$\dot{Q} = kA \frac{T_0 - T_1}{e} \quad [13.6]$$

que en muchos casos es mejor expresarla de la forma:

$$\dot{Q} = \frac{T_0 - T_1}{\left(\frac{e}{kA}\right)} \quad [13.7]$$

ecuación análoga a la ley de Ohm, en la que $(T_0 - T_1)$ representa la diferencia de potencial térmico y (e/kA) la resistencia al paso de calor.

Se ha supuesto que el medio es isótropo, con lo que la conductividad térmica permanece constante. En el caso de que la conductividad térmica varíe linealmente con la temperatura puede utilizarse el mismo tipo de ecuaciones, pero tomando un valor para la conductividad que sea la media aritmética entre los valores correspondientes a las temperaturas T_0 y T_1 .

Con frecuencia, para evitar las pérdidas de calor a través de una pared se colocan recubrimientos; pero, generalmente, no se realizan con un solo material, sino que se utilizan varios, tal como se muestra en la figura 13.5.

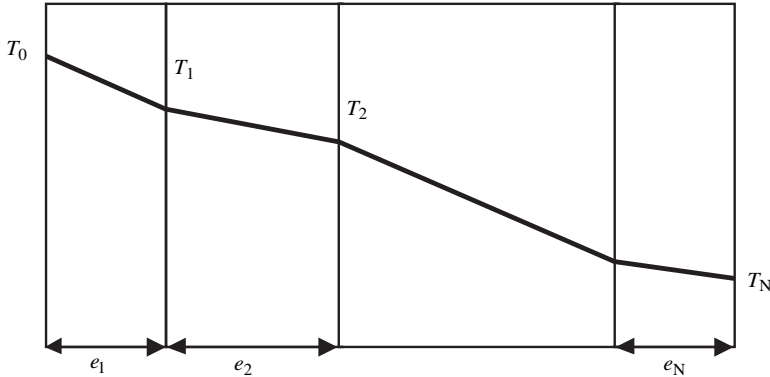


Figura 13.5. Conjunto de capas planas en serie.

Por nomenclatura, para una de las resistencias i , la temperatura entre la capa i e $i - 1$ será T_{i-1} , y entre la i e $i + 1$ será T_i .

Al igual que se ha hecho para una sola capa, se puede demostrar que para la capa i , el perfil de temperaturas viene expresado por la ecuación:

$$T(x_i) = T_{i-1} + \frac{T_i - T_{i-1}}{e_i} x_i \quad [13.8]$$

en la que e_i es el espesor de la capa i , x_i es la coordenada posicional de la capa i .

Como no existe acumulación de energía, el caudal de calor que atraviesa cada capa es el mismo; con lo que:

$$\dot{Q} = q_i A = \frac{T_0 - T_1}{\left(\frac{e_1}{k_1 A}\right)} = \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{e_2}{k_2 A}\right)} = \dots = \frac{T_{N-1} - T_N}{\left(\frac{e_N}{k_N A}\right)}$$

que según las propiedades de las razones, resulta:

$$\dot{Q} = \frac{T_0 - T_N}{\sum_{i=1}^N \left(\frac{e_i}{k_i A}\right)} \quad [13.9]$$

13.2.1.2. Capa cilíndrica

El problema más común en el que interviene un cuerpo con simetría cilíndrica es el de tuberías que transportan fluidos a temperatura superior o inferior a la ambiental; siendo necesario recubrirlas con aislante; para evitar la transmisión de calor con el exterior.

Para el estudio de este problema se supondrá un cilindro hueco de radio r_0 , recubierto por un aislante de espesor e , tal como se muestra en la figura 13.6. La temperatura del fluido que circula por el interior es T_0 , mientras que la temperatura del medio externo es T_1 .

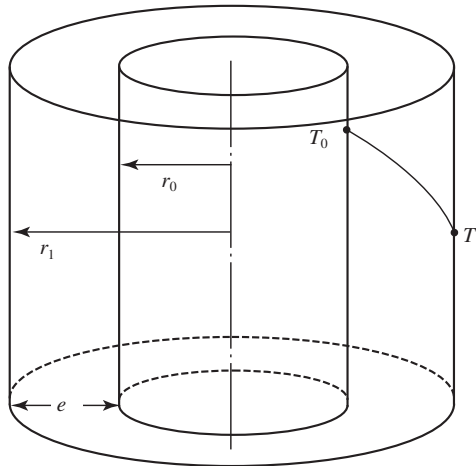


Figura 13.6. Perfil de temperaturas en una capa cilíndrica.

La ecuación fundamental de conducción de calor [ecuación 13.2], si no existe generación de energía y se está en régimen estacionario, para el caso de transmisión de calor a lo largo de la coordenada radial r , se convierte en:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$r \frac{\partial T}{\partial r} = C_1$$

siendo C_1 una constante.

Esta ecuación puede expresarse en derivadas totales si la temperatura es sólo función de la coordenada radial. Al integrar se obtiene la expresión:

$$T = C_1 \ln r + C_2$$

en la que C_1 y C_2 son constantes de integración, cuyos valores se obtienen de las condiciones límite:

$$\text{Para } r = r_0 \quad T = T_0$$

$$\text{Para } r = r_1 \quad T = T_1$$

con lo que:

$$T(r) = T_0 - (T_0 - T_1) \frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)} \quad [13.10]$$

El caudal de calor se obtiene a partir de la ecuación de Fourier, si el cilindro tiene una longitud L , el área de paso del caudal de calor será $A = 2\pi rL$, por lo que dicho caudal será:

$$\dot{Q} = q A = -k A \frac{dT}{dr} = -2 \pi r L \frac{dT}{dr}$$

en la que dT/dr se obtiene por diferenciación de la ecuación 13.10, resultando el caudal:

$$\dot{Q} = k 2 \pi r L \frac{T_0 - T_1}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)} \quad [13.11]$$

multiplicando el numerador y el denominador del segundo miembro por el espesor $e = r_1 - r_0$, esta ecuación se transforma en:

$$\dot{Q} = \frac{T_0 - T_1}{\left(\frac{e}{k A_{ml}}\right)} \quad [13.12]$$

en la que A_{ml} es el área media logarítmica entre las superficies cilíndricas externa e interna:

$$A_{ml} = \frac{A_1 - A_0}{\ln\left(\frac{A_1}{A_0}\right)}$$

siendo: $A_0 = 2\pi r_0 L$ y $A_1 = 2\pi r_1 L$

Si en vez de un solo recubrimiento existieran N capas, el perfil de temperaturas para cada capa i , sería:

$$T(r_i) = T_{i-1} - (T_{i-1} - T_i) \frac{\ln\left(\frac{r}{r_{i-1}}\right)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_{i-1}}\right)} \quad [13.13]$$

Mientras que el caudal de calor que atraviesa estas capas se expresa:

$$\dot{Q} = \frac{T_0 - T_N}{\sum_{i=1}^N \left(\frac{e_i}{k_i (A_{ml})_i} \right)} \quad [13.14]$$

Puede observarse que las ecuaciones que se han obtenido para el caudal de calor son análogas a las obtenidas en el caso de capas planas, con la única diferencia de que para geometrías cilíndricas el área es la media logarítmica en lugar de la aritmética.

13.2.1.3. Capa esférica

Se supone una esfera hueca, tal como la mostrada en la figura 13.7, recubierta por una capa de cierto material con un espesor $e = r_1 - r_0$.

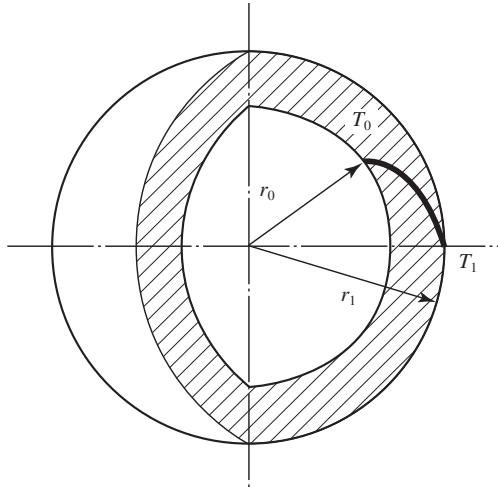


Figura 13.7. Perfil de temperatura en una capa esférica.

Si la temperatura es sólo función de la coordenada radial y, si además, no hay generación de calor y se trabaja en régimen estacionario; la ecuación fundamental de conducción de calor en coordenadas esféricas [ecuación 13.3], se convierte en:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$$

de la que se deduce:

$$r^2 \frac{\partial T}{\partial r} = C_1$$

siendo C_1 una constante de integración.

Como la temperatura sólo depende de la coordenada radial, esta ecuación puede expresarse en forma de derivadas totales, que al integrarla se obtiene:

$$T = C_2 - \frac{C_1}{r}$$

las constantes de integración de esta ecuación se obtienen a partir de las condiciones límite:

$$\text{Para } r = r_0 \quad T = T_0$$

$$\text{Para } r = r_1 \quad T = T_1$$

obteniéndose un perfil de temperaturas según la expresión:

$$T(r) = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{r_1}{r_1 - r_0} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \quad [13.15]$$

El caudal de calor será:

$$\dot{Q} = \frac{T_0 - T_1}{\left(\frac{e}{k A_{mg}}\right)} \quad [13.16]$$

en la que e es el espesor de la capa, A_{mg} es el área media geométrica de las áreas esféricas interna y externa. Esta ecuación se ha obtenido de modo análogo a los casos anteriores, sustituyendo la expresión del perfil de temperaturas en la ecuación de Fourier.

Si en vez de una sola capa se consideran N capas que envuelven la esfera, el perfil de temperaturas en una de las capas intermedias i , será:

$$T(r_i) = T_{i-1} + (T_i - T_{i-1}) \frac{r_i}{r_i - r_{i-1}} \left(1 - \frac{r_{i-1}}{r}\right) \quad [13.17]$$

siendo la expresión que permite calcular el caudal de calor:

$$\dot{Q} = \frac{T_0 - T_N}{\sum_{i=1}^N \left(\frac{e_i}{k_i A_{mgi}}\right)} \quad [13.18]$$

ecuación análoga a las obtenidas para los otros tipos de geometrías estudiados, con la salvedad de que el área en la geometría esférica es el área media geométrica de las superficies exterior e interior de las capas esféricas.

13.2.2. Conducción bidimensional de calor

En los apartados anteriores se ha estudiado la transmisión de calor por conducción en una sola dirección, pero existen casos en que el problema no puede reducirse a conducción unidimensional.

Si la conducción de calor es en dos direcciones, y no existen ni acumulación ni generación de calor, en coordenadas rectangulares se obtiene la ecuación:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{13.19}$$

en la que se observa que la temperatura depende de las coordenadas x e y .

Esta ecuación puede resolverse de diferentes formas, aunque para su mejor resolución es conveniente expresarla en forma de diferencias finitas. Una vez que está expresada en este modo se aplican métodos analíticos o numéricos para su resolución. Además de estos métodos de resolución existen métodos gráficos y analógicos que permiten resolver la ecuación de Laplace [ecuación 13.4] en dos direcciones.

Para expresar la ecuación 13.19 en diferencias finitas, se parcela el sólido donde se va a realizar el balance energético, según un incremento de x y otro de y (figura 13.8), que son las dos direcciones en las que varía la temperatura.

Los nudos resultantes de la parcelación se indican según la dirección x por el subíndice m , y en la dirección y por el subíndice n .

La temperatura de los nudos que rodean a uno cualquiera puede expresarse en función de éste. Por el desarrollo de Taylor, hasta el tercer término incluido, se obtiene:

$$T_{m+1, n} = T_{m, n} + \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{m, n} \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_{m, n} (\Delta x)^2$$

$$T_{m-1, n} = T_{m, n} - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{m, n} \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_{m, n} (\Delta x)^2$$

$$T_{m, n+1} = T_{m, n} + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{m, n} \Delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_{m, n} (\Delta y)^2$$

$$T_{m, n-1} = T_{m, n} - \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{m, n} \Delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_{m, n} (\Delta y)^2$$

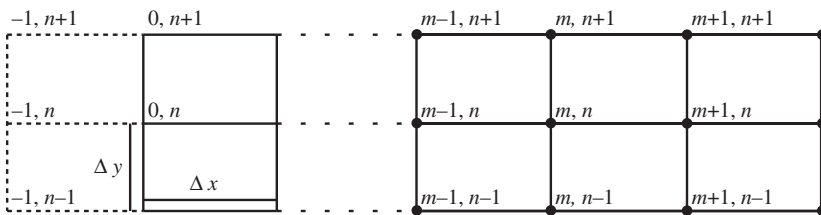


Figura 13.8. Parcelación y notación para resolución numérica en conducción bidimensional de calor.

De este conjunto de ecuaciones pueden obtenerse las derivadas primera y segunda de la temperatura en el punto (m, n) según la dirección x e y .

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{m,n} = \frac{T_{m+1,n} - T_{m-1,n}}{2 \Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{m,n} = \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n-1}}{2 \Delta y}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{m,n} = \frac{T_{m+1,n} - 2 T_{m,n} + T_{m-1,n}}{(\Delta x)^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{m,n} = \frac{T_{m,n+1} - 2 T_{m,n} + T_{m,n-1}}{(\Delta y)^2}$$

Si se sustituyen estas expresiones en la ecuación 13.19 se obtiene:

$$\frac{T_{m+1,n} - 2 T_{m,n} + T_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1} - 2 T_{m,n} + T_{m,n-1}}{(\Delta y)^2} = 0$$

En el caso de que la parcelación se realice de forma que los incrementos en las direcciones x e y sean iguales, $\Delta x = \Delta y$, esta ecuación puede expresarse como:

$$T_{m,n} = \frac{1}{4} (T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) \quad [13.20]$$

esta ecuación indica que la temperatura en uno de los nudos es la media aritmética de los que le rodean.

Las condiciones de contorno pueden expresarse en forma de ecuación algebraica; así, si en la pared del sólido la temperatura es T_0 , ésta puede expresarse como:

$$T_{0,n} = T_0 \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots, N$$

Además, como en la pared existe la condición de máximo o de mínimo:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{0,n} = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$$

que expresada en forma de diferencias finitas se convierte en:

$$T_{-1,n} = T_{1,n} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$$

es decir, esta ecuación indica que existen puntos fuera del sistema que «poseen» idéntica temperatura que los simétricos respecto a la pared, y pertenecientes al sistema.

Una vez que se han planteado esta serie de ecuaciones debe resolverse el problema; existiendo varios métodos para ello. A continuación se exponen dos métodos numéricos de resolución: el de Liebman y el de relajación.

A) Método de Liebman

Tal como se ha obtenido anteriormente [ecuación 13.20], la temperatura en un nudo es la media aritmética de las temperaturas de los puntos que le rodean.

Este método distingue dos tipos de puntos alternados (figura 13.9), los señalados con un círculo y los señalados con una cruz. Para encontrar la temperatura de los puntos, primeramente se suponen las temperaturas de puntos alternados, por ejemplo los puntos señalados con un círculo (○). A partir de estas temperaturas supuestas pueden calcularse las correspondientes de los puntos marcados con una cruz (×), utilizando la ecuación 13.20. Este proceso se va repitiendo hasta que las temperaturas de dos cálculos consecutivos coincidan. Llegado a este punto, las temperaturas de cada nudo son las que se buscaban, con lo cual se ha calculado el perfil de temperaturas deseado.

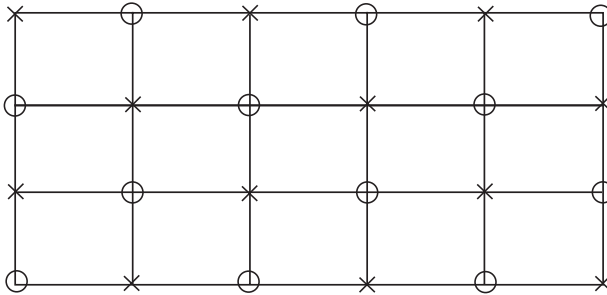


Figura 13.9. Parcelación del sólido para el método de Liebman.

B) Método de relajación

Este método consiste en suponer las temperaturas de todos los puntos del enrejado, por lo que es muy difícil que en una primera suposición se acierte y se cumpla la ecuación 13.20 para todos los nudos. Lo que sí es posible es obtener unos residuos tales como:

$$R = T_{m+1, n} + T_{m-1, n} + T_{m, n+1} + T_{m, n-1} - 4 T_{m, n}$$

Una vez que se han supuesto las temperaturas se obtendrán los valores de estos residuos para cada nudo, y se debe lograr que éstos tiendan a cero; lo que indicaría que las temperaturas supuestas son las deseadas. Como esto es difícil, las temperaturas se deberán corregir sucesivamente, de modo que las nuevas temperaturas se corrigen según la expresión:

$$(T_{m, n})^* = T_{m, n} + \frac{R_{m, n}}{4}$$

con estas temperaturas corregidas se vuelven a calcular los residuos de cada punto y se repite el proceso hasta que los residuos sean despreciables, en cuyo caso las temperaturas de cada punto serán las que se buscan.

Una vez que se han calculado las temperaturas de todos los puntos, según uno de estos métodos, ya se conoce el perfil de temperaturas. A partir de éste es posible calcular el caudal de calor que atraviesa un área determinada según la expresión:

$$\dot{Q} = \int_S k \nabla T dS \quad [13.21]$$

en la que dS es la sección de paso. El cálculo de este caudal de calor suele ser complicado, utilizándose para ello métodos gráficos.

En conclusión, el problema global que se presenta en la conducción bidimensional de calor es el cálculo de la distribución de temperaturas; para luego, una vez conocidas éstas, calcular el caudal de calor. En el cálculo de la distribución o perfil de temperaturas se han mostrado dos métodos numéricos, pero en la bibliografía pueden encontrarse detallados otros, tales como métodos gráficos, analógicos y matriciales.

13.2.3. Conducción tridimensional de calor

Cuando la conducción de calor en un sólido es tal que deba considerarse en tres direcciones, se pueden aplicar las mismas técnicas que se ha desarrollado para el caso de conducción bidimensional.

Si se supone un paralelepípedo (figura 13.10) a través del cual se transmite calor en estado estacionario, y además, son conocidas todas las condiciones de contorno; al aplicar un balance de calor expresado en diferencias finitas, cuando los in-

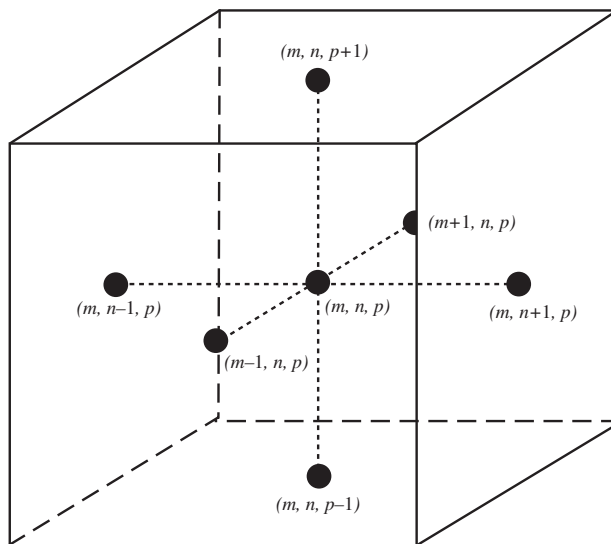


Figura 13.10. Parcelación para conducción tridimensional de calor.

crementos de las tres coordenadas espaciales sean iguales ($\Delta x = \Delta y = \Delta z$), se obtiene que la temperatura en un punto de coordenadas (m, n, p) es:

$$T_{m,n,p} = \frac{1}{6} (T_{m+1,n,p} + T_{m-1,n,p} + T_{m,n+1,p} + T_{m,n-1,p} + T_{m,n,p+1} + T_{m,n,p-1}) \quad [13.22]$$

Lo que indica que la temperatura de un nudo, para problemas tridimensionales de calor sin generación de calor y estado estacionario, es la media aritmética de las temperaturas de los nudos adyacentes. La forma de operar es análoga al caso de conducción bidimensional de calor.

13.3. Conducción de calor en estado no estacionario

En todos los casos estudiados en el apartado 13.2 se ha supuesto que la temperatura de cualquier punto del sólido permanecía constante con el tiempo. Sin embargo, en la realidad se presentan casos en que la temperatura dentro del sólido, además de variar con la posición puede sufrir variaciones con el tiempo. Tal es el caso de los procesos de congelación y descongelación, en los que es deseable conocer el tiempo necesario para obtener cierta temperatura en un punto determinado del sólido. O bien, se desea calcular la temperatura de dicho punto al cabo de cierto tiempo. Para poder calcular estos tiempos o temperaturas debe tenerse presente que el proceso se desarrolla en régimen no estacionario.

A partir de la ecuación fundamental de conducción de calor, para el caso de coordenadas rectangulares [ec. 13.1] se tiene:

$$\rho \hat{C}_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + \tilde{q}_G \quad [13.1]$$

si se tiene presente que la difusividad térmica α viene definida por:

$$\alpha = \frac{k}{\rho \hat{C}_p}$$

la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \tilde{q}_G \quad [13.23]$$

ecuación válida para cualquier tipo de coordenadas que se tomen, pero debiéndose expresar el operador laplaciano ∇^2 en la forma adecuada para cada caso.

En los tratamientos de los apartados que siguen se realizarán en coordenadas rectangulares, pero debe pensarse que en otro tipo de coordenadas el tratamiento matemático a seguir sería análogo. En todos los casos que se presentarán se va a suponer que no existe generación de calor.

13.3.1. Conducción monodimensional de calor

Si se considera un sólido semiinfinito, tal como se muestra en la figura 13.11, en el que el espesor en la dirección x es infinito; se puede suponer que el flujo de calor que atraviesa dicho sólido lo hace exclusivamente en la dirección x . Si en el interior del sólido no existe generación de calor, la ecuación 13.23 se puede expresar como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad [13.24]$$

La resolución de esta ecuación es complicada, existiendo diferentes métodos tales como analíticos, numéricos y gráficos. A continuación se expondrán algunos de ellos.

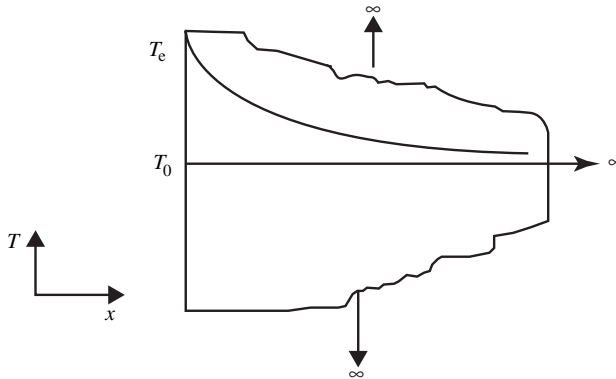


Figura 13.11. Sólido semiinfinito.

13.3.1.1. Métodos analíticos

La solución de la ecuación 13.24 se obtiene analíticamente una vez especificadas las condiciones límite que permiten integrar dicha ecuación.

La integración de esta ecuación sólo es posible en algunos casos, tales como **sólidos semiinfinitos**. Si inicialmente el sólido posee una temperatura T_0 , y en un determinado instante la temperatura de la pared adquiere un valor T_e , se considera que para un punto muy alejado de la pared su temperatura continúa siendo T_0 en cualquier instante. Las condiciones para integrar la ecuación 13.24 son:

- Condición inicial: Para $\forall x$ $t = 0$ $T = T_0$
- Condición contorno: Para $\forall t$ $x \rightarrow \infty$ $T = T_0$
- Para $\forall t$ $x = 0$ $T = T_e$

La última condición de contorno supone que la pared está siempre a una temperatura constante T_e , es decir, se trata de una condición de isoterma.

Con estas condiciones límite se obtiene la solución a la ecuación 13.24, pudiéndose demostrar que la ecuación que da la distribución de temperaturas en la lámina es:

$$\frac{T_e - T}{T_e - T_0} = \text{fer} \left(\frac{x}{2 \sqrt{\alpha t}} \right) \quad [13.25]$$

en la que *fer* es la función error de Gauss, definida por:

$$\text{fer}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(-\eta^2) d\eta \quad [13.26]$$

siendo:

$$\eta = \frac{x}{2 \sqrt{\alpha t}}$$

La función error de Gauss puede encontrarse tabulada para los diferentes valores de la posición *x*, dándose dichos valores en la tabla 13.1

Otros casos en los que es posible hallar una solución analítica a la ecuación 13.24 es cuando el sólido semiinfinito posee una **geometría sencilla**. Tal es el caso de láminas infinitas con un espesor finito, o bien cilindros de altura infinita; también puede encontrarse solución analítica para sólidos de forma esférica.

A continuación se estudiará el caso de transmisión de calor a través de una lámina infinita de espesor $2x_0$. Inicialmente la lámina se halla a una temperatura T_0 y se sumerge en el seno de un fluido cuya temperatura es T_e . En este caso, la condición de contorno es de convección, ya que existe una transmisión de calor desde el seno del fluido hasta la pared del sólido mediante un mecanismo de convección, mientras que en el interior del sólido es por conducción. De esta forma puede escribirse:

$$h(T_e - T_p) = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_p \quad [13.27]$$

en la que T_p es la temperatura de la lámina en la pared que está en contacto con el fluido, en un instante determinado, y *h* es el coeficiente individual de transmisión de calor por convección entre el fluido y el cuerpo sólido.

Las condiciones límite para obtener la solución analítica son:

- Condición inicial: Para $\forall x$ $t = 0$ $T = T_0$
- Condición contorno: Para $t \rightarrow \infty$ $x = x_0$ $T = T_e$
- Para $\forall t$ $x = 0$ $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$

Esta última condición de contorno es debido a que en el centro de la lámina ($x = 0$) debe existir una condición de óptimo, máximo o mínimo, dependiendo de si el sólido se enfría o calienta.

Tabla 13.1. Función error de Gauss

$$fer(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(-\eta^2) d\eta$$

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$$

η	$fer(\eta)$	η	$fer(\eta)$
0,00	0,00000	1,00	0,84270
0,04	0,45110	1,10	0,88020
0,08	0,09008	1,20	0,91031
0,12	0,13476	1,30	0,93401
0,16	0,17901	1,40	0,95228
0,20	0,22270	1,50	0,96610
0,24	0,25670	1,60	0,97635
0,28	0,30788	1,70	0,98379
0,32	0,34913	1,80	0,98909
0,36	0,38933	1,90	0,99279
0,40	0,42839	2,00	0,99532
0,44	0,46622	2,10	0,99702
0,48	0,50275	2,20	0,99814
0,52	0,53790	2,30	0,99886
0,56	0,57162	2,40	0,99931
0,60	0,60386	2,50	0,99959
0,64	0,63459	2,60	0,99976
0,68	0,66278	2,70	0,99987
0,72	0,69143	2,80	0,99993
0,76	0,71754	2,90	0,99996
0,80	0,74210	3,00	0,99998
0,84	0,76514	3,20	0,999994
0,88	0,78669	3,40	0,999998
0,92	0,80677	3,60	1,00000
0,96	0,82542		

La resolución analítica del problema se facilita si las variables se expresan en forma adimensional. Para ello se definen las siguientes variables adimensionales de temperatura, tiempo y posición:

$$Y = \frac{T_e - T}{T_e - T_0} \tag{13.28a}$$

$$\tau = (Fo) = \frac{\alpha t}{(x_0)^2} \tag{13.28b}$$

$$n = \frac{x}{x_0} \tag{13.28c}$$

Cabe resaltar que la variable adimensional de tiempo es una expresión del módulo de Fourier.

Al sustituir estas variables bidimensionales en la ecuación 13.24 se obtiene:

$$\frac{\partial Y}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 Y}{\partial n^2} \quad [13.29]$$

con las condiciones límite:

- Para $\forall n$ $t = 0$ $Y = 1$
- Para $n = 1$ $t \rightarrow \infty$ $Y = 0$
- Para $n = 0$ $\forall \tau$ $\frac{\partial Y}{\partial n} = 0$

La ecuación 13.29 puede resolverse por separación de variables, obteniéndose la solución:

$$Y = 4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{sen } A_i}{2 A_i + \text{sen } (2 A_i)} \cos (A_i n) \exp (-A_i \tau) \quad [13.30]$$

en la que A_i son las infinitas soluciones de la ecuación:

$$A_i \text{tg } (A_i) = \frac{1}{m} \quad [13.31]$$

siendo $1/m$ el **módulo de Biot**, definido según la expresión:

$$(\text{Bi}) = \frac{1}{m} = \frac{h x_0}{k} \quad [13.32]$$

Estas soluciones son válidas para valores del módulo de Biot comprendidos entre 0,1 y 40, en donde existe un mecanismo combinado conducción-convección para la transmisión de calor.

Esta solución analítica se ha obtenido para una lámina infinita de espesor $2x_0$; pero soluciones análogas pueden obtenerse para un cilindro de radio x_0 y de altura infinita, así como para una esfera de radio x_0 ; aunque la resolución de la ecuación 13.29 es más compleja.

De cualquier modo, las soluciones analíticas suelen encontrarse representadas en forma gráfica (figuras 13.12, 13.13, 13.14); con lo que se facilitan mucho los cálculos de resolución de los distintos problemas que puedan presentarse. Es de resaltar que estas figuras representan la solución gráfica de una ecuación adimensional en derivadas parciales [ec. 13.29], bajo unas condiciones límite específicas. Por lo que estas gráficas pueden utilizarse en todos aquellos problemas que se expresen por este tipo de ecuaciones diferenciales y condiciones límite.

Además de estas soluciones, existe un método numérico que permite evaluar la temperatura en el centro del sólido. Como se ha comentado anteriormente es complicado obtener una solución exacta a este tipo de problemas; sin embargo, para geometrías sencillas se obtiene una serie como solución al problema. Y para el caso concreto que el valor del módulo de Fourier (Fo) sea superior a 0,2; únicamente el

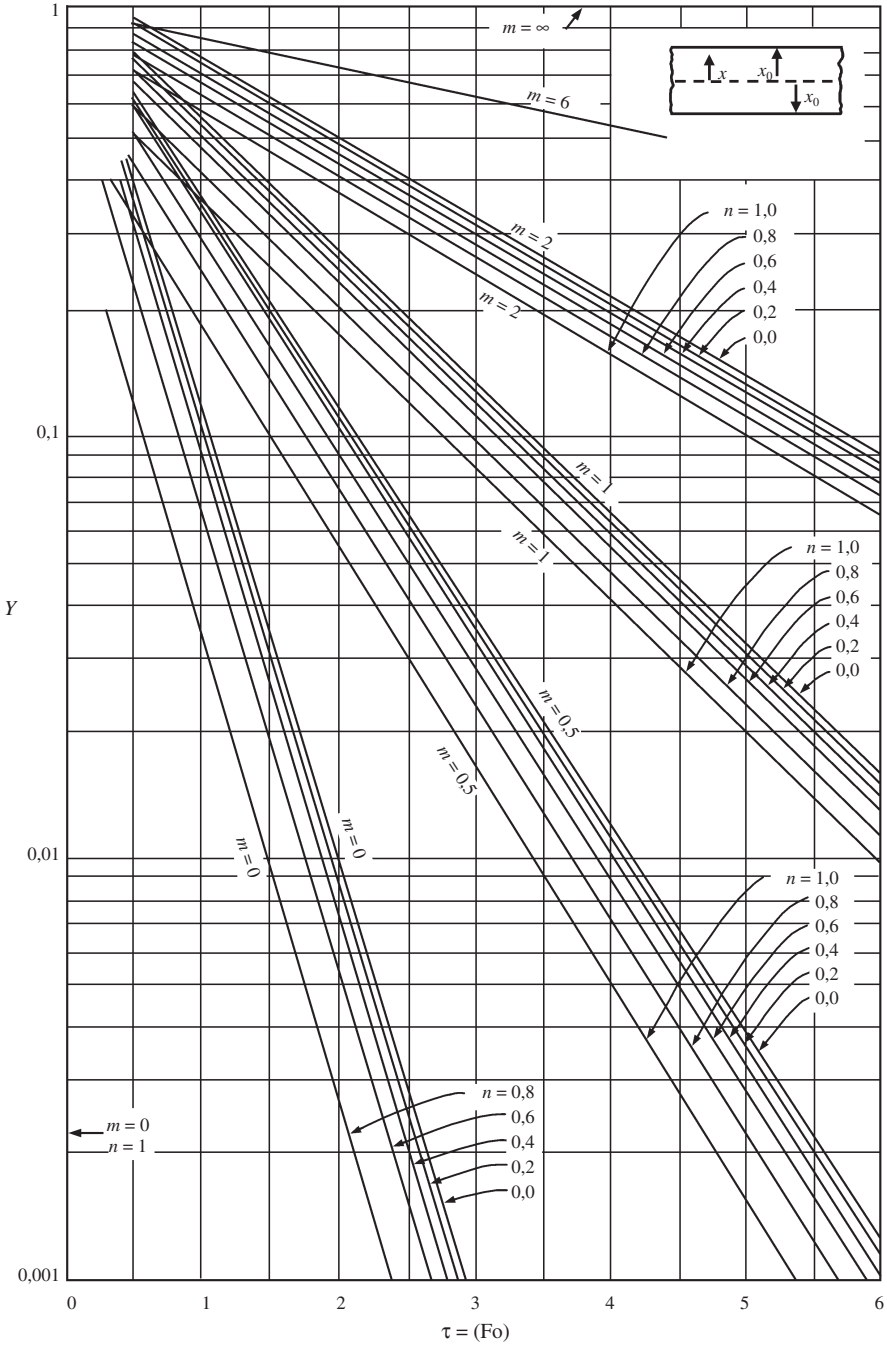


Figura 13.12. Temperatura adimensional en función del tiempo y posición para una lámina infinita.

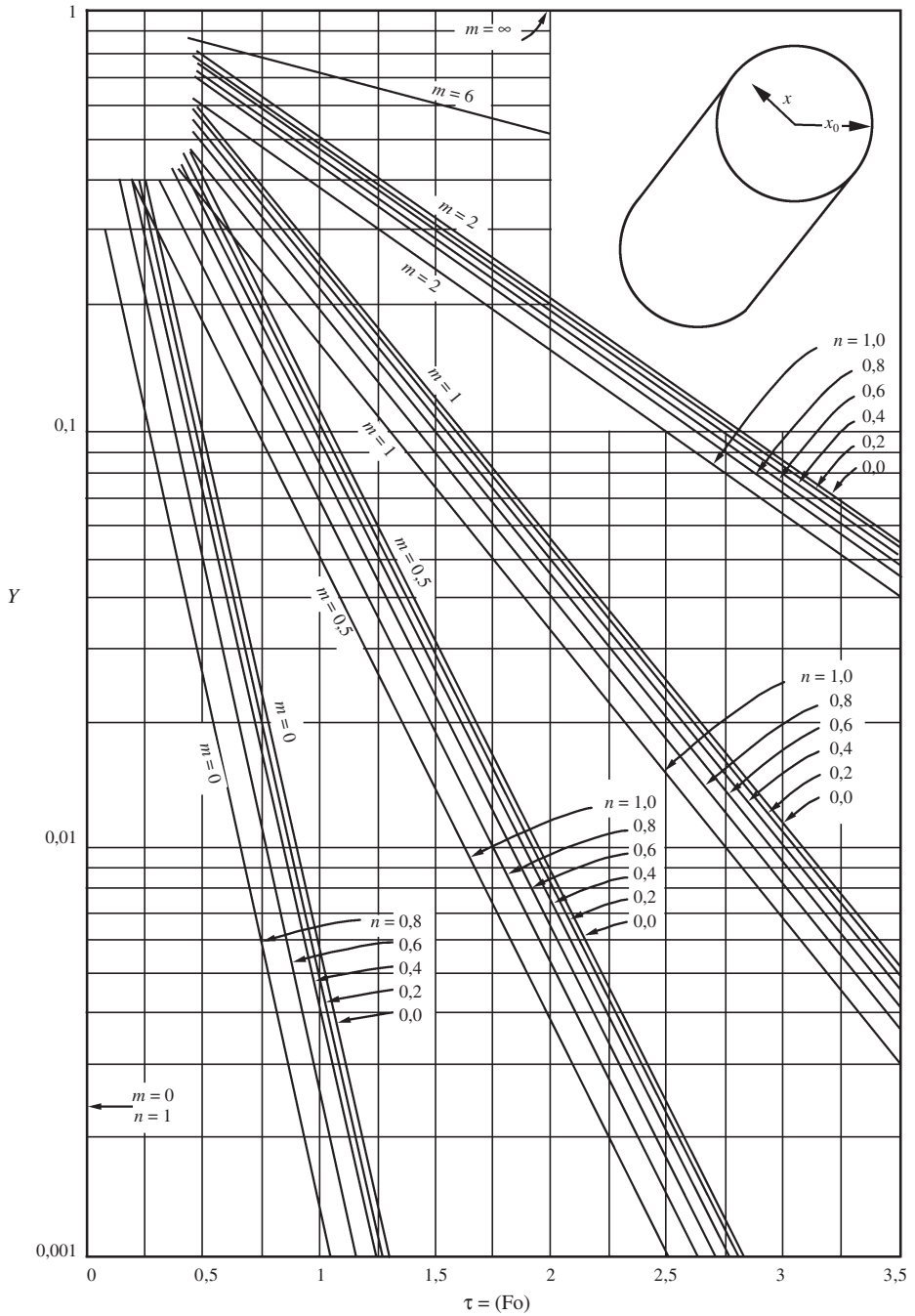


Figura 13.13. Temperatura adimensional en función del tiempo y posición para un cilindro de altura infinita.

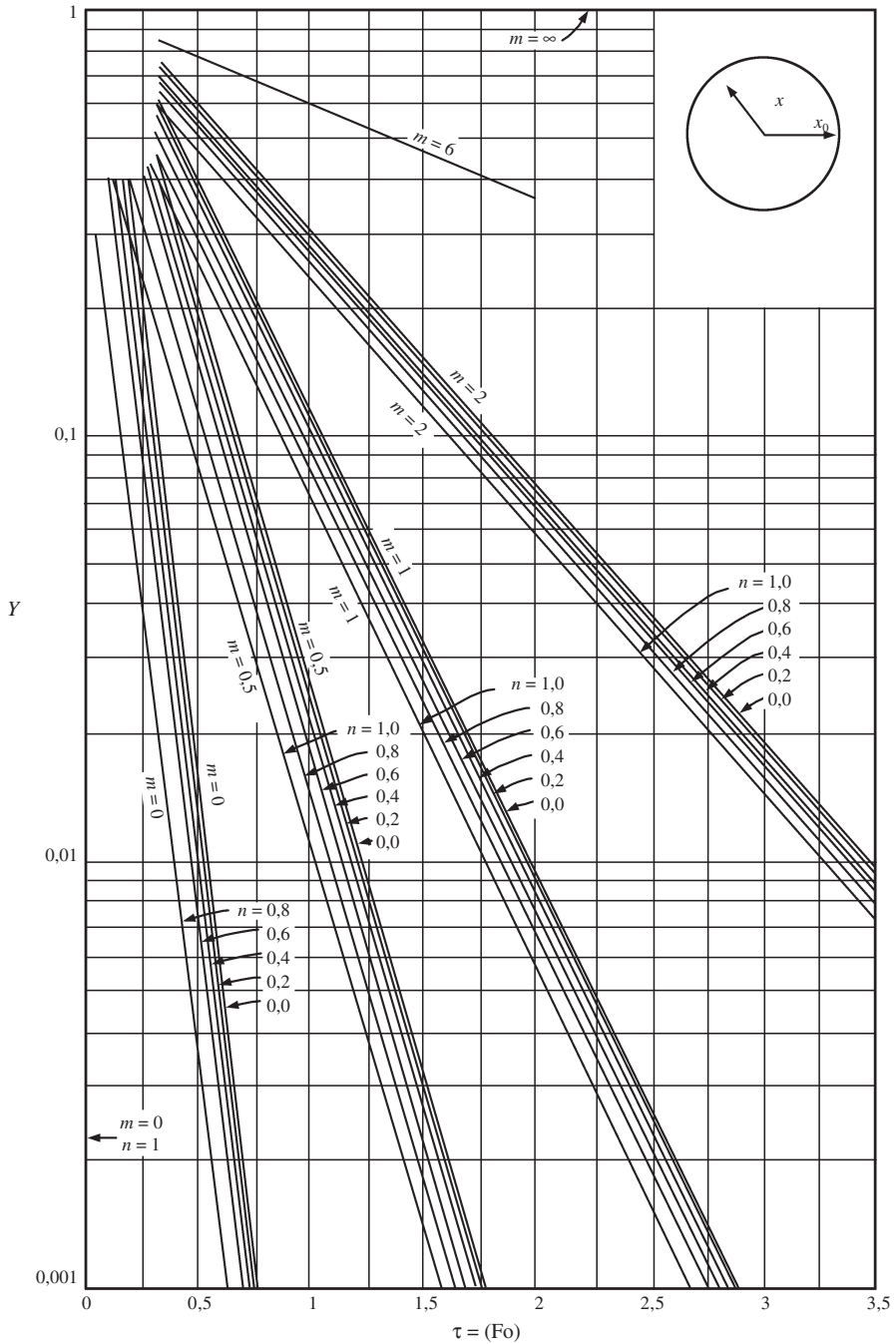


Figura 13.14. Temperatura adimensional en función del tiempo y posición para una esfera.

primer término de la serie tiene importancia. De esta forma, la solución a la ecuación 13.24 es función del módulo de Fourier, según la expresión:

$$Y = \frac{T_e - T_f}{T_e - T_0} = C_1 \exp(-\xi^2 Fo) \quad [13.33]$$

donde T_f es la temperatura en el **centro** del sólido en el tiempo t , mientras que T_e y T_0 son las temperaturas del fluido externo y la inicial del sólido, respectivamente. Los parámetros C_1 y ξ de esta ecuación pueden encontrarse en la tabla 13.2, y son función del valor del módulo de Biot y del tipo de sólido considerado.

Tabla 13.2. Coeficientes del primer término de las soluciones para conducción monodimensional de calor en estado no estacionario

(Bi)	Lámina infinita		Cilindro Infinito		Esfera	
	ξ	C_1	ξ	C_1	ξ	C_1
0,01	0,0998	1,0017	0,1412	1,0025	0,1730	1,0030
0,02	0,1410	1,0033	0,1995	1,0050	0,2445	1,0060
0,03	0,1732	1,0049	0,2439	1,0075	0,2989	1,0090
0,04	0,1987	1,0066	0,2814	1,0099	0,3450	1,0120
0,05	0,2217	1,0082	0,3142	1,0124	0,3852	1,0149
0,06	0,2425	1,0098	0,3438	1,0148	0,4217	1,0179
0,07	0,2615	1,0114	0,3708	1,0173	0,4550	1,0209
0,08	0,2791	1,0130	0,3960	1,0197	0,4860	1,0239
0,09	0,2956	1,0145	0,4195	1,0222	0,5150	1,0268
0,10	0,3111	1,0160	0,4417	1,0246	0,5423	1,0298
0,15	0,3779	1,0237	0,5376	1,0365	0,6608	1,0445
0,20	0,4328	1,0311	0,6170	1,0483	0,7593	1,0592
0,25	0,4801	1,0382	0,6856	1,0598	0,8448	1,0737
0,30	0,5218	1,0450	0,7465	1,0712	0,9208	1,0880
0,40	0,5932	1,0580	0,8516	1,0932	1,0528	1,1164
0,50	0,6533	1,0701	0,9408	1,1143	1,1656	1,1441
0,60	0,7051	1,0814	1,0185	1,1346	1,2644	1,1713
0,70	0,7506	1,0919	1,0873	1,1539	1,3525	1,1978
0,80	0,7910	1,1016	1,1490	1,1725	1,4320	1,2236
0,90	0,8274	1,1107	1,2048	1,1902	1,5044	1,2488
1,0	0,8603	1,1191	1,2558	1,2071	1,5708	1,2732
2,0	1,0769	1,1795	1,5995	1,3384	2,0288	1,4793
3,0	1,1925	1,2102	1,7887	1,4191	2,2889	1,6227
4,0	1,2646	1,2287	1,9081	1,4698	2,4556	1,7201
5,0	1,3138	1,2402	1,9898	1,5029	2,5704	1,7870
6,0	1,3496	1,2479	2,0490	1,5253	2,6537	1,8338
7,0	1,3766	1,2532	2,0937	1,5411	2,7165	1,8674
8,0	1,3978	1,2570	2,1286	1,5526	2,7654	1,8921
9,0	1,4149	1,2598	2,1566	1,5611	2,8044	1,9106
10,0	1,4289	1,2620	2,1795	1,5677	2,8363	1,9249
20,0	1,4961	1,2699	2,2881	1,5919	2,9857	1,9781
30,0	1,5202	1,2717	2,3261	1,5973	3,0372	1,9898
40,0	1,5325	1,2723	2,3455	1,5993	3,0632	1,9942
50,0	1,5400	1,2727	2,3572	1,6002	3,0788	1,9962
100,0	1,5552	1,2731	2,3809	1,6015	3,1102	1,9990

Debe tenerse presente que el módulo de Fourier se define según la expresión:

$$(\text{Fo}) = \frac{\alpha t}{L^2} \quad [13.34]$$

donde α es la difusividad térmica, L una longitud característica del sólido y t el tiempo.

En aquellos casos en los que el valor del módulo de Biot es inferior a 0,1, es la transmisión de calor por convección la que controla el proceso. Como la convección es el mecanismo controlante, la temperatura del sólido será uniforme. A partir de un balance de energía es posible obtener la siguiente solución al problema:

$$Y = \frac{T_e - T_f}{T_e - T_0} = \exp\left(-\frac{h A t}{m \hat{C}_p}\right) \quad [13.35a]$$

donde A es el área de la superficie del sólido, \hat{C}_p su calor específico, m la masa del sólido; mientras que T_e y T_0 son las temperaturas del fluido externo y la inicial del sólido, respectivamente y T_f la temperatura del sólido en el tiempo t . Si se tienen presentes las expresiones de los módulos de Biot y Fourier [ecs. 13.32 y 13.34] esta última ecuación se puede expresar en forma adimensional:

$$Y = \frac{T_e - T_f}{T_e - T_0} = \exp[-(\text{Bi})(\text{Fo})] \quad [13.35b]$$

13.3.1.2. Métodos numéricos y gráficos

Además de las soluciones analíticas obtenidas en el apartado anterior, para la resolución de problemas en estado no estacionario, pueden aplicarse métodos numéricos o bien gráficos equivalentes a las soluciones numéricas.

La resolución numérica se aplicará a casos sencillos, tal como es el de una lámina. Para ello, se parcela el sólido y se ve como varía la temperatura de cada parcela con el tiempo.

La ecuación del balance de calor en estado no estacionario, sin generación de calor, para coordenadas rectangulares, en una sola dirección es:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad [13.24]$$

Esta ecuación puede expresarse en diferencias finitas, por lo que las derivadas parciales de esta ecuación se expresan como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T(x, t + \Delta t) - T(x, t)}{\Delta t} \quad [13.36]$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T(x + \Delta x, t) - 2T(x, t) + T(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} \quad [13.37]$$

que sustituidas en la ecuación anterior conducen a la expresión:

$$T(x, t + \Delta t) - T(x, t) = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \alpha [T(x + \Delta x, t) - 2T(x, t) + T(x - \Delta x, t)]$$

Teniendo presente que el módulo de Fourier viene definido por la ecuación 13.34:

$$(Fo) = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}$$

que sustituido en la ecuación anterior, se obtiene una expresión que da la temperatura de una de las parcelas del sólido para un tiempo posterior ($t + \Delta t$) al tiempo t :

$$T(x, t + \Delta t) = (Fo) \left[T(x + \Delta x, t) + T(x - \Delta x, t) + \left(\frac{1}{(Fo)} - 2 \right) T(x, t) \right] \quad [13.38]$$

La elección del valor del módulo de Fourier está restringido, pues si se utilizan valores de este módulo superiores a 1/2, los errores que se cometen van acumulándose a medida que se avanza en el proceso de cálculo.

La elección del valor numérico de Fo fija el incremento de tiempo Δt , ya que:

$$\Delta t = (Fo) \frac{(\Delta x)^2}{\alpha} \quad [13.39]$$

En el caso que se elija $Fo = 1/2$, se tiene:

$$T(x, t + \Delta t) = \frac{1}{2} [T(x + \Delta x, t) + T(x - \Delta x, t)] \quad [13.40]$$

lo que indica que la temperatura en una parcela es la media aritmética de las temperaturas en las parcelas adyacentes en el intervalo anterior de tiempo.

Si inicialmente el sólido de la figura 13.15 se encontraba a una temperatura T_0 , y se ponen en contacto las caras exteriores a una temperatura T_e , la forma de operar es como sigue. Se divide el sólido en un número impar de parcelas (en este caso 9), siendo el perfil de temperaturas para los diferentes intervalos de tiempo:

- Para $t = 0$

$$T_1 = T_9 = T_e$$

$$T_2 = T_3 = \dots = T_8 = T_0$$
- Para $t = 0 + \Delta t$

$$T_1 = T_9 = T_e$$

$$T_2 = T_8 = (T_0 + T_e)/2$$

$$T_3 = T_4 = \dots = T_7 = T_0$$
- Para $t = 0 + 2 \Delta t$

$$T_1 = T_9 = T_e$$

$$T_2 = T_8 \text{ no varían}$$

$$T_3 = T_7 = (T_2 + T_0)/2$$

$$T_4 = T_5 = T_6 = T_0$$

y así sucesivamente hasta llegar al Δt fijado.

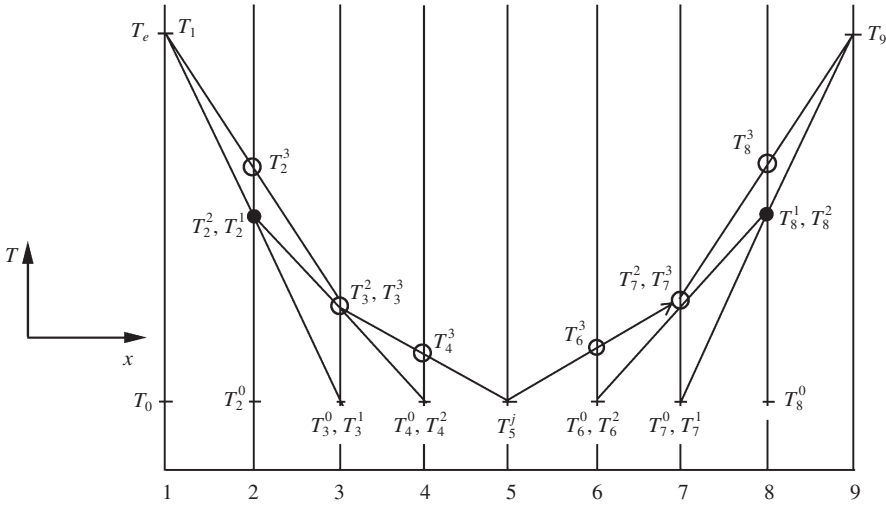


Figura 13.15. Parcelación del sólido y evolución del perfil de temperaturas.

Cuando se elige el módulo de Fourier $Fo = 1/2$ se obtiene una solución gráfica sencilla para los problemas de conducción de calor en estado no estacionario. El método gráfico basado en este proceso se denomina **método de Binder-Schmidt**.

Según indica la ecuación 13.40 la temperatura de una parcela es la media aritmética entre las temperaturas de las adyacentes de un intervalo de tiempo anterior, por lo que gráficamente se obtiene la temperatura de la parcela intermedia uniendo las temperaturas a sus lados (figura 13.16).

El método de Binder-Schmidt supone haber parcelado el sólido en incrementos de x (Δx) iguales; pero sólo es aplicable en problemas de conducción monodimen-

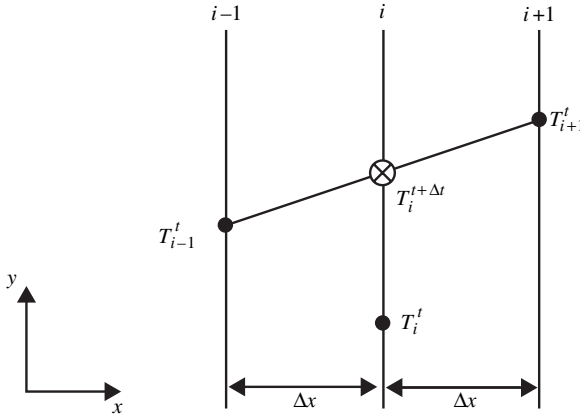


Figura 13.16. Método gráfico de Binder-Schmidt.

sional de calor. En la figura 13.15 puede verse desarrollado este método gráfico para una lámina, parcelada de tal forma que existen 9 planos. El sólido se halla inicialmente a una temperatura T_0 y se expone por las dos caras externas a una temperatura T_e . Pudiéndose observar en la figura 13.15 la variación del perfil de temperaturas para los primeros cuatro intervalos de tiempo. La temperatura de cada parcela se indica por T_i^j , en la que el subíndice i indica la posición de la parcela y el superíndice j el intervalo de tiempo.

13.3.2. Conducción bi- y tridimensional de calor. Regla de Newman

En apartados anteriores se ha estudiado la transmisión de calor por conducción en estado no estacionario para sólidos considerados infinitos. Sin embargo, en la práctica las láminas y cilindros no tienen suficiente proporción longitud-grosor para ser tratados como sólidos de dimensiones infinitas.

La forma en que pueden resolverse este tipo de problemas es sencilla, denominándose el método de resolución regla de Newman, el cual demostró que para un sólido de forma paralelepípeda que se enfría o calienta, la solución que describe la variación de la temperatura en función del tiempo y de la posición puede expresarse como:

$$Y = Y_x Y_y Y_z \quad [13.41]$$

en la que Y es la temperatura adimensional definida en la ecuación 13.28.a, y las variables Y_x , Y_y e Y_z son los valores adimensionales de las temperaturas según las direcciones x , y , z , respectivamente, considerando las otras dos direcciones infinitas. Es decir, se supone que el paralelepípedo está formado por el corte de tres láminas semiinfinitas de espesores finitos, que se corresponden a cada una de las tres dimensiones del paralelepípedo.

Para el caso de un cilindro finito, puede considerarse formado por el corte de un cilindro de longitud infinita y una lámina semiinfinita. Con lo que la solución vendrá dada por la ecuación:

$$Y = Y_C Y_L \quad [13.42]$$

en la que Y_C es el valor adimensional de la temperatura para un cilindro de longitud infinita, mientras que Y_L es el correspondiente a una lámina semiinfinita.

PROBLEMAS

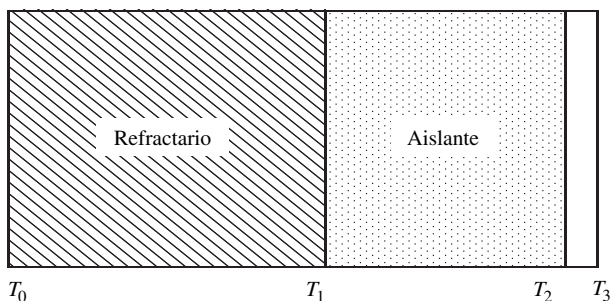
Problema 13.1

En un proceso de pasteurización el fluido calefactor adquiere su temperatura de proceso en un horno cuya pared consta de tres capas. La primera es de ladrillo refractario, la segunda capa es de ladrillo aislante, y finalmente la tercera es una chapa de acero de 6,3 mm para protección mecánica. La temperatura del ladrillo refractario en contacto con el horno es de 1.371 °C, mientras que la temperatura externa de la chapa de acero es de 38 °C. Calcular el espesor de las capas de ladrillo, si la pérdida total de calor a través de la pared del horno es de 15.750 kJ/(h·m²).

Datos. Propiedades de los materiales:

Material	Temperatura máxima de utilización (°C)	Conductividad térmica (W·m ⁻¹ °C ⁻¹)	
		38 °C	1.100 °C
Ladrillo refractario	1.425	3,03	6,23
Ladrillo aislante	1.093	1,56	3,03
Acero	—	45,00	—

Como la temperatura máxima que resiste el ladrillo aislante es 1.093 °C ésta será la temperatura que deberá tener una de sus caras para que el espesor total sea mínimo. Por tanto se tomará $T_1 = 1.093$ °C.



El perfil de temperaturas en una capa viene dado por la ecuación 13.8:

$$T(x_i) = T_{i-1} + \frac{T_i - T_{i-1}}{e_i} x_i$$

La densidad de flujo de calor se expresa según la ecuación 13.6:

$$\frac{\dot{Q}}{A} = q = -k \frac{dT}{dx} = k \frac{T_{i-1} - T_i}{e_i}$$

Ladrillo refractario

$$T = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{e_1} x$$

$$q = -k_1 \frac{T_1 - T_0}{e_1} \Rightarrow \frac{T_1 - T_0}{e_1} = \frac{-q}{k_1} = \frac{-15.750 \text{ W/(m}^2\text{)}}{6,23 \text{ W/(m}\cdot\text{°C)}} = -2.528 \frac{\text{°C}}{\text{m}}$$

Si:

$$\left. \begin{array}{l} T = T_1 = 1.093 \text{ °C} \\ x = e_1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1.093 = 1.371 - 2.528 e_1 \Rightarrow e_1 \approx 0,11 \text{ m}$$

El espesor del ladrillo refractario será de 0,11 m.

Ladrillo aislante

$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{e_2} x$$

Si la conductividad térmica k de un material varía linealmente con la temperatura: $k = a + bT$, puede demostrarse que para una temperatura cualquiera intermedia:

$$k_m = \frac{1}{2} (k_{T1} + k_{T2})$$

$$k_2 = \frac{1}{2} [k_{\text{aisl}}]_{1.093 \text{ °C}} + k_{\text{aisl}}]_{38 \text{ °C}}] = 2,30 \text{ W/(m}\cdot\text{°C)}$$

con lo que:

$$q = -k_2 \frac{T_2 - T_1}{e_2} \Rightarrow \frac{T_2 - T_1}{e_2} = \frac{-q}{k_2} = \frac{-15.750 \text{ W/(m}^2\text{)}}{2,3 \text{ W/(m}\cdot\text{°C)}} = -6.847,8 \frac{\text{°C}}{\text{m}}$$

Aplicando la condición límite:

$$T = T_2 \quad x = e_2$$

$$T_2 = 1.093 - 6.874 e_2$$

Para el cálculo del espesor e_2 debe conocerse la temperatura T_2 .*Chapa de acero*

$$T = T_2 + \frac{T_3 - T_2}{e_3} x$$

$$q = -k_3 \frac{T_3 - T_2}{e_3} \Rightarrow \frac{T_3 - T_2}{e_3} = \frac{-q}{k_3}$$

$$T_2 = T_3 + q \frac{e_3}{k_3}$$

$$T_2 = 38 \text{ °C} + 15.750 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \frac{0,063 \text{ m}}{45 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{°C})} = 40,2 \text{ °C}$$

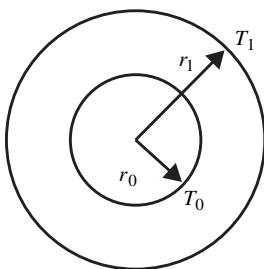
Por lo que: $40,2 = 1.093 - (6.847,8)e_2 \Rightarrow e_2 = 0,154 \text{ m}$

El espesor de la capa aislante será de 0,154 m.

Problema 13.2

Se está ensayando un nuevo material para aislar una cámara frigorífica debiéndose determinar su conductividad térmica, para lo cual se construye una esfera hueca de dicho material. En el centro de la esfera se coloca una resistencia eléctrica de 15 W, midiéndose las temperaturas de las superficies con termopares, una vez alcanzadas las condiciones estacionarias. Calcular: a) La conductividad térmica del material. b) La temperatura en un punto intermedio de la pared de la esfera.

Datos. Esfera de radio interno 3 cm y radio externo 8 cm. Temperaturas: Pared interna 98 °C. Pared externa 85 °C.



En régimen estacionario, el perfil de temperaturas es el dado por la ecuación 13.15:

$$T = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{r_1}{r_1 - r_0} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)$$

El flujo de calor por unidad de tiempo será constante e igual a:

$$\dot{Q} = q A = -k A \frac{dT}{dr} = -k 4 \pi r^2 \frac{dT}{dr} = 4 \pi k (T_0 - T_1) \frac{r_1 r_0}{r_1 - r_0}$$

a)

$$k = \frac{\dot{Q} (r_1 - r_0)}{4 \pi (T_0 - T_1) r_1 r_0}$$

$$\dot{Q} = 15 \text{ W} = 15 \text{ J/s}$$

$$r_1 = 0,08 \text{ m}; \quad r_0 = 0,03 \text{ m}; \quad T_0 = 98 \text{ }^\circ\text{C}; \quad T_1 = 85 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$k = \frac{(15 \text{ W})(0,08 - 0,03) \text{ m}}{4 \pi (98 - 85) \text{ }^\circ\text{C} (0,08 \text{ m})(0,03 \text{ m})} \approx 1,91 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$$

b) Temperatura en un punto intermedio.

Si se supone:

$$r_m = \frac{r_0 + r_1}{2} \quad r_m = 0,055 \text{ m}$$

$$T_m = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{r_1}{r_1 - r_0} \left(1 - \frac{r_0}{r_m}\right)$$

Sustituyendo datos en unidades adecuadas:

$$r_0 = 0,03 \text{ m} \quad T_0 = 98 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$r_1 = 0,08 \text{ m} \quad T_1 = 85 \text{ }^\circ\text{C}$$

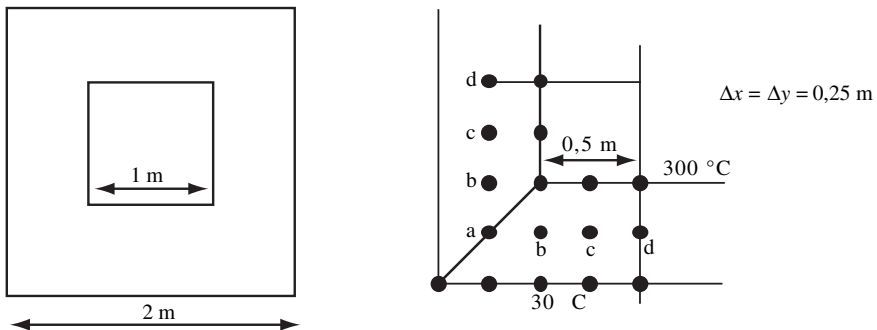
$$r_m = 0,055 \text{ m}$$

$$T_m = 98 + (85 - 98) \frac{0,08}{0,08 - 0,03} \left(1 - \frac{0,03}{0,055}\right)$$

$$T_m = 98 - 9,5 = 88,5 \text{ }^\circ\text{C}$$

Problema 13.3

Por una chimenea de sección cuadrada y 45 m de altura circulan humos de combustión, lo que hace que su pared interna se halle a 300 °C, mientras que la externa se encuentra a 30 °C. Si las dimensiones de la chimenea son las indicadas en la figura adjunta, calcular la temperatura correspondiente a la mitad del espesor de la chimenea.



Debido a la simetría de la sección transversal de la chimenea, el cálculo de la temperatura de los puntos en la mitad del espesor de la pared, equivale a calcular la correspondiente a los puntos indicados con a, b, c y d, en una cuarta parte de la chimenea.

Puede observarse que el enrejado realizado es tal que $\Delta x = \Delta y = 0,25$ m.

En este problema, al ser pocos los puntos en los que deben calcularse las temperaturas, puede aplicarse la ecuación general para obtener dichas temperaturas [ecuación 13.20]:

$$T_{m,n} = \frac{1}{4} (T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1})$$

Para los cuatro puntos considerados:

$$\left. \begin{aligned} 4 T_a &= 30 + T_b + 30 + T_b \\ 4 T_b &= 300 + 30 + T_a + T_c \\ 4 T_c &= 300 + 30 + T_b + T_d \\ 4 T_d &= 300 + 30 + T_c + T_c \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 4 T_a &= 60 + 2 T_b \\ 4 T_b &= 330 + T_a + T_c \\ 4 T_c &= 330 + T_b + T_d \\ 4 T_d &= 330 + 2 T_c \end{aligned}$$

Con lo que se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, que al resolverlo permite conocer las temperaturas de los puntos medios de la pared: $T_a = 87$ °C; $T_b = 144$ °C; $T_c = 159$ °C; $T_d = 162$ °C.

Método de Liebman

Inicialmente se supone la temperatura de dos puntos T_a y T_c y se calcula la de los otros dos (T_b y T_d) a partir de la ecuación general. Con estas nuevas temperaturas se recalculan la de los primeros puntos, repitiendo el proceso iterativo hasta que coincidan las temperaturas de dos iteraciones consecutivas.

Se supone que inicialmente $T_a = T_c = 180$ °C. En la tabla siguiente se muestran los resultados de las diferentes iteraciones:

Método de Liebman

Iteración	T_a (°C)	T_b (°C)	T_c (°C)	T_d (°C)
0	180		180	
1		172,5		172,5
2	101,25		168,75	
3		150		166,88
4	90		161,72	
5		145,43		163,36
6	87,72		159,70	
7		144,35		162,35
8	87,18		159,18	
9		144,09		162,09
10	87,05		159,05	
11		144,02		162,02
12	87,01		159,01	

Método de relajación

Inicialmente se suponen las temperaturas de todos los puntos, buscándose el valor de los residuos:

$$R_{m,n} = T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4 T_{m,n}$$

debiendo ser nulo el valor de estos residuos, si no es así, se corrige la temperatura de cada punto según la expresión:

$$T_{m,n}^*(i+1) = T_{m,n}(i) + \frac{1}{4} R_{m,n}(i) \quad i = n.^\circ \text{ iteración}$$

En la siguiente tabla se recogen los resultados del proceso iterativo de este método:

Iteración		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
1	<i>T</i>	180	180	180	180
	<i>R</i>	-300	-30	-30	-30
2	<i>T</i>	105	172,5	172,5	172,5
	<i>R</i>	-15	-82,5	-15	-15
3	<i>T</i>	101,25	151,88	168,75	168,75
	<i>R</i>	-41,25	-7,5	-24,38	-7,5
4	<i>T</i>	90,94	150	162,66	166,88
	<i>R</i>	-3,76	-16,4	-3,77	-12,18
5	<i>T</i>	90	145,9	161,72	163,83
	<i>R</i>	-8,2	-1,88	-7,15	-1,88
6	<i>T</i>	87,95	145,43	159,93	163,36
	<i>R</i>	-0,94	-3,84	-0,93	-3,58
7	<i>T</i>	87,72	144,47	159,7	162,47
	<i>R</i>	-1,94	-0,46	-1,86	-0,48
8	<i>T</i>	87,24	144,36	159,24	162,35
	<i>R</i>	-0,24	-0,96	-0,25	-0,92
9	<i>T</i>	87,18	144,12	159,18	162,12
	<i>R</i>	-0,48	-0,12	-0,48	-0,24
10	<i>T</i>	87,05	144,09	159,06	162,06
	<i>R</i>	-0,02	-0,25	-0,09	-0,12
11	<i>T</i>	87,05	144,03	159,04	162,03
	<i>R</i>	-0,12	-0,035	-0,1	-0,04
12	<i>T</i>	87,02	144,02	159,02	162,02
	<i>R</i>	-0,04	-0,04	-0,04	-0,04

Problema 13.4

Un cuerpo sólido vegetal de grandes dimensiones se encuentra a 22°C. En un proceso de elaboración de conservas vegetales, una de las etapas consiste en la cocción de dicho vegetal en un tanque con agua hirviendo a 100°C. Calcular la temperatura de un punto situado a 15 mm de la superficie al cabo de 10 minutos.

Datos. Propiedades del vegetal: Densidad 700 kg/m³. Calor específico 3,89 kJ/(kg·°C). Conductividad térmica 0,40 W/(m·°C).

Se trata de una etapa de calentamiento de un sólido grande, en estado no estacionario. Al ser un sólido de grandes dimensiones se considerará conducción de calor en sólidos semiinfinitos.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho \hat{C}_p} = \frac{0,40 \text{ J/(s} \cdot \text{m} \cdot \text{°C)}}{\left(700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \left(3.890 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{°C}}\right)} = 1,46 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Al tratarse de una etapa de cocción en un tanque de agua hirviendo, el coeficiente de convección puede considerarse lo suficientemente elevado ($h \rightarrow \infty$) para suponer que la temperatura en la superficie del sólido adquiere la correspondiente al baño en el instante que se sumerge en él.

Como el tanque contiene agua hirviendo ($h \rightarrow \infty$) se supone que $T_w \approx T_e$.

La ecuación diferencial anterior puede integrarse con las condiciones límite, que permite obtener la ecuación 13.25:

$$\frac{T_e - T}{T_e - T_0} = \text{fer} \left(\frac{x}{2 \sqrt{\alpha t}} \right)$$

siendo *fer* la función error de Gauss.

$$\frac{x}{2 \sqrt{\alpha t}} = \frac{15 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{2 \sqrt{\left(1,46 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right) (10 \text{ min}) \left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}\right)}} = 0,8013$$

De la función error de Gauss se interpola entre los valores de la tabla correspondiente (tabla 13.1). Interpolando se obtiene:

$$\text{fer}(0,8013) = 0,74286$$

$$\frac{T_e - T}{T_e - T_0} = 0,74286$$

Como $T_0 = 22 \text{ °C}$ y $T_e = 100 \text{ °C}$ se obtiene: $T \approx 42,1 \text{ °C}$.

Problema 13.5

Una industria que procesa patatas las adquiere en una región con climatología muy variable. El agente comercial encargado de la adquisición de las patatas se ha enterado que unos días antes de la recolección se levantó un fuerte viento helado del norte, cuya temperatura era de -10 °C , y estuvo soplando por espacio de 10 horas. Las patatas se deterioran si su superficie está a 0 °C . Si la profundidad

media a la que se hallan las patatas es 10 cm, y al inicio de la helada el suelo se encontraba a una temperatura de 5 °C, ¿cuál sería el consejo que le daría al agente comercial con respecto a la compra de patatas?

Datos. Propiedades físicas del suelo: Densidad 1.600 kg/m³. Calor específico: 3,976 kJ/(kg·°C). Conductividad térmica: 1 W/(m·°C).

Difusividad térmica

$$\alpha = \frac{k}{\rho \hat{C}_P} = \frac{1 \text{ J/(s} \cdot \text{m} \cdot \text{°C)}}{\left(1.600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \left(3.976 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{°C}}\right)} = 1,57 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

La transmisión de calor es en un sólido semiinfinito, cumpliéndose:

$$\frac{T_e - T}{T_e - T_0} = \text{fer} \left(\frac{x}{2 \sqrt{\alpha t}} \right)$$

$$\text{Si } \eta = \frac{x}{2 \sqrt{\alpha t}} = \frac{10 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{2 \sqrt{\left(1,57 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right) (10 \text{ h}) \left(\frac{3.600 \text{ s}}{1 \text{ h}}\right)}} = 0,6651$$

El valor que toma la función error de Gauss es: *fer* (0,65534); por lo que:

$$\frac{T_e - T}{T_e - T_0} = 0,65534$$

Como $T_e = -10 \text{ °C}$ y $T_0 = 5 \text{ °C}$ se obtiene $T = -0,2 \text{ °C}$, lo que indica que las patatas quedarán afectadas y por tanto, sería aconsejable no adquirirlas.

Problema 13.6

Se trata de procesar embutidos en un autoclave, pudiéndose considerar que el embutido equivale a un cilindro de 30 cm de longitud y 10 cm de diámetro. Si los embutidos están inicialmente a 21 °C y la temperatura del autoclave se mantiene a 116 °C, calcular cuál será la temperatura en el centro del embutido dos horas después de ser introducido en el autoclave.

Datos. El coeficiente superficial de transmisión de calor en el autoclave a la superficie del embutido es de 1.220 W/(m²·°C).

Propiedades del embutido: Densidad 1.070 kg/m³. Calor específico 3,35 kJ/(kg·°C). Conductividad térmica 0,50 W/(m·°C).

Como el embutido es de forma cilíndrica, se considera que se obtiene de la intersección de un cilindro de altura infinita de radio r_0 con una lámina infinita de espesor $2x_0$.

$$\left. \begin{array}{l} r_0 = 5 \text{ cm} \\ 2 x_0 = h = 30 \text{ cm} \end{array} \right\} \begin{array}{l} r_0 = 5 \text{ cm} \\ x_0 = 15 \text{ cm} \end{array}$$

Según la regla de Newman: $Y = Y_C Y_L$, en la que:

$$Y = \frac{T_e - T_A}{T_e - T_0} = \frac{116 - T_A}{116 - 21}$$

siendo T_A la temperatura en el centro geométrico del embutido, cuyas coordenadas son $(r, x) = (0,0)$.

Cálculo de Y_C

$$n_c = \frac{r}{r_0} = \frac{0}{5} = 0$$

$$m_c = \frac{k}{h r_0} = \frac{0,50 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}}{\left(1.220 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}\right) (5 \cdot 10^{-2} \text{ m})} = 0,0082 \approx 0$$

$$\tau_c = \frac{k t}{\rho \hat{C}_P r_0^2} = \frac{\left(0,50 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}\right) (7.200 \text{ s})}{\left(1.070 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \left(3.350 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}\right) (5 \cdot 10^{-2})^2 \text{ m}^2} = 0,4$$

De la gráfica 13.13: $Y_C = 0,17$.

Cálculo de Y_L

$$n_L = \frac{x}{x_0} = \frac{0}{15} = 0$$

$$m_L = \frac{k}{h x_0} = \frac{0,50 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}}{\left(1.220 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}\right) (15 \cdot 10^{-2} \text{ m})} = 0,0027 \approx 0$$

$$\tau_L = \frac{k t}{\rho \hat{C}_P x_0^2} = \frac{\left(0,50 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}\right) (7.200 \text{ s})}{\left(1.070 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \left(3.350 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}\right) (15 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2} = 0,0446$$

$Y_L \approx 0,98$ (de la gráfica 13.12).

Por tanto:

$$Y = Y_C Y_L = (0,17) (0,98) = 0,1666$$

$$Y = \frac{T_e - T_A}{T_e - T_0}$$

$$0,1666 = \frac{116 - T_A}{116 - 21}, \text{ por lo que } T_A = 100,2 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Problema 13.7

En un proceso de elaboración de embutidos, en la etapa de cocción se utiliza un baño de agua hirviendo. Puede considerarse que los embutidos poseen forma cilíndrica, de 5 cm de diámetro y 50 cm de longitud. Inicialmente el embutido se encuentra a una temperatura de 22 °C, y cuando se introduce en el baño hirviendo su superficie alcanza instantáneamente la temperatura del baño. Estimar el tiempo que debe transcurrir desde que el embutido se introduce en el baño hasta que su centro geométrico alcanza 85 °C.

Datos. Propiedades térmicas del embutido: Conductividad térmica 0,44 W/(m·°C). Densidad 1.260 kg/m³. Calor específico 2,80 kJ/(kg·°C).

Difusividad térmica:

$$\alpha = \frac{k}{\rho \hat{C}_P} = \frac{0,44 \text{ J/(s} \cdot \text{m} \cdot ^\circ\text{C)}}{\left(1,260 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \left(2,80 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}\right)} = 1,247 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

El embutido puede considerarse como un objeto obtenido por la intersección de una lámina infinita de espesor 50 cm y un cilindro de diámetro 5 cm y longitud infinita. Se puede aplicar la regla de Newman:

$$Y = Y_C Y_L = \frac{T_e - T}{T_e - T_0} = \frac{100 - 85}{100 - 22} = 0,1923$$

Se debe buscar un tiempo que haga que el producto $Y_C \cdot Y_L$ sea precisamente 0,1923.

- Lámina: $x_0 = 25 \text{ cm}$.

$$\tau_L = \frac{\alpha t}{(x_0)^2} = \frac{(1,247 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s})}{(0,25 \text{ m})^2} \left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} t_L \text{ min} \right) \approx 1,2 \cdot 10^{-4} t_L$$

$$n_L = \frac{x}{x_0} = 0$$

$$m_L = \frac{k}{h x_0} = 0 \quad (\text{ya que } h \rightarrow \infty)$$

- Cilindro: $r_0 = 2,5$ cm

$$\tau_C = \frac{\alpha t}{(r_0)^2} = \frac{(1,247 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}) \left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} t_C \text{ min} \right)}{(0,25 \text{ m})^2} \approx 0,012 t_C$$

$$n_C = \frac{r}{r_0} = 0$$

$$m_L = \frac{k}{h r_0} = 0$$

Tanto en τ_L como en τ_C el tiempo se debe expresar en minutos.

El problema se resuelve por iteración, suponiendo un tiempo y calculando gráficamente Y_L e Y_C , cuyo producto debe dar 0,1923. En la tabla siguiente se dan los valores del proceso iterativo.

t (min)	τ_L	τ_C	Y_L	Y_C	Y
60	$7,18 \cdot 10^{-3}$	0,718	≈ 1	0,0273	0,0273
30	$3,59 \cdot 10^{-3}$	0,359	≈ 1	0,20	0,20
35	$4,19 \cdot 10^{-3}$	0,419	≈ 1	0,152	0,152
32	$3,84 \cdot 10^{-3}$	0,384	≈ 1	0,19	0,19

Con lo que se obtiene: $t \approx 32$ minutos.

Como la altura del embutido es mucho mayor que su diámetro, se podría haber supuesto que se trataba de un cilindro de altura infinita, con lo que $Y \approx Y_C = 0,1923$. Gráficamente se obtiene que para este valor de Y el valor del tiempo adimensional es $\tau_C = 0,012$.

De este valor se obtiene un tiempo $t = 0,4/0,012 \approx 33$ minutos.

Problema 13.8

Un trozo de carne en forma paralelepípedica, de dimensiones $1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 6 \text{ cm}$, se sumerge en un tanque de agua a 3°C . La distribución inicial de temperaturas a lo ancho del trozo de carne es:

Distancia desde la superficie (cm)	0	1	2	3
Temperatura ($^\circ\text{C}$)	27	24	23	22

Determinar la distribución de temperaturas al cabo de 1/2 hora.

Datos y notas. El coeficiente de transmisión de calor por convección, desde el trozo de carne hacia el agua, es suficientemente elevado para suponer que la temperatura que adquiere la carne en la pared, en el tiempo inicial, es la media aritmética de las temperaturas del baño y la que posee la pared. Después del primer intervalo de tiempo suponer que la pared adquiere la temperatura del baño.

Conductividad térmica de la carne	$0,56 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$
Calor específico de la carne	$3,35 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$
Densidad de la carne	$1.200 \text{ kg}/\text{m}^3$

Se considerará el trozo de carne como una lámina infinita de espesor de 6 cm, con lo que la transmisión de calor se realiza a través de este espesor. El balance de calor monodimensional será:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

esta ecuación se resuelve por diferencias finitas, obteniéndose que la temperatura en un punto para un tiempo determinado es función de las temperaturas de los puntos adyacentes para un intervalo anterior, según la expresión:

$$T(x, t + \Delta t) = (Fo) \left[T(x + \Delta x, t) + T(x - \Delta x, t) + \left(\frac{1}{(Fo)} - 2 \right) T(x, t) \right]$$

en la que:
$$\frac{1}{(Fo)} = \frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta t}$$

El método Binder-Schmidt para la resolución, supone (Fo) = 1/2 y Δx = 0,01 m, con lo que el intervalo de tiempo Δt será:

$$\Delta t = \frac{(\Delta x)^2 \rho \hat{C}_p (Fo)}{k} = \frac{(0,01 \text{ m})^2 \left(1.200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \left(3.350 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \right)}{2 \left(0,56 \frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{m} \cdot ^\circ\text{C}} \right)} = 359 \text{ s}$$

es decir:
$$\Delta t = 359 \text{ s} \approx 0,1 \text{ hora}$$

Como se quiere determinar la distribución de temperaturas al cabo de 1/2 hora el número de intervalos de tiempo será:

$$n.^\circ \Delta t = \frac{0,5 \text{ horas}}{\Delta t} = \frac{0,5}{0,1} = 5 \text{ intervalos}$$

Como (Fo) = 1/2
$$T(x, t + \Delta t) = \frac{1}{2} [T(x + \Delta x, t) + T(x - \Delta x, t)]$$

En la siguiente tabla se recogen los valores de las temperaturas de las distintas capas, en función del tiempo:

Tiempo(horas)	T ₁ (°C)	T ₂ (°C)	T ₃ (°C)	T ₄ (°C)	T ₅ (°C)	T ₆ (°C)	T ₇ (°C)
Antes de enfriar	27	24	23	22	23	24	27
0	15	24	23	22	23	24	15
0,1	3	19	23	23	23	19	3
0,2	3	13	21	23	21	13	3
0,3	3	12	18	21	18	12	3
0,4	3	10,5	16,5	18	16,5	10,5	3
0,5	3	9,75	14,25	16,5	14,25	9,75	3

En la figura P13.8 se muestra la parcelación del sólido es diferentes capas.

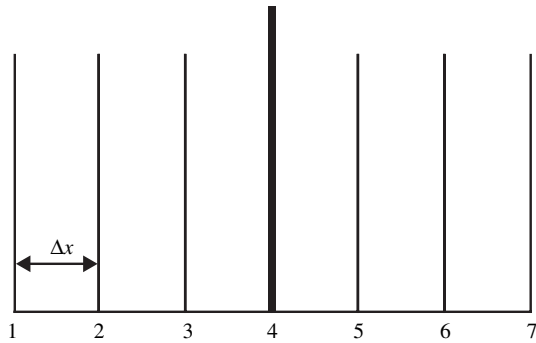


Figura P13.8. Parcelación del sólido en 6 parcelas con $\Delta x = 1$ cm,

Transmisión de calor por convección **14**

14.1. Introducción

Todo fluido que está en movimiento lleva asociada una energía que hace que exista una transmisión de calor desde un punto a otro, que se hallan a diferente temperatura, debido precisamente a este movimiento. Este tipo de transmisión de calor se denomina convección.

Si un fluido se encuentra en contacto con un sólido de mayor temperatura, el fluido recibe calor, que se transfiere seguidamente al seno de todo él, mediante el movimiento de las partículas del fluido. Este movimiento hace que se presente transporte de calor por convección, pudiendo darse de forma natural o forzada. El primero de estos casos ocurre cuando no existe agitación mecánica, y es debido a la diferencia de densidades en distintos puntos del fluido causadas por el efecto de la temperatura. Por contra, la convección forzada se da en el caso que el movimiento del fluido se realice mecánicamente utilizando aparatos como son agitadores y bombas, entre otros.

La transmisión de calor por convección resulta de suma importancia en el estudio del intercambio de calor entre dos fluidos separados por una pared, de modo que uno de ellos cede calor al otro, con lo que el primero se enfría, mientras que el segundo se calienta. Los aparatos en los que se lleva a cabo esta transmisión de calor reciben el nombre de cambiadores o intercambiadores de calor.

14.2. Coeficientes de transmisión de calor

14.2.1. Coeficientes individuales

Si se considera un fluido que circula por una conducción sólida o alrededor de una superficie sólida; la transmisión de calor desde el sólido al fluido (o viceversa) depende del área de contacto fluido-sólido y de la diferencia de temperaturas. Así, para un sistema tal como el mostrado en la figura 14.1, en la que un sólido de área diferencial dA que se halla a la temperatura T_s , está en contacto con un fluido a temperatura T_f , siendo $T_s > T_f$. Existe una transmisión de calor

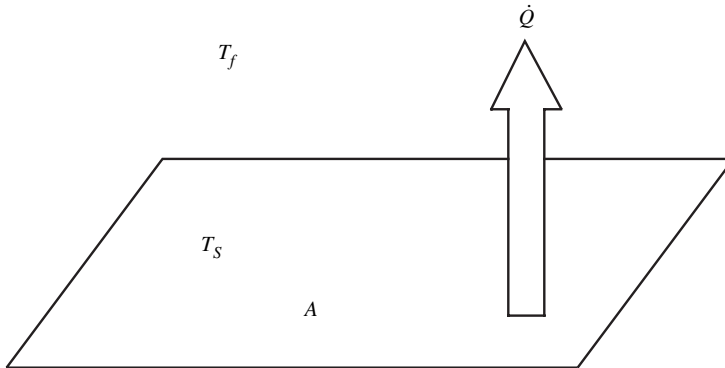


Figura 14.1. Transmisión de calor por convección.

desde el sólido hacia el fluido, de modo que el flujo de calor será proporcional a dA y a $(T_s - T_f)$; es decir:

$$d\dot{Q} \propto dA (T_s - T_f)$$

Se define un coeficiente de proporcionalidad h , de tal forma que:

$$d\dot{Q} = h dA (T_s - T_f) \quad [14.1]$$

esta constante de proporcionalidad recibe el nombre de **coeficiente individual** de transmisión de calor por convección o **coeficiente de película**. Este coeficiente depende de las propiedades físicas y dinámicas del fluido. Mediante análisis dimensional pueden encontrarse relaciones entre estas propiedades, que complementadas con una posterior experimentación permiten obtener ecuaciones para el cálculo de estos coeficientes.

En la transmisión de calor por convección el coeficiente individual h depende de propiedades físicas que afectan al flujo (densidad, ρ , y viscosidad, η), de sus propiedades térmicas (calor específico, \hat{C}_p , y conductividad térmica, k), de una longitud característica del área de transmisión L (para el caso de conducciones cilíndricas es su diámetro d), de la aceleración de la gravedad g , de la velocidad a la que circula el fluido v , de la diferencia de temperaturas entre el sólido y el fluido $(T_s - T_f)$ y del coeficiente de expansión cúbica o volumétrica β (que en el caso de un gas ideal coincide con el inverso de la temperatura absoluta).

Aplicando el análisis dimensional se obtiene una relación entre los distintos grupos adimensionales, de la forma:

$$\text{Nu} = \phi [(\text{Re}) (\text{Pr}) (\text{Gr})] \quad [14.2]$$

en la que los grupos adimensionales están definidos como sigue:

- Módulo de Nusselt: $(\text{Nu}) = \frac{h d}{k} \quad [14.3]$

- Módulo de Reynolds: $(Re) = \frac{\rho v d}{\eta}$ [14.4]

- Módulo de Prandtl: $(Pr) = \frac{\hat{C}_p \eta}{k}$ [14.5]

- Módulo de Grashof: $(Gr) = \frac{\beta g \Delta T d^3 \rho^2}{\eta^2}$ [14.6]

A veces, es posible expresar la relación entre grupos adimensionales en función de los números de Peclet y Graetz, que son combinaciones de los módulos de Reynolds y Prandtl, y se utilizan en problemas de convección forzada.

- Módulo de Peclet: $(Pe) = (Re) (Pr) = \frac{\rho v d \hat{C}_p}{k}$ [14.7]

- Módulo de Graetz: $(Gz) = (Re) (Pr) (d/L) = \frac{\rho v d^2 \hat{C}_p}{k L}$ [14.8]

En la convección natural la velocidad depende de los efectos de flotación, pudiendo omitirse el número de Reynolds en la ecuación 14.2. Mientras que en convección forzada es el módulo de Grashof el que puede omitirse. Así:

- Convección natural: $(Nu) = \phi [(Pr) (Gr)]$
- Convección forzada: $(Nu) = \phi [(Re) (Pr)] = \phi (Gz)$

Es interesante resaltar que en un amplio intervalo de temperaturas y presión, para la mayoría de gases, el módulo de Prandtl es prácticamente constante, por lo que puede omitirse, resultando unas ecuaciones más sencillas para el cálculo de los coeficientes individuales de transmisión de calor.

Una vez encontrada esta relación entre los diferentes grupos adimensionales, mediante experimentación puede llegar a obtenerse las ecuaciones finales que permitan el cálculo de los coeficientes de película. A pesar de que en la bibliografía existen numerosas expresiones para el cálculo de estos coeficientes individuales, a continuación se dan una serie de expresiones que son quizás las más utilizadas en la práctica.

14.2.1.1. Convección natural

Como se ha indicado más arriba, para convección libre o natural, el módulo de Nusselt es únicamente función de los módulos de Grashof y Prandtl. La ecuación que liga estos tres módulos es:

$$(Nu) = a [(Gr) (Pr)]^b \quad [14.9]$$

en la que los valores de los parámetros a y b dependen del sistema y condiciones de trabajo.

Configuración	(Gr) · (Pr)	a	b
Platos verticales y cilindros			
Longitud > 1 m			
Laminar	< 10 ⁴	1,36	1/5
Laminar	10 ⁴ < Gr Pr < 10 ⁹	0,55	1/4
Turbulento	> 10 ⁹	0,13	1/3
Esferas y cilindros horizontales			
Diámetro < 0,2 m			
Laminar	10 ³ < Gr Pr < 10 ⁹	0,53	1/4
Turbulento	> 10 ⁹	0,13	1/3
Platos horizontales			
(calentado hacia arriba enfriado hacia abajo)			
Laminar	10 ⁵ < Gr Pr < 2 · 10 ⁷	0,54	1/4
Turbulento	2 · 10 ⁷ < Gr Pr < 3 · 10 ⁹	0,55	1/3
(calentado hacia abajo enfriado hacia arriba)			
Laminar	3 · 10 ⁵ < Gr Pr < 3 · 10 ¹⁰	0,27	1/4

En el caso que el fluido sea aire y el flujo laminar, las ecuaciones a utilizar son las siguientes:

- Paredes horizontales: $h = C (\Delta T)^{1/4}$ [14.10]

Hacia arriba $C = 2,4$

Hacia abajo $C = 1,3$

- Paredes verticales: ($L > 0,4$ m): $h = 1,8 (\Delta T)^{1/4}$ [14.11]

- Paredes verticales: ($L < 0,4$ m): $h = 1,4 \left(\frac{\Delta T}{L} \right)^{1/4}$ [14.12]

- Tubos horizontales y verticales: $h = 1,3 \left(\frac{\Delta T}{d} \right)^{1/4}$ [14.13]

En todas estas expresiones d y L se deben expresar en metros, obteniéndose el valor del coeficiente de película en $J/(s \cdot m^2 \cdot ^\circ C)$.

14.2.1.2. Convección forzada

En todas las expresiones que se dan a continuación las propiedades del fluido deben calcularse a una temperatura media global.

a) Fluidos por el interior de conducciones

Flujo en régimen turbulento

Una de las ecuaciones más utilizadas es la de Dittus-Boelter:

$$(\text{Nu}) = 0,023 (\text{Re})^{0,8} (\text{Pr})^n \quad [14.14]$$

$n = 0,4$ para fluidos que se calientan

$n = 0,3$ para fluidos que se enfrían

esta ecuación es válida para $\text{Re} > 10^4$ y $0,7 < \text{Pr} < 160$.

En algunos casos es conveniente utilizar una expresión que incluye el módulo de Stanton (St):

$$(\text{St}) = \frac{h}{\hat{C}_p \rho v} \quad [14.15]$$

de forma que la ecuación a utilizar es:

$$(\text{St}) (\text{Pr})^{2/3} = 0,023 (\text{Re})^{-0,2} \quad [14.16]$$

en la que el segundo miembro de esta ecuación recibe el nombre de «factor j_H » de Colburn.

Para fluidos viscosos que se mueven con $\text{Re} < 8.000$ y $\text{Pr} < 10^4$ se suele utilizar la ecuación de Sieder-Tate:

$$(\text{Nu}) = 0,027 (\text{Re})^{0,8} (\text{Pr})^{1/3} \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^{0,14} \quad [14.17]$$

todas las propiedades del fluido se calculan a una temperatura media, excepto η_w que se calcula a la temperatura media de la pared.

Otra ecuación que incluye el término de viscosidad a la temperatura de la pared es:

$$(\text{Nu}) = 0,023 (\text{Re})^{0,8} (\text{Pr})^{2/3} \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^{0,14} \quad [14.18]$$

En el caso de que sean gases los que circulan por el interior de las conducciones, tal como se ha indicado, el valor del módulo de Prandtl es prácticamente constante, con lo que la ecuación que se puede utilizar es más simple:

$$(\text{Nu}) = 0,021 (\text{Re})^{0,8} \quad [14.19]$$

Flujo en régimen de transición

Para $2.100 < \text{Re} < 10^4$ se utiliza la expresión:

$$(\text{Nu}) = 0,116 [(\text{Re})^{2/3} - 125] \left[1 + \left(\frac{d}{L} \right)^{2/3} \right] \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^{0,14} \quad [14.20]$$

Flujo en régimen laminar

En régimen laminar ($\text{Re} < 2.100$) la transmisión de calor hacia un fluido tiene lugar casi exclusivamente por conducción, y además, la distribución de velocidad es parabólica, por lo que las ecuaciones a utilizar diferirán de las anteriores. Sin embargo, es conveniente obtener una expresión similar a las utilizadas en régimen turbulento, siendo una de las más comunes:

$$(\text{Nu}) = 1,86 \left[(\text{Re}) (\text{Pr}) \left(\frac{d}{L} \right) \right]^{1/3} \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^{0,14} \quad [14.21]$$

o bien:

$$(\text{Nu}) = 1,86 (\text{Gz})^{1/3} \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^{0,14} \quad [14.22]$$

b) Fluidos por el exterior de sólidos

De las diferentes ecuaciones que pueden utilizarse, a continuación se presentan algunas de las expresiones más comunes.

Flujo en régimen turbulento

• Para gases: $(\text{Nu}) = 0,26 (\text{Re})^{0,6} (\text{Pr})^{0,3}$ [14.23]

• Para líquidos: $(\text{Nu}) = [0,35 + 0,47 (\text{Re})^{0,52}] (\text{Pr})^{0,3}$ [14.24]

En el caso que se trate de líquidos que se mueven por el espacio anular de tubos concéntricos, puede utilizarse la ecuación de Davis:

$$(\text{St}) = 0,029 (\text{Re})^{-0,2} (\text{Pr})^{-2/3} \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^{0,14} \left(\frac{d_0}{d_i} \right)^{0,15} \quad [14.25]$$

donde d_0 y d_i son los diámetros externo e interno del anillo circular, respectivamente. Aunque a veces, en lugar de esta ecuación suelen utilizarse las ecuaciones de flujo por el interior de tubos cambiando el diámetro de la conducción por el equivalente.

Flujo en régimen laminar

Para líquidos en los que $0,2 < (\text{Re}) < 200$ puede utilizarse la ecuación:

$$(\text{Nu}) = 0,86 (\text{Re})^{0,43} (\text{Pr})^{0,3} \quad [14.26]$$

Para líquidos que circulan con $\text{Re} > 200$ y gases con $0,1 < \text{Re} < 10^3$, se utiliza la expresión:

$$(\text{Nu}) = [0,35 + 0,56 (\text{Re})^{0,52}] (\text{Pr})^{0,3} \quad [14.27]$$

En el caso que el módulo de Prandtl sea 0,74, la ecuación a utilizar es:

$$(\text{Nu}) = 0,24 (\text{Re})^{0,6} \quad [14.28]$$

c) Calefacción o enfriamiento de superficies planas

Para $\text{Re} > 20.000$, tomando como longitud característica la de la superficie plana en la dirección del flujo, se utiliza la ecuación:

$$(\text{Nu}) = 0,036 (\text{Re})^{0,8} (\text{Pr})^{1/3} \quad [14.29]$$

Para aire sobre láminas lisas:

$$h = 5,7 + 3,9 v \quad (v < 5 \text{ m/s}) \quad [14.30a]$$

$$h = 7,4 (v)^{0,8} \quad (5 < v < 30 \text{ m/s}) \quad [14.30b]$$

en la que v es la velocidad del fluido en m/s, viniendo el coeficiente h expresado en $J/(m^2 \cdot s \cdot ^\circ C)$.

14.2.1.3. Convección en fluidos no newtonianos

Muchos fluidos alimentarios no presentan comportamiento newtoniano, y las ecuaciones dadas para el cálculo de los coeficientes de película no pueden utilizarse. En la bibliografía se encuentran pocos datos para el cálculo de dichos coeficientes para fluidos no newtonianos, presentándose a continuación algunas de las ecuaciones a utilizar.

a) Circulación en flujo de pistón

Cuando un fluido circula por una conducción en flujo de pistón, y para valores del módulo de Graetz superiores a 500, es útil la siguiente expresión:

$$(\text{Nu}) = \frac{8}{\pi} + \frac{4}{\pi} (\text{Gz})^{1/2} \quad [14.31]$$

b) Circulación en régimen turbulento

Cuando el comportamiento al flujo del fluido puede describirse según la ley de la potencia, puede utilizarse la siguiente expresión:

$$(\text{Nu}) = 1,75 \left(\frac{3n + 1}{4n} \right)^{1/3} (\text{Gz})^{1/3} \quad [14.32]$$

Además de todas las expresiones que se dan, en la bibliografía pueden encontrarse otras, y algunas de ellas se verán con mayor detalle cuando se exponga el apartado correspondiente a coeficientes de película de intercambiadores de carcasa y tubos.

También es importante resaltar que en todas aquellas expresiones en las que aparece la viscosidad del fluido a la temperatura de la pared (η_w) es necesario realizar un proceso iterativo para el cálculo del coeficiente de película. Ello es debido a que para obtener el valor de η_w es necesario obtener previamente el valor de la temperatura en la pared del intercambiador, y para ello es preciso conocer el valor del coeficiente de película.

14.2.2. Coeficientes globales

En el apartado anterior se ha visto la forma de calcular los coeficientes de transmisión de calor desde una superficie sólida hacia el seno de un fluido o vice-

versa. Sin embargo, en la práctica se presentan casos en que un fluido se enfría o calienta mediante otro fluido que se calienta o enfría, estando ambos fluidos separados por una superficie sólida. En este caso es necesario poder hallar un coeficiente de transmisión de calor que permita calcular el calor transmitido de un fluido al otro a través de la pared sólida.

Si se supone un sistema (figura 14.2), en el que un fluido caliente a temperatura T transmite calor a otro fluido frío a temperatura t , a través de una superficie sólida. La transmisión de calor se realiza desde el fluido caliente al frío. Inicialmente se transfiere el calor por convección desde el seno del fluido a temperatura T hasta la superficie a temperatura T_w . A través del sólido se transfiere calor por conducción, existiendo una caída de temperatura de T_w a t_w . Desde aquí, se transfiere el calor por convección hasta el seno del fluido frío a temperatura t . El área de la superficie sólida en contacto con el fluido caliente se denomina A_C , mientras que la que está en contacto con el fluido frío será A_F . En el caso que la superficie considerada sea plana, estas dos áreas coinciden $A_C = A_F$. Sin embargo, en general, estas áreas no tienen por qué coincidir. A continuación se estudia todo el proceso de transmisión de calor descrito:

- Convección de calor en el lado del fluido caliente:

$$\dot{Q} = h_C (T - T_w) A_C = \frac{T - T_w}{\frac{1}{h_C A_C}} \quad [14.33]$$

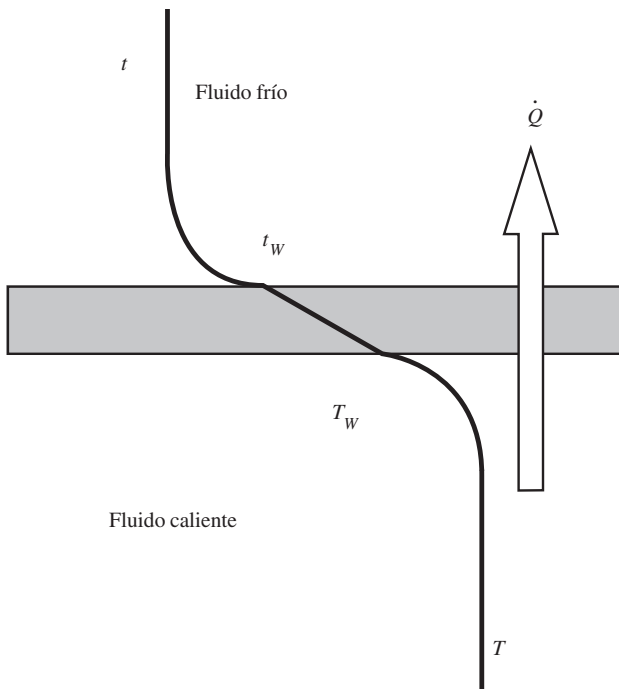


Figura 14.2. Intercambio de calor entre fluidos separados por un sólido.

en la que h_C es el coeficiente individual de transmisión de calor por convección en el fluido caliente.

- Conducción de calor a través de la superficie sólida:

$$\dot{Q} = \frac{k}{e} (T_W - t_w) = \frac{T_W - t_w}{\frac{e}{k A_{ml}}} \quad [12.34]$$

en la que k es la conductividad térmica del sólido, e el espesor del sólido y A_{ml} el área media logarítmica, definida por:

$$A_{ml} = \frac{A_F - A_C}{\ln (A_F/A_C)} \quad [12.35]$$

Convección de calor en el lado del fluido frío:

$$\dot{Q} = h_F (t_w - t) A_F = \frac{t - t_w}{\frac{1}{h_F A_F}} \quad [14.36]$$

en la que h_F es el coeficiente individual de transmisión de calor por convección en el fluido frío.

El caudal de calor que se transmite es el mismo en cada caso, con lo que:

$$\dot{Q} = \frac{T - T_W}{\frac{1}{h_C A_C}} = \frac{T_W - t_w}{\frac{e}{k A_{ml}}} = \frac{t_w - t}{\frac{1}{h_F A_F}} \quad [14.37]$$

que por las propiedades de las razones, se puede expresar como el cociente entre el sumatorio de numeradores y el de los denominadores, de tal forma que:

$$\dot{Q} = \frac{T - t}{\frac{1}{U_C A_C}} = \frac{T - t}{\frac{1}{U_F A_F}} \quad [14.38]$$

en la que U_C y U_F son los **coeficientes globales** de transmisión de calor referidos a las áreas que están en contacto con el fluido caliente y frío, respectivamente. Estos coeficientes globales están definidos por las expresiones:

$$\frac{1}{U_C} = \frac{1}{h_C} + \frac{e}{k \frac{A_{ml}}{A_C}} + \frac{1}{h_F \frac{A_F}{A_C}} \quad [14.39a]$$

$$\frac{1}{U_F} = \frac{1}{h_C \frac{A_C}{A_F}} + \frac{e}{k \frac{A_{ml}}{A_F}} + \frac{1}{h_F} \quad [14.39b]$$

Puede observarse que la expresión $1/(U \cdot A)$ representa la resistencia global a la transmisión de calor desde el fluido caliente al frío. Esta resistencia es la suma de tres resistencias en serie, las debidas al fluido caliente, a la pared sólida y al fluido frío.

En la realidad, el cálculo de este coeficiente resulta más complicado, ya que los fluidos pueden dejar incrustaciones o suciedad sobre la superficie sólida. Es por ello que en las ecuaciones anteriores aparecerán dos nuevas resistencias: R_C y R_F , que son las resistencias debidas a las incrustaciones o factores de ensuciamiento de los fluidos caliente y frío, respectivamente. Con lo que el coeficiente global de transmisión de calor, si se tienen en cuenta las deposiciones que se producen, se expresa como:

$$\frac{1}{U_D} = \frac{1}{U} + R_C + R_F \tag{14.40}$$

siendo U el coeficiente global calculado por alguna de las ecuaciones 14.39, y U_D el coeficiente global de transmisión de calor que incluyen las resistencias debidas a las incrustaciones. En la tabla 14.1 se muestran valores típicos de factores de ensuciamiento para agua y otros tipos de fluidos.

Tabla 14.1. Factores de ensuciamiento

Producto	R (m ² ·°C/kW)	Producto	R (m ² ·°C/kW)
<i>Agua</i>		<i>Líquidos</i>	
Destilada	0,09	Salmuera	0,264
Mar	0,09	Orgánicos	0,176
Río	0,21	Fuel-oil	1,056
Calderas	0,26	Alquitranes	1,76
Muy dura	0,58		
<i>Gases</i>			
<i>Vapor agua</i>		Aire	0,26 - 0,53
Buena calidad	0,052	Vapor de disolventes	0,14
Mala calidad	0,09		

El cálculo del coeficiente global de transmisión de calor se realiza tal como se ha indicado, aunque en la bibliografía pueden encontrarse valores aproximados de este coeficiente para distintos tipos de aparatos y modos de operar (Kreith y Black, 1983).

El valor del coeficiente del lado interno de los tubos se obtiene referido al área interna, aunque a veces pueda interesar conocer el valor del coeficiente de transmisión de calor referido al área externa. Si h_i y h_{ie} son los coeficientes de película del fluido que circula por el interior de los tubos, referidos al área interna y externa, respectivamente; se cumple:

$$h_{ie} = h_i \frac{d_i}{d_e} \frac{\phi_{ii}}{\phi_{ie}}$$

en la que d_i y d_e son los diámetros interno y externo de los tubos, respectivamente.

El coeficiente ϕ_t está definido por la relación de viscosidades:

$$\phi_t = \frac{\eta}{\eta_w} \quad [14.41]$$

con lo que:

$$\frac{\phi_{ti}}{\phi_{te}} = \frac{\eta_{we}}{\eta_{wi}}$$

siendo η_{we} la viscosidad del fluido a la temperatura externa de la pared de los tubos y η_{wi} la correspondiente a la temperatura interna.

14.3. Intercambiadores de calor de tubos concéntricos

Este es el tipo de intercambiadores más sencillos, constando de dos tubos de distinto diámetro, dispuestos uno dentro de otro. Por el tubo interior circula un fluido, mientras que el otro fluido lo hace por el anillo circular. El fluido caliente o frío puede circular indistintamente por el tubo interior o el anillo circular; aunque si el fluido caliente lo hace por el tubo interior, el aprovechamiento de la transmisión de calor es mejor.

La forma de operar de estos intercambiadores puede ser de dos modos: en paralelo o en contracorriente (figura 14.3). En el primer caso, tanto el fluido frío como el caliente circulan en la misma dirección y sentido; mientras que en contracorriente circulan en sentidos contrarios.

14.3.1. Características de diseño

Se realizará el planteamiento del modelo matemático a partir de los balances energéticos para el fluido caliente y frío, y a través de la superficie de intercambio. Este estudio se realizará para las dos formas de operación antes mencionadas.

14.3.1.1. Operación en paralelo

En el estudio de la operación en paralelo o equicorriente, se supone un sistema tal como el mostrado en la figura 14.4; en que los fluidos entran por la sección 1 y salen por la sección 2.

Los caudales de circulación son w_C y w_F , y los calores específicos $\hat{C}_P)_C$ y $\hat{C}_P)_F$, para los fluidos caliente y frío, respectivamente.

El caudal de calor transferido por el fluido caliente es captado por el frío, y para el caso que no haya pérdidas de calor hacia el exterior, se cumple:

$$\dot{Q} = w_C \hat{C}_P)_C (T_e - T_S) = w_F \hat{C}_P)_F (t_S - t_e) \quad [14.42]$$

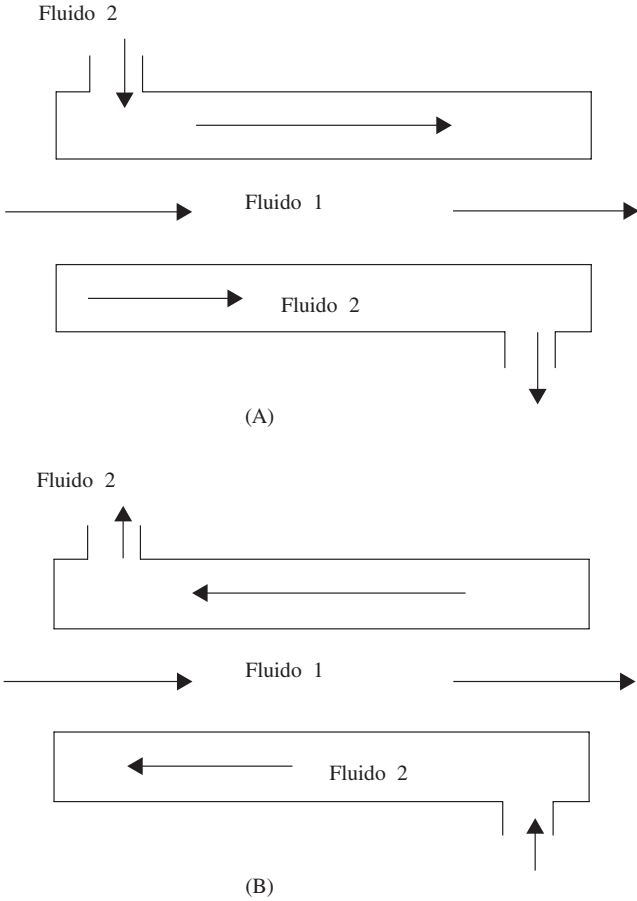


Figura 14.3. Intercambiador de calor de tubos concéntricos. A) Flujo en paralelo. B) Flujo en contracorriente.

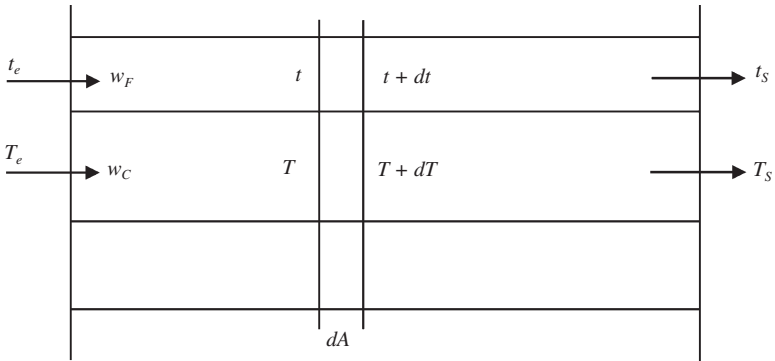


Figura 14.4. Intercambiador de calor de tubos concéntricos. Flujo de los fluidos.

siendo w el flujo másico de cada corriente, T la temperatura del fluido caliente, t la del frío, y \hat{C}_p el calor específico, indicando el subíndice C caliente y F frío, mientras que los subíndices e y s se refieren a entrada y salida, respectivamente.

Si se considera un diferencial de superficie (dA) del intercambiador de calor (figura 14.4). A la entrada de este elemento de intercambiador las temperaturas de los fluidos son T y t , siendo $(T + dT)$ y $(t + dt)$ las de salida.

Al realizar un balance energético en este elemento de intercambiador, para el fluido caliente se obtiene:

$$w_C \hat{C}_p)_C T = d\dot{Q} + w_C \hat{C}_p)_C (T + dT)$$

$$d\dot{Q} = U (T - t) dA$$

con lo que:

$$d\dot{Q} = U (T - t) dA = -w_C \hat{C}_p)_C dT \quad [14.43]$$

De forma análoga, para el fluido frío:

$$d\dot{Q} = U (T - t) dA = +w_F \hat{C}_p)_F dt \quad [14.44]$$

Para el cálculo del área de intercambio deben integrarse las ecuaciones anteriores, dispuestas en forma de variables separadas:

$$\frac{U}{w_C \hat{C}_p)_C} dA = \frac{-dT}{T - t} \quad [14.45]$$

$$\frac{U}{w_F \hat{C}_p)_F} dA = \frac{dt}{T - t} \quad [14.46]$$

La integración de estas ecuaciones permite calcular el área del intercambiador:

$$A = \int dA = \int \frac{w \hat{C}_p)_C}{U} \frac{-dT}{T - t} \quad [14.47a]$$

$$A = \int dA = \int \frac{w_F \hat{C}_p)_F}{U} \frac{dt}{T - t} \quad [14.47b]$$

Esta integración no resulta tan sencilla como en un principio aparenta, ya que el coeficiente global de transmisión de calor U , en general, no es constante, pues su valor depende de las propiedades del fluido y del flujo, que varían a lo largo del intercambiador, pues la temperatura va variando.

A partir de las ecuaciones diferenciales en variables separables que se han obtenido, puede llegarse a la expresión:

$$\frac{-d(T - t)}{T - t} = -d \ln (T - t) = U \left(\frac{1}{w_C \hat{C}_p)_C} + \frac{1}{w_F \hat{C}_p)_F} \right) dA$$

Si se supone que el coeficiente global de transmisión de calor es **constante** ($U = \text{constante}$), y se define la diferencia entre ambos fluidos como $\Delta T = T - t$; al integrar para toda el área se obtiene:

$$\ln \left(\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} \right) = U A \left(\frac{1}{w_C \hat{C}_P)_C} + \frac{1}{w_F \hat{C}_P)_F} \right)$$

Del balance global [ec. 14.42] se obtiene la expresión:

$$\left(\frac{1}{w_C \hat{C}_P)_C} + \frac{1}{w_F \hat{C}_P)_F} \right) = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\dot{Q}}$$

con lo que el caudal de calor transferido a través del área de intercambiador será:

$$\dot{Q} = U A (\Delta T)_{ml} \quad [14.48]$$

siendo $(\Delta T)_{ml}$ la media logarítmica de la diferencia de temperaturas:

$$(\Delta T)_{ml} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln \left(\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} \right)} \quad [14.49]$$

Si el coeficiente global de transmisión de calor **no es constante**, el área de transmisión debe calcularse por integración gráfica o numérica de la expresión:

$$A = - \int \frac{w_C \hat{C}_P)_C dT}{U (T - t)} = \int \frac{w_F \hat{C}_P)_F dt}{U (T - t)} \quad [14.50]$$

debiéndose tener presente que la relación entre las temperaturas de los dos fluidos, t y T , viene dada por el balance de calor entre la sección de entrada o salida y una cualquiera del intercambiador:

$$w_C \hat{C}_P)_C (T_e - T) = w_F \hat{C}_P)_F (t - t_e)$$

Sin embargo, puede demostrarse matemáticamente que si el coeficiente global de transmisión de calor, U , varía linealmente con ΔT o con una de las temperaturas T o t , el valor del caudal de calor transmitido a través del área de intercambio será:

$$\dot{Q} = A (U \Delta T)_{mlc} \quad [14.51]$$

siendo $(U \Delta T)_{mlc}$ la media logarítmica cruzada, definida por la expresión:

$$(U \Delta T)_{mlc} = \frac{U_2 \Delta T_1 - U_1 \Delta T_2}{\ln \left(\frac{U_2 \Delta T_1}{U_1 \Delta T_2} \right)} \quad [14.52]$$

el cálculo de la media logarítmica cruzada implica el conocimiento previo del valor del coeficiente global de transmisión de calor en los extremos del intercambiador.

14.3.1.2. Operación en contracorriente

En este caso, tal como su nombre indica, los fluidos circulan en contracorriente (figura 14.3). Se puede demostrar, de forma análoga a como se ha realizado para operación en paralelo, que las ecuaciones que se obtienen a partir de los balances de calor son:

- Para U constante: $\dot{Q} = U A (\Delta T)_{ml}$
- Si U varía linealmente con la temperatura: $\dot{Q} = A (U \Delta T)_{mlc}$

En operación en contracorriente, para unas mismas necesidades de calor, es decir, para los mismos valores de las temperaturas de entrada y salida, la media logarítmica de las temperaturas es superior a si la operación se realiza en paralelo; ello hace que la superficie requerida para realizar la transmisión de calor deseada sea menor en operación en contracorriente. Es importante resaltar que en el cálculo de la temperatura media logarítmica los incrementos de temperatura en cada sección varían con respecto a la operación en paralelo, ya que en el presente caso se cumple: $\Delta T_1 = T_e - t_s$ y $\Delta T_2 = T_s - t_e$.

14.3.2. Cálculo de los coeficientes individuales

Para el cálculo de los coeficientes individuales o de película, se utilizarán las diferentes expresiones que se han expuesto en el apartado 14.2.1, aunque una de las más utilizadas es la ecuación de Dittus-Boelter [ec. 14.14].

En estas ecuaciones, el diámetro utilizado en el cálculo de los módulos de Reynolds y Nusselt será el diámetro interior del tubo interno para el fluido que circula por el tubo interior. Para el fluido que circula por el espacio anular se utilizará el diámetro equivalente.

El **diámetro equivalente** para una conducción de sección no circular está definido como cuatro veces el radio hidráulico, siendo éste el cociente entre la sección de paso y el perímetro mojado:

$$D_e = 4 r_H = 4 \frac{\text{Sección de paso}}{\text{Perímetro mojado}} \quad [14.53]$$

En el caso de una corona circular (figura 14.5), el perímetro mojado se considera sólo el correspondiente al área de intercambio de calor, es decir, el perímetro «mojado» por la transmisión de calor:

$$D_e = 4 r_H = 4 \frac{(\pi/4) (d_0^2 - d_e^2)}{\pi d_e}$$

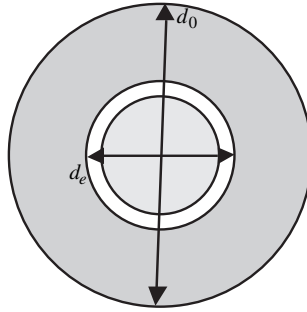


Figura 14.5. Sección de paso en un intercambiador de calor de tubos concéntricos.

es decir:

$$D_e = \frac{(d_0^2 - d_e^2)}{d_e} \quad [14.54]$$

en la que d_0 es el diámetro interno del tubo exterior y d_e el diámetro externo del tubo interno.

14.3.3. Cálculo de pérdidas de carga

Al tratarse de circulación de fluidos por el interior de conducciones, las pérdidas de carga pueden calcularse a partir de la ecuación de Fanning (ecuación 8.65). En la expresión de la ecuación de Fanning aparece el diámetro, que en el caso de la conducción interna coincide con el diámetro interno de esta conducción. Sin embargo, para el anillo circular debe utilizarse el diámetro equivalente, que en este caso su expresión varía de la obtenida en el apartado anterior, ya que el perímetro mojado es distinto:

$$D_e = 4 r_H = 4 \frac{(\pi/4) (d_0^2 - d_e^2)}{\pi (d_0 + d_e)} = d_0 - d_e \quad [14.55]$$

El factor de fricción puede calcularse a partir de las diferentes ecuaciones que pueden encontrarse en el apartado 8.4.2 del Capítulo 8. Estas ecuaciones varían dependiendo del régimen de circulación, siendo distintas según sea el valor del módulo de Reynolds.

14.4. Intercambiadores de calor de carcasa y tubos

En aquellos casos en que para realizar la transferencia de calor de un fluido a otro es necesario disponer de una superficie elevada de transmisión, es recomendable utilizar un conjunto de tubos que se hallan contenidos en una carcasa o coraza (figura 14.6). El conjunto de tubos recibe el nombre de haz, hallándose su-

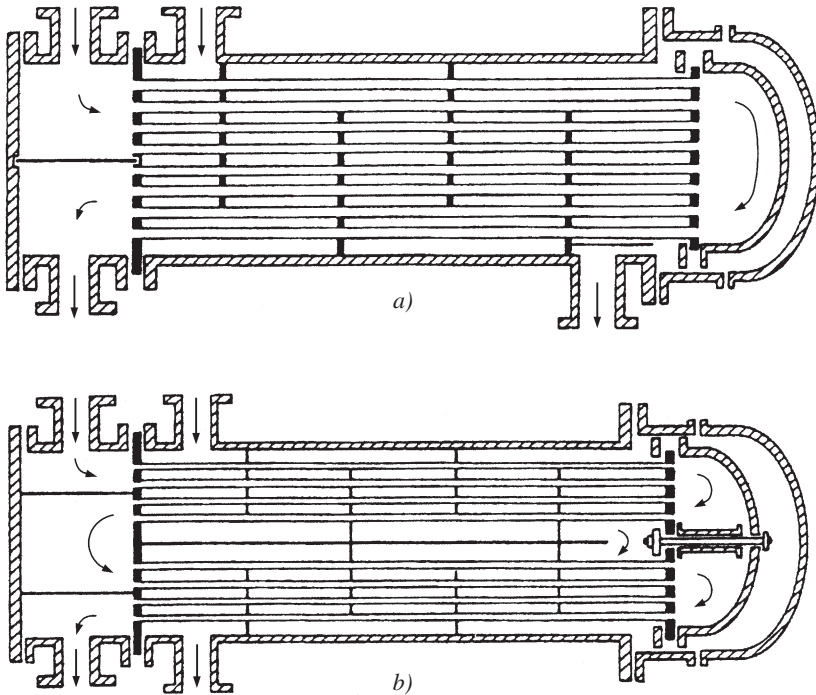


Figura 14.6. Intercambiador de calor de carcasa y tubos. a) Intercambiador 1/2.
b) Intercambiador 2/4.

jetos por una placa. En este tipo de intercambiadores, un fluido circula por el interior de los tubos y el otro por su exterior y dentro de la carcasa. A este último fluido suele obligársele a realizar cambios de dirección, debido a la presencia de placas. Estas placas o pantallas pueden ser perpendiculares o bien horizontales al haz de tubos. En el primer caso se denominan «deflectores», mostrándose en la figura 14.7 diferentes tipos de ellos (de orificio, de corona y disco y segmentado). La distancia entre deflectores condiciona la velocidad del fluido, siendo, generalmente, esta distancia 0,2 veces el valor del diámetro de la carcasa. Además, se denomina «corte» de un deflector al tanto por ciento de diámetro de la carcasa que no ocupa.

En el caso que las placas colocadas en el interior de la carcasa sean láminas paralelas a los tubos, dividen la carcasa en un conjunto de pasos, de forma que el fluido que circula por el exterior de los tubos cambia de sentido en dos pasos consecutivos. De igual forma, el cambio de sentido en el fluido que circula por el interior del haz tubular se denomina paso. En la figura 14.6 se representan distintos tipos de intercambiadores de carcasa y tubos, con diferentes pasos de fluidos.

Por otra parte, la distribución de los tubos en el interior de la carcasa puede ser en disposición triangular, cuadrada y cuadrada rotada (figura 14.8). La disposición

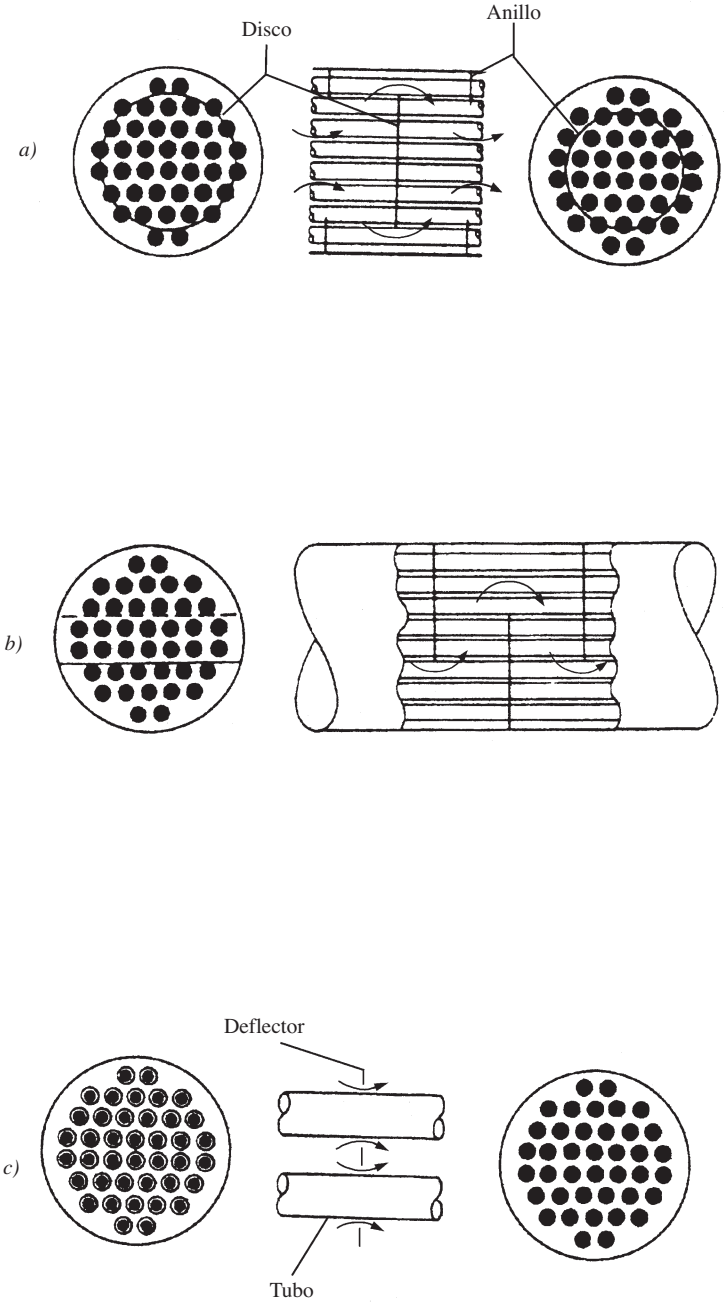


Figura 14.7. Tipos de deflectores en intercambiadores de calor de carcasa y tubos:
a) Con disco y anillo. b) En forma de segmentos. c) Con orificios.
(Adaptado de Kreith y Black, 1983).

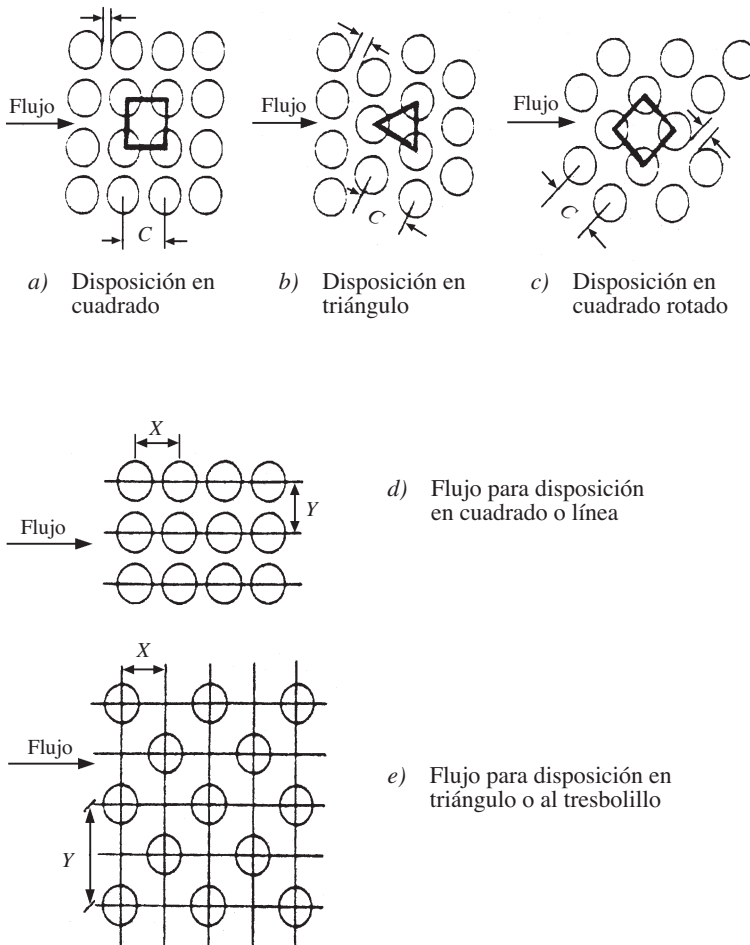


Figura 14.8. Disposición de haz tubular.

en cuadrado permite una más fácil limpieza de los tubos por su exterior. La disposición triangular facilita la turbulencia del fluido, con lo que se aumenta el coeficiente de transmisión de calor, aunque las pérdidas de carga aumentan.

14.4.1. Características de diseño

En el diseño de intercambiadores de calor de carcasa y tubos deberán realizarse ciertas consideraciones acerca de qué fluido es más aconsejable que circule por el interior y cuál por el exterior de los tubos.

En general, para reducir pérdidas de calor hacia el exterior, el fluido caliente circulará por el interior del haz tubular. Sin embargo, al ser más fácil la limpieza del interior de los tubos, será preferible hacer circular el fluido más sucio o el que

más incrustaciones deposite, por el interior del haz tubular. En el caso que el ensuciamiento que provocan ambos fluidos sea similar, será preferible hacer circular el de más presión por el interior de los tubos, ya que en caso contrario el coste de una carcasa a presión es elevado. Para fluidos viscosos, es preferible hacerlos circular por el interior de los tubos, ya que, generalmente, este tipo de fluidos depositan suciedad. Aunque, para el caso que circulen en régimen laminar, será preferible que circulen por el exterior, pues los deflectores ayudarán a aumentar la turbulencia y, por tanto, aumenta la transmisión de calor. Si los fluidos son corrosivos se harán circular por el interior de los tubos, ya que si lo hiciesen por su exterior se necesitaría utilizar anticorrosivos para evitar no sólo el deterioro de los tubos por su parte externa, sino también el de la carcasa.

Una vez realizadas estas consideraciones, a continuación se realiza la presentación del modelo matemático necesario para el diseño de este tipo de intercambiadores. En estos intercambiadores, los balances globales de transferencia de calor son iguales a los realizados para el intercambiador de doble tubo:

$$\dot{Q} = w_C \hat{C}_P)_C (T_e - T_S) = w_F \hat{C}_P)_F (t_S - t_e) \quad [14.42]$$

Con respecto a la ecuación de velocidad de transmisión de calor a través del área de intercambio, es más difícil aplicar una expresión como la utilizada en los intercambiadores de tubos concéntricos, pues en este caso el fluido que circula por la carcasa sufre continuamente cambios de sentido, y no puede hablarse de operación en paralelo o contracorriente. Sin embargo, se considera que la ecuación de velocidad es similar a la de intercambiadores de doble tubo aunque la diferencia de temperatura media logarítmica vendrá afectada por un factor de corrección, así se tiene:

$$\dot{Q} = U A (\Delta T)_{ml} F \quad [14.56]$$

La diferencia de temperatura media logarítmica se calcula como si la operación se realizase en contracorriente:

$$(\Delta T)_{ml} = \frac{(T_e - t_S) - (T_S - t_e)}{\ln \left(\frac{T_e - t_S}{T_S - t_e} \right)} \quad [14.57]$$

El factor F que corrige a esta diferencia de temperaturas media logarítmica, es adimensional, y depende de las temperaturas de entrada y salida de los fluidos y del tipo de intercambiador.

14.4.2. Cálculo de la verdadera temperatura media logarítmica

Como ya se ha mencionado, la ecuación de velocidad de transmisión de calor viene afectada por un factor F , debido a la geometría del sistema. Este factor corrige el incremento de temperatura media logarítmica $(\Delta T)_{ml}$, obteniéndose finalmente el verdadero valor de esta expresión. En el cálculo de este factor deben rea-

lizarse una serie de consideraciones sobre el funcionamiento de este tipo de intercambiadores, realizándose las siguientes suposiciones:

- La temperatura del fluido en cualquier sección transversal se considera que es la misma.
- El coeficiente de transmisión de calor es constante.
- El área de transmisión de calor es igual en cada paso.
- El calor específico de cada fluido es constante.
- El caudal másico de cada fluido es constante.
- Se considera que no hay cambios de fase por condensación o evaporación.
- Las pérdidas de calor hacia el exterior son despreciables.

Si se considera el intercambiador de la figura 14.9, puede definirse un factor adimensional:

$$Z = \frac{T_e - T_S}{t_S - t_e} = \frac{w_F \hat{C}_P)_F}{w_C \hat{C}_P)_C} \quad [14.58]$$

puede observarse que es una relación de las capacidades horarias de calor, es decir, el calor requerido para aumentar el flujo horario en 1°C , para cada fluido.

Además, puede definirse un nuevo factor adimensional de temperaturas según la expresión:

$$\varepsilon = \frac{t_S - t_e}{T_e - T_S} \quad [14.59]$$

ésta es una relación de temperaturas, que indica la eficacia del calentamiento o enfriamiento. Este factor puede variar desde cero, para el caso de temperatura constante de uno de los fluidos, a la unidad, cuando la temperatura a la entrada del fluido caliente (T_e) coincida con la de salida del fluido frío (t_S).

El factor de corrección F es función de estos parámetros adimensionales, además del tipo de intercambiador: $F = F(Z, \varepsilon, \text{tipo})$. En las figuras 14.10 y 14.11 se muestran las correlaciones gráficas para los distintos tipos de intercambiadores de calor de carcasa y tubos.

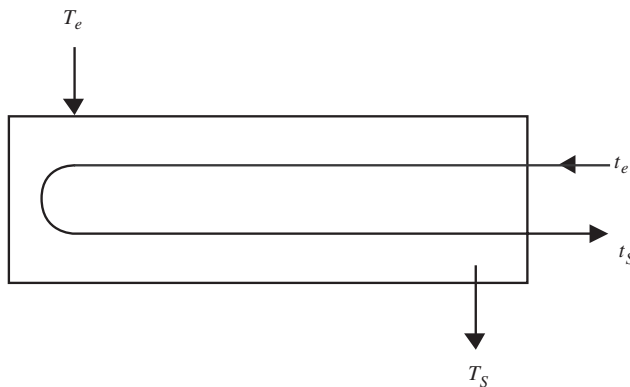


Figura 14.9. Intercambiador de calor de carcasa y tubos 1/2.

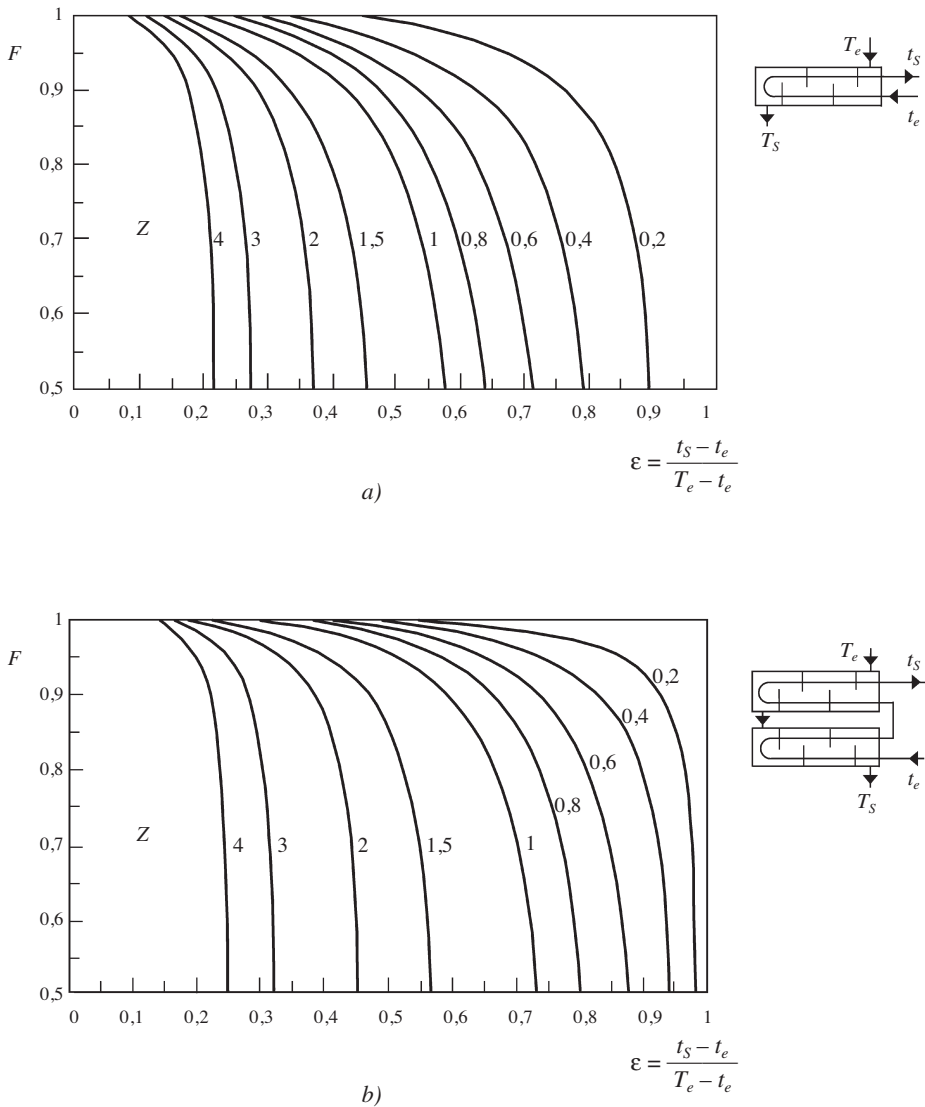


Figura 14.10. Factor F para intercambiadores de carcasa y tubos. a) Un paso de carcasa, 2 o más de tubos. b) Dos pasos de carcasa, 4 o más de tubos. (Adaptado de Coulson y Richardson, 1979).

En la aplicación de los factores de corrección carece de importancia el que el fluido caliente circule por la carcasa y el frío por los tubos, o al contrario. Si la temperatura de uno de los fluidos permanece constante, el sentido del flujo carece de importancia, pues en este caso $F = 1$.

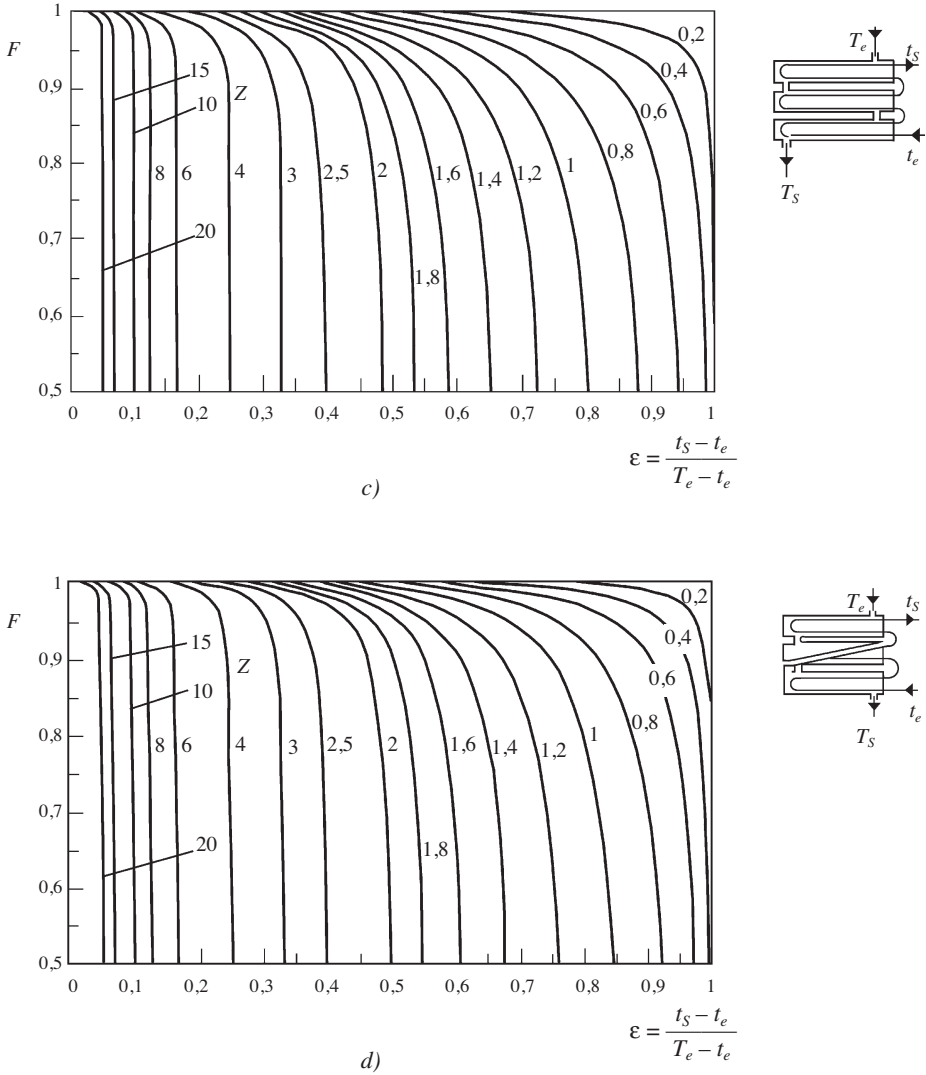


Figura 14.11. Factor F para intercambiadores de calor de carcasa y tubos. c) Tres pasos de carcasa. d) Cuatro pasos de carcasa. (Adaptado de Coulson y Richardson, 1979).

14.4.3. Cálculos de los coeficientes individuales

En el cálculo del coeficiente global de transmisión de calor, previamente deben conocerse los coeficientes de película en el lado interior de los tubos y en el exterior. Es por ello que a continuación se expone el modo de cómo calcular estos coeficientes individuales.

14.4.3.1 Coeficientes para el interior de los tubos

El modo de calcular el coeficiente del lado de los tubos es el indicado en el apartado 14.2.1, pudiéndose utilizar cualquiera de las expresiones allí presentadas. Aunque, una de las más utilizadas es la de Sieder-Tate [ec. 14.17] o bien la utilización del factor j_H de Colburn [ec. 14.16]:

$$j_H = (\text{Nu}) (\text{Pr})^{-1/3} \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^{-0.14} = 0,027 (\text{Re})^{0.8} \quad [14.17]$$

En todas estas expresiones aparece el módulo de Reynolds, definido por:

$$(\text{Re}) = \frac{\rho v d_i}{\eta} = \frac{G_t d_i}{\eta} \quad [14.60]$$

en la que v es la velocidad lineal de circulación del fluido en el interior de un tubo, y G_t es la densidad de flujo másica que circula por el interior de un tubo.

El valor de G_t se calcula a partir del caudal másico global del fluido (w), de la sección transversal de paso de un tubo (a_t), del número total de tubos del haz (N_t) y del número de pasos de los mismos (n). Con lo que:

$$G_t = \frac{w}{N_t a_t / n} \quad [14.61]$$

14.4.3.2. Coeficientes del lado de la carcasa

El cálculo del coeficiente para el lado de la carcasa resulta más complicado que en el caso anterior, ya que no se pueden calcular mediante algunas de las expresiones que se han expuesto en apartados anteriores. Ello es debido a diferentes causas, siendo una de ellas el que el flujo en la parte de la carcasa cambia continuamente de dirección y sentido. Además, se crean turbulencias que dependen del tipo de distribución de los tubos; así, para el caso de flujo perpendicular a tubos, la resistencia de la disposición en cuadrado es menor que al tresbolillo (figura 14.8). Es por ello, que puede decirse que el valor del coeficiente de transmisión de calor para el lado de la carcasa depende del módulo de Reynolds, del tipo de deflectores y de la disposición de tubos usada.

En la bibliografía existen diferentes métodos para el cálculo de los coeficientes del lado de la carcasa. Uno de ellos, sugerido por Kern, utiliza el concepto de diámetro equivalente para la carcasa, en el caso de flujo paralelo a los tubos. La expresión que permite calcular este diámetro equivalente difiere según sea la disposición del haz tubular.

- Para disposición cuadrada:

$$D_e = \frac{4 [Y^2 - (\pi/4) d_e^2]}{\pi d_e} \quad [14.62a]$$

- Para disposición triangular:

$$D_e = \frac{4 [XY - (\pi/4) d_e^2]}{\pi d_e} = \frac{4 [0,866 X^2 - (\pi/4) d_e^2]}{\pi d_e} \quad [14.62b]$$

en la que d_e , es el diámetro externo de los tubos, mientras que X e Y están definidos en la figura 14.8.

La ecuación que permite el cálculo del coeficiente de película es:

$$(\text{Nu}) = 0,36 (\text{Re})^{0,55} (\text{Pr})^{1/3} \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^{0,14} \quad [14.63]$$

en la que en el módulo de Nusselt debe utilizarse el diámetro equivalente definido por alguna de las ecuaciones 14.62. El módulo de Reynolds se calcula según la expresión:

$$(\text{Re}) = \frac{G_c D_e}{\eta} \quad [14.64]$$

siendo G_c , la densidad de flujo másica referida al área máxima (A_c) para el flujo transversal. La expresión que permite calcular este área es:

$$A_c = \frac{D_c B C'}{nY} \quad [14.65]$$

donde n es el número de pasos que el fluido experimenta en la carcasa, B la separación entre las placas deflectoras, D_c , el diámetro interior de la carcasa, Y la distancia entre los centros de los tubos y C' es el espaciado o distancia entre dos tubos consecutivos ($C' = Y - d_e$).

El valor de G_c se obtiene a partir del flujo másico w y del área A_c :

$$G_c = \frac{w}{A_c} \quad [14.66]$$

En el caso de flujo de gases a través de bancadas de tubos, una de las ecuaciones más utilizadas es:

$$(\text{Nu}) = 0,33 C_h (\text{Re}_{\text{máx}})^{0,5} (\text{Pr})^{0,3} \quad [14.67]$$

en la que C_h es una constante que depende de la disposición de los tubos, y cuyos valores, para diferentes disposiciones se dan en la tabla 14.2. En esta ecuación, para el cálculo del módulo de Reynolds debe utilizarse el valor de la densidad de flujo máxima, de forma que dicho valor se obtiene a partir de la ecuación 14.66.

De cualquier forma, en la bibliografía pueden encontrarse correlaciones que permiten el calcular los coeficientes de transmisión de calor para fluidos que fluyen perpendicularmente a bancadas de tubos, para distintos tipos de intercambiadores (Foust *et al.*, 1968).

Tabla 14.2. Factores C_h y C_f para intercambiadores de calor de carcasa y tubos

Re _{máx}	$X = 1,25 d_0$				$X = 1,5 d_0$			
	En línea		Tresbolillo		En línea		Tresbolillo	
	C_h	C_f	C_h	C_f	C_h	C_f	C_h	C_f
$Y = 1,25 d_0$								
2.000	1,06	1,68	1,21	2,52	1,06	1,74	1,16	2,58
20.000	1,00	1,44	1,06	1,56	1,00	1,56	1,05	1,74
40.000	1,00	1,20	1,03	1,26	1,00	1,32	1,02	1,50
$X = 1,25 d_0$								
2.000	0,95	0,79	1,17	1,80	0,95	0,97	1,15	1,80
20.000	0,96	0,84	1,04	1,10	0,96	0,96	1,02	1,16
40.000	0,96	0,74	0,99	0,88	0,96	0,85	0,98	0,96

Fuente: Coulson y Richardson (1979).

Existen otras expresiones que permiten el cálculo de los coeficientes para el fluido que circula por el lado de la carcasa, utilizando el «factor j_H » de transmisión de calor, de forma que:

$$j_H = (\text{Nu}) (\text{Pr})^{-1/3} \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^{-0,14} \tag{14.68}$$

en la que j_H se obtiene a partir de ecuaciones empíricas que tienen presente el tipo de régimen de circulación, influencia del corte de deflectores y de la disposición del haz tubular.

A continuación se exponen las expresiones más utilizadas para el cálculo del factor j_H :

- Para régimen turbulento ($2.100 < \text{Re} < 10^6$):

$$j_H = a (\text{Re})^b \tag{14.69}$$

en la que a y b son parámetros que dependen del deflector y tipo de distribución, respectivamente. El valor de a para diferentes valores del corte del deflector son:

Corte del deflector	5	25	35	45
a	0,31	0,35	0,30	0,27

El valor de b será:

- $b = 0,55$ para disposición triangular y cuadrada normal.
- $b = 0,56$ para disposición cuadrada rotada.

- Para régimen laminar ($\text{Re} < 2.100$):

$$j_H = a (\text{Re})^{0,43} \tag{14.70}$$

siendo el parámetro a función del corte del deflector:

Corte del deflector	15	25	35	45
a	0,84	0,69	0,64	0,59

14.4.4. Cálculo de las pérdidas de carga

Deben distinguirse las pérdidas de carga del fluido que circula por el interior de los tubos y el que lo hace por el exterior.

14.4.4.1. Pérdidas de carga del lado de los tubos

En el cálculo de las pérdidas de presión en el interior de los tubos cabe distinguir la debida al rozamiento en los mismos (ΔP_t) y la debida al cambio de un paso hacia el otro (ΔP_r).

La debida a los tubos se calcula a partir de la ecuación de Fanning:

$$\Delta P_t = (4f) \frac{L}{d_i} n \frac{G_t^2}{2\rho} \quad [14.71]$$

en la que L es la longitud de los tubos, d_i el diámetro interno de los mismos, G_t la densidad de flujo másica con la que el fluido circula por cada tubo, y f es el factor de fricción, que depende del módulo de Reynolds y de la rugosidad relativa, así como del régimen de circulación.

Para el cambio de sentido (180°), se calcula mediante la ecuación:

$$\Delta P_r = 4 \frac{\rho v^2}{2} = 4 \frac{G_t^2}{2\rho} \quad [14.72]$$

Si existen n pasos, la pérdida de carga total será:

$$\Delta P = \Delta P_t + n \Delta P_r \quad [14.73]$$

14.4.4.2. Pérdidas de carga del lado de la carcasa

Para el lado de la carcasa, la ecuación que puede utilizarse en el cálculo de las pérdidas de cargas es:

$$\Delta P_c = \frac{f' G_c^2 D_c (N_c + 1)}{2\rho D_e} \quad [14.74]$$

donde D_c es el diámetro interno de la carcasa, D_e es el diámetro equivalente de la carcasa [ecs. 14.62], N_c es el número de deflectores, con lo que $(N_c + 1)$ es el número de veces que el fluido cruza la carcasa.

Si L es la longitud del intercambiador y B es la distancia entre deflectores, se cumple: $N_c + 1 = L/B$.

El parámetro f' es el coeficiente de fricción, que depende del módulo de Reynolds, del tipo de disposición de los tubos y del corte del deflector. Este factor de fricción puede calcularse a partir de gráficas (figura 14.12).

Las pérdidas de carga también pueden calcularse a partir de la ecuación:

$$\Delta P_c = C_f m \frac{\rho v_c^2}{6} \quad [14.75]$$

donde v_c , es la velocidad de circulación del fluido a través de la carcasa, m el número de filas de tubos y C_f es un factor que depende del tipo de disposición de los tubos, y cuyo valor se puede obtener a partir de los datos de la tabla 14.3.

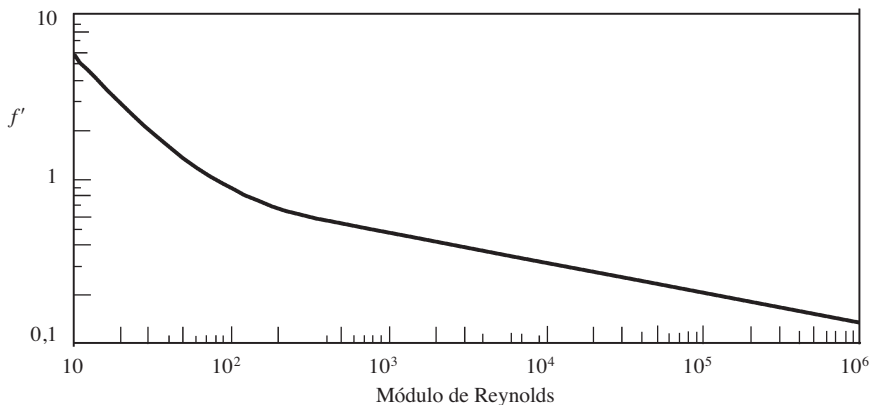


Figura 14.12. Factor de fricción para el fluido de la carcasa (adaptado de Coulson y Richardson, 1979).

14.5. Intercambiadores de calor de placas

Los intercambiadores de calor de placas están constituidos por una serie de placas corrugadas, realizadas por simple estampación, que se encuentran taladradas convenientemente en sus extremos, con el fin de permitir o dirigir el flujo de líquido a calentar o de líquido a enfriar. Estas placas se encuentran unas frente a otras, de modo que entre ellas pueden circular los fluidos; además, se hallan comprimidas mediante tornillos, con el fin que puedan soportar la presión interior. Entre las placas, y en sus bordes, deben colocarse juntas para evitar que los fluidos se escapen o mezclen entre sí. Estas juntas son las que limitan el campo de utilización de este tipo de intercambiadores. Una vez que se tiene el paquete de placas, la disposición de los taladros de cada placa dirige el paso de los fluidos, tal como se puede observar en la figura 14.13.

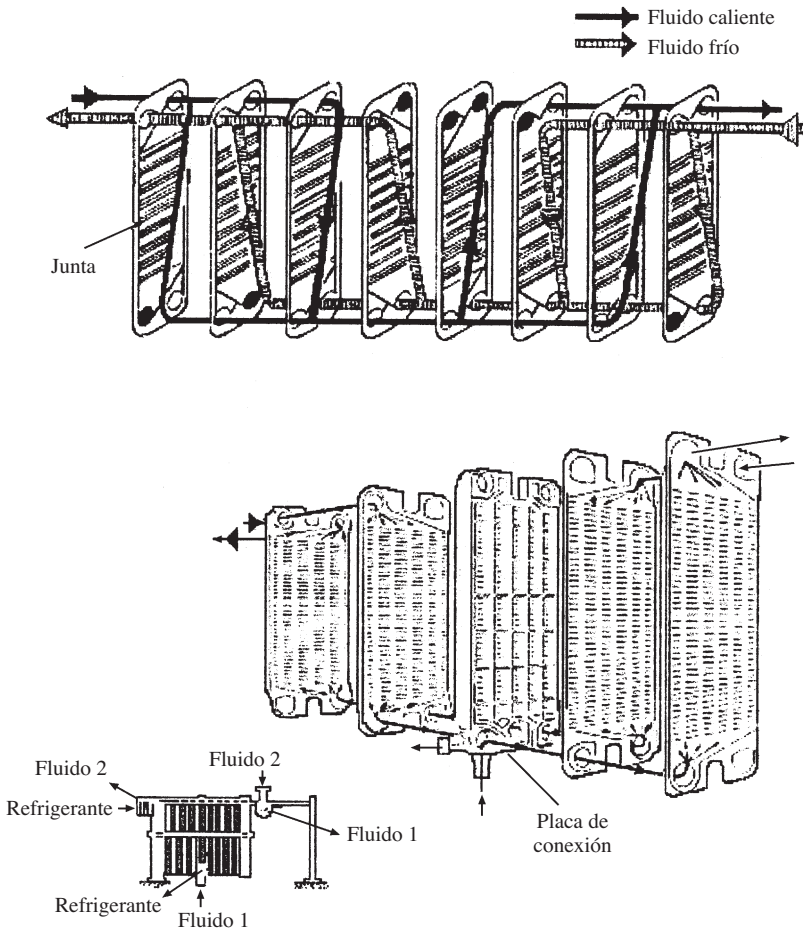


Figura 14.13. Intercambiador de calor de placas.

Según cómo estén dispuestas las placas pueden obtenerse diferentes posibilidades en los pasos de los fluidos. Así, se pueden combinar las placas de forma que se obtienen distribuciones como las mostradas en la figura 14.14, y que a continuación se comentan brevemente:

- Flujo en serie, en la que una corriente continua cambia la dirección después de cada paso.
- Flujo en paralelo, en la que la corriente se divide en varias subcorrientes para, una vez pasado por las placas, volver a converger.
- Disposición en Z, en la que ambas corrientes fluyen en paralelo, pero el punto de salida se encuentra en el lado opuesto del de entrada.
- Disposición en U, en la que ambas corrientes fluyen en paralelo, pero los puntos de entrada y salida se encuentran en el mismo lado del intercambiador.

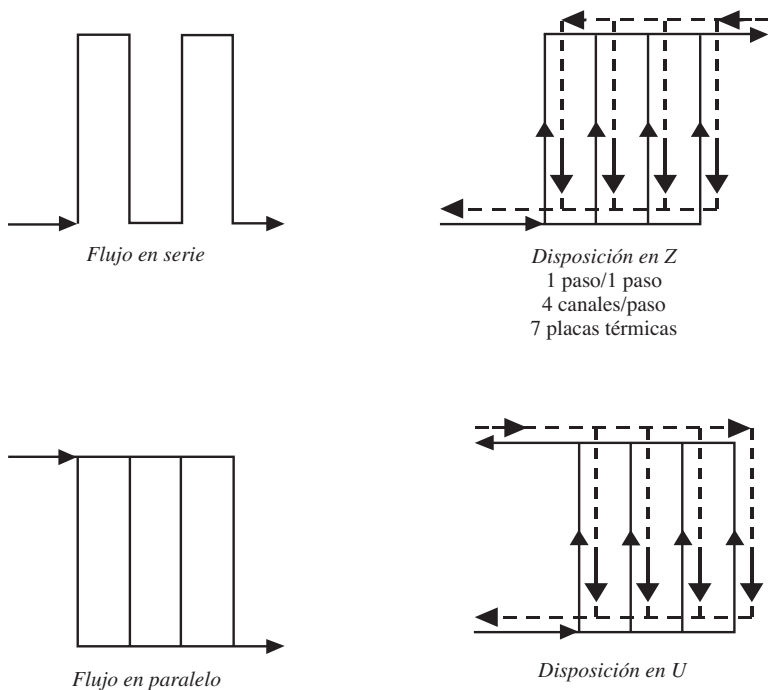


Figura 14.14. Circulación de los fluidos para diferentes disposiciones.

- Otros tipos más complejos de distribución, de los que se muestra algún ejemplo en la figura 14.14.

Este tipo de intercambiadores es muy flexible en sus aplicaciones, pues al cambiar la disposición de las placas o taladros se cambian las características de flujo de dicho intercambiador. Además, se debe resaltar el que en un mismo intercambiador es posible realizar operaciones con varios fluidos, interponiendo una rejilla conectora que permita la entrada o salida de fluidos seleccionados, tal como se puede observar en la figura 14.13. Un ejemplo de ello es el caso de pasteurizadores de leche, en los que en un solo intercambiador puede calentarse y enfriarse gradualmente la leche mediante corrientes de agua caliente, fría y aprovechando el calor que lleva la misma leche que debe ser enfriada después de su calentamiento. En la industria pueden encontrarse procesos en los que los intercambiadores de calor de placas se utilizan de forma análoga a la descrita.

El ensuciamiento es uno de los problemas de cualquier tipo de intercambiadores de calor, pues las incrustaciones que se forman en las paredes disminuyen la transmisión de calor. Todo ello, puede dar lugar a que, si no se ha dimensionado adecuadamente el intercambiador, no se obtengan los fines para los que se ha construido el aparato. Esto puede resultar grave en un intercambiador tubular, pues necesita que se realice una limpieza para que vuelva a funcionar adecuadamente. Sin

embargo, los intercambiadores de placas presentan la ventaja de su fácil ampliación con nuevas placas, con lo que permite una vida más larga entre limpiezas. Además, en estos intercambiadores el ensuciamiento es más lento, ya que los fluidos circulan con una alta turbulencia, y las superficies de las placas son más pulidas, evitándose zonas de baja velocidad.

En los intercambiadores de placas la turbulencia se alcanza para valores del módulo de Reynolds desde 10 a 500, pues las arrugas de las placas rompen la película estancada en la superficie de transmisión de calor. La corrugación de las placas, además de conseguir un soporte mutuo entre ellas, manteniendo una separación constante entre las mismas, produce una alta turbulencia en el fluido que circula entre las placas. Por otra parte, la corrugación permite un aumento considerable de la superficie de transmisión por placa. Todos estos factores contribuyen a que se presenten unos altos coeficientes de transmisión de calor, estimándose que para condiciones análogas, este coeficiente es unas diez veces superior en un intercambiador de placas que el correspondiente a la circulación en el interior de un tubo de un intercambiador tubular convencional. Esto supone que para la misma capacidad de intercambio, el área de transmisión es mucho menor en los de placas.

A pesar de las ventajas expuestas, los intercambiadores de calor de placas presentan ciertas limitaciones respecto a los tubulares. Así, es posible construir intercambiadores de placas cuya presión máxima sea de 20 atmósferas, y en casos extremos, las juntas pueden soportar como máximo 260 °C. Además, la caída de presión en este tipo de intercambiadores es mayor que la que se da en los tubos. Estas limitaciones definen los campos de aplicación de los intercambiadores de placas.

14.5.1. Características de diseño

Suponiendo un intercambiador de calor formado por cuatro placas, tal como se muestra en la figura 14.15, se observa que uno de los fluidos circula por un canal, recibiendo calor del otro fluido a través de las placas.

Este sería uno de los casos más sencillos de intercambiadores de calor de placas; sin embargo por regla general están constituidos por una serie mayor de placas adosadas una a continuación de la otra. Pudiéndose dar las posibilidades de paso de los fluidos según las disposiciones mostradas en la figura 14.14, o bien otras con una mayor complicación.

En cualquier caso, las ecuaciones básicas que se utilizan para plantear el modelo matemático son similares a las de otro tipo de intercambiadores de calor. Así, las ecuaciones fundamentales que se presentan son:

- Balance global de energía: en el que el flujo de calor cedido por el fluido caliente es absorbido por el fluido frío, aumentando así su temperatura:

$$\dot{Q} = w_c \hat{C}_p)_c (T_e - T_s) = w_F \hat{C}_p)_F (t_s - t_e) \quad [14.76]$$

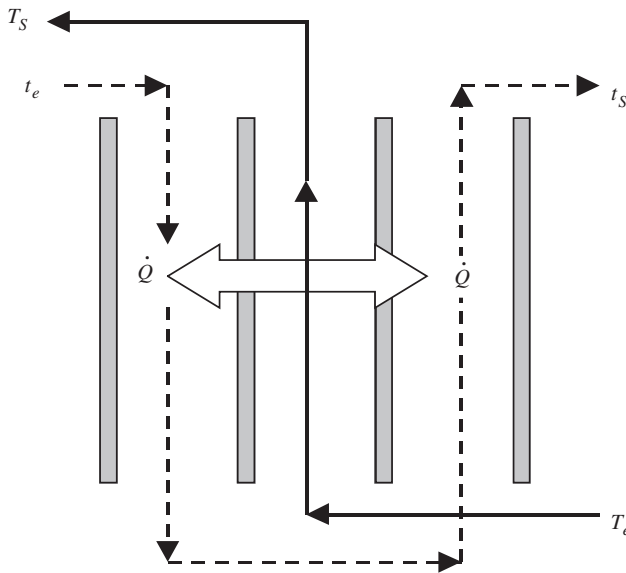


Figura 14.15. Unidad elemental de un intercambiador de calor de placas.

- Ecuación de transmisión de calor: para un sistema como el mostrado en la figura 14.15 será:

$$\dot{Q} = U (2 A_p) (\Delta T)_{ml} \quad [14.77]$$

en la que U es el coeficiente global de transmisión de calor, A_p el área de una placa y $(\Delta T)_{ml}$ la diferencia de temperaturas media logarítmica, que se toma como si los fluidos circularan en contracorriente.

Para sistemas más complicados, la ecuación de velocidad es análoga a ésta, pero con un factor de corrección F para la diferencia de temperaturas media logarítmica, cuyo valor depende del sistema de paso de los fluidos y del número de unidades de transferencia. Por tanto, se tiene:

$$\dot{Q} = U A_t (\Delta T)_{ml} F \quad [14.78]$$

en la que A_t es el área total de transmisión de calor del intercambiador.

El área total es el producto del área de una placa por el número de ellas, en las que existe transmisión de calor:

$$A_t = N \cdot A_p \quad [14.79]$$

Las placas en las que se transmite calor a su través se las denomina «*placas térmicas*». Debe resaltarse que las placas de los extremos del intercambiador y las intermedias de distribución de fluidos no son térmicas, pues en ellas no existe intercambio de calor entre los fluidos. Por tanto, si existen N placas térmicas, el número de canales por los que circulan los fluidos es $N + 1$.

14.5.2 Número de unidades de transferencia

El número de unidades de transferencia (NUT) se define como la relación entre el incremento de temperaturas que experimenta el fluido que se está procesando y el incremento medio logarítmico de las temperaturas:

$$NUT = \frac{T_e - T_S}{(\Delta T)_{ml}} \quad [14.80]$$

De la ecuación de velocidad y del flujo de calor total transmitido (Ecs.14.76 y 14.77) se tiene:

$$\dot{Q} = U (2 A_P) (\Delta T)_{ml} = w_c \hat{C}_P)_c (T_e - T_S) \quad [14.81]$$

se obtiene que el número de unidades de transferencia se puede expresar como:

$$NUT = \frac{2 A_P U}{w_c \hat{C}_P)_c} \quad [14.82]$$

Considerando un coeficiente global de transmisión de calor medio y el área total:

$$NUT = \frac{A_t U_m}{w_c \hat{C}_P)_c} \quad [14.83]$$

Al número de unidades de transferencia también se le denomina factor de ejecución, longitud térmica o razón de temperaturas.

Este factor es necesario para poder evaluar el factor de corrección F de la diferencia de temperaturas media logarítmica, tal como se verá más adelante. Además, dependiendo del valor de este factor puede escogerse el tipo de placas que se deben utilizar en el intercambiador que se necesita para un proceso determinado. Así, para valores bajos de NUT deben utilizarse placas cortas y anchas, que se caracterizan por presentar bajos coeficientes de transmisión de calor, siendo pequeñas las pérdidas de presión en cada paso. Por el contrario, para valores altos de NUT se utilizan placas largas y estrechas con profundas arrugas en su superficie, y que dejan pequeños huecos entre las placas, siendo los canales estrechos.

Asimismo, cabe resaltar que placas cuyas arrugas están formadas por canales que poseen ángulos obtusos dan altos valores del NUT de cada placa; mientras que si el ángulo que forman las arrugas es agudo, el valor del NUT de la placa es bajo, ofreciendo menor resistencia al flujo del fluido que pasa entre las placas.

14.5.3. Cálculo de la verdadera diferencia de temperatura media logarítmica

En este tipo de intercambiadores de calor el verdadero incremento o diferencia de temperatura media logarítmica se determina de forma análoga al caso de intercambiadores de carcasa y tubos. El incremento de temperatura media logarítmica está definido como si la operación fuese en contracorriente [ec. 14.57].

Este incremento de temperatura debe corregirse con un factor F , cuyo valor se obtiene gráficamente conocidos el número de unidades de transferencia (NUT) y el sistema de pasos de los fluidos caliente y frío a través de los canales del intercambiador. Para el cálculo de F se puede utilizar la figura 14.16, en la que a partir del NUT y del tipo de paso de los fluidos es posible obtener el valor de F (Marriott, 1971, Raju y Chand, 1980).

En estos intercambiadores el factor de corrección puede llegar a tener valores altos, próximos a la unidad, lo que unido al hecho de que suelen presentar coeficientes de transmisión elevados, llegan a obtenerse rendimientos bastante altos. Pudiéndose dar el caso que la diferencia de temperaturas entre la corriente de fluido caliente a la entrada (T_e) y la del fluido frío a la salida (t_s) sea próximo a 1 °C; mientras que para un intercambiador de calor de carcasa y tubos, esta diferencia es cercana a 5 °C.

14.5.4. Cálculo de los coeficientes de transmisión de calor

En los intercambiadores de calor de placas se ha encontrado una expresión que relaciona los módulos de Nusselt, Reynolds y Prandtl, según la ecuación:

$$(Nu) = C (Re)^x (Pr)^y \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^z$$

siendo C una constante.

Los valores de la constante y los exponentes de esta ecuación se calculan experimentalmente, y sólo son válidos para cada tipo de placa en que se han obtenido. Además, dependen del tipo de régimen de circulación. En estos intercambiadores,

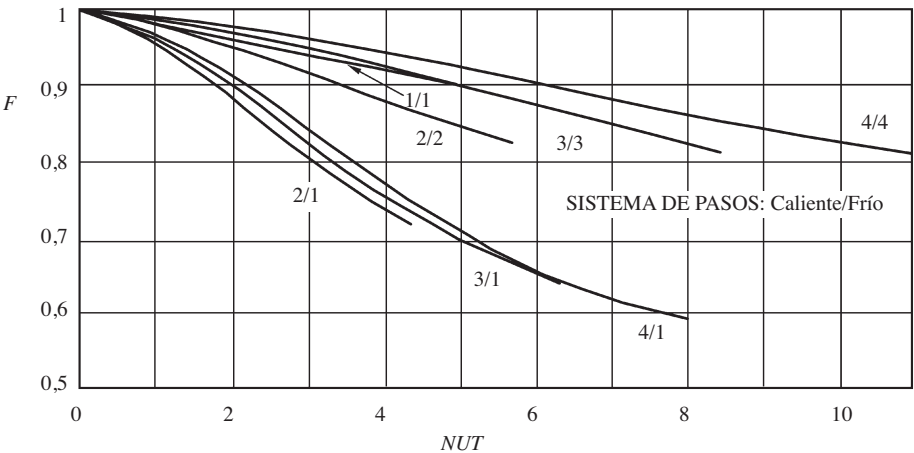


Figura 14.16. Factores de corrección F para diferentes sistemas de paso (adaptado de Marriot, 1971).

se considera que un fluido circula en régimen laminar cuando el valor del número de Reynolds es menor de 400; mientras que para valores superiores a 400 el fluido circula en régimen turbulento.

En régimen turbulento ($Re > 400$) estas variables oscilan entre los valores (Marriott, 1971):

$$\begin{array}{lll} C = 0,15 & \text{a} & 0,40 \\ x = 0,65 & \text{a} & 0,85 \\ y = 0,30 & \text{a} & 0,45 \text{ (generalmente } 0,333) \\ z = 0,05 & \text{a} & 0,20 \end{array}$$

El módulo de Reynolds depende del sistema de pasos con que fluyen los distintos fluidos. Así, para flujo en serie, en el que cada fluido pasa a través de cada canal como una sola corriente, el módulo de Reynolds se define según la típica ecuación:

$$(Re) = \frac{\rho v D_e}{\eta} = \frac{G D_e}{\eta} \quad [14.84a]$$

siendo v la velocidad lineal de circulación del fluido y G su correspondiente densidad de flujo másica global, mientras que D_e es el diámetro equivalente.

Cuando el sistema de pasos es en flujo paralelo, las corrientes de cada tipo de fluidos se dividen en subcorrientes (figura 14.14), que atraviesan los canales entre placas. El módulo de Reynolds viene expresado por:

$$(Re) = \frac{(G/n) D_e}{\eta} \quad [14.84b]$$

en la que n es el número de canales de cada tipo de fluido. Si n_c es el número de canales para el fluido caliente, el módulo de Reynolds para este fluido se calcula aplicando esta ecuación para $n = n_c$. Para el fluido frío se aplica la misma ecuación con $n = n_f$, siendo n_f el número de canales en los que queda dividida la corriente de este fluido.

Una de las ecuaciones más utilizadas, para el cálculo de los coeficientes individuales de transmisión de calor, en régimen turbulento es:

$$(Nu) = 0,374 (Re)^{2/3} (Pr)^{1/3} \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^{0,15} \quad [14.85]$$

Utilizando valores medios para los números de Reynolds y Prandtl, una ecuación de fácil aplicación en régimen turbulento es (Bounopane *et al.*, 1963, Usher, 1970):

$$(Nu) = 0,2536 (Re)^{0,65} (Pr)^{0,4} \quad [14.86]$$

En todas estas ecuaciones no se tiene en cuenta la geometría de las placas, sin embargo, existen algunas en las que sí incluyen factores geométricos, tales como la longitud de paso (L) y el espaciado entre placas (b). Una de ellas es la dada por Troupe *et al.* (1960):

$$(Nu) = (0,383 - 0,0505^{L/b}) (Re)^{0,65} (Pr)^{0,4} \quad [14.87]$$

Para régimen laminar ($Re < 400$) se han propuesto otras ecuaciones para el cálculo de los coeficientes de películas, siendo una de ellas una variante de la ecuación de Sieder-Tate (Marriott,1971):

$$(Nu) = C \left(Re Pr \frac{D_e}{L} \right)^{1/3} \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^{0,14} \quad [14.88]$$

en la que el valor de la constante C oscila entre 1,86 a 4,5 dependiendo de la geometría del sistema.

Otra ecuación utilizada en régimen laminar es (Jackson y Troupe,1964, Raju y Chand,1980):

$$h = 0,742 \hat{C}_P G (Re)^{-0,62} (Pr)^{-2/3} \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^{0,14} \quad [14.89]$$

En los módulos de Reynolds y Nusselt aparece el diámetro equivalente D_e , que se define como cuatro veces el radio hidráulico, siendo éste la razón entre el área de paso del fluido entre las placas y el perímetro mojado:

$$D_e = 4 r_H = 4 \frac{a b}{2 a} = 2 b \quad [14.90]$$

siendo a la anchura de las placas y b la distancia entre ellas.

Es interesante resaltar que para un intercambiador de tubos el diámetro equivalente coincide con el diámetro del tubo. Por tanto, desde el punto de vista de intercambio de calor a través de la pared, un intercambiador de placas equivale a un tubular de diámetro igual al doble del espesor de las juntas. Si se tiene presente que este espesor suele ser de 2 a 5 mm, resulta que el intercambiador de calor de placas se comporta como uno de tubos de diámetro 4 a 10 mm. A pesar de que un intercambiador de calor tubular de estas características sería ideal para un intercambio de calor deseado, es muy difícil que esto pueda llevarse a la práctica, ya que se presentan dificultades mecánicas en su construcción.

Para el cálculo de los coeficientes individuales también existen gráficas en las que se correlacionan los valores de dichos coeficientes con la denominada *caída de presión específica* (figura 14.17).

La caída de presión específica (J) se define como la razón entre la caída de presión y el número de unidades de transferencia:

$$J = \frac{\Delta P}{NUT} \quad [14.91]$$

En la figura 14.17 se puede observar que en la mayoría de intercambiadores de placas la variación de los coeficientes de película con la caída de presión específica es similar. La curva A se refiere a placas especiales que tienen un espaciado más grande que el normal, diseñadas para operaciones en las que el valor de NUT es muy bajo, o para aquellas en que deben tratarse fluidos con un alto contenido en

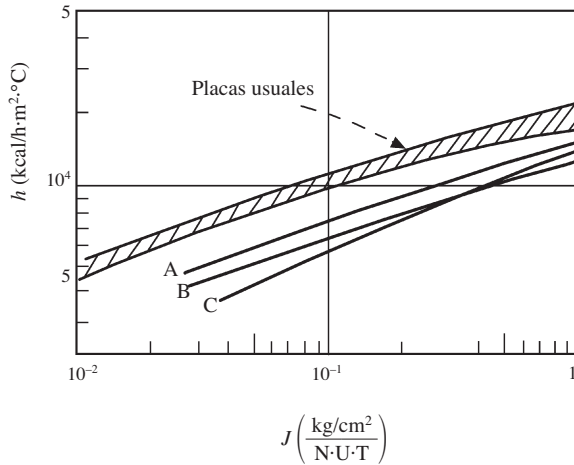


Figura 14.17. Variación de los coeficientes individuales de transmisión de calor con la caída de presión específica (adaptado de Marriot, 1971).

sólidos. La curva *B* se utiliza para casos similares, pero en los que las placas tienen menos arrugas por unidad de área, y por tanto, menos puntos de contacto. Finalmente, la curva *C* se utiliza para placas lisas con ondas impresas, teniendo un efecto pequeño en el paso del fluido.

Los coeficientes de película también pueden obtenerse a partir del coeficiente j_H de Colburn para transmisión de calor. En la figura 14.18 se da en forma gráfica el valor j_H en función del módulo de Reynolds, para un tipo de placa.

Una vez obtenidos los coeficientes individuales debe calcularse el coeficiente global de transmisión de calor, según la ecuación global:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_C} + \frac{e}{k_p} + \frac{1}{h_F} + R_C + R_F \quad [14.92]$$

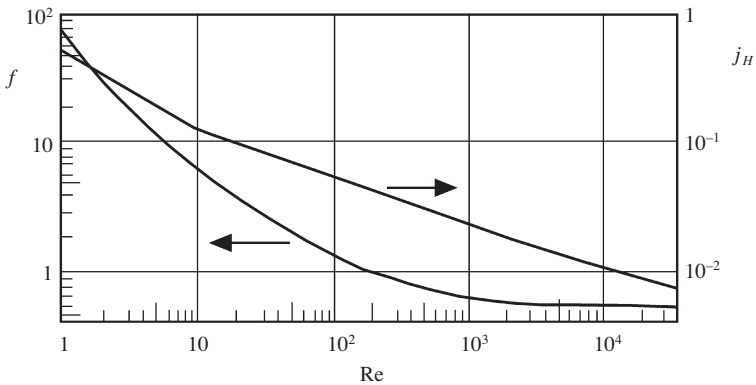


Figura 14.18. Variación del factor de fricción f y de j_H con el módulo de Reynolds.

siendo e el espesor de la pared de la placa, k_p la conductividad térmica del material del que está construida la placa, y R_C y R_F son los factores de ensuciamiento de los fluidos caliente y frío, respectivamente.

14.5.5. Cálculo de las pérdidas de carga

El conocimiento de las pérdidas de carga o presión que experimentan los fluidos a su paso por el intercambiador de placas es de suma importancia, ya que una vez conocida dicha caída podrá escogerse el tipo de placas del intercambiador.

Para el cálculo de la caída de presión pueden utilizarse variantes de la ecuación de Fanning. Una de ellas es:

$$\Delta P = 2f \frac{G^2 L}{g D_e \rho} \quad [14.93]$$

en esta ecuación G es la densidad de flujo másica del fluido, L la longitud de la placa, o lo que es lo mismo, la distancia que debe recorrer cada fluido al pasar por el canal entre dos placas, g es la constante gravitacional, y f el factor de fricción.

Los factores de fricción calculados a partir de la velocidad lineal de paso de los fluidos, en régimen turbulento, es de 10 a 60 veces superior en el flujo a través de los canales de un intercambiador de placas que en el flujo a través de un tubo, para números de Reynolds similares.

Para régimen de circulación turbulento, el factor de fricción puede calcularse a partir de la ecuación (Coper, 1974, Raju y Chand, 1980):

$$f = \frac{2,5}{(\text{Re})^{0,3}} \quad [14.94]$$

El factor de fricción depende del tipo de placa. En la figura 14.18 se halla representada gráficamente la variación de este factor con el módulo de Reynolds.

14.5.6. Procedimiento de diseño

Generalmente, en el diseño de intercambiadores de placas, se desea calcular el área de intercambio de calor, o lo que es lo mismo, el número de placas térmicas para llevar a cabo una operación, en la que se conocen las temperaturas de entrada y salida de uno de los fluidos, la temperatura de entrada del otro fluido, los flujos másicos de ambas corrientes, las propiedades físicas de ambos fluidos, y las características de las placas a utilizar.

El diseño de un intercambiador de calor de placas es laborioso, debiéndose emplear para la resolución del modelo matemático planteado, programas de cálculo por ordenador. Sin embargo, existen métodos simplificados que permiten el diseño de estos intercambiadores con una buena aproximación, incluso en aquellos casos que los fluidos que circulan se comportan como no newtonianos.

A continuación se expone un método de diseño, basado en la utilización de factores de corrección F de la diferencia de temperaturas media logarítmica. De cualquier modo, se deben realizar una serie de hipótesis para resolver el modelo matemático planteado. Se va a suponer que se cumplen las siguientes condiciones:

- Las pérdidas de calor hacia el exterior son despreciables.
- No se forman bolsas de aire en el interior del intercambiador.
- El coeficiente global de transmisión de calor es constante a lo largo de todo el intercambiador.
- La temperatura en el interior de cada canal sólo varía en la dirección del flujo.
- En el flujo en paralelo, la corriente global queda repartida por igual entre todos los canales.

Con estas suposiciones se puede llegar a resolver el problema planteado al inicio de este apartado, tanto en flujo en serie como en paralelo.

A continuación se exponen los pasos que deben seguirse para llegar a obtener el número de placas en el diseño del intercambiador deseado:

- Datos: T_e, T_s, t_e, w_C, w_F
Propiedades físicas de los fluidos: k, ρ, η, \hat{C}_p (obtenidos en tablas, gráficas o ecuaciones).
Características de las placas: k_p, L, a, b, e (facilitados por el fabricante).

Fases de cálculo

1. Cálculo del flujo de calor total transmitido por el fluido caliente, y ganado por el frío, mediante la ecuación 14.76:

$$\dot{Q} = w_C \hat{C}_p)_C (T_e - T_S)$$

2. Cálculo de la temperatura de salida del fluido frío, a partir de la ecuación 14.76:

$$t_S = t_e + \frac{\dot{Q}}{w_F \hat{C}_p)_F}$$

3. Cálculo de las propiedades físicas de los fluidos a las temperaturas medias, utilizando las tablas, gráficas o ecuaciones adecuadas.
4. Cálculo de la diferencia de temperaturas media logarítmica $(\Delta T)_{ml}$.
5. Determinación del número de unidades de transferencia NUT , con la ecuación 14.80.
6. Cálculo del factor de corrección F de la temperatura media logarítmica utilizando la figura 14.16.
7. Determinación del módulo de Reynolds de cada corriente, utilizando las ecuaciones 14.84 según se considere flujo en serie o en paralelo.
8. Cálculo de los coeficientes individuales de transmisión de calor h , mediante las ecuaciones 14.85 a 14.89, según sea el régimen de circulación. También pueden determinarse a partir de las figuras 14.17 ó 14.18.

9. Cálculo del coeficiente global de transmisión de calor U , utilizando la ecuación 14.92, una vez conocidos los coeficientes de película y estimados los factores de ensuciamiento.
10. Cálculo del área total de transmisión de calor a partir de la ecuación 14.78:

$$A_t = \frac{\dot{Q}}{U (\Delta T)_{ml} F}$$

11. Determinación del número de placas térmicas a partir del área total y el área de cada placa: $N = A_t/A_p$.

Estas etapas son comunes para el cálculo de intercambiadores de calor, tanto para sistemas que trabajan en serie como en paralelo. Sin embargo, en el caso de operación en paralelo, se presenta un proceso iterativo para el cálculo del número de placas térmicas. Ello es debido a que en la etapa 7 debe suponerse el número de canales de las corrientes caliente (n_c) y fría (n_f) para poder calcular el módulo de Reynolds correspondiente, y que permite proseguir con las etapas siguientes de cálculo, hasta obtener el número de placas térmicas. Una vez conocido este número N , se conocerá el número de canales totales $n = N + 1$. En el caso de que N sea impar, el número de canales es par, con lo que los valores de n_c y n_f son iguales [$n_c = n_f = (N + 1)/2$]. Por el contrario, si N es par, el número de canales es impar, con lo que el número de canales de un tipo es superior al otro en una unidad. Una vez obtenidos estos valores de n_c y n_f , a partir de N , se comparan con los supuestos en la etapa 7. Si existe coincidencia de valores con los supuestos y calculados, el proceso se da por terminado, en caso contrario, se repiten las etapas del proceso de cálculo desde la etapa 7 al final. El proceso iterativo se va repitiendo hasta que dichos valores coincidan.

14.6. Intercambiadores de calor de superficie ampliada

En muchos casos, para mejorar la transmisión de calor, se utilizan intercambiadores de calor, cuya superficie ha sido ampliada mediante las denominadas «aletas». Estas pueden ser de distinta forma (figura 14.19), siendo longitudinales, circulares o espirales, espigas, entre otras. Las aletas pueden ser del mismo material del que están contruidos los tubos, o bien de otro distinto, aunque en cualquier caso debe asegurarse un buen contacto entre el tubo y la aleta. Las aletas son muy utilizadas en procesos de enfriamiento, sobre todo cuando quiere eliminarse calor, utilizando fluidos malos conductores, como lo son los gases.

No siempre una aleta va a mejorar sensiblemente la transmisión de calor, ya que esto depende de cuál es la resistencia que más afecta a dicha transmisión. Así, si se supone la expresión general que liga el coeficiente global de transmisión de calor referido al área interna, con las diferentes resistencias, despreciando los posibles efectos de ensuciamiento, se tiene:

$$\frac{1}{U_i A_i} = \frac{1}{h_e A_e} + \frac{e}{k A_{ml}} + \frac{1}{h_i A_i} \quad [14.95]$$

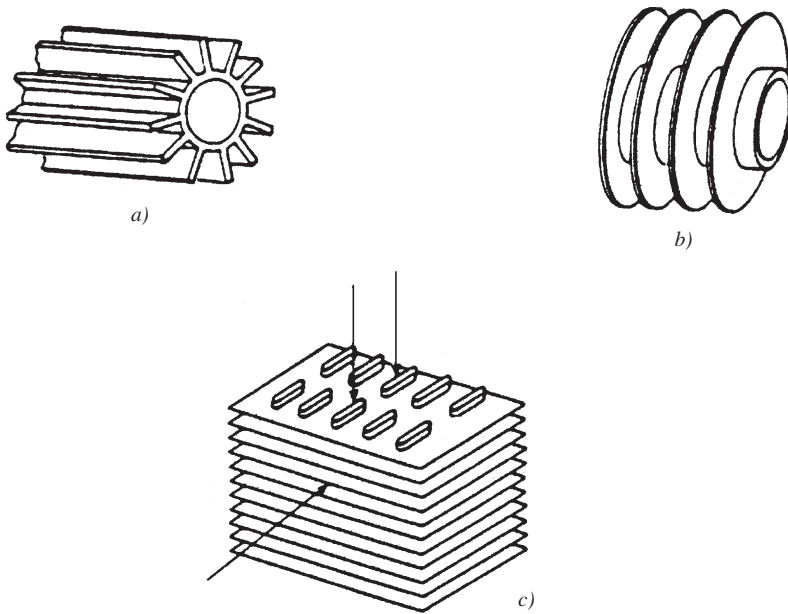


Figura 14.19. *Diferentes tipos de aletas: a) Longitudinal. b) Transversal. c) Tubos con aletas continuas.*

El primer miembro de esta ecuación representa la resistencia global a la transmisión de calor, y es la suma de tres resistencias, las debidas a los dos fluidos más la opuesta por la pared metálica. Generalmente, la resistencia que ofrece el metal no es elevada en comparación con las otras dos, por lo que en principio puede despreciarse.

Si se observa la ecuación 14.95, A_e es el área externa, por lo que si ésta se ve ampliada mediante la utilización de aletas, se consigue disminuir el valor $1/(h_e A_e)$, por lo que la resistencia global disminuye, y por tanto se favorece la transmisión de calor. Esta eliminación de calor será más o menos importante, dependiendo de los valores que adquieren los coeficientes individuales de transmisión de calor de los fluidos. Si el coeficiente exterior h_e es muy pequeño comparado con h_i , la resistencia exterior será mucho mayor que la interior, por lo que si se aumenta el área externa A_e , puede lograrse que la resistencia global disminuya casi proporcionalmente con el aumento de área externa. Por el contrario, si es h_i mucho menor que h_e , la resistencia del fluido interior será mucho mayor que la exterior, por lo que el aumentar el área externa apenas influenciará sobre la resistencia global; poniéndose de manifiesto que no siempre las aletas aumentan de forma sensible la transmisión de calor.

14.6.1. Modelo matemático

De los diferentes tipos de aletas existentes, sólo se planteará el problema de aletas longitudinales, siendo análogo el planteamiento para otro tipo de aleta;

aunque la resolución matemática no se ha realizado en todos los casos por su dificultad.

Si se considera una aleta, tal como la mostrada en la figura 14.20, cuyas dimensiones son las allí indicadas; en la que la temperatura T_w en la base de la aleta es constante, puede plantearse un balance energético con las siguientes suposiciones:

- La transmisión de calor por conducción a lo largo de la aleta sólo se realiza en la dirección radial, por lo que la temperatura únicamente es función de esta coordenada.
- La aleta sólo disipa calor por convección hacia el exterior a lo largo de toda ella, y no lo hace por sus bordes. Es decir, únicamente disipa calor a través del área lateral hacia los lados.
- Para cualquier punto de la aleta, con una temperatura T , la densidad de flujo de calor disipado al exterior se expresa como $q = h_e(T - T_e)$, siendo T_e la temperatura del fluido exterior y h_e el coeficiente individual de calor por convección en el seno del fluido externo.

Al realizar el balance energético en un elemento diferencial de altura Δx de aleta, se obtiene:

$$M b q(x) - M b q(x + \Delta x) - 2 M \Delta x h_e (t - T_e) = 0 \quad [14.96]$$

si se divide esta expresión por el diferencial de volumen de aleta ($M \cdot b \cdot \Delta x$) y se toma el límite para $\Delta x \rightarrow 0$, resulta la expresión:

$$\frac{dq}{dx} = - \frac{2}{b} h_e (t - T_e) \quad [14.97]$$

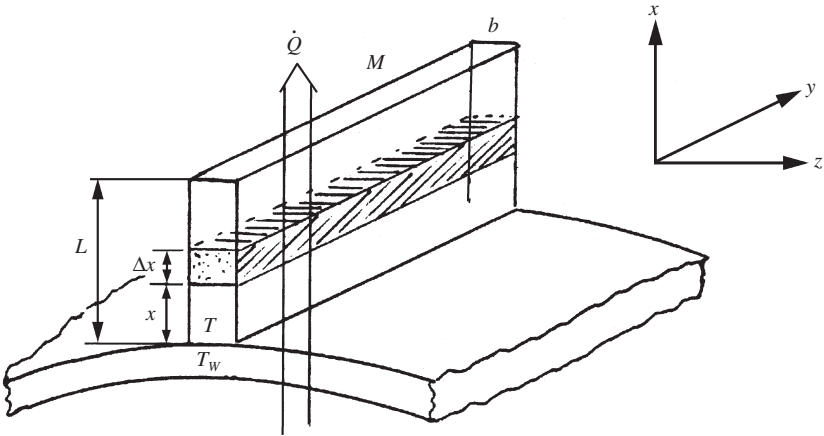


Figura 14.20. Aleta longitudinal. Características geométricas y dirección del flujo de calor.

Teniendo presente que la densidad de flujo de calor, según la ley de Fourier, es:

$$q = -k \frac{dT}{dx}$$

de la ecuación 14.97 se obtiene:

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{2 h_e}{b} (T - T_e) \quad [14.98]$$

esta ecuación en variables separables puede integrarse con las condiciones límite:

- Para $x = 0$ $T = T_w$
- Para $x = L$ $\frac{dT}{dx} = 0$

esta última condición es de máximo o mínimo, pues en el extremo de la aleta la temperatura será máxima o mínima, dependiendo de si se enfría o se calienta.

La integración de la ecuación diferencial, con estas condiciones límite conduce a la expresión:

$$\frac{T - T_e}{T_w - T_e} = \frac{\cosh \left[(L - x) \left(\frac{2 h_e}{k b} \right)^{1/2} \right]}{\cosh \left[L \left(\frac{2 h_e}{k b} \right)^{1/2} \right]} \quad [14.99]$$

14.6.2. Eficacia de una aleta

La eficacia de una aleta se define como la razón entre el calor disipado por la superficie de la aleta y el calor que se disiparía si toda su superficie estuviese a la temperatura de la base T_w :

$$\eta = \frac{\text{Calor disipado por la superficie de la aleta}}{\text{Calor que se disiparía si la superficie estuviera a } T_w}$$

En el caso presentado en el apartado anterior, para aletas longitudinales, la expresión utilizada para obtener la eficacia de la aleta será:

$$\eta = \frac{\int_0^L \int_0^M h_e (T - T_e) dy dx}{\int_0^L \int_0^M h_e (T_w - T_e) dy dx} \quad [14.100]$$

La integración de esta expresión conduce a la ecuación:

$$\eta = \frac{\tanh \left[L \sqrt{\frac{2 h_e}{k b}} \right]}{L \sqrt{\frac{2 h_e}{k b}}} \quad [14.101]$$

Esta última ecuación puede expresarse en forma gráfica (figura 14.21), representando la eficacia frente al producto adimensional $L (2 h_e/kb)^{1/2}$. Se puede observar que el valor de este producto depende de la relación h_e/k , de tal forma que cuando es pequeño, la eficacia de la aleta tiende a la unidad. En cambio, cuando los valores de h_e son elevados, la eficacia desciende a valores muy bajos, con lo que la utilización de aletas no es necesaria ni eficaz, tal como ya se había indicado anteriormente.

En la expresión que define la eficacia [ec. 14.93] aparece el incremento de temperaturas entre una determinada sección y la del exterior del fluido, de modo que: $\Delta T = T - T_e$. El valor de ΔT va variando desde la base de la aleta hasta su extremo, por lo que la verdadera solución de la integral anterior debe tener presente esta particularidad, y es lo que se ha realizado al obtener la expresión anterior de la eficacia. Sin embargo, si se utiliza un promedio de la diferencia de temperaturas entre la aleta y el fluido: $(\Delta T)_m = T_m - T_e$, siendo T_m una temperatura media de la aleta, la integración de la expresión de la eficacia será:

$$\eta = \frac{\int_0^L \int_0^M h_e (T_m - T_e) dy dx}{\int_0^L \int_0^M h_e (T_w - T_e) dy dx} = \frac{T_m - T_e}{T_w - T_e} = \frac{(\Delta T)_m}{(\Delta T)_w} \quad [14.102]$$

siendo $(\Delta T)_w = T_w - T_e$.

Esta última ecuación pone de manifiesto que la eficacia de esta aleta puede expresarse como la relación entre el incremento promedio de temperaturas de la

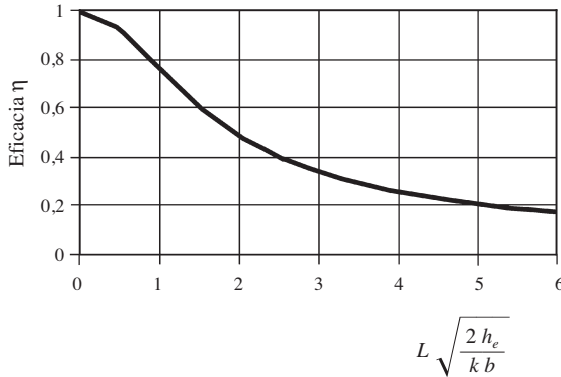


Figura 14.21. Eficacia de una aleta longitudinal.

aleta y el fluido, y la diferencia entre la temperatura correspondiente a la base de la aleta y el fluido.

El modelo matemático y su resolución, así como las expresiones del perfil de temperaturas a lo largo de las aletas y su eficacia, realizada para aletas longitudinales, puede realizarse de modo análogo para otros tipos de aletas.

14.6.3. Cálculo de intercambiadores de calor de superficie ampliada

En los intercambiadores de calor con aletas, el cálculo del coeficiente global de transmisión de calor dependerá de esta circunstancia, ya que el calor que se transmite desde la superficie metálica hacia el fluido será la suma de dos flujos, uno a través del área del tubo desnudo, y el otro a través de la superficie de la aleta. Por tanto, el coeficiente global referido al área interna se expresará como:

$$U_i = \frac{1}{\frac{A_i}{h_i (\eta A_a + A_e)} + \frac{e A_i}{k A_{ml}} + \frac{1}{h_i}} \quad [14.103]$$

en la que A_i representa la superficie interna del tubo, A_a la superficie de la aleta, A_e la del tubo desnudo y η la eficacia de la aleta.

La obtención de U_i no resulta tan fácil, pues el cálculo de h_e ofrece mayor dificultad que en los casos de intercambiadores con tubos desnudos. Ello es debido a que el flujo por el exterior de las aletas queda modificado, con lo que el coeficiente de película será distinto al de un tubo liso. Los valores de h_e para el caso de tubos con aletas deben obtenerse experimentalmente para los diferentes tipos de aletas. Generalmente, estos datos suelen proporcionarlos los fabricantes de este tipo de intercambiadores.

14.7. Intercambiadores de calor de pared rascada

Los intercambiadores de calor de pared rascada constan de dos tubos concéntricos en los que, generalmente, por el interior del tubo interno circula un fluido de viscosidad elevada. La pared interna de este tubo está rascada por un conjunto de paletas que se hallan insertadas a un eje central que gira con un cierto número de revoluciones. Este tipo de intercambiadores es utilizado en la industria alimentaria, conocidos como intercambiadores Votator.

En el diseño de este tipo de intercambiadores se supone que el calor que se transmite desde la superficie del tubo hacia el fluido viscoso o viceversa, se realiza por conducción en estado no estacionario. Se considera que dicha transmisión de calor por conducción es análoga a la que se realiza en un sólido semiinfinito. De tal forma que la ecuación que liga la temperatura T que posee un punto del fluido, y que se halla a una distancia x de la pared, con el tiempo puede expresarse como:

$$\frac{T_p - T}{T_p - T_0} = \text{fer} \left(\frac{x}{2 \sqrt{\alpha t}} \right) \quad [14.104]$$

en la que T_p es la temperatura de la pared, T_0 la inicial del punto considerado, mientras que fer es la denominada función error de Gauss, y α es la difusividad térmica del fluido.

Si existen P paletas rascadoras insertadas al eje central, el cual gira a una frecuencia N , el intervalo de tiempo que tarda una paleta en pasar por un mismo punto del fluido será $t_N = 1/(PN)$. Entre este intervalo de tiempo es precisamente cuando se realiza la transmisión de calor por conducción, en el seno del fluido viscoso.

En este intervalo de tiempo el calor total transferido desde la pared hacia el fluido será:

$$Q_T = h_i A (T_p - T_0) t_N \quad [14.105]$$

siendo h_i el coeficiente de calor individual por convección para el fluido viscoso, y A es el área de transmisión de calor.

Por otra parte, si se considera un tiempo infinitesimal, la densidad de flujo de calor se puede expresar según la ecuación de Fourier, que en la pared del tubo, para $x = 0$ será:

$$dq = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0}$$

Sabiendo que:
$$\frac{d}{dx} fer \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha t}} \exp \left(\frac{-x^2}{4 \alpha t} \right)$$

el gradiente de temperatura, para $x = 0$, puede obtenerse a partir de la ecuación 14.104:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{T_p - T_0}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

con lo que:

$$dq = k \frac{T_p - T_0}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

como:

$$dq = \frac{1}{A} \frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} = k \frac{T_p - T_0}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

Ecuación en variables separables, que puede integrarse con la condición límite:

- Para $t = t_N$ $Q = Q_T$

obteniéndose:

$$Q_T = A 2k (T_p - T_0) \sqrt{\frac{t_N}{\pi \alpha}}$$

Al comparar esta última ecuación con la 14.105, es fácil deducir que:

$$h_i = 2 \sqrt{\frac{k^2}{\pi t_N \alpha}}$$

pero $\alpha = k/(\rho \hat{C}_p)$ y $t_N = 1/(P N)$ por lo que el coeficiente individual para el fluido viscoso será:

$$h_i = 2 \sqrt{\frac{k \rho \hat{C}_p P N}{\pi}} \quad [14.106]$$

Además de esta expresión para el cálculo del coeficiente individual del lado interno, existen otras ecuaciones. Así, para intercambio de calor entre agua caliente y fría, existe una ecuación que liga el coeficiente h_i con la velocidad de giro del rotor:

$$\log N = 8,36 \cdot 10^{-5} h_i + 0,164 \quad [14.107]$$

para valores de N comprendidos entre 5 y 31,67 rps.

Otra ecuación para el cálculo de h_i es:

$$(\text{Nu}) = 4,9 (\text{Re})^{0,57} (\text{Pr})^{0,47} \left(\frac{d_i N}{v}\right)^{0,17} \left(\frac{d_i}{L}\right)^{0,37} \quad [14.108]$$

para valores de N comprendidos entre 1,5 y 7,5 rps.

14.8. Depósitos agitados con camisa y serpentines

Para el cálculo de este tipo de equipos es necesario conocer previamente el coeficiente individual del fluido contenido en el interior del depósito y del que circula por el interior del serpentín o camisa.

14.8.1. Coeficiente individual en el interior del depósito

a) *Serpentines helicoidales*

Para el caso de agitadores tipo paleta, y para valores del módulo de Reynolds comprendidos entre 300 y $4 \cdot 10^5$, se utiliza la expresión:

$$\frac{h D_T}{k} = 0,87 \left(\frac{D_P^2 N \rho}{\eta}\right)^{0,62} \left(\frac{\hat{C}_p \eta}{k}\right)^{1/3} \left(\frac{\eta}{\eta_P}\right)^{0,14} \quad [14.109]$$

Para agitadores de turbina de disco de paletas planas, y valores del módulo de Reynolds comprendidos entre 400 y $2 \cdot 10^5$, se utiliza la ecuación:

$$\frac{h d_0}{k} = 0,17 \left(\frac{D_P^2 N \rho}{\eta}\right)^{0,67} \left(\frac{\hat{C}_p \eta}{k}\right)^{0,37} \left(\frac{D_P}{D_T}\right)^{0,1} \left(\frac{d_0}{D_T}\right)^{0,5} \quad [14.110]$$

En estas expresiones se definen las siguientes variables:

D_T = Diámetro interno del depósito.

D_P = Diámetro de la paleta del agitador.

d_0 = Diámetro externo del tubo del serpentín.

N = Velocidad de giro del agitador.

b) Camisas

En el cálculo del coeficiente del fluido del interior del depósito agitado se utiliza la expresión:

$$\frac{h D_T}{k} = a \left(\frac{D_P^2 N \rho}{\eta} \right)^b \left(\frac{\hat{C}_P \eta}{k} \right)^{1/3} \left(\frac{\eta}{\eta_P} \right)^m \quad [14.111]$$

en la que los parámetros a , b y m dependen del tipo de agitador utilizado. Los valores de estos parámetros se dan en la tabla adjunta.

Agitador	a	b	m	Re
Paletas	0,36	2/3	0,21	300 a $3 \cdot 10^5$
Hélice	0,54	2/3	0,14	2.000
Ancla	1	1/2	0,18	10 a 300
Ancla	0,36	2/3	0,18	300 a $4 \cdot 10^4$
Disco turbina				
Paletas planas	0,54	2/3	0,14	40 a $3 \cdot 10^5$
Banda helicoidal	0,633	1/2	0,18	8 a 10^5

14.8.2. Coeficiente individual en el interior del serpentín

El cálculo de este coeficiente individual se realiza como en el de conducciones, y el valor obtenido se debe multiplicar por el valor del coeficiente γ , definido por la ecuación:

$$\gamma = 1 + 3,5 \frac{d_i}{D_S} \quad [14.112]$$

en la que d_i es el diámetro interno del tubo del serpentín, y D_S el diámetro del serpentín.

14.8.3. Coeficiente individual en la camisa

Generalmente, por la camisa suele circular vapor condensante, y los valores del coeficiente individual de transferencia de calor suelen poseer valores elevados, entre 8.000 y 9.000 W/(m²·°C).

El cálculo de este coeficiente también podría realizarse suponiendo que la camisa en un anillo circular, y utilizar alguna de las ecuaciones dadas en el apartado 14.2.3.

14.9. Eficacia de intercambio de calor

La eficacia de intercambio de calor se define como la relación entre el flujo de calor real y el flujo de calor máximo posible. Este último valor se obtendría en un intercambiador de calor que funcionase en contracorriente y cuya área fuese infinita.

Suponiendo que no existen pérdidas de calor hacia el exterior, para un intercambiador de área infinita, pueden presentarse dos casos:

- Que $w_C \hat{C}_P)_C < w_F \hat{C}_P)_F$, donde la temperatura de salida del fluido caliente será igual a la entrada del fluido frío.
- Que $w_F \hat{C}_P)_F < w_C \hat{C}_P)_C$, en cuyo caso la temperatura de salida del fluido frío coincide con la de entrada del fluido caliente.

Según esto, puede decirse que la eficacia relaciona el flujo de calor del fluido que se está procesando con el flujo máximo posible, existiendo como límite el que no se contradiga con el segundo principio de la Termodinámica.

La expresión que define la eficacia es:

$$\varepsilon = \frac{w_C \hat{C}_P)_C (T_e - T_s)}{(w \hat{C}_P)_{\min} (T_e - t_e)} = \frac{w_F \hat{C}_P)_F (t_s - t_e)}{(w \hat{C}_P)_{\min} (T_e - t_e)} \quad [14.113]$$

en la que $(w_C \hat{C}_P)_{\min}$ es el menor valor de $w_C \hat{C}_P)_C$ y $w_F \hat{C}_P)_F$.

Si se define la capacidad térmica por unidad de tiempo de un fluido cualquiera como el producto del caudal másico por su calor específico, es decir:

$$C = w \hat{C}_P \quad [14.114]$$

la ecuación 14.113 puede expresarse como:

$$\varepsilon = \frac{C_C (T_e - T_s)}{C_{\min} (T_e - t_e)} = \frac{C_F (t_s - t_e)}{C_{\min} (T_e - t_e)} \quad [14.115]$$

De cualquier modo, si se conoce la eficacia de un intercambiador de calor determinado es posible conocer el flujo de calor transmitido, conociendo únicamente las temperaturas de entrada de los fluidos frío y caliente:

$$\dot{Q} = \varepsilon C_{\min} (T_e - t_e) \quad [14.116]$$

ya que de la ecuación 14.113 se observa:

$$\dot{Q} = C_C (T_e - T_s) = C_F (t_s - t_e) = \varepsilon C_{\min} (T_e - t_e) \quad [14.117]$$

Puede observarse que utilizando la ecuación 14.117 es posible calcular el flujo de calor transmitido sin necesidad de conocer las temperaturas de salida de los fluidos, que son necesarias en los cálculos convencionales de intercambiadores de calor, pues para el cálculo del flujo de calor transmitido a través del área de intercambio debe calcularse previamente $(\Delta T)_{ml}$.

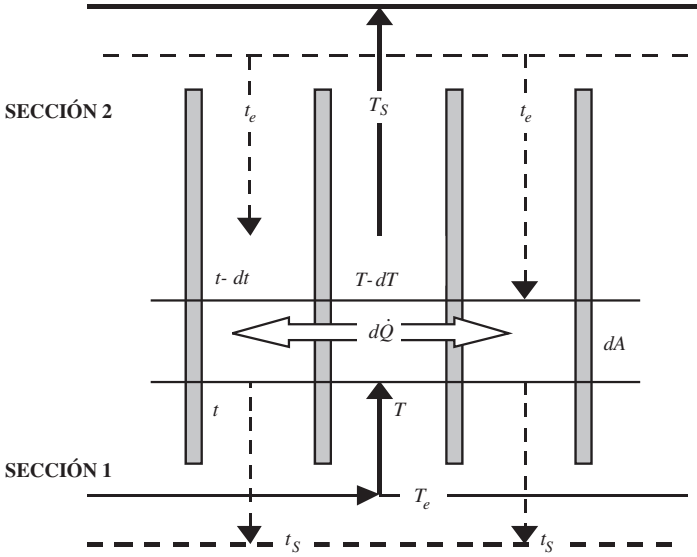


Figura 14.22. Transmisión de calor para circulación de fluidos en contracorriente.

A continuación se realiza, a modo de ejemplo, un estudio del sistema de cálculo utilizando la eficacia, para un sistema de circulación en contracorriente. Si se considera el flujo de calor transmitido en un área diferencial dA para el sistema considerado (figura 14.22); al realizar un balance energético en este diferencial de área, y teniendo presente la ecuación de velocidad de transmisión de calor:

$$d\dot{Q} = C_C dT = C_F dt = U_m dA (T - t) \quad [14.118]$$

Si el balance de energía se efectúa entre la sección 1 y una cualquiera, se obtiene:

$$C_C (T_e - T) = C_F (t_s - t)$$

con lo que:

$$T - t = T_e - \frac{C_F}{C_C} t_s + \left(\frac{C_F}{C_C} - 1 \right) t \quad [14.119]$$

que al sustituir en la ecuación 14.118, se podrá expresar:

$$\frac{U_m dA}{C_F} = \frac{dt}{T_e - \frac{C_F}{C_C} t_s + \left(\frac{C_F}{C_C} - 1 \right) t}$$

ecuación que puede integrarse para las condiciones límite:

- Para $A = 0$ $t = t_s$
- Para $A = A$ $t = t_e$

obteniéndose:

$$U_m A \left(\frac{C_F - C_C}{C_F C_C} \right) = \ln \left[\frac{T_e - t_s}{T_e - \frac{C_F}{C_C} t_s + \left(\frac{C_F}{C_C} - 1 \right) t_e} \right]$$

o lo que es lo mismo:

$$-U_m A \left(\frac{C_F - C_C}{C_F C_C} \right) = \ln \left[\frac{(T_e - t_e) - \frac{C_F}{C_C} (t_s - t_e)}{(T_e - t_e) - (t_s - t_e)} \right]$$

La ecuación 14.115 puede expresarse como:

$$\frac{t_s - t_e}{T_e - t_e} = \varepsilon \frac{C_{\min}}{C_F}$$

que sustituido en la ecuación anterior permite obtener el valor de la eficacia, según la expresión:

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp \left(-U_m A \frac{C_F - C_C}{C_F C_C} \right)}{\frac{C_{\min}}{C_C} - \frac{C_{\min}}{C_F} \exp \left(-U_m A \frac{C_F - C_C}{C_F C_C} \right)} \quad [14.120]$$

Se pueden presentar dos casos:

a) Si $C_C < C_F$, se tiene: $C_{\min} = C_C$
 $C_{\max} = C_F$

con lo que:

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp \left[-\frac{U_m A}{C_C} \left(1 - \frac{C_C}{C_F} \right) \right]}{1 - \frac{C_C}{C_F} \exp \left[-\frac{U_m A}{C_C} \left(1 - \frac{C_C}{C_F} \right) \right]} \quad [14.121]$$

b) Si $C_F < C_C$, se tiene: $C_{\min} = C_F$
 $C_{\max} = C_C$

con lo que:

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp \left[-\frac{U_m A}{C_F} \left(\frac{C_F}{C_C} - 1 \right) \right]}{\frac{C_F}{C_C} - \exp \left[-\frac{U_m A}{C_F} \left(\frac{C_F}{C_C} - 1 \right) \right]} = \frac{1 - \exp \left[-\frac{U_m A}{C_F} \left(1 - \frac{C_F}{C_C} \right) \right]}{1 - \frac{C_F}{C_C} \exp \left[-\frac{U_m A}{C_F} \left(1 - \frac{C_F}{C_C} \right) \right]} \quad [14.122]$$

Por tanto, para ambos casos, la eficacia puede expresarse según la ecuación:

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp \left[-\frac{U_m A}{C_{\min}} \left(1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \right) \right]}{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \exp \left[-\frac{U_m A}{C_{\min}} \left(1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \right) \right]} \quad [14.123]$$

ecuación que, teniendo presente la definición del número de unidades de transferencia de calor, y definiendo un parámetro β como la relación entre las capacidades térmicas por unidad de tiempo mínima y máxima:

$$NUT = \frac{U_m A}{C_{\min}} \quad [14.124]$$

$$\beta = \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \quad [14.125]$$

Por lo que la eficacia de intercambio de calor puede expresarse en función de estos parámetros, según la ecuación:

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp [-NUT (1 - \beta)]}{1 - \beta \exp [-NUT (1 - \beta)]} \quad [14.126]$$

Para el caso de operación en paralelo, el tratamiento sería análogo al realizado para fluidos circulando en contracorriente, obteniéndose que la eficacia se expresará según la ecuación:

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp [-NUT (1 + \beta)]}{1 + \beta} \quad [14.127]$$

Tanto para operación en paralelo como en contracorriente, se observa que la eficacia es función de dos parámetros adimensionales, el número de unidades de transferencia (NUT) y la razón entre las capacidades térmicas por unidad de tiempo mínima y máxima (β).

Estas expresiones de la eficacia, desarrolladas para los casos de flujo en paralelo y contracorriente, pueden obtenerse para cualquier tipo de intercambiador. Las ecuaciones finales suelen darse en forma gráfica, en las que en ordenadas se dan los valores de la eficacia ε , y en abscisas los del número de unidades de transferencia de calor NUT ; siendo β el parámetro constante de cada curva (figuras 14.23, 14.24 y 14.25). En la bibliografía (Raju y Chand, 1980) pueden encontrarse diagramas de eficacia para distintos tipos y disposiciones de intercambiadores de calor de placas.

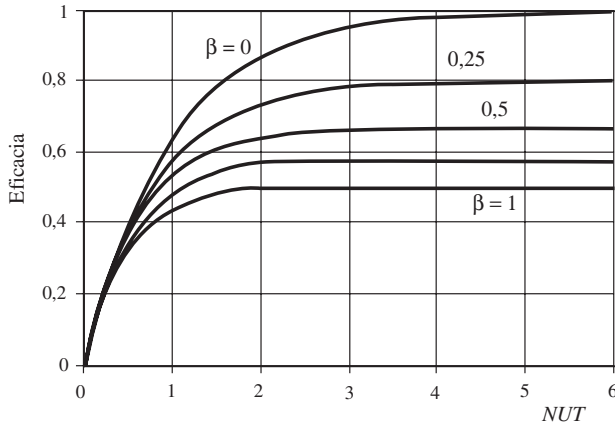


Figura 14.23. Diagrama de eficacia para flujo en paralelo.

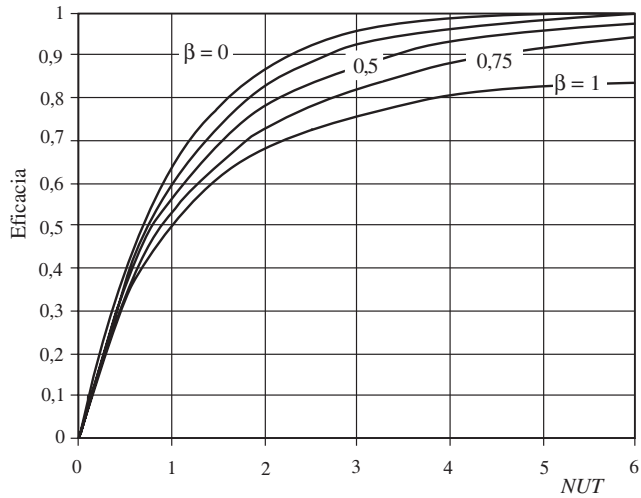
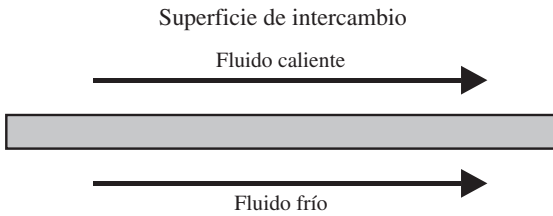
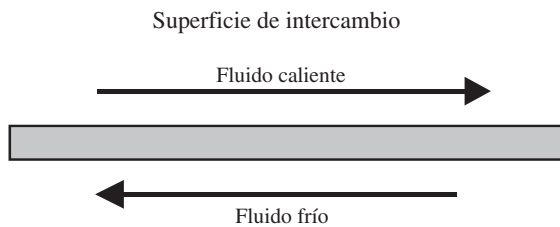


Figura 14.24. Diagrama de eficacia para flujo en contracorriente.



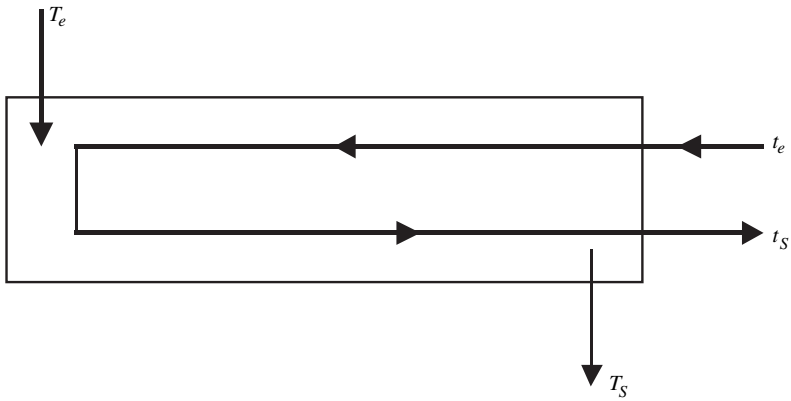
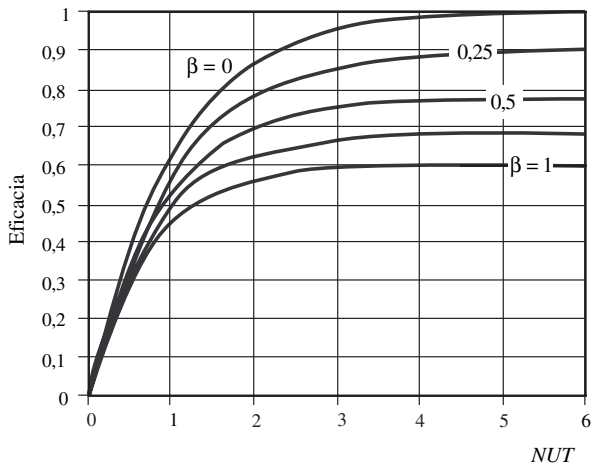


Figura 14.25. Diagrama de eficacia para intercambiador de carcasa y tubos

PROBLEMAS

Problema 14.1

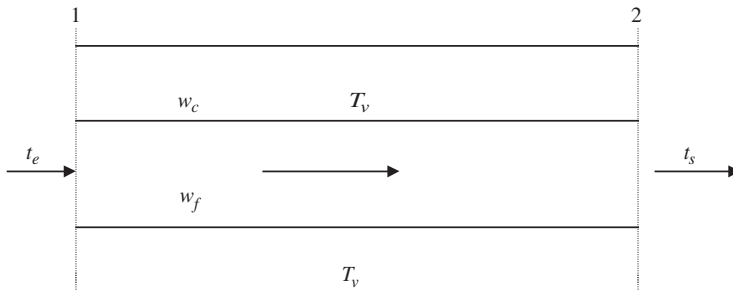
Se desean calentar 12.000 kg/h de tomate triturado desde 18 °C hasta 75 °C, utilizando un intercambiador de calor de tubos concéntricos. El tomate circula por el interior de un tubo de acero inoxidable AISI 304 de 2 pulgadas estándar, mientras que por el exterior condensa vapor de agua saturado a 105 °C. Si se pueden despreciar las resistencias que a la transmisión de calor ofrecen la película de condensado y la pared del tubo, calcular la longitud que debe tener el intercambiador para llevar a cabo el citado calentamiento.

Datos. Propiedades del tomate triturado, en el intervalo de temperaturas de operación: Calor específico 3,98 kJ/(kg·°C) Conductividad térmica 0,5 W/(m·°C) Densidad 1.033 kg/m³ La viscosidad varía con la temperatura según la expresión:

$$\eta = 1,75 \cdot 10^{-4} \exp(4.000/T) \text{ mPa}\cdot\text{s}, \text{ en la que } T \text{ es la temperatura absoluta.}$$

Dimensiones del tubo de acero de 2": Diámetro interno 5,25 cm. Diámetro externo 6,03 cm.

Supóngase que el coeficiente global de transmisión de calor varía linealmente con la temperatura.



De las tablas de vapor saturado de agua para $T_v = 105$ °C, el calor latente de condensación es $\lambda_v = 2.242$ kJ/kg.

El calor de condensación de vapor es cedido al tomate para aumentar su temperatura desde 18 °C hasta 75 °C.

$$w_c \lambda_v = w_F \hat{C}_p)_F (t_s - t_e)$$

$$w_c \left(2.242 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right) = \left(12.000 \frac{\text{kg}}{\text{h}} \right) \left(3,98 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{°C}} \right) (75 - 18) \text{ °C}$$

$$w_c = 1.214,2 \text{ kg/h}$$

Según el enunciado del problema se puede despreciar la resistencia que la capa de condensado y la pared ofrecen a la transmisión de calor, por lo que: $U = h_i$.

Como el coeficiente global de transmisión de calor varía linealmente con la temperatura: $U = a + bt$, el caudal de calor que atraviesa la sección lateral del tubo metálico será:

$$\dot{Q} = A (U \Delta T)_{mlc} = \pi d_i L (U \Delta T)_{mlc}$$

$$(U \Delta T)_{mlc} = \frac{U_2 \Delta T_1 - U_1 \Delta T_2}{\ln \left(\frac{U_2 \Delta T_1}{U_1 \Delta T_2} \right)}$$

$$U_1 = h_1 ; \quad \Delta T_1 = T_v - t_e = (105 - 18) \text{ }^\circ\text{C} = 87 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$U_2 = h_2 ; \quad \Delta T_2 = T_v - t_e = (105 - 75) \text{ }^\circ\text{C} = 30 \text{ }^\circ\text{C}$$

Para el cálculo de los coeficientes individuales de transmisión de calor, se utilizará la ecuación de Sieder-Tate:

$$h = \frac{0,027 k}{d} (\text{Re})^{0,8} (\text{Pr})^{0,33} (\eta/\eta_w)^{0,14}$$

Cálculo de la densidad de flujo de la corriente de tomate:

$$G = \frac{w_t}{\frac{\pi}{4} d_i^2} = \frac{4 (12.000 \text{ kg/h})}{\pi (5,25 \cdot 10^{-2})^2 \text{ m}^2} \cdot \left(\frac{1 \text{ h}}{3.600 \text{ s}} \right) = 1.539,8 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}$$

La temperatura en la pared metálica coincidirá con la de condensación de vapor, ya que no existe resistencia de la pared metálica y de la capa de condensado: $T_w = t_v = 105 \text{ }^\circ\text{C}$.

Para el cálculo de (Re), (Pr), h_1 y h_2 , es preciso conocer los valores de la viscosidad a las temperaturas correspondientes. Para ello se utiliza la expresión:

$$\eta = 1,75 \cdot 10^{-4} \exp (4.000/T)$$

En la tabla siguiente se hallan recogidos los valores de (Re), (Pr) y η calculados a partir de las ecuaciones anteriores:

t (°C)	T (K)	η (mPa·s)	Re	Pr	h_1 W/(m ² ·°C)	h_2 W/(m ² ·°C)
18	291	163,2	496	1.298	892 L ^{-1/3}	
75	348	17,2	4.700	136,8		1.283
105	378	6,9				

Puede observarse que a la entrada $(\text{Re})_1 = 496$, por lo que para el cálculo de h_1 se debe utilizar una expresión para flujo laminar:

$$(\text{Nu}) = 1,86 [(\text{Re}) (\text{Pr}) (d/L)]^{1/3} (\eta/\eta_w)^{0,14}$$

Luego:
$$h_1 = \frac{1,86 k}{d_i} [(\text{Re}) (\text{Pr}) (d_i)]^{1/3} (\eta/\eta_w)^{0,14} L^{-1/3}$$

Para el cálculo de h_1 es preciso conocer la longitud del intercambiador, lo que hace que el problema deba resolverse por iteración o tanteo.

Al sustituir los valores de las variables, se obtiene: $h_1 = 892 L^{-1/3} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$.

Para el cálculo de h_2 se utiliza la ecuación de Sieder-Tate.

La longitud del intercambiador se calcula mediante la expresión:

$$L = \frac{\dot{Q}}{\pi d_i (U \Delta T)_{mlc}}$$

Siendo: $\dot{Q} = w_c \lambda_v = 756,18 \text{ kW}$ y $d_i = 5,25 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

Sustituyendo en la expresión de la longitud del intercambiador:

$$L = \frac{160,62 \ln(3,91 L^{1/3})}{3,91 - L^{-1/3}}$$

El cálculo de L se realiza por tanteo, se supone una longitud y se sustituye en el segundo miembro, obteniendo la longitud, que debe coincidir con la supuesta. La longitud del intercambiador será: $L = 129 \text{ m}$.

Problema 14.2

Una conducción de agua formada por una tubería de acero de 2'' atraviesa en 30 m de recorrido una habitación que se mantiene a -18°C . La temperatura del agua en el extremo de entrada es 15°C , y la tubería está recubierta con un aislante de fibra de vidrio de 6 cm de espesor. Calcular:

- a) El caudal mínimo de agua para evitar que ésta congele.
- b) El tiempo que tardaría en congelarse el agua en el interior de la conducción en caso que se detuviera la circulación del agua, suponiendo que el coeficiente global de transmisión de calor permanece constante.

Datos. Coeficiente de convección tubo-aire $12 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$. Conductividad térmica de fibra de vidrio $0,07 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$. Calor latente de fusión de hielo a 1 atmósfera $335 \text{ kJ}/\text{kg}$. Conductividad térmica del agua $0,60 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$.

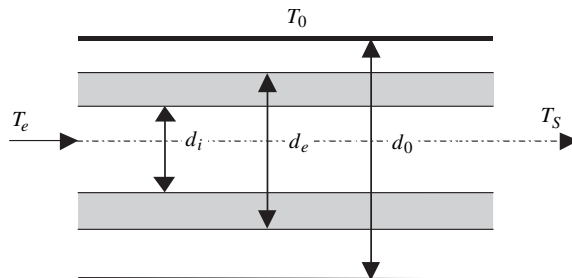
Tubería de acero: Conductividad térmica $45 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$.

Diámetro interno 52,5 mm. Diámetro externo 60,3 mm.

$d_i = 0,0525 \text{ m}$

$d_e = 0,0603 \text{ m}$

$d_0 = 0,1803 \text{ m}$



Espesor aislante: $e_a = 6 \text{ cm} = 0,06 \text{ m}$.

Espesor conducción: $e_p = \frac{(d_e - d_i)}{2} = 3,9 \text{ mm} = 0,0039 \text{ m}$.

a) Para que no llegue a congelarse el agua a la salida de la conducción debe poseer una temperatura superior a 0°C . El caudal de calor que cederá el agua es:

$$\dot{Q} = w \hat{C}_P (T_e - T_S)$$

en la que w es el caudal máximo con que circula el agua, $T_e = 15^\circ\text{C}$ y $T_S \geq 0^\circ\text{C}$.

Este calor se pierde a través del área lateral, según la expresión:

$$\dot{Q} = U_i A_i (\Delta T)_{ml}$$

en la que U_i es el coeficiente global de transmisión de calor referido al área interna, A_i el área interna de transmisión de calor, y $(\Delta T)_{ml}$ la diferencia de temperaturas media logarítmica:

$$(\Delta T)_{ml} = \frac{(T_e - T_0) - (T_S - T_0)}{\ln\left(\frac{T_e - T_0}{T_S - T_0}\right)} = \frac{(15 + 18) - (0 + 18)}{\ln\left(\frac{15 + 18}{0 + 18}\right)} = 24,8^\circ\text{C}$$

$$A_i = \pi d_i L = \pi (0,0525 \text{ m}) (30 \text{ m}) = 4,948 \text{ m}^2$$

$$A_e = \pi d_e L = \pi (0,0603 \text{ m}) (30 \text{ m}) = 5,683 \text{ m}^2$$

$$A_0 = \pi d_0 L = \pi (0,1803 \text{ m}) (30 \text{ m}) = 16,993 \text{ m}^2$$

$$A_{ml1} = \frac{A_e - A_i}{\ln \frac{A_e}{A_i}} = 5,307 \text{ m}^2 \quad ; \quad A_{ml2} = \frac{A_0 - A_e}{\ln \frac{A_0}{A_e}} = 10,326 \text{ m}^2$$

Cálculo de U_i

$$\frac{1}{U_i} = \frac{1}{h_i} + \frac{e_p}{k_p \frac{A_{ml1}}{A_i}} + \frac{e_a}{k_a \frac{A_{ml2}}{A_i}} + \frac{1}{h_0 \frac{A_0}{A_i}}$$

$$\frac{1}{U_i} = \frac{1}{h_i} + \frac{0,0039 \text{ m}}{\left(45 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot^\circ\text{C}}\right) \left(\frac{5,307 \text{ m}^2}{4,948 \text{ m}^2}\right)} + \frac{0,06 \text{ m}}{\left(0,07 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot^\circ\text{C}}\right) \left(\frac{10,326 \text{ m}^2}{4,948 \text{ m}^2}\right)} + \frac{1}{\left(12 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot^\circ\text{C}}\right) \left(\frac{16,993 \text{ m}^2}{4,948 \text{ m}^2}\right)}$$

$$\frac{1}{U_i} = \frac{1}{h_i} + 0,435 \quad U_i = \frac{h_i}{1 + 0,43 h_i} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot^\circ\text{C}}$$

Es preciso calcular el valor del coeficiente de convección para el interior de la conducción. Utilizando la ecuación de Dittus-Boelter para fluidos que se enfrían:

$$h_i = 0,023 \frac{k}{d_i} (\text{Re})^{0,8} (\text{Pr})^{0,3}$$

$$(\text{Re}) = \frac{\rho v d_i}{\eta} = \frac{w 4}{\pi d_i \eta} = 4 \frac{\left(w \frac{\text{kg}}{\text{h}}\right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3.600 \text{ s}}\right)}{\pi (0,0525 \text{ m}) (10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s})} = 6,74 w$$

$$(\text{Pr}) = \frac{\hat{C}_p \eta}{k} = \frac{\left(4,185 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{°C}}\right) (10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s})}{\left(0,6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kJ}}{\text{s}\cdot\text{m}\cdot\text{°C}}\right)} \approx 7$$

$$h_i = 0,023 \frac{0,6 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{°C})}{0,0525 \text{ m}} (6,74 w)^{0,8} (7)^{0,3} = 2,17 w^{0,8}$$

$$h_i = 2,17 w^{0,8} \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{°C})$$

Del balance energético:

$$\begin{aligned} w \hat{C}_p (T_e - T_s) &= U_i A_i (\Delta T)_{ml} \\ \left(w \frac{\text{kg}}{\text{h}}\right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3.600 \text{ s}}\right) \left(4,185 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{°C}}\right) (15 - 0) \text{ °C} &= \\ = \left(\frac{h_i}{1 + 0,435 h_i} \frac{10^{-3} \text{ kJ}}{\text{s}\cdot\text{m}^2\cdot\text{°C}}\right) (4,948 \text{ m}^2) (24,8 \text{ °C}) \end{aligned}$$

con lo que:

$$w = \frac{7,04 h_i}{1 + 0,435 h_i} \frac{\text{kg}}{\text{h}}$$

al sustituir la expresión de h_i en función del caudal w , se obtiene:

$$w = \frac{15,27 w^{0,8}}{1 + 0,94 w^{0,8}}$$

ecuación que se resuelve por tanteo, obteniéndose: $w = 14,43 \text{ kg/h}$

Para este caudal: $(\text{Re}) = (6,74) (14,43) = 97$

Al obtener que el régimen es laminar, no puede utilizarse la ecuación de Dittus-Boelter para calcular h_i , sino que debe ensayarse otra expresión, para régimen laminar:

$$h_i = 1,86 \frac{k}{d_i} \left(\text{Re Pr} \frac{d_i}{L} \right)^{1/3}$$

$$h_i = 1,86 \frac{0,6 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})}{0,0525 \text{ m}} \left[(6,74 \text{ w}) (7) \left(\frac{0,0525 \text{ m}}{30 \text{ m}} \right) \right]^{1/3}$$

$$h_i \approx 9,26 \text{ w}^{1/3} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$$

Al sustituir esta expresión en el balance energético se obtiene:

$$w = \frac{65,19 \text{ w}^{1/3}}{1 + 4,03 \text{ w}^{1/3}}$$

que, resolviendo por tanteo, se obtiene: $w = 14,69 \text{ kg/h}$

Es decir, si el agua circula con un caudal inferior a $14,69 \text{ kg/h}$, puede llegar a congelarse en el interior de la conducción.

Para $w = 14,69 \text{ kg/h}$, se obtiene:

$$h_i \approx 22,7 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$$

$$U_i \approx 2,1 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$$

b) En el caso que se detuviera la circulación del agua en el interior de la tubería existiría una masa de agua:

$$m = \rho V = \rho \frac{\pi}{4} d_i^2 L = \frac{\pi}{4} \left(10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) (0,0525 \text{ m})^2 (30 \text{ m})$$

$$m = 64,94 \text{ kg}$$

El tiempo que esta masa de agua tarda en bajar a 0°C se obtiene a partir de un balance energético en estado no estacionario. El término de salida de calor es igual al de acumulación:

$$U_i A_i (T_i - T_0) = -m \hat{C}_p \frac{dT_i}{dt}$$

ecuación en variables separables, que integrada con las condiciones límite:

$$\begin{array}{lll} \text{Para} & t = 0 & T_i = T_{i0} \\ & t = t & T_i = T_C = 0^\circ\text{C} \end{array}$$

se obtiene:

$$t = \frac{m \hat{C}_p}{U_i A_i} \ln \left(\frac{T_{i0} - T_0}{T_C - T_0} \right)$$

Si al inicio se supone que $T_{i0} = (T_e + T_s)/2 = 7,5\text{ }^\circ\text{C}$

Luego:

$$t = \frac{(64,94\text{ kg}) [4,185\text{ kJ}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})]}{2,1 \cdot 10^{-3}\text{ kJ}/(\text{s}\cdot\text{m}^2\cdot^\circ\text{C}) (4,948\text{ m}^2)} \ln\left(\frac{7,5 + 18}{0 + 18}\right) = 9.110\text{ s} = 2,53\text{ horas}$$

Para congelar esta agua, el caudal de calor a eliminar es:

$$\dot{Q}_C = \frac{\lambda m}{t_C} = U_i A_i (T_C - T_0)$$

$$t_C = \frac{\lambda m}{U_i A_i (T_C - T_0)} = \frac{(335\text{ kJ}/\text{kg}) (64,94\text{ kg})}{[2,1 \cdot 10^{-3}\text{ kJ}/(\text{s}\cdot\text{m}^2\cdot^\circ\text{C})] (4,948\text{ m}^2) (0 + 18)\text{ }^\circ\text{C}} = 116.315\text{ s}$$

El tiempo que tardará en congelar será: $t_C = 32,31\text{ horas}$.

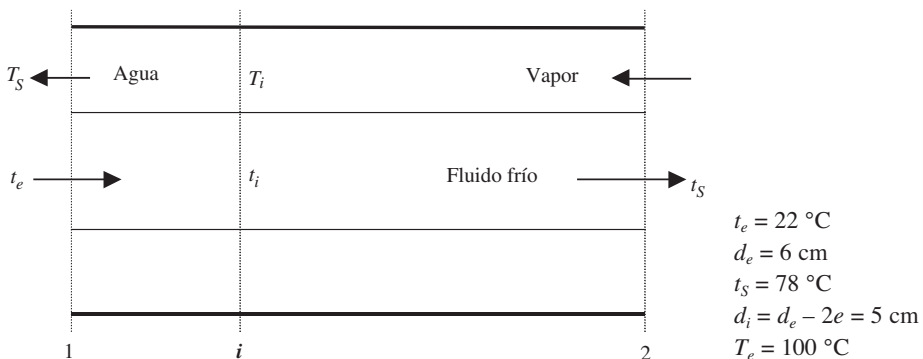
Problema 14.3

Un intercambiador de calor aislado térmicamente al exterior, está construido con dos tubos concéntricos de acero, siendo el diámetro externo del tubo interno 6 cm y con un espesor de pared de 5 mm; mientras que el diámetro interno del tubo exterior es 10 cm. Por el tubo interno circula un fluido con un caudal de 1.000 kg/h, que se calienta desde 22 °C hasta 78 °C, haciendo circular en contracorriente 100 kg/h de vapor de agua a 1 atmósfera. Determinar:

- Temperatura de salida del fluido calefactor.
- Coefficiente individual de transmisión de calor por convección para el fluido que se procesa.
- Área de la superficie de transmisión de calor.
- Longitud del intercambiador.

Datos. Puede despreciarse la resistencia que a la transmisión de calor ofrece el tubo de acero.

Propiedades del fluido: Calor específico 4,185 kJ/(kg·°C). Viscosidad 1,2 mPa·s. Densidad 1.000 kg/m³. Conductividad térmica 0,56 W/(m·°C).



Calor latente de condensación del vapor de agua 2.256 kJ/kg

En las condiciones de trabajo del intercambiador puede tomarse que para la condensación del vapor de agua el coeficiente individual de transmisión de calor por convección es 870 W/(m²·°C); mientras que para agua líquida a temperatura superior a 75 °C este coeficiente puede tomarse igual a 580 W/(m²·°C).

a) Calor de condensación del vapor:

$$\dot{Q}_C = w_C \lambda = \left(100 \frac{\text{kg}}{\text{h}}\right) \left(2.256 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}\right)$$

$$\dot{Q}_C = 225.600 \text{ kJ/h}$$

Calor ganado por el fluido frío:

$$\dot{Q}_F = w_F \hat{C}_P)_F (t_s - t_e) = (1.000) (4,185) (78 - 22)$$

$$\dot{Q}_F = 234.360 \text{ kJ/h}$$

Como $\dot{Q}_C \leq \dot{Q}_F$ el vapor condensa en un punto intermedio y a partir de aquí pierde temperatura abandonando el intercambiador a una temperatura inferior a 100 °C.

En el punto que empieza a condensar el vapor se cumple:

$$w_C \lambda = w_F \hat{C}_P)_F (t_s - t_i)$$

$$(100) (2.256) = (1.000) (4,185) (78 - t_i) \Rightarrow t_i = 24,1 \text{ °C}$$

Cuando el fluido ha condensado $T_i = 100 \text{ °C}$, y el agua cede calor hasta una temperatura T_s , cumpliéndose:

$$w_C \hat{C}_P)_C (T_i - T_s) = w_F \hat{C}_P)_F (t_i - t_e)$$

$$(100) (4,185) (100 - T_s) = (1.000) (4,185) (24,1 - 22) \Rightarrow T_s = 79 \text{ °C}$$

b) Cálculo de h_i

$$G = \frac{w}{S} = \frac{1.000 \text{ kg/h}}{\frac{\pi}{4} \cdot (0,05)^2 \text{ m}^2} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3.600 \text{ s}} \approx 141,5 \text{ kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$$

$$(\text{Re}) = \frac{\rho v d}{\eta} = \frac{G d_i}{\eta} = \frac{(141,5 \text{ kg}/\text{m}^2 \cdot \text{s}) (0,05 \text{ m})}{1,2 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}} \approx 5,9 \cdot 10^3$$

$$(\text{Pr}) = \frac{\hat{C}_P \eta}{k} = \frac{(4,185 \text{ kJ}/\text{kg} \cdot \text{°C}) (1,2 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s})}{(0,56 \cdot 10^{-3} \text{ kJ}/\text{s} \cdot \text{m} \cdot \text{°C})} = 9$$

Aplicando la ecuación de Dittus-Boelter:

$$(\text{Nu}) = \frac{h \cdot d}{k} = 0,023 (\text{Re})^{0,8} (\text{Pr})^{0,4}$$

$$\frac{h (0,05 \text{ m})}{0,56 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})} = 0,023 (5,9 \cdot 10^3)^{0,8} (9)^{0,4} \Rightarrow h_i \approx 645 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$$

$$h_{ie} = h_i \cdot \frac{d_i}{d_e} = 645 \left(\frac{5}{6} \right) = 537 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$$

c) Para el cálculo del área se divide el intercambiador en dos zonas: condensación y enfriamiento.

• Zona condensación del vapor:

$$\frac{1}{U_e} = \frac{1}{h_e} + \frac{e}{k (d_{ml}/d_e)} + \frac{1}{h_i (d_i/d_e)} = \frac{1}{h_e} + \frac{1}{h_{ie}} = \frac{h_{ie} + h_e}{h_e h_{ie}}$$

$$U_e = \frac{h_{ie} \cdot h_e}{h_{ie} + h_e} \quad U_e = \frac{(537,5) \cdot (870)}{537,5 + 870} \approx 332 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$$

$$\dot{Q}_C = w_c \lambda = (100) (2.256) = 225.600 \text{ kJ/h}$$

$$\dot{Q}_C = U_e A'_i (\Delta T)_{ml} = 22.600 \text{ kJ/h}$$

$$\Delta T_{ml} = \frac{(T_i - t_i) - (T_e - t_s)}{\ln \left(\frac{T_i - t_i}{T_e - t_s} \right)} = \frac{(100 - 24,1) - (100 - 78)}{\ln \left(\frac{100 - 24,1}{100 - 78} \right)} = 43,5 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$A'_e = \frac{(225.600 \text{ kJ/h}) (1 \text{ h}/3.600 \text{ s})}{(332 \cdot 10^{-3} \text{ kJ/s} \cdot \text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}) (43,5 \text{ } ^\circ\text{C})} \approx 4,34 \text{ m}^2$$

• Zona de enfriamiento del agua condensada:

$$\dot{Q}_e = w_c \hat{C}_{pi} (T_i - T_s) = (100) (4,185) (100 - 79) = 8.789 \text{ kJ/h}$$

$$U_e = \frac{(537,5) (580)}{(537,5) + (580)} = 279 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$$

$$\Delta T_{ml} = \frac{(T_i - t_i) - (T_s - t_e)}{\ln \left(\frac{T_i - t_i}{T_s - t_e} \right)} = \frac{(100 - 24,1) - (79 - 22)}{\ln \left(\frac{100 - 24,1}{79 - 22} \right)} = 66 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$A_e'' = \frac{(8.789 \text{ kJ/h}) (1 \text{ h}/3.600 \text{ s})}{(279 \cdot 10^{-3} \text{ kJ/s}\cdot\text{m}^2\cdot^\circ\text{C}) (66^\circ\text{C})} \approx 0,13\text{m}^2$$

Área total: $A_T = A_e' + A_e'' = 4,47 \text{ m}^2$

d) La longitud del intercambiador también se puede dividir en dos partes:

$$A_e = \pi d_e L$$

$$L' = \frac{A_e'}{\pi d_e} = \frac{(4,34)}{\pi (0,06)} = 23,03 \text{ m}$$

$$L'' = \frac{A_e''}{\pi d_e} = \frac{(0,13)}{\pi (0,06)} = 0,70 \text{ m} = 70 \text{ cm}$$

La longitud total del intercambiador es: $L_T = L' + L'' \approx 23,73 \text{ m}$

Problema 14.4

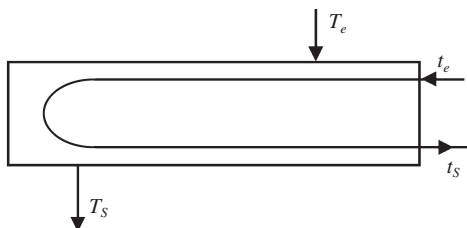
En una instalación industrial de secado de embutidos se desea disponer de una corriente de 4 kg/s de agua a 90 °C, que se utilizará para acondicionar el aire de secado. Para que el agua alcance los 90 °C se dispone de un intercambiador de calor con dos pasos de tubos (50 tubos por paso) por uno de carcasa, utilizando aceite como fluido calefactor, que circula a 3,5 kg/s por el exterior de los tubos, siendo 250 °C su temperatura a la entrada del intercambiador.

Si la temperatura de entrada del agua es 18 °C y los tubos por los que circula son de acero de 3 cm de diámetro externo y 2,85 cm de interno, dispuestos al tresbolillo; determínese:

- El coeficiente de transmisión de calor para el interior de los tubos.
- El área de la superficie de transmisión de calor.
- La longitud de los tubos.

Datos y notas: puede despreciarse la resistencia que al flujo de calor ofrece la pared de los tubos. Coeficiente de transmisión de calor para el lado del aceite 580 W/(m²·°C).

- Propiedades del agua: densidad 1.000 kg/m³. Calor específico 4,185 kJ/(kg·°C). Conductividad térmica 0,65 W/(m·°C). Viscosidad 1 mPa·s.
- Propiedades del aceite: densidad 850 kg/m³. Calor específico 2,1 kJ/(kg·°C). Viscosidad 30 mPa·s. Conductividad térmica 0,14 W/(m·°C).



$$w_f = 4 \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 14.400 \text{ kg/h}$$

$$w_C = 3,5 \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 12.600 \text{ kg/h}$$

$$\dot{Q} = w \hat{C}_p (\Delta t) = U_e A_e \Delta t_{ml} F$$

$$\dot{Q} = \left(14.400 \frac{\text{kg}}{\text{h}}\right) \left(\frac{4,185 \text{ kJ}}{\text{kg}\cdot^\circ\text{C}}\right) (90 - 18) ^\circ\text{C} = \left(12.600 \frac{\text{kg}}{\text{h}}\right) \left(\frac{2,1 \text{ kJ}}{\text{kg}\cdot^\circ\text{C}}\right) (250 - T_S) ^\circ\text{C}$$

De la que se obtiene: $T_S = 85,4 ^\circ\text{C}$

$$\left. \begin{aligned} Z &= \frac{T_e - T_S}{t_S - t_e} = \frac{250 - 85,4}{90 - 18} \approx 2,3 \\ \epsilon &= \frac{t_S - t_e}{T_e - t_e} = \frac{90 - 18}{250 - 18} \approx 0,31 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{Gráfica}} F \approx 0,83$$

$$d_{\text{interno}} = 2,85 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Sección de paso por tubo: $S = \frac{\pi}{4} d_i^2 = 6,38 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$

$$G = \frac{w}{S_T} = \frac{4 \text{ kg/s}}{50 (6,38 \cdot 10^{-4}) \text{ m}^2} \approx 125,4 \frac{\text{kg}}{\text{s}\cdot\text{m}^2}$$

$$(\text{Re}) = \frac{G d_i}{\eta} = \frac{(125,4) (2,85 \cdot 10^{-2})}{10^{-3}} = 3.574 \Rightarrow \text{Flujo turbulento}$$

$$(\text{Nu}) = \frac{h d_i}{k} = 0,027 (\text{Re})^{0,8} (\text{Pr})^{1/3} (\eta/\eta_w)^{0,14}$$

Se toma: $(\eta/\eta_w) = 1$;

$$(\text{Pr}) = \frac{\hat{C}_p \eta}{k} = \frac{(4,185 \text{ kJ/kg}\cdot^\circ\text{C}) (10^{-3} \text{ kg/m}\cdot\text{s})}{(0,65 \cdot 10^{-3} \text{ kJ/s}\cdot\text{m}\cdot^\circ\text{C})} = 6,44$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\frac{h (2,85 \cdot 10^{-2} \text{ m})}{0,65 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot^\circ\text{C}}} = 0,027 (3,57 \cdot 10^3)^{0,8} (6,44)^{1/3} \Rightarrow h_f = 796,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot^\circ\text{C}}$$

$$h_{t0} = \frac{h_t d_i}{d_e} = 756,7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \quad \frac{1}{U_e} = \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_{t0}}$$

$$\frac{1}{U_e} = \frac{1}{580} + \frac{1}{756,7} \Rightarrow U_e = 328,3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

El caudal de calor transmitido a través del área de intercambio es:

$$\dot{Q} = U_e A_e (\Delta T)_{ml} F$$

La temperatura media logarítmica será:

$$(\Delta T)_{ml} = \frac{(T_e - t_s) - (T_s - t_e)}{\ln\left(\frac{T_e - t_s}{T_s - t_e}\right)} = \frac{(250 - 90) - (85,4 - 18)}{\ln\left(\frac{250 - 90}{85,4 - 18}\right)} \approx 107 \text{ } ^\circ\text{C}$$

El caudal de calor intercambiado por uno de los fluidos es:

$$\dot{Q} = \left(14.400 \frac{\text{kg}}{\text{h}}\right) \left(4.185 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}\right) (90 - 18) \text{ } ^\circ\text{C} = 4.339.008 \text{ kJ/h}$$

al igualar con el calor transmitido a través del área de intercambio:

$$\left(4.339.008 \frac{\text{kJ}}{\text{h}}\right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3.600 \text{ s}}\right) = \left(328,3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}\right) A_e (107 \text{ } ^\circ\text{C}) (0,83)$$

de la que se obtiene: $A_e \approx 41,34 \text{ m}^2$

Área lateral de un tubo: $\pi d_e L$

$$A_e = (2) \cdot (50) \cdot (A_{\text{tubo}}) = (2) \cdot (50) \cdot (\pi d_e L) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ pasos} \\ 50 \text{ tubos/paso} \end{array} \right.$$

$$41,34 \text{ m}^2 = 2 (50) \pi (0,03 \text{ m}) L$$

de donde se obtiene la longitud de los tubos: $L = 4,39 \text{ m}$.

Si se hubiera aplicado la ecuación de Dittus-Boelter [ec. 14.14] en el cálculo del coeficiente individual h_t se hubiera obtenido:

$$h_t = 748,6 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}) \Rightarrow h_{t0} \approx 711,1 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$$

en la que el coeficiente global sería $U_e = 319,5 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$.

De la que se obtendría un área y longitud de tubos: $A_e = 42,48 \text{ m}^2 \Rightarrow L \approx 4,51 \text{ m}$.

Problema 14.5

Los tartratos presentes en el vino blanco deben eliminarse para evitar problemas de precipitación posterior en la botella. Para ello, previo al embotellado, el vino se enfría hasta 4 °C, lo que provoca la precipitación de los tartratos que se se-

para el vino. En una bodega se desean enfriar 1.000 kg/h de vino blanco desde 16 °C hasta 4 °C, utilizando un intercambiador de calor de carcasa y tubos 1/2, con 18 tubos totales en disposición cuadrada, con un espaciado entre centros igual a 1,5 veces el diámetro de los tubos. La carcasa posee un diámetro de 20 cm, y está equipada con placas deflectoras con un corte del 15%, espaciadas a intervalos de 25 cm. Como fluido refrigerante se utiliza una corriente de 1.200 kg/h de agua glicolada a -6 °C, que se hace circular por el exterior de los tubos. Debido a la posible deposición de tartratos se debe considerar un factor de ensuciamiento de 0,00043 (m²·°C)/W. Calcular:

- Coefficiente global de transmisión de calor.
- Área total de transmisión de calor.
- Longitud de los tubos.

Datos. Características de los tubos: Diámetro interno 10 mm, espesor 1,5 mm. Conductividad térmica 40 W/(m·°C).

Considerar que las propiedades de ambos fluidos son análogas e iguales a las del agua.

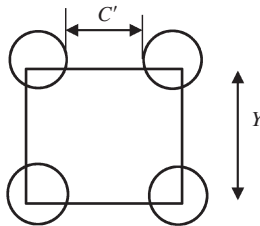
$$d_i = 0,01 \text{ m}$$

$$d_e = 0,013 \text{ m}$$

$$X = Y = 1,5 d_e = 0,0195 \text{ m}$$

$$C' = Y - d_e = 0,0065 \text{ m}$$

Disposición cuadrada:



$$\text{Balance energético: } w_c \hat{C}_p)_c (T_e - T_s) = w_f \hat{C}_p)_f (t_s - t_e)$$

$$(1.000 \text{ kg/h}) (4,185 \text{ kJ/kg}\cdot\text{°C}) (16 - 4) \text{ °C} = (1.200 \text{ kg/h}) (4,185 \text{ kJ/kg}\cdot\text{°C}) [t_s - (-6)] \text{ °C}$$

obteniéndose: $t_s = 4 \text{ °C}$.

Coefficiente por el lado de los tubos:

$$(\text{Nu}) = \frac{h_i d_i}{k} = 0,027 (\text{Re})^{0,8} (\text{Pr})^{1/3}$$

$$G_t = \frac{4 w n}{N_t \pi d_i^2} = \frac{4 (1.000 \text{ kg/h}) 2}{18 \pi (0,01)^2 \cdot \text{m}^2} \frac{1 \text{ h}}{3.600 \text{ s}} \approx 393 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}$$

$$(\text{Re}) = \frac{G_t d_i}{\eta} = \frac{\left(393 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}\right) (0,01 \text{ m})}{10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}} = 3.930$$

$$(\text{Pr}) = \frac{\hat{C}_p \eta}{k} = \frac{\left(4,185 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}\right) (10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s})}{\left(0,58 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kJ}}{\text{s} \cdot \text{m} \cdot ^\circ\text{C}}\right)} = 7,2$$

con lo que: $\frac{h_i (0,01 \text{ m})}{0,58 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}} = 0,027 (3.930)^{0,8} (7,2)^{1/3}$

de la que se obtiene: $h_i = 2.270 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$

Coefficiente para la carcasa

$$D_e = \frac{4 \left[Y^2 - \frac{\pi}{4} d_e^2 \right]}{\pi d_e} = \frac{4 \left[0,0195^2 - \frac{\pi}{4} 0,013^2 \right]}{\pi 0,013} = 0,0242 \text{ m}$$

$$G_C = \frac{w n Y}{D_C B C'} = \frac{(1.200 \text{ kg/h}) (1) (0,0195 \text{ m})}{(0,20 \text{ m}) (0,25 \text{ m}) (0,0065 \text{ m})} \frac{1 \text{ h}}{3.600 \text{ s}} \approx 20 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}$$

$$(\text{Re}) = \frac{G_C D_e}{\eta} = \frac{(20 \text{ kg/m}^2 \cdot \text{s}) (0,0242 \text{ m})}{10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}} = 484$$

$$(\text{Pr}) = 7,2$$

$$\frac{h_e D_e}{k} = 0,36 (\text{Re})^{0,55} (\text{Pr})^{1/3}$$

$$\frac{h_e (0,0242 \text{ m})}{0,58 \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}} = 0,36 (484)^{0,55} (7,2)^{1/3}$$

de la que se obtiene: $h_e = 499,3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$

Coefficiente global de transmisión de calor

$$\frac{1}{U_e} = \frac{1}{499,3} + \frac{1,5 \cdot 10^{-3}}{(40) \left(\frac{0,01134}{0,013} \right)} + \frac{1}{(2.270) \left(\frac{0,01}{0,013} \right)} + 0,00043$$

$$d_{ml} = \frac{d_e - d_i}{\ln(d_e/d_i)} = \frac{(0,013 - 0,01) \text{ m}}{\ln(0,013/0,01)} = 0,01134 \text{ m}$$

obteniéndose: $U_e = 328 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$

Transmisión de calor a través del área de intercambio:

$$\dot{Q} = U_e A_e \Delta T_{ml} F$$

$$\Delta T_{ml} = \frac{(T_e - t_s) - (T_s - t_e)}{\ln \left(\frac{T_e - t_s}{T_s - t_e} \right)} = \frac{(16 - 4) - [4 - (-6)] \text{ } ^\circ\text{C}}{\ln \frac{12}{10}} \approx 11 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Cálculo de F

$$Z = \frac{T_e - T_s}{t_s - t_e} = \frac{16 - 4}{4 - (-6)} = \frac{12}{10} = 1,2$$

$$\varepsilon = \frac{t_s - t_e}{T_e - t_e} = \frac{4 - (-6)}{16 - (-6)} = \frac{10}{22} \approx 0,455$$

Para el intercambiador de carcasa y tubos del tipo 1/2 se obtiene: $F \approx 0,81$.

Área de transmisión de calor:

$$A_e = \frac{\dot{Q}}{U_e \Delta T_{ml} F} = \frac{w_C \hat{C}_p (T_e - T_s)}{U_e \Delta T_{ml} F}$$

$$A_e = \frac{(1.000 \text{ kg/h}) \left(\frac{1 \text{ h}}{3.600 \text{ s}} \right) \left(4,185 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \right) (16 - 4) \text{ } ^\circ\text{C}}{(328 \cdot 10^{-3} \text{ kJ/s} \cdot \text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}) (11 \text{ } ^\circ\text{C}) (0,81)} = 4,773 \text{ m}^2$$

Área externa de intercambio: $A_e = 4,773 \text{ m}^2$

Longitud de los tubos: $A_e = N_T \pi d_e L$

$$L = \frac{A_e}{N_T \pi d_e} = \frac{4,773 \text{ m}^2}{18 \pi (0,013 \text{ m})} = 6,49 \text{ m}$$

Problema 14.6

En un proceso de secado se necesita una corriente de aire caliente a $95\text{ }^{\circ}\text{C}$. Para ello, 3.500 kg/h de aire a $15\text{ }^{\circ}\text{C}$ se hacen circular por el interior de los tubos de un intercambiador tubular cuya carcasa posee un diámetro de $0,5\text{ m}$, mientras que por el exterior circulan gases de combustión que entran a $400\text{ }^{\circ}\text{C}$ y lo abandonan a $100\text{ }^{\circ}\text{C}$. El intercambiador consta de 1 paso de carcasa y 2 pasos de tubos, siendo el número total de tubos 400, que se hallan dispuestos en red cuadrada con un espaciado entre centros igual a dos veces el diámetro de los tubos, y equipados con placas deflectoras con un corte del 25%, espaciadas a intervalos de 25 cm . Si se desprecia el calor transmitido por radiación, calcular: a) Caudal de gases de combustión. b) Coeficiente individual de transmisión de calor para ambos fluidos. c) Área total de transmisión de calor. d) Longitud que deben tener los tubos.

Datos. Características de los tubos: Conductividad térmica $44\text{ W/(m}\cdot^{\circ}\text{C)}$. Diámetro interno 11 mm . Diámetro externo $12,5\text{ mm}$.

Considérese que las propiedades de ambos fluidos son análogas, dándose sus valores en la tabla siguiente:

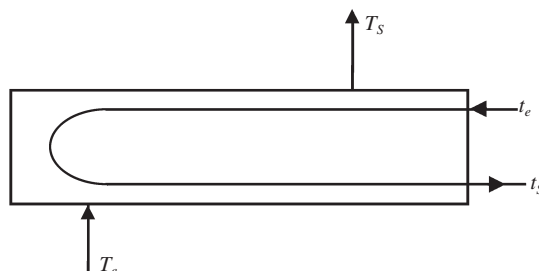
$T\text{ (}^{\circ}\text{C)}$	$k\text{ (W/m}\cdot^{\circ}\text{C)}$	$\eta\text{ (mPa}\cdot\text{s)}$	$\hat{C}_p\text{ (kJ/kg}\cdot^{\circ}\text{C)}$
0	0,023	0,0180	0,996
250	0,046	0,0265	0,979
500	0,058	0,0350	0,963

$$\text{Temperatura media del aire: } t_m = \frac{t_e + t_s}{2} = \frac{15 + 95}{2} = 55\text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\text{Temperatura media del gas: } T_m = \frac{T_e + T_s}{2} = \frac{400 + 100}{2} = 250\text{ }^{\circ}\text{C}$$

Propiedades de los fluidos a estas temperaturas medias:

Fluido	$T\text{ (}^{\circ}\text{C)}$	$k\text{ (W/m}\cdot^{\circ}\text{C)}$	$\eta\text{ (mPa}\cdot\text{s)}$	$\hat{C}_p\text{ (kJ/kg}\cdot^{\circ}\text{C)}$
Aire	55	0,028	0,0189	0,992
Gas	250	0,046	0,0265	0,979



$$a) \text{ Balance energético: } w_C \hat{C}_P)_C (T_e - T_S) = w_f \hat{C}_P)_f (t_s - t_e)$$

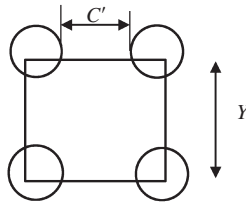
$$w_C \left(0,97 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \right) (400 - 100) ^\circ\text{C} = \left(3.500 \frac{\text{kg}}{\text{h}} \right) \left(0,992 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \right) (95 - 15) ^\circ\text{C}$$

Caudal gases de combustión: $w_C = 945,7 \text{ kg/h}$.

b) Los coeficientes individuales de transmisión de calor se calcularán a partir de la expresión:

$$(\text{Nu}) = 0,33 C_h (\text{Re})^{0,6} (\text{Pr})^{0,3}$$

para los gases de combustión que circulan por la carcasa.



$$\text{Densidad de flujo máxima: } G_C = \frac{w_C}{A_C}$$

$$A_C = \frac{D_C B C'}{n Y} = \frac{D_C B (Y - d_0)}{n Y}$$

$$Y = 2 d_0 = 2 \cdot (12,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}) = 0,025 \text{ m}$$

$$B = 25 \text{ cm} = 0,25 \text{ m} \quad D_C = 0,5 \text{ m} \quad n = 1 \text{ paso de carcasa}$$

con lo que: $A_C = 0,0625 \text{ m}^2$.

Siendo, por tanto la densidad de flujo másica:

$$G_C = \frac{945,7 \text{ kg/h}}{0,0625 \text{ m}^2} = 15.131,2 = \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{h}} = 4,20 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}$$

El diámetro equivalente para disposición cuadrada será:

$$D_e = \frac{4 \left(Y^2 - \frac{\pi}{4} d_0^2 \right)}{\pi d_0} = 0,051 \text{ m}$$

Cálculo del módulo de Reynolds:

$$(\text{Re})_{\text{máx}} = \frac{G_C D_e}{\eta} = \frac{\left(4,20 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \right) (0,051 \text{ m})}{0,0265 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}} = 8.083$$

Módulo de Prandtl:

$$(\text{Pr}) = \frac{\hat{C}_P \eta}{k} = \frac{\left(0,979 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}\right) (0,0265 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s})}{\left(0,046 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kJ}}{\text{s}\cdot\text{m}\cdot^\circ\text{C}}\right)} = 0,65$$

Cálculo del coeficiente C_h :

$$\left. \begin{array}{l} Y = 2 d_0 \\ X = Y = 2 d_0 \end{array} \right\}$$

En las tablas (tabla 14.2) se toman los valores correspondientes a $Y = X = 1,5 d_0$.

Para $\text{Re} = 2.000$ $C_h = 0,95$

Para $\text{Re} = 20.000$ $C_h = 0,96$

Se tomará un valor de $C_h = 0,95$.

Con los valores obtenidos es posible llegar a calcular el coeficiente individual de transmisión de calor para los gases de combustión:

$$h_C = \frac{k}{D_e} 0,33 (\text{Re}_{\text{máx}})^{0,6} (\text{Pr})^{0,3} C_h$$

$$h_C = \frac{0,046 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot^\circ\text{C}}}{0,051 \text{ m}} 0,33 (8.083)^{0,6} (0,65)^{0,3} (0,95)$$

obteniéndose: $h_C = 54,9 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$

Para el cálculo del coeficiente individual *para el aire* que circula por el interior de los tubos se utiliza la expresión: $(\text{Nu}) = 0,021 (\text{Re})^{0,8}$.

Si w_t es el caudal másico de aire, la densidad de flujo de aire que circula por el interior de un tubo será:

$$G_t = \frac{w_t}{N_t a_t / n} = \frac{w n 4}{N_t \pi d_i^2}$$

en la que: $w_t = 3.500 \text{ kg/h}$ caudal másico

$n = 2$ pasos de tubos

$N_t = 400$ n.º total de tubos

$a_t = \frac{\pi}{4} d_i^2$ sección transversal de un tubo

al sustituir los datos se obtiene la densidad de flujo másica:

$$G_t = \frac{(3.500 \text{ kg/h}) (2) (4)}{(400) \pi (11 \cdot 10^{-3})^2 \text{ m}^2} = 184.146,2 \frac{\text{kg}}{\text{h} \cdot \text{m}^2} = 55,15 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}$$

$$(\text{Re}) = \frac{G_t d_i}{\eta} = \frac{(55,15 \text{ kg/m}^2 \cdot \text{s}) (11 \cdot 10^{-3} \text{ m})}{0,0189 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}} = 29.971$$

$$(\text{Nu}) = \frac{h_t d_i}{k} = 0,021 (29.971)^{0,8}$$

de la que se obtiene el coeficiente individual del lado de los tubos:

$$h_t = \frac{0,028 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})}{11 \cdot 10^{-3} \text{ m}} 0,021 (29.971)^{0,8}$$

$$h_t = 204 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{C}}$$

c) Cálculo del área externa total de los tubos:

$$A_e = \frac{\dot{Q}}{U_e (\Delta T_{ml}) F}$$

$$d_{ml} = \frac{d_0 - d_i}{\ln\left(\frac{d_0}{d_i}\right)} = \frac{(12,5 - 11) \cdot 10^{-3}}{\ln\left(\frac{12,5}{11}\right)} \text{ m} = 11,73 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$e = \frac{d_0 - d_i}{2} = \frac{(12,5 - 11) \cdot 10^{-3}}{2} \text{ m} = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

El coeficiente global referido al área externa se calcula despejando de la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{U_e} = \frac{1}{549 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}} + \frac{(7,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}) (12,5 \cdot 10^{-3} \text{ m})}{\left(\frac{44 \text{ W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}\right) (11,73 \cdot 10^{-3} \text{ m})} + \frac{12,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{\left(204 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}\right) (11 \cdot 10^{-3} \text{ m})}$$

obteniéndose: $U_e = 42 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$

Cálculo del factor F : $F = F(Z, \varepsilon, \text{tipo})$

$$\left. \begin{aligned} Z &= \frac{T_e - T_S}{t_S - t_e} = \frac{400 - 100}{95 - 15} \approx 3,75 \\ \varepsilon &= \frac{t_S - t_e}{T_e - t_e} = \frac{95 - 15}{400 - 15} \approx 0,21 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{Gráfica}} F \approx 0,83$$

Cálculo de $(\Delta T)_{ml}$:
$$(\Delta T)_{ml} = \frac{(400 - 95) - (100 - 15)}{\ln\left(\frac{400 - 95}{100 - 15}\right)} = 172,2 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Cálculo del caudal de calor global transmitido:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= w_f \hat{C}_p)_f (t_S - t_e) = \left(3.500 \frac{\text{kg}}{\text{h}}\right) \left(0,992 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot^\circ\text{C}}\right) (95 - 15) \text{ } ^\circ\text{C} \\ \dot{Q} &= 277.760 \text{ kJ/h} \end{aligned}$$

Área externa total:

$$A_e = \frac{\dot{Q}}{U_e (\Delta T)_{ml} F} = \frac{(277.760 \text{ kJ/h}) \left(\frac{1 \text{ h}}{3.600 \text{ s}}\right)}{\left(42 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kJ}}{\text{s}\cdot\text{m}^2\cdot^\circ\text{C}}\right) (172,2 \text{ } ^\circ\text{C}) (0,83)} = 12,853 \text{ m}^2$$

d) Cálculo de la longitud de los tubos: $A_e = \pi d_0 L N_t$

en la que:

L = longitud de tubos
 d_0 = diámetro externo de los tubos
 N_t = 400 tubos

$$L = \frac{A_e}{\pi d_0 N_t} = \frac{12,853 \text{ m}^2}{\pi (12,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}) (400)} = 0,818 \text{ m}$$

Siendo, por tanto, la longitud del intercambiador: $L = 81,8 \text{ cm}$.

Problema 14.7

Se desea refrigerar un mosto que se encuentra a $25 \text{ } ^\circ\text{C}$, para llevarlo a un tanque encamisado, donde se producirá su fermentación a una temperatura controlada de $16 \text{ } ^\circ\text{C}$. Para llevar a cabo esta refrigeración se alimentan 20.000 kg/h de mosto a un intercambiador de calor de placas, que opera en paralelo, y cuya dis-

posición fluido caliente/fluido frío es 1/1, utilizando agua a 3 °C como fluido refrigerante. Si la temperatura a la que el agua abandona el intercambiador es 14 °C, calcular: a) Caudal de agua de refrigeración. b) Coeficientes de transmisión de calor. c) Número de placas térmicas.

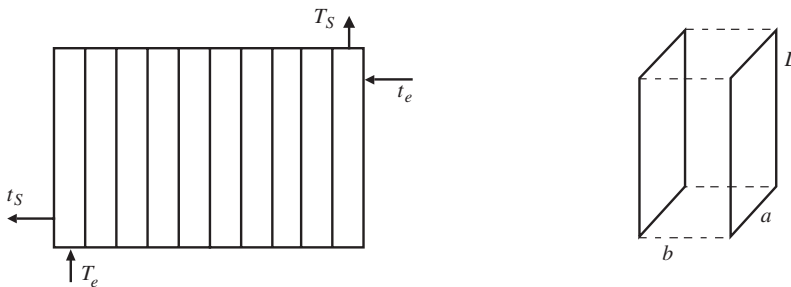
Datos. Características de las placas: Acero inoxidable AISI 316. Dimensiones 75 cm × 25cm × 1,5 mm. Superficie 0,165 m². Espesor de juntas 5 mm. Conductividad térmica 16 W/(m·°C).

• Suponer que en el intervalo de temperaturas de trabajo las propiedades térmicas de los fluidos no varían:

Agua: Conductividad térmica 0,58 W/(m·°C). Viscosidad 1 mPa·s.
Densidad 1.000 kg/m³. Calor específico 4,185 kJ/(kg·°C).

Mosto: Conductividad térmica 0,52 W/(m·°C). Viscosidad 1,2 mPa·s.
Densidad 1.030 kg/m³. Calor específico 4,06 kJ/(kg·°C).

En la siguiente figura se presenta un esquema del intercambiador de placas y las dimensiones de un canal entre dos placas.



a) Balance energético:

$$\dot{Q} = w_C \hat{C}_P)_C (T_e - T_S) = w_f \hat{C}_P)_f (t_s - t_e)$$

$$\left(20.000 \frac{\text{kg}}{\text{h}}\right) \left(4,06 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{°C}}\right) (25 - 16) \text{°C} = w_f \left(4,185 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{°C}}\right) (14 - 3) \text{°C}$$

$$w_f \approx 15.874,9 \text{ kg/h}$$

b) Elaboración de datos: $D_e = 4 r_H = 2 b = 2 \cdot (5 \text{ mm}) = 10 \text{ mm} = 0,01 \text{ m}$
 $S = a \cdot b = (0,25 \text{ m}) (5 \cdot 10^{-3} \text{ m}) = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$

Densidad de flujo de los fluidos: $G = w/S$

$$G_C = \frac{20.000}{1,25 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{1}{3.600} = 4.444,44 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\cdot\text{s}}$$

$$G_f = \frac{15.873}{1,25 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{1}{3.600} = 3.527,76 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\cdot\text{s}}$$

$$\text{Módulo de Prandtl: } (\text{Pr}) = \frac{\hat{C}_p \eta}{k}$$

$$\text{Fluido caliente: } (\text{Pr})_C = 9,4$$

$$\text{Fluido frío: } (\text{Pr})_f = 7,2$$

$$\text{Módulo de Reynolds: } (\text{Re}) = \frac{(G/n) D_e}{\eta}$$

$$\text{Fluido caliente: } (\text{Re})_C = \frac{37.037}{n_C}$$

Turbulento si $n_f < 93$

$$\text{Fluido frío: } (\text{Re})_f = \frac{35.277,6}{n_f}$$

Turbulento si $n_f < 89$

Coefficientes individuales:

$$(\text{Nu}) = \frac{h D_e}{k} = 0,374 (\text{Re})^{0,668} (\text{Pr})^{0,333}$$

$$\text{Fluido caliente: } h_c = 51.546,6 (n_C)^{-0,668} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$$

$$\text{Fluido frío: } h_c = 40.935,1 (n_f)^{-0,668} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$$

Coefficiente global:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_f} + \frac{1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{16 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})}$$

$$(\Delta T)_{ml} = \frac{(T_e - t_s) - (T_s - t_e)}{\ln \left(\frac{T_e - t_s}{T_s - t_e} \right)} = \frac{(25 - 14) - (16 - 3)}{\ln(11/13)} = 12 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$NUT = \frac{T_e - T_s}{\Delta T_{ml}} = \frac{25 - 16}{12} = 0,75$$

De la gráfica (fig. 14.16): $F = F(NUT, \text{tipo de paso})$, obteniendo: $F \approx 0,96$.

$$\text{Del balance térmico: } \dot{Q} = w_C \hat{C}_p)_C (T_e - T_s)$$

$$\text{De la ecuación de velocidad: } \dot{Q} = U A_T \Delta T_{ml} F$$

$$\text{De las que se obtiene el área total: } A_T = \frac{w_C \hat{C}_p)_C (T_e - T_s)}{U \Delta T_{ml} F}$$

$$\text{Al sustituir datos: } A_T = \frac{17.621,5}{U} \text{ m}^2$$

El número de placas térmicas será: $N = \frac{A_T}{A_p}$

Es necesario realizar un proceso iterativo de cálculo:

- Se supone el número de canales para los dos fluidos (n_c y n_f) se calculan los coeficientes de transmisión de calor (h_c, h_f y U). A continuación se determina el área total, y con ésta el número de placas térmicas. El número de canales totales es: $n = n_c + n_f = N + 1$. Si este número de canales obtenidos coincide con los supuestos el proceso finaliza, en caso contrario debe intentarse de nuevo. En la siguiente tabla se recogen los valores de las diferentes variables en cada uno de los pasos del cálculo iterativo.

Tabla P14.7. Variables del proceso iterativo de cálculo de número de placas térmicas

n_c	n_f	$Re)_c$	$Re)_f$	h_c	h_f	U	A_T	N	n_c	n_f
				(W/m ² ·°C)		(m ²)				
30	30	1.235	1.176	5.315	4.221	1.928	9,140	56	29	28
28	28	1.277	1.260	5.434	4.420	1.985	8,877	54	28	27
28	27	1.323	1.307	5.566	4.529	2.024	8,706	53	27	27
27	27	1.372	1.307	5.703	4.529	2.043	8,630	53	27	27

Coefficientes de transmisión de calor:

Mosto: $h_c = 5.703 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$

Agua: $h_c = 4.529 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$

Global: $U = 2.043 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$

Número de placas térmicas: $N = 53$.

Operación en serie: $n_c = n_f = 1$

$(Re)_f = 35.278$

$(Pr)_f = 7,2$

$(Re)_c = 37.037$

$(Pr)_c = 9,4$

$h_f = 40.935 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$

$h_c = 51.547 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$

$U = 7.269 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$

$A_T = 2,424 \text{ m}^2$

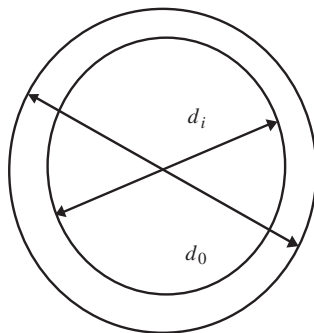
Número de placas térmicas: $N = 15$ placas térmicas.

Problema 14.8

Un fluido alimentario viscoso se halla a 15 °C, y se desea aumentar su temperatura hasta 40 °C para introducirlo en un pasteurizador de placas a razón de 3.000 kg/h. Para realizar este calentamiento se utilizará un intercambiador de calor de tubos concéntricos de pared rascada, con 4 paletas insertadas en un eje central que gira a 6 rpm. Por la sección anular circulan 10.000 kg/h de agua caliente, que se introducen a 98 °C. Si el intercambiador se halla perfectamente aislado para evitar pérdidas de calor hacia el exterior, calcular su longitud.

Datos. Despreciar el espesor del eje central y de las paletas.

- Propiedades del fluido alimentario: Calor específico 3,35 kJ/(kg·°C). Conductividad térmica 0,52 W/(m·°C). Densidad 1.100 kg/m³. Viscosidad 1,6 Pa·s.
- Propiedades del agua: Calor específico 4,185 kJ/(kg·°C). Viscosidad 1 mPa·s. Conductividad térmica 0,58 W/(m·°C). Densidad 1.000 kg/m³.
- Los tubos son de acero inoxidable cuya conductividad térmica es de 23 W/(m·°C). El tubo interior posee un diámetro interno de 22 cm y un espesor de pared de 8 mm. El tubo exterior posee un diámetro interno de 30 cm.



$$d_i = 22 \text{ cm} = 0,22 \text{ m}$$

$$d_e = d_i + 2 e = 23,6 \text{ cm} = 0,236 \text{ m}$$

$$d_0 = 30 \text{ cm} = 0,3 \text{ m}$$

$$\text{Sección tubo interior: } S_i = \frac{\pi}{4} \cdot d_i^2 = 0,0380 \text{ m}^2$$

$$\text{Sección anular: } S_a = \frac{\pi}{4} (d_0^2 - d_e^2) = 0,02694 \text{ m}^2$$

Diámetro equivalente sección anular:

$$D_e = 4 r_H = 4 \cdot \frac{\frac{\pi}{4} (d_0^2 - d_e^2)}{\pi d_e} = \frac{d_0^2 - d_e^2}{d_e} = 0,1454 \text{ m}$$

Densidad de flujo másico para el agua:

$$G_C = \frac{w_C}{S_a} = \frac{10.000 \text{ kg/h}}{0,02694} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3.600 \text{ s}} = 103,1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}$$

El coeficiente de transmisión de calor para el agua se calcula a partir de la ecuación de Dittus-Boelter [ec. 14.14] para fluidos que se enfrían:

$$(\text{Nu}) = \frac{h D_e}{k} = 0,023 (\text{Re})^{0,8} (\text{Pr})^{0,3}$$

Módulo de Prandtl:

$$(\text{Pr}) = \frac{\hat{C}_p \eta}{k} = \frac{\left(4,185 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}\right) (10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s})}{\left(0,58 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kJ}}{\text{s} \cdot \text{m} \cdot ^\circ\text{C}}\right)} = 7,2$$

Módulo de Reynolds:

$$(\text{Re}) = \frac{\rho v D_e}{\eta} = \frac{G_C D_e}{\eta} = \frac{\left(103,1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}\right) (0,1454 \text{ m})}{10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}} \approx 1,5 \cdot 10^4$$

Al sustituir en la ecuación de Dittus-Boelter [ec. 14.14]:

$$h_e = \frac{\left(0,58 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}\right)}{(0,1454 \text{ m})} 0,023 (1,5 \cdot 10^4)^{0,8} (7,2)^{0,3} \approx 363 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

El coeficiente individual de transmisión de calor para el fluido alimentario se calcula a partir de la ecuación:

$$h_i = 2 \left(\frac{k \rho \hat{C}_p P N}{\pi} \right)^{1/2}$$

$$\left[\frac{\left(0,52 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}\right) \left(1.100 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \left(3,35 h_i \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}\right) (4) \left(6 \text{ min}^{-1} \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right)}{\pi} \right]^{1/2}$$

obteniéndose: $h_i = 988 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$

Coficiente global de transmisión de calor referido al área interna:

$$\frac{1}{U_i} = \frac{1}{988 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}} + \frac{8 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{\left(23 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}\right) \left(\frac{0,228 \text{ m}}{0,22 \text{ m}}\right)} + \frac{1}{\left(363 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}\right) \left(\frac{0,236 \text{ m}}{0,22 \text{ m}}\right)}$$

en la que D_{ml} es:

$$D_{ml} = \frac{d_e - d_i}{\ln(d_e/d_i)} = \frac{0,236 - 0,22}{\ln(0,236/0,22)} = 0,228 \text{ m}$$

al operar se obtiene: $U_i = 255 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$

Del balance energético:

$$\left(10.000 \frac{\text{kg}}{\text{h}}\right) \left(4,185 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}\right) (98 - T_S) ^\circ\text{C} = \left(3.000 \frac{\text{kg}}{\text{h}}\right) \left(3,35 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}\right) (40 - 15) ^\circ\text{C}$$

resulta que la temperatura es: $T_S = 92 ^\circ\text{C}$.

De la ecuación de velocidad:

$$\dot{Q} = U_i A_i \Delta T_{ml} = U_i \pi d_i L \Delta T_{ml}$$

En la que: $\dot{Q} = w_f \hat{C}_p (t_s - t_e) = 251.250 \text{ kJ/h}$

Si los fluidos circulan en *contracorriente*:

$$\Delta T_{ml} = \frac{(T_e - t_s) - (T_S - t_e)}{\ln\left(\frac{T_e - t_s}{T_S - t_e}\right)} = \frac{(98 - 40) - (92 - 15)}{\ln\left(\frac{98 - 40}{92 - 15}\right)} \approx 67 ^\circ\text{C}$$

$$A_i = \frac{(251.250 \text{ kJ/h}) (1 \text{ h}/3.600 \text{ s})}{\left(255 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kJ}}{\text{s} \cdot \text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}\right) (67 ^\circ\text{C})} = 4,085 \text{ m}^2$$

siendo la longitud del intercambiador:

$$L = \frac{4,085 \text{ m}^2}{\pi (0,22 \text{ m})} = 5,91 \text{ m}$$

Si los fluidos circulan en *paralelo*:

$$\Delta T_{ml} = \frac{(T_e - t_e) - (T_S - t_s)}{\ln\left(\frac{T_e - t_e}{T_S - t_s}\right)} = \frac{(98 - 15) - (92 - 40)}{\ln\left(\frac{98 - 15}{92 - 40}\right)} \approx 66,3 ^\circ\text{C}$$

$$A_i = \frac{(251.250 \text{ kJ/h}) (1 \text{ h}/3.600 \text{ s})}{\left(255 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kJ}}{\text{s} \cdot \text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}\right) (66,3 ^\circ\text{C})} = 4,128 \text{ m}^2$$

siendo la longitud del intercambiador:

$$L = \frac{4,128 \text{ m}^2}{\pi (0,22 \text{ m})} = 5,97 \text{ m}$$

Si se hubiera utilizado la expresión:

$$(\text{Nu}) = \frac{h_i d_i}{k} = 4,9 (\text{Re})^{0,57} (\text{Pr})^{0,47} \left(\frac{d_i \cdot N}{v} \right)^{0,17} \left(\frac{d_i}{L} \right)^{0,37}$$

para el cálculo de h_i , es necesario realizar una iteración para determinar la longitud L .

$$(\text{Re}) = \frac{G_f \cdot d_i}{\eta} = \frac{w_f d_i}{S_i \eta} = \frac{\left(3.000 \frac{\text{kg}}{\text{h}} \right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3.600 \text{ s}} \right) (0,22 \text{ m})}{(0,038 \text{ m}^2) (1,6 \text{ Pa}\cdot\text{s})} = 3$$

$$(\text{Pr}) = \frac{\hat{C}_p \eta}{k} = \frac{\left(3,35 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{°C}} \right) (1,6 \text{ Pa}\cdot\text{s})}{\left(0,52 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kJ}}{\text{s}\cdot\text{m}\cdot\text{°C}} \right)} = 10.308$$

$$\left(\frac{d_i N}{v} \right) = \frac{(0,22 \text{ m}) (6 \text{ min}^{-1})}{0,02 \text{ m/s}} \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) \approx 1,104$$

La velocidad lineal de circulación es:

$$v = \frac{w_f}{\rho S} = \frac{3.000 \text{ kg/h}}{\left(1.100 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) (0,038 \text{ m}^2)} \left(\frac{1 \text{ h}}{3.600 \text{ s}} \right) \approx 0,020 \text{ m/s}$$

Al sustituir estos datos en la ecuación anterior se puede obtener el coeficiente h_i :

$$h_i = \frac{0,52 \text{ W/m}\cdot\text{°C}}{0,22 \text{ m}} 4,9 (3)^{0,57} (10.308)^{0,47} (1,104)^{0,17} \left(\frac{0,22}{L} \right)^{0,37}$$

por lo que: $h_i = 968 L^{-0,37} \text{ W/m}^2\cdot\text{°C}$

El cálculo de L se debe realizar por iteración:

$$\frac{1}{U_i} = \frac{1}{h_i} + 2,904 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Como: } L = \frac{w_f \hat{C}_p (t_S - t_e)}{\pi d_i \Delta T_{ml} U_i}$$

- En contracorriente: $L = (1.507/U_i)$ m.
- En paralelo: $L = (1.523/U_i)$ m.

En la tabla P14.8 se dan las variables en los diferentes pasos del proceso iterativo.

Tabla P14.8. Variables del proceso iterativo de cálculo de la longitud del intercambiador de pared rascada

Tipo de flujo	L_s (m)	h_i (W/m ² ·°C)	U_i (W/m ² ·°C)	L_c (m)
Contracorriente	6,00	499	204	7,39
	7,39	462	197	7,64
	7,64	456	196	7,68
	7,68	455	196	7,68
Paralelo	7,00	471	199	7,66
	7,66	456	196	7,77
	7,77	453	196	7,78

Con lo que la longitud del intercambiador que se obtiene será:

- Operación en paralelo: $L = 7,68$ m.
- Operación en contracorriente: $L = 7,78$ m.

Problema 14.9

En una de las etapas de elaboración de frutos en almíbar se utiliza una solución caliente de azúcar de 40 °Brix. Para realizar el calentamiento se introducen 1.000 kg de dicha disolución en un tanque agitado cilíndrico de 1 m de diámetro, perfectamente aislado, provisto de un agitador tipo paleta de 30 cm de diámetro y que gira a 120 rpm. En el tanque se halla sumergido un serpentín helicoidal formado por tubos de acero inoxidable de 12 mm de diámetro interno, 1 mm de espesor de pared y 15 m de longitud total.

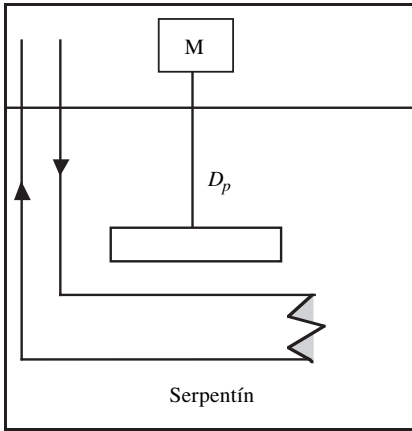
Por el interior del serpentín circula vapor saturado de agua a 3 at, que condensa, siendo su coeficiente de convección de calor 9.300 W/(m²·°C). Si la solución se encuentra inicialmente a 16 °C; calcular: a) Coeficiente global de transmisión de calor. b) El tiempo que tarda la solución en alcanzar 60 °C. c) El caudal y cantidad de vapor necesarios para llevar a cabo este calentamiento. d) La velocidad de elevación de temperatura de la disolución cuando se halla a 50 °C. e) Si se supone que el coeficiente global de transmisión de calor se mantiene constante, ¿cuál será la temperatura de la disolución al cabo de 50 minutos?

Datos y notas. Puede despreciarse la resistencia que la pared del serpentín ofrece a la transmisión de calor.

Propiedades de la solución de azúcar: Conductividad térmica 0,814 W/(m·°C); Calor específico 2,85 kJ/(kg·°C).

Viscosidad: $\eta = 3,7 \cdot 10^{-7} \exp(2.850/T)$; Pa.s; T en Kelvin

Densidad: $\rho = 1,191 - 4,8 \cdot 10^{-4} \cdot T$; g/cm³; T en °C



Para el vapor saturado condensante a 3 at, se obtiene de las tablas:

$$T = 132,9 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{H}_w &= 2.721 \text{ kJ/kg} \\ \hat{h}_w &= 558 \text{ kJ/kg} \end{aligned} \right\} \lambda_w = 2.163 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$D_T = 1 \text{ m} \quad d_i = 12 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad L = 15 \text{ m}$$

$$D_p = 0,3 \text{ m} \quad d_e = 14 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Calentamiento de $16 \text{ } ^\circ\text{C}$ a $60 \text{ } ^\circ\text{C}$, por tanto las propiedades de la disolución se tomarán a una temperatura media: $t_m = 38 \text{ } ^\circ\text{C}$.

$$\begin{aligned} \text{Propiedades a } 38 \text{ } ^\circ\text{C}: \quad \eta &\approx 3,53 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s} \\ \rho &\approx 1,173 \text{ g/cm}^3 = 1.173 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

Cálculo del coeficiente h_e :

$$\frac{h_e D_T}{k} = 0,87 \left(\frac{D_p^2 N \rho}{\eta} \right)^{0,62} \left(\frac{\hat{C}_p \eta}{k} \right)^{1/3} \left(\frac{\eta}{\eta_w} \right)^{0,14}$$

$$(\text{Re}) = \frac{D_p^2 N \rho}{\eta} = \frac{(0,3^2 \text{ m}^2) (2 \text{ s}^{-1}) (1.173 \text{ kg/m}^3)}{5,53 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}} = 5,98 \cdot 10^4$$

$$(\text{Pr}) = \frac{\hat{C}_p \eta}{k} = \frac{\left(2,85 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \right) (3,53 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s})}{\left(0,814 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kJ}}{\text{s} \cdot \text{m} \cdot ^\circ\text{C}} \right)} = 12,4$$

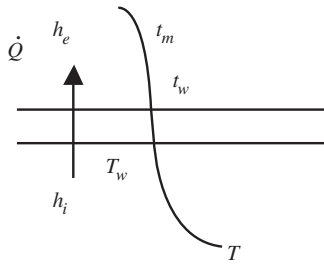
Al sustituir los datos:

$$\frac{h_e (1 \text{ m})}{0,814 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}} = 0,87 (5,98 \cdot 10^4)^{0,62} (12,4)^{1/3} (3,53 \cdot 10^{-3})^{0,14} (\eta_w)^{-0,14}$$

obteniéndose:

$$h_e = 680,6 (\eta_w)^{-0,14} \text{ W/(m}^2 \text{ } ^\circ\text{C)} \quad [\text{Ec. I}]$$

Para obtener h_e es preciso conocer T_w , la temperatura en la pared del serpentín, para calcular η_w , viscosidad de la disolución a la temperatura de la pared.



La transmisión de calor será:

$$\dot{Q} = h_i A_i (T - T_w) = h_e \cdot A_e (t_w - t_m)$$

Como se supone que la pared no ofrece resistencia a la transmisión de calor: $T_w \approx t_w$.

Por tanto:

$$t_w = \frac{h_i A_i T + h_e A_e t_w}{h_i A_i + h_e A_e} = \frac{h_i d_i T + h_e d_e t_w}{h_i d_i + h_e d_e}$$

$$t_w = \frac{(9.300) (12 \cdot 10^{-3}) (132,9) + h_e (14 \cdot 10^{-3}) (38)}{(9.300) (12 \cdot 10^{-3}) (132,9) + h_e (14 \cdot 10^{-3})}$$

Obteniéndose:

$$t_w = \frac{14.832 + 0,532 h_e}{112 + 14 \cdot 10^{-3} h_e} \quad [\text{Ec. II}]$$

Para calcular h_e es preciso realizar una iteración. Se supone un valor para t_w , se calcula la viscosidad a esta temperatura, lo que permite calcular h_e con la ecuación [I]. Con este valor introducido en la ecuación [II] se calcula t_w . Si este valor calculado coincide con el supuesto el problema está resuelto, en caso contrario se repite el proceso hasta coincidencia. En el cuadro siguiente se presentan los resultados de esta iteración:

Iteración	t_w (°C)	$\eta_w \cdot 10^4$ (Pa·s)	h_e (W/m ² ·°C)	t_w (°C)
1	100	7,70	1.857	114,6
2	114,6	5,78	1.933	114,1
3	114,1	5,83	1.931	114,1

$$\text{Luego; } h_e = 1.931 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{°C}}$$

a) Cálculo del coeficiente global U_e

$$\frac{1}{U_e} = \frac{1}{h_e} + \frac{1}{h_i (d_i/d_e)}$$

$$\frac{1}{U_e} = \frac{1}{1.931} + \frac{1}{(9.300) (12/14)} \Rightarrow U_e \approx 1.554 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{°C}}$$

b) *Balance energético*

- Término de acumulación: $A = m \hat{C}_p \frac{dt}{d\theta}$

- Término de entrada: $E = U_e A_e (T - t)$

T = Temperatura del vapor condensante.

t = Temperatura de la solución en el tanque.

θ = Tiempo.

Igualando estos dos términos: $m \hat{C}_p \frac{dt}{d\theta} = U_e A_e (T - t)$

Ecuación diferencial en variables separables, que integrada con la condición límite: $\theta = 0 \rightarrow t = t_0$; conduce a la expresión:

$$\ln \left(\frac{T - t_0}{T - t} \right) = \frac{U_e A_e}{m \hat{C}_p} \theta$$

expresión que permite calcular el tiempo de calentamiento para una determinada temperatura, o viceversa:

- Tiempo: $\theta = \frac{m \hat{C}_p}{U_e A_e} \ln \left(\frac{T - t_0}{T - t} \right)$

- Temperatura: $t = T - (T - t_0) \exp \left(- \frac{U_e A_e \theta}{m \hat{C}_p} \right)$

en las que: $m = 1.000 \text{ kg}$
 $T = 132,9 \text{ }^\circ\text{C}$ $t_0 = 16 \text{ }^\circ\text{C}$
 $A_e = \pi d_e L = 0,6527 \text{ m}^2$
 $\hat{C}_p = 2,85 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot^\circ\text{C}}$

Para $t = 60 \text{ }^\circ\text{C}$

$$\theta = \frac{(10^3 \text{ kg}) \left(2,85 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot^\circ\text{C}} \right)}{\left(15.543 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kJ}}{\text{s}\cdot\text{m}^2\cdot^\circ\text{C}} \right) (0,6597 \text{ m}^2)} \ln \left(\frac{132,9 - 16}{132,9 - 60} \right) = 1.313 \text{ s}$$

obteniéndose un tiempo de: $\theta = 1.313 \text{ s} \approx 22 \text{ minutos}$.

c) *Caudal de vapor y cantidad condensado*

$$m_v \lambda_w = \frac{m}{\theta} \hat{C}_p (t - t_0)$$

$$w_v (2.163 \text{ kJ/kg}) = \left(\frac{1.000 \text{ kg}}{1.313 \text{ s}} \right) \left(\frac{3.600 \text{ s}}{1 \text{ h}} \right) \left(2,85 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot^\circ\text{C}} \right) (60 - 16) \text{ }^\circ\text{C}$$

Caudal de vapor: $w_V \approx 159 \text{ kg/h}$.

Masa de vapor: $M_V = w_V \theta = 58 \text{ kg}$.

d) *Velocidad de elevación de temperatura*

$$\frac{d t}{d \theta} = \frac{U_e A_e}{m \hat{C}_p} (T - t)$$

$$\frac{d t}{d \theta} = \frac{\left(1.931 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kJ}}{\text{s} \cdot \text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}\right) \left(\frac{3.600 \text{ s}}{1 \text{ h}}\right) (0,6597 \text{ m}^2)}{(1.000 \text{ kg}) \left(2,85 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}\right)} (132,9 - 50) ^\circ\text{C} \approx 133,4 ^\circ\text{C/hora}$$

e) *Temperatura a los 50 minutos*

$$t = 132,9 - (132,9 - 16) \exp \left[- \frac{\left(1.931 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kJ}}{\text{s} \cdot \text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}\right) (0,6597 \text{ m}^2) (3.000 \text{ s})}{(1.000 \text{ kg}) \left(2,85 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}\right)} \right]$$

siendo la temperatura: $t = 102,3 ^\circ\text{C}$.

Como se supone que se trabaja a presión atmosférica, si fuese agua no se tendría la solución acuosa, sino que podría pasar a vapor. Sin embargo, al tratarse de una solución azucarada, es posible que hierva a más de $100 ^\circ\text{C}$, debido al aumento ebulloscópico que producen los sólidos solubles.

Problema 14.10

En una industria alimentaria se están procesando 12.000 kg/h de un fluido que se halla a $15 ^\circ\text{C}$, cuyo calor específico es $3,817 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$. Con el objeto de mejorar el rendimiento energético se desea instalar un intercambiador de calor que aumente la temperatura del fluido hasta $72 ^\circ\text{C}$, utilizando una corriente de 20.000 kg/h de agua proveniente de la condensación de un vapor de 1 atm . Calcular la superficie del intercambiador para circulación en paralelo y en contracorriente, si el coeficiente global de transmisión de calor es de $1.750 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$.

Operación en paralelo

$$\text{Balance energético: } \dot{Q} = w_f \hat{C}_p)_f (t_s - t_e) = w_c \hat{C}_p)_c (T_e - T_s)$$

Como el vapor condensa a $1 \text{ atm} \Rightarrow T_e = 100 ^\circ\text{C}$.

Sustituyendo datos:

$$\left(12.000 \frac{\text{kg}}{\text{h}}\right) \left(3,817 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C}}\right) (72 - 15) ^{\circ}\text{C} = \left(20.000 \frac{\text{kg}}{\text{h}}\right) \left(4,185 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C}}\right) (100 - T_S)$$

Se obtiene: $T_S = 68,8 ^{\circ}\text{C}$. Esto es imposible ya que $T_S < t_s$ y ello contradice las leyes de la Termodinámica.

Operación en contracorriente

$$C_C = \left(20.000 \frac{\text{kg}}{\text{h}}\right) \left(4,185 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C}}\right) = 83.700 \frac{\text{kJ}}{\text{h}\cdot^{\circ}\text{C}}$$

$$C_f = \left(12.000 \frac{\text{kg}}{\text{h}}\right) \left(3,817 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C}}\right) = 45.804 \frac{\text{kJ}}{\text{h}\cdot^{\circ}\text{C}}$$

$$\text{Luego: } C_{\min} = C_f \quad C_{\max} = C_C$$

$$\text{con lo que: } \beta = \frac{C_{\min}}{C_{\max}} = 0,547.$$

El rendimiento o eficacia del intercambio de calor es:

$$\varepsilon = \frac{C_f(t_e - t_s)}{C_{\min}(t_e - T_e)} = \frac{15 - 72}{15 - 100} = \frac{57}{85} = 0,671$$

A partir de las gráficas de eficacia (fig. 14.24) es posible encontrar el valor de NUT .

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon = 0,671 \\ \beta = 0,547 \end{array} \right\} \text{Gráfica} \longrightarrow NUT \approx 1,5$$

$$\text{Como} \quad NUT = \frac{UA}{C_{\min}}$$

El área del intercambio del calor será:

$$A = \frac{C_{\min} NUT}{U} = \frac{\left(45.804 \frac{\text{kJ}}{\text{h}\cdot^{\circ}\text{C}}\right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3.600 \text{ s}}\right) (1,5)}{1,75 \frac{\text{kJ}}{\text{s}\cdot\text{m}^2\cdot^{\circ}\text{C}}} \approx 10,906 \text{ m}^2$$

También podría calcularse el área a partir de la ecuación de velocidad de transferencia de calor a través del área de intercambio:

$$\dot{Q} = UA \Delta T_{ml}$$

$$\dot{Q} = \left(12.000 \frac{\text{kg}}{\text{h}} \right) \left(3,817 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \right) (72 - 15) ^\circ\text{C} = 2.610.828 \text{ kJ/h}$$

$$(\Delta T)_{ml} = \frac{(T_e - t_s) - (T_s - t_e)}{\ln \left(\frac{T_e - t_s}{T_s - t_e} \right)} = \frac{(100 - 72) - (68,8 - 15)}{\ln \left(\frac{100 - 72}{68,8 - 15} \right)}$$

obteniéndose: $(\Delta T)_{ml} = 39,5 ^\circ\text{C}$.

Como: $U = 1.750 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, se obtiene un área:

$$A = \frac{\left(2.610.828 \frac{\text{kJ}}{\text{h}} \right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3.600 \text{ s}} \right)}{\left(1,75 \frac{\text{kJ}}{\text{s} \cdot \text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \right) (39,5 ^\circ\text{C})} = 10,492 \text{ m}^2$$

La pequeña diferencia encontrada podría ser debida al error cometido en la determinación gráfica del *NUT*.

Transmisión de calor por radiación 15

15.1. Introducción

El transporte de energía por radiación se diferencia básicamente de los otros fenómenos de transporte de energía en que ni es proporcional a un gradiente de temperaturas, ni necesita de un medio natural para su propagación. Además, su transporte es simultáneo con el de convección.

Cualquier molécula posee energía de traslación, vibracional, rotacional y electrónica, en estados cuantizados. El paso de un estado energético a otro lleva asociado una absorción o emisión de energía. El paso a un estado energético superior implica la absorción de energía por parte de la molécula; en cambio, si el paso es a un nivel energético inferior la molécula emite energía en forma radiante. Como los niveles energéticos están cuantizados, la absorción o emisión de energía es en forma de fotones, los cuales poseen el doble carácter corpúsculo-onda.

Cualquier cuerpo a temperatura superior al cero absoluto puede emitir energía radiante, observándose dependencia de la cantidad de energía emitida con la temperatura a la que se halle el cuerpo. A medida que la temperatura del cuerpo aumenta se excitan los niveles energéticos y posteriormente los electrónicos. El aumento de temperatura lleva asociado el hecho de que el espectro de radiación emitido se desplaza hacia longitudes de onda más cortas, o lo que es lo mismo más energéticas.

Según la teoría *corpúscular*, la energía radiante se transporta por fotones, y es función de su frecuencia ν , según la expresión:

$$E = h \nu \quad [15.1]$$

en la que la constante de proporcionalidad es la denominada constante de Planck, cuyo valor es: $h = 6,6262 \cdot 10^{-34}$ J·s.

La teoría *ondulatoria* considera la radiación como una onda electromagnética, en la que la frecuencia se halla ligada con la longitud de onda por la ecuación:

$$\nu = c/\lambda \quad [15.2]$$

siendo λ la longitud de onda de la radiación y c el valor de la velocidad de la luz en el vacío ($2,9979 \cdot 10^8$ m/s).

La denominada radiación térmica, que comprende el espectro ultravioleta, visible e infrarrojo, se corresponde a longitudes de onda de 10^{-7} a 10^{-4} m.

15.2. Leyes fundamentales

Previo a la descripción de las diferentes leyes que rigen la radiación, es conveniente dar la definición de qué es un **cuerpo negro**. Este cuerpo es el que absorbe y emite la máxima cantidad de energía a una determinada temperatura.

15.2.1. Ley de Planck

La energía que emite un cuerpo negro a una determinada temperatura, T , es función de la longitud de onda. De tal forma que si se considera que q_λ es la potencia emisiva espectral, expresada en $J/(m^3 \cdot s)$ se tiene:

$$q_{n,\lambda}^e = \frac{C_1}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1 \right]} \quad [15.3]$$

en la que $q_{n,\lambda}^e$ es la energía radiante emitida por unidad de tiempo y de volumen a la longitud de onda λ por un cuerpo negro que se halla a la temperatura T . El superíndice e se refiere a emisión, mientras que los subíndices n y λ se refieren a cuerpo negro y longitud de onda, respectivamente. Las constantes C_1 y C_2 vienen definidas por:

$$C_1 = 2\pi c^2 h = 3,742 \cdot 10^{-16} \text{ J}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$$

$$C_2 = hc/k = 1,438 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{K}$$

en la que k es la constante de Boltzmann, que posee un valor de $1,3806 \cdot 10^{-23}$ J/K.

15.2.2. Ley de Wien

La potencia emisiva de un cuerpo negro a una temperatura determinada presenta una variación con la longitud de onda, de tal forma que pasa por un máximo. Además, si la temperatura de emisión aumenta se observa que el máximo se corresponde a una longitud de onda menor, mientras que el valor de la potencia emisiva es superior.

Para encontrar la longitud de onda correspondiente al máximo de emisión, es necesario partir de la expresión de la ley de Planck [ecuación 15.3], e igualar a cero su derivada respecto a la longitud de onda:

$$\frac{d(q_{n,\lambda}^e)}{d\lambda} = 0$$

De esta operación se obtiene:

$$\lambda_{\text{máx}} \cdot T = 2,987 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} \quad [15.4]$$

expresión que viene a corroborar lo indicado anteriormente.

15.2.3. Ley de Stefan-Boltzmann

La densidad de flujo de energía radiante, o lo que es lo mismo la energía radiante total por unidad de área, emitida por un cuerpo negro se obtiene al integrar la expresión de la ecuación de Planck sobre todas las longitudes de onda. Esta integración permite obtener que dicha energía depende únicamente de la temperatura y es proporcional a la cuarta potencia de la misma:

$$q_n^e = \sigma T^4 \quad [15.5]$$

siendo σ la constante de Stefan-Boltzmann, cuyo valor es:

$$\sigma = \frac{2 \pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ J}/(\text{s} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}^4) \quad [15.6]$$

15.3. Propiedades de la radiación

Tal como se puede observar de lo expuesto en el apartado anterior, la energía radiante depende de la longitud de onda. Ello hace que el comportamiento de los cuerpos a la emisión y absorción de energía radiante también dependa de ella, se denominarán propiedades monocromáticas a las que presenten esta dependencia. Además, las propiedades pueden depender de la dirección en que se transmite la radiación o propiedades direccionales. Sin embargo, pueden considerarse unas propiedades medias totales que sean independientes de la longitud de onda y dirección, simplificándose los cálculos y las dificultades en el tratamiento de los problemas en los que interviene la energía radiante.

15.3.1. Propiedades totales

Se considera que todas las propiedades poseen un valor medio igual para todas las longitudes de onda y todas las direcciones. La energía radiante que pueda recibir un cuerpo puede experimentar algunos de los fenómenos siguientes: parte puede ser absorbida, parte transmitida y parte reflejada.

Si q es la densidad de flujo total de energía radiante recibida por un cuerpo, puede escribirse:

$$q = q^r + q^t + q^a \quad [15.7]$$

en la que los superíndices r , t y a denominan reflejado, transmitido y absorbido, respectivamente.

La fracción de energía reflejada, transmitida o absorbida recibe distintos nombres, de tal forma que se tiene:

- Reflexividad o factor de reflexión (r): Fracción de la energía radiante recibida que es reflejada por el cuerpo.

$$r = \frac{q^r}{q} \quad [15.8]$$

- Transmisividad o factor de transmisión (t): Fracción de la energía radiante recibida que es transmitida por el cuerpo.

$$t = \frac{q^t}{q} \quad [15.9]$$

- Absortividad o factor de absorción (a): Fracción de la energía radiante recibida que es absorbida por el cuerpo.

$$a = \frac{q^a}{q} \quad [15.10]$$

De estas expresiones es fácil obtener: $r + t + a = 1$.

En cuanto a la emisividad de un cuerpo se define como la razón entre la cantidad de energía radiante emitida por dicho cuerpo y la que emitiría un cuerpo negro a la misma temperatura:

$$e = \frac{q^e}{q_n^e} = \frac{q^e}{\sigma T^4} \quad [15.11]$$

Debe hacerse hincapié en que todas estas propiedades poseen un valor medio que es el mismo para todas las direcciones y longitudes de onda.

Aquellos cuerpos en los que toda la energía que reciben es reflejada se cumple: $r = 1$; $t = 0$ y $a = 0$; denominándose **espejos perfectos**. Aquellos en los que toda es transmitida: $r = 0$; $t = 1$ y $a = 0$, se conocen como **cuerpos transparentes**. Mientras que los que absorben toda la energía recibida: $r = 0$; $t = 0$ y $a = 1$, se denominan **cuerpos negros**.

Para un cuerpo negro se cumple $q^e = q_n^e$, por lo que si se sustituye en la ecuación 15.11 este valor, se obtiene que la emisividad es la unidad. Es decir, en los cuerpos negros se cumple que tanto la emisividad como la absortividad valen la unidad ($a = e = 1$).

15.3.2. Propiedades monocromáticas. Ley de Kirchhoff

Si en lugar de considerar un valor medio de las propiedades de un cuerpo en todas las longitudes de onda, e independiente de ellas, se toman las propiedades para cada longitud de onda (λ) se tienen una reflexividad, transmisividad, absortividad y emisividad definidas según las expresiones:

$$r_\lambda = \frac{q_\lambda^r}{q_\lambda} \quad [15.12a]$$

$$t_\lambda = \frac{q_\lambda^t}{q_\lambda} \quad [15.12b]$$

$$a_\lambda = \frac{q_\lambda^a}{q_\lambda} \quad [15.12c]$$

en las que también se cumple: $r_\lambda + t_\lambda + a_\lambda = 1$.

Asimismo, se puede definir la emisividad monocromática de modo análogo a como se definía una emisividad total:

$$e_\lambda = \frac{q_\lambda^e}{q_{n,\lambda}^e} \quad [15.13]$$

Los valores medios de cada una de estas propiedades, en función de las monocromáticas, se obtienen según las expresiones:

$$r = \frac{\int_0^\infty r_\lambda q_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty q_\lambda d\lambda} \quad [15.14a]$$

$$t = \frac{\int_0^\infty t_\lambda q_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty q_\lambda d\lambda} \quad [15.14b]$$

$$a = \frac{\int_0^\infty a_\lambda q_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty q_\lambda d\lambda} \quad [15.14c]$$

$$e = \frac{\int_0^\infty e_\lambda q_{n,\lambda}^e d\lambda}{\int_0^\infty q_{n,\lambda}^e d\lambda} = \frac{1}{\sigma T^4} \int_0^\infty e_\lambda q_{n,\lambda}^e d\lambda \quad [15.14d]$$

Si ahora se supone una cavidad que se halla a una temperatura T y emite una densidad de flujo q , y en su interior un cuerpo con una absorptividad a y una emisividad e ; cuando se llega al equilibrio térmico se cumple que la energía absorbida por el cuerpo y la emitida son iguales. Es decir: $a \cdot q = q^e$.

Si el cuerpo es negro $a = 1$, con lo que: $1 \cdot q = q_n^e$. Por lo que si se dividen estas dos expresiones se obtiene:

$$a = \frac{q^e}{q_n^e}$$

Comparando esta expresión con la ecuación 15.11 se observa que es la misma, coincidiendo con la emisividad total ($a = e$). Si en lugar de utilizar propiedades totales se utilizan monocromáticas se obtendría una expresión análoga ($a_\lambda = e_\lambda$).

Se ha visto que en equilibrio térmico, para un cuerpo negro la emisividad coincide con la absorptividad, lo que constituye la denominada ley de **Kirchhoff**.

Cabe resaltar que aquel cuerpo en el que las propiedades monocromáticas son constantes para todo el intervalo de longitudes de onda se denomina **cuerpo gris**. Además, en los cuerpos grises se cumple siempre que la absorptividad y emisividad coinciden aunque no se esté en condiciones de equilibrio térmico.

15.3.3. Propiedades direccionales

Es evidente que un cuerpo que emite energía radiante no tiene porqué hacerlo de igual forma en todas las direcciones, es por ello que las propiedades radiativas que presenta serán distintas dependiendo de la dirección considerada.

Si se considera un punto que emite energía en una dirección determinada sobre un área diferencial dA (figura 15.1), el ángulo sólido distendido ($d\omega$) sobre esta área será:

$$d\omega = \frac{dA \cos \theta}{r^2} \quad [15.15]$$

en la que θ es el ángulo que forma el vector director de la superficie dA con el de la dirección desde el punto emisor y dicha área diferencial, mientras que r es la distancia que separa el punto del área. Si se quiere obtener el ángulo sólido distendido por el punto para todo el espacio deberá integrarse esta ecuación para toda una esfera, con lo que se tiene $\omega_{\text{ESFERA}} = 4\pi$.

Es conveniente definir la intensidad de radiación de un emisor, la cual depende de la dirección considerada. De esta forma para un emisor puntual, la intensidad de radiación se define como la energía radiante por unidad de tiempo, unidad de ángulo sólido y unidad de área proyectada en una dirección normal a la superficie:

$$I(\theta, \phi) = \frac{dq}{\cos \theta d\omega} \quad [15.16]$$

siendo dq la densidad de flujo emitida por el emisor, θ y ϕ son las coordenadas angulares que definen la dirección de emisión y $d\omega$ el ángulo sólido.

Si se desea obtener la densidad de flujo total emitida en todas direcciones debe realizarse la siguiente integración:

$$q = \int I(\theta, \phi) \cos \theta d\omega \quad [15.17]$$

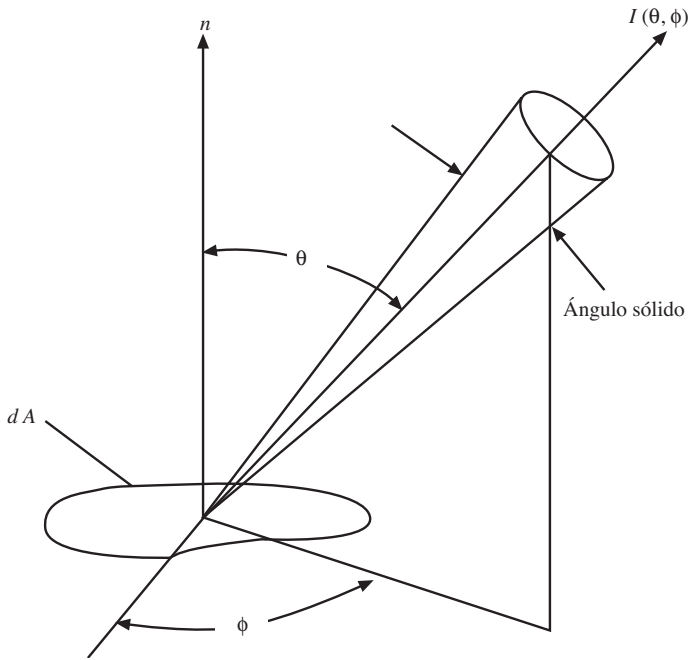


Figura 15.1. Ángulo sólido distendido por dA .

Para realizar esta integración es necesario conocer cómo es la intensidad de emisión. Así si se considera que el emisor se comporta de tal forma que emite con la misma intensidad en todas direcciones se considera que la emisión es difusa. Por contra se dice que su emisión es especular si su comportamiento es análogo al de un espejo, es decir, que emite en direcciones especulares con respecto a la radiación recibida.

En el caso del emisor difuso, la intensidad de radiación es independiente de las coordenadas angulares de emisión, y si se define una intensidad de radiación $I = I(\theta, \phi)$, la densidad de flujo total emitida en todas las direcciones será:

$$q = \int I(\theta, \phi) \cos \theta d\omega = \pi I \quad [15.18]$$

15.4. Factores de visión

Cuando se estudia la energía intercambiada por dos cuerpos cualesquiera es evidente que la energía que emite uno de ellos no es toda absorbida por el otro, ya que sólo podrá absorber aquella que intercepta. Es por ello que se definen los factores de visión, o también denominados factores de visión directa, de forma, geométricos o angulares.

15.4.1. Definición y cálculo

Si se consideran dos cuerpos de áreas diferenciales, dA_1 y dA_2 (figura 15.2), se define el factor de visión del primero respecto al segundo como la fracción de energía total emitida por dA_1 que es interceptada por dA_2 .

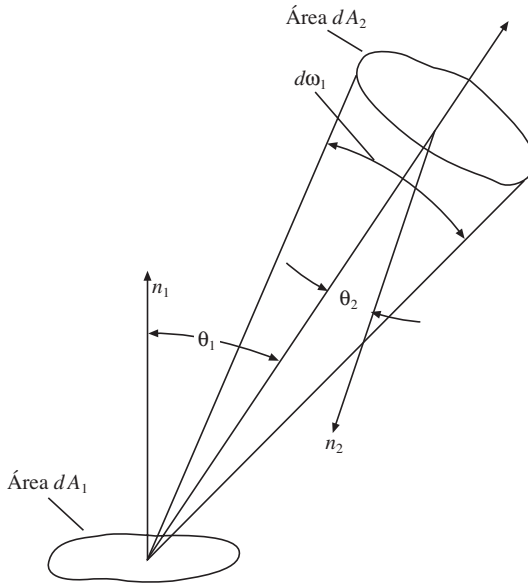


Figura 15.2. Factor de visión.

Se define el factor de visión de dA_1 con respecto a dA_2 según la expresión:

$$F_{dA_1, dA_2} = \frac{q_{1,2}^e}{q_1^e} = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_2}{\pi r^2} \quad [15.19]$$

en donde θ_1 y θ_2 son los ángulos que forman los vectores directores (n_1 y n_2) con r , que es la recta que une los centros de las áreas (dA_1 y dA_2).

Si el cuerpo segundo no es diferencial, sino que posee un área A_2 , el factor de visión entre dA_1 y esta área se calcula mediante la expresión:

$$F_{dA_1, A_2} = \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_2}{\pi r^2} \quad [15.20]$$

El factor de visión entre dos superficies de área finita se obtiene a partir de la expresión:

$$F_{A_1, A_2} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_2 dA_1}{\pi r^2} \quad [15.21]$$

El cálculo matemático de los factores de visión es dificultoso. Sin embargo, para ciertos casos en la bibliografía pueden encontrarse gráficas que facilitan este cálculo (figuras 15.3, 15.4, 15.5, 15.6 y 15.7).

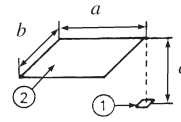
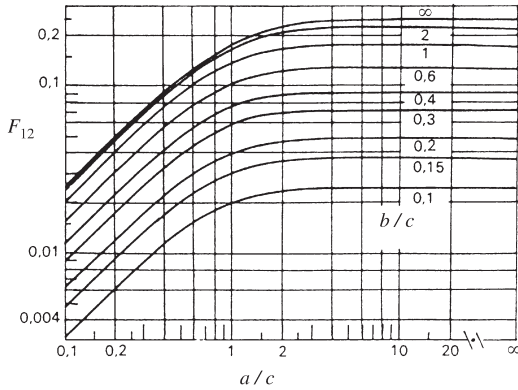


Figura 15.3. Factor de visión desde un área diferencial a un rectángulo paralelo (adaptado de Costa et al., 1986).

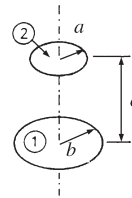
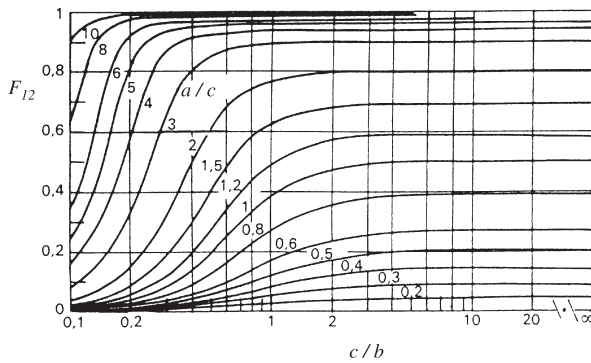


Figura 15.4. Factor de visión entre superficies paralelas circulares (adaptado de Costa et al., 1986).

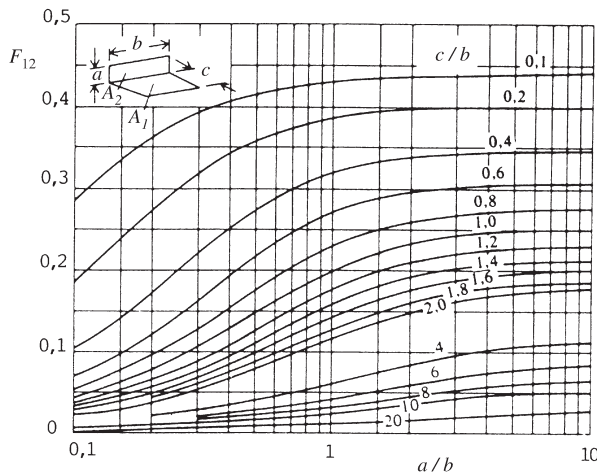


Figura 15.5. Factor de visión para rectángulos perpendiculares con un lado común (adaptado de Costa et al., 1986).

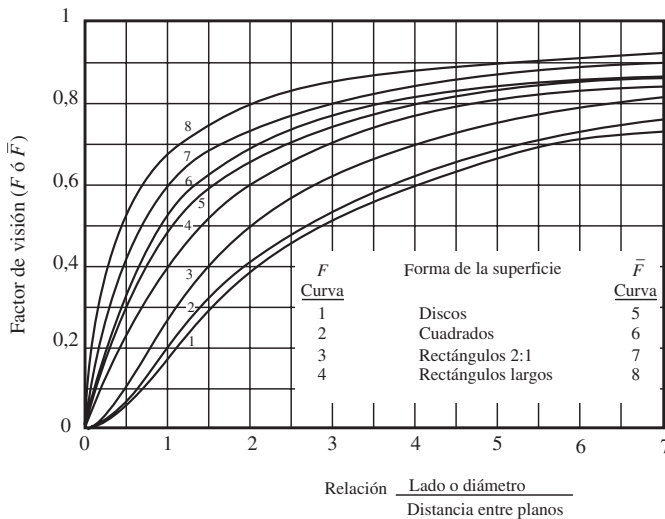


Figura 15.6. Factor de visión y refractario entre planos paralelos (adaptado de Costa *et al.*, 1986).

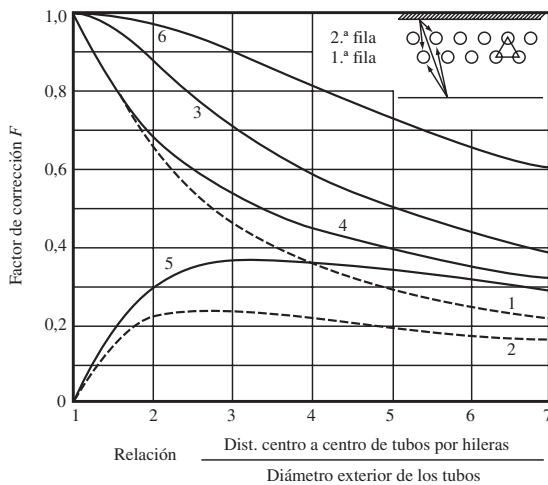


Figura 15.7. Factor de corrección F en la radiación a un banco de tubos: 1) Directa a la primera fila. 2) Directa a la segunda fila. 3) Total a una fila (una presente). 4) Total a la primera fila (dos presentes). 5) Total a la segunda fila (dos presentes). 6) Total a dos filas (dos presentes). (Adaptado de Costa *et al.*, 1986).

15.4.2. Propiedades de los factores de visión

A continuación se enumeran distintas propiedades que cumplen los factores de visión, y que son útiles en las distintas aplicaciones para la resolución de problemas en los que interviene el intercambio de energía radiante.

a) *Relación de reciprocidad.* Para dos áreas cualesquiera se cumple que el producto del área de la primera por el factor con que ve a la segunda es igual al área de la segunda por el factor con que ve a la primera:

$$A_i F_{i,j} = A_j F_{j,i} \quad [15.22]$$

b) *Principio de conservación.* Para un sistema cerrado formado por N superficies se cumple que la suma de los factores geométricos de una superficie respecto a todas las que le rodean es la unidad, ya que la suma de todas las fracciones de energía emitida por dicha superficie que son captadas por las demás es la unidad.

$$F_{i,1} + F_{i,2} + F_{i,3} + \dots + F_{i,N} = 1 \quad [15.23]$$

c) Para aquellos cuerpos que no puedan verse a sí mismos (superficies planas o convexas), los factores de visión respecto a sí mismos son nulos, ya que ninguna radiación emitida puede ser interceptada por sí misma.

$$F_{i,i} = 0$$

d) El factor geométrico de una superficie negra rodeada completamente por otra superficie negra es la unidad. Pues toda energía emitida por la primera es captada por la segunda.

e) *Relación de aditividad.* El factor de visión de una superficie A_i con respecto a una compuesta $A_{(jkl)}$ cumple:

$$A_i F_{i,(jkl)} = A_i F_{i,j} + A_i F_{i,k} + A_i F_{i,l} \quad [15.24]$$

en la que la segunda superficie está compuesta, en este caso, por otras tres:

$$A_{(jkl)} = A_j + A_k + A_l$$

15.5. Intercambio de energía radiante entre superficies separadas por medios no absorbentes

A continuación se presentan algunos casos de intercambio de energía radiante entre cuerpos en los que no existe un medio material que los separe. Es decir, no cabe la posibilidad de que la radiación emitida por alguno de ellos sea interceptada por el medio que los separa.

15.5.1. Radiación entre superficies negras

Suponiendo dos cuerpos negros de superficies A_1 y A_2 , y cuyas temperaturas son T_1 y T_2 , el caudal de energía que sale de cada uno de ellos y es interceptado por el otro, se obtiene a partir de las expresiones:

$$\dot{Q}_{1,2} = F_{12} A_1 \sigma T_1^4$$

$$\dot{Q}_{2,1} = F_{21} A_2 \sigma T_2^4$$

El caudal neto recibido por cada uno de ellos será:

$$\dot{Q}_{neto} = F_{12} A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad [15.25a]$$

$$\dot{Q}_{neto} = F_{21} A_2 \sigma (T_2^4 - T_1^4) \quad [15.25b]$$

Teniendo en cuenta la propiedad de reciprocidad se puede ver que estas expresiones coinciden a excepción de su signo. Ya que una de ellas será positiva y la otra negativa, dependiendo de si recibe o emite un calor neto por radiación. Así, si $T_1 > T_2$ se obtiene que \dot{Q}_1 es positivo, indicando que la superficie A_1 emite radiación neta, mientras que A_2 poseerá el mismo valor aunque su valor será negativo.

15.5.2. Radiación entre una superficie y otra negra que la rodea completamente

Sea un cuerpo cuya superficie es A_1 está rodeada completamente por una superficie A_2 negra, siendo T_1 y T_2 las temperaturas respectivas de estos cuerpos. La energía radiante emitida por cada una de ellas e interceptada por la otra será:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{1,2} &= F_{12} A_1 e_1 \sigma T_1^4 \\ \dot{Q}_{2,1} &= F_{21} A_2 a_1 \sigma T_2^4\end{aligned}$$

siendo el calor neto:

$$\dot{Q}_{neto} = F_{12} A_1 e_1 \sigma T_1^4 - F_{21} A_2 a_1 \sigma T_2^4 \quad [15.26]$$

Teniendo en cuenta la propiedad de reciprocidad, y si la superficie A_1 no se ve a sí misma ($F_{12} = 1$), el calor neto que emite o capta la superficie A_1 será:

$$\dot{Q}_{neto} = A_1 \sigma (e_1 T_1^4 - a_1 T_2^4) \quad [15.27]$$

Si se tratase de un cuerpo gris $a = e$, por lo que se cumple:

$$\dot{Q}_{neto} = A_1 \sigma e_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

Si el cuerpo fuera negro, su emisividad es la unidad, por lo que esta expresión quedaría más simplificada.

15.5.3. Radiación entre superficies negras en presencia de refractarias. Factor refractario

En el diseño de ciertos aparatos industriales (hornos, calderas, etc.), generalmente, se da la circunstancia de que las superficies emisora y receptora de radiación no se hallan solas, sino que existe otro tipo de superficies que se denominan refractarias. En estado estacionario, las superficies refractarias emiten toda la radiación que han absorbido, siempre que no haya pérdida de calor a través del refractario. Por tanto, no existe flujo de calor neto asociado al intercambio de radiación en las superficies refractarias.

Aquella superficie que emite toda la radiación que recibe se denomina adiabática. Una pared refractaria es adiabática, si todo el calor que absorbe por radiación es emitido.

Para el estudio de este caso se supondrán dos superficies A_1 y A_2 , unidas por paredes refractarias (figura 15.8), suponiendo que todas ellas mantienen una tempe-

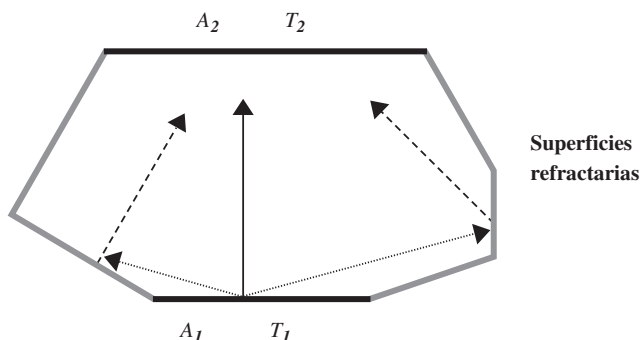


Figura 15.8. Radiación entre dos superficies negras separadas por refractarias.

ratura uniforme. La transferencia de energía radiante desde A_1 a A_2 , o viceversa, no sólo incluye la directa, sino también la que llega a través de las paredes refractarias.

El calor que emitido por A_1 que llega a A_2 será:

$$\dot{Q}_{1,2} = F_{12} A_1 \sigma T_1^4 + F_{1R} A_1 \sigma T_1^4 \frac{F_{R2}}{1 - F_{RR}}$$

en la que $\frac{F_{R2}}{1 - F_{RR}}$ es un factor que representa la fracción de energía que emiten las paredes refractarias y llega a la superficie A_2 .

Se define un **factor refractario** (\bar{F}) entre las superficies A_1 y A_2 según la expresión:

$$\bar{F}_{12} = F_{12} + \frac{F_{R2}}{1 - F_{RR}} \quad [15.28]$$

por lo que el calor que sale de una de las superficies y llega a la otra se expresará según la ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{1,2} &= \bar{F}_{12} A_1 \sigma T_1^4 \\ \dot{Q}_{2,1} &= \bar{F}_{21} A_2 \sigma T_2^4 \end{aligned}$$

por tanto, el calor neto intercambiado por ambas superficies es:

$$\dot{Q}_{neto} = \bar{F}_{12} A_1 \sigma T_1^4 - \bar{F}_{21} A_2 \sigma T_2^4 \quad [15.29]$$

Para los factores refractarios se cumplen las mismas propiedades que para los factores de visión normales, por lo que:

$$\dot{Q}_{neto} = \bar{F}_{12} A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad [15.30]$$

15.5.4. Radiación entre superficies no negras. Factor gris

En el caso que la energía radiante sea intercambiada entre cuerpos que no son negros, se deberá tener presente que la energía emitida por un cuerpo se calcula mediante la ecuación de Stefan-Boltzmann multiplicada por la emisividad. Además, la energía que recibe uno de estos cuerpos es afectada por el coeficiente de absorción. Todo ello hace que el tratamiento matemático sea complicado, aunque en Ingeniería, para simplificar el problema se supone que los cuerpos son grises. Esto equivale a que el coeficiente de absorción es independiente de la longitud de onda incidente, y por tanto de la temperatura y demás características del emisor. En los cuerpos grises la emisividad y el coeficiente de absorción son iguales.

Para el caso de dos superficies A_1 y A_2 , unidas por un número cualquiera de zonas refractarias, el flujo neto de energía radiante intercambiado puede expresarse según la ecuación:

$$\dot{Q}_{neto} = \mathfrak{S}_{12} A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad [15.31]$$

en la que \mathfrak{S}_{12} es un factor de forma denominado **factor gris**, que depende de los factores de visión de las superficies, del factor refractario, así como de la emisividad y área de los cuerpos considerados.

El factor gris se define según la expresión:

$$\mathfrak{S}_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\bar{F}_{12}} + \left(\frac{1}{e_1} - 1\right) + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{e_2} - 1\right)} \quad [15.32]$$

Esta ecuación permite obtener el valor del factor gris, y es una expresión general, que en casos más sencillos puede simplificarse. Así, para dos planos paralelos grandes que intercambian energía radiante el factor refractario es la unidad, y las áreas son iguales, obteniéndose:

$$\mathfrak{S}_{12} = \frac{1}{\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - 1}$$

15.6. Coeficiente de transmisión de calor por radiación

En los casos de transmisión de calor por conducción y convección el flujo de calor es proporcional al incremento de temperatura y al área de transmisión, siendo la constante de proporcionalidad la conductividad térmica para la conducción de calor, y el coeficiente individual de película para el caso de convección de calor. Así:

- Conducción de calor: $\dot{Q} = \frac{k}{e} A (T_0 - T_1)$
- Convección de calor: $\dot{Q} = h A (T_p - T_f)$

En el caso de radiación esto no es así, ya que el flujo de calor se calcula mediante la ecuación de Stefan-Boltzmann. Sin embargo, a veces resulta conveniente expresarlo de forma análoga a la conducción y convección de calor. De este modo, el flujo de calor por radiación será:

$$\dot{Q} = h_R A (T_1 - T_2) \quad [15.33]$$

en la que h_R se denomina coeficiente de transmisión de calor por radiación, con unidades análogas a los coeficientes de película. Este coeficiente puede calcularse a partir de gráficas o tablas. En la tabla 15.1 se dan los valores del coeficiente de transmisión de calor por radiación junto con convección, para el caso de tuberías cuya superficie puede perder calor por los dos mecanismos mencionados.

En el caso concreto de superficies negras con un factor de visión igual a la unidad, el flujo de calor neto es:

$$\dot{Q} = \sigma A (T_1^4 - T_2^4)$$

que al comparar con la ecuación 15.33 se obtiene una expresión para el cálculo del coeficiente de transmisión por radiación:

$$h_R = \sigma \frac{T_1^4 - T_2^4}{T_1 - T_2} = \sigma (T_1^3 + T_1^2 T_2 + T_1 T_2^2 + T_2^3) \quad [15.34]$$

Para el caso de radiación entre superficies grises o superficies cuyo factor de visión sea distinto de la unidad deberá tenerse presente en las ecuaciones pertinentes.

15.7. Transmisión simultánea de calor por convección y radiación

En la práctica, la transmisión de calor se produce por más de un mecanismo a la vez. Así, en el caso de transmisión de calor desde una superficie caliente hacia el exterior, dicha transmisión se realiza por convección y radiación de forma simultánea. Se puede suponer que esta superficie caliente se halla a una temperatura T_S y está rodeada por un fluido a una temperatura T_G , siendo T_P la temperatura de las paredes. Los mecanismos de transmisión de calor serán por radiación y convección, de forma que el flujo de calor que se transmite desde la superficie caliente será la suma del flujo debido a la radiación y a la convección:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{TOTAL} &= \dot{Q}_R + \dot{Q}_C \\ \dot{Q}_R &= h_R A (T_S - T_P) \\ \dot{Q}_C &= h_C A (T_S - T_G) \end{aligned}$$

con lo que:

$$\dot{Q}_{TOTAL} = h_R A (T_S - T_P) + h_C A (T_S - T_G)$$

Tabla 15.1a. Valores de $(h_C + h_R)$ para tubos de acero hacia los alrededores (*)

d_0 (cm)	$(T_S - T_G)$ (°C)													
	10	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300	325
2,5	11,03	11,66	12,68	13,76	14,96	16,29	17,08	19,18	20,92	22,61	24,44	26,34	28,29	30,28
7,5	10,00	10,54	11,01	12,49	13,66	14,87	16,13	17,87	19,93	21,12	22,92	24,77	26,67	28,67
12,5	9,51	10,04	10,93	11,91	13,12	14,44	15,57	17,18	18,79	20,49				
25,5	9,13	9,65	10,58	11,60	12,75	14,04	15,17	16,80	18,50					

(*) Unidades $(h_C + h_R)$ kcal/(h·m²·°C).

Fuente: Costa et al. (1986).

Tabla 15.1b. Valores de $(h_C + h_R)$ para tubos de acero hacia los alrededores (*)

d_0 (pulg.)	$(T_S - T_G)$ (°F)														
	30	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700
1	2,16	2,26	2,50	2,73	3,00	3,29	3,60	3,95	4,34	4,73	5,16	5,60	6,05	6,51	6,99
3	1,97	2,05	2,25	2,47	2,73	3,00	3,31	3,69	1,03	4,73	4,85	5,26	5,71	6,19	6,08
5	—	1,95	2,15	2,36	2,61	2,90	3,20	3,54	3,90						
10	1,80	1,87	2,07	2,29	2,54	2,80	3,12	3,47	3,84						

(*) Unidades $(h_C + h_R)$ Btu/(h·pie²·°F).

Fuente: Perry y Chilton (1973).

En el caso que la temperatura del fluido T_G sea la misma que la de la pared:

$$\dot{Q}_{TOTAL} = (h_R + h_C) A (T_S - T_p) \quad [15.35]$$

Los valores de los coeficientes h_R y h_C deben calcularse previamente. El coeficiente individual de transmisión de calor por convección h_C se calcula a partir de gráficas o ecuaciones obtenidas empíricamente y basadas en el análisis dimensional. El coeficiente h_R se obtiene a partir de gráficas o ecuaciones, tal como se ha indicado en el apartado anterior.

PROBLEMAS**Problema 15.1**

En un centro experimental de semillas se estudia el aprovechamiento de la energía solar para calentar la corriente de aire que se va a utilizar en el secado de granos de cebada. Para ello se ha instalado en el tejado del edificio un colector solar negro de $5 \text{ m} \times 10 \text{ m}$. Los alrededores pueden considerarse como un cuerpo negro cuya temperatura radiactiva eficaz es 32°C . Las pérdidas de calor por conducción hacia el exterior pueden despreciarse, mientras que las debidas a la convección pueden evaluarse a partir del coeficiente individual de transmisión de calor, que se calcula según la expresión: $h = 2,4 (\Delta T)^{0,25} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ en la que ΔT es la diferencia de temperaturas entre la superficie del colector y los alrededores.

Si la energía incidente del sol produce en el colector una densidad de flujo radiante de $800 \text{ W}/\text{m}^2$; calcular la temperatura a la que se alcanza el equilibrio térmico en el colector.

La temperatura a la que se alcanza el equilibrio térmico se obtiene cuando todo el calor que llega al colector solar se iguala al calor que sale de dicho colector. Las entradas de calor serán por radiación directa con el sol y la energía radiante que llega de los alrededores, mientras que del colector sale calor por radiación y por convección.

Se supone que la temperatura del colector a la que se alcanza el equilibrio es T_1 y la de los alrededores $T_2 = 32^\circ\text{C}$, mientras que el área del colector es A_1 siendo A_2 la de los alrededores. El balance energético en el colector conduce a la expresión:

$$q_{sol} A_1 a_1 + a_1 F_{21} A_2 e_2 \sigma T_2^4 = a_2 F_{12} A_1 e_1 \sigma T_1^4 + A_1 h (T_1 - T_2)$$

Tanto el colector solar como los alrededores son cuerpos negros, por lo que sus emisividades (e) y coeficientes de absorción (a) poseen un valor unitario. Los alrededores rodean completamente el colector, por lo que si se aplica la propiedad de reciprocidad $F_{12} A_1 = F_{21} A_2$, y se supone que el colector solar posee el área plana, permite obtener el valor $F_{12} = 1$. Al sustituir en la expresión anterior se obtiene:

$$q_{sol} + \sigma T_2^4 = \sigma T_1^4 + h (T_1 - T_2)$$

Reordenando los términos, al sustituir los datos del problema:

$$800 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = (5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}) (T_1^4 - 305^4) \text{ K}^4 + 2,4 (T_1 - 305)^{1,25} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

ecuación que se resuelve por tanteo o iteración, obteniéndose $T_1 \approx 359 \text{ K}$ ($= 86^\circ\text{C}$).

Problema 15.2

Se desean asar unos filetes, que poseen una emisividad de 0,45, utilizando un asador que consta de una base metálica de $50 \text{ cm} \times 90 \text{ cm}$, de una parrilla situada a 25 cm de la base y en el que la apertura entre la parrilla y la base está comple-

tamente cerrada por láminas refractarias. Los filetes se colocan de tal forma que ocupan toda la parrilla, mientras que en la base se colocan brasas de carbón vegetal, estimándose que su absorptividad y emisividad son 1 y 0,85, respectivamente.

Durante el asado la temperatura de las brasas es 800 °C y la ambiental 25 °C. El calor intercambiado por convección entre las brasas y los filetes es de 600 W. Si se desprecia la transmisión de calor desde la superficie inferior de las brasas y la superficie superior de los filetes hacia los alrededores, determinar la temperatura que adquieren los filetes en el equilibrio térmico.

Al realizar un balance de calor en la carne se obtiene que el calor que entra por radiación y convección desde las brasas es igual al que abandona la carne por radiación:

$$a_2 \bar{F}_{12} A_1 e_1 \sigma T_1^4 + \dot{Q}_C = a_1 \bar{F}_{21} A_2 e_2 \sigma T_2^4$$

Los subíndices 1 y 2 se refieren a las brasas y los filetes, respectivamente. Debido a la geometría del sistema, $A_1 = A_2$ y $\bar{F}_{12} = \bar{F}_{21}$. Además, $a_1 = 1$, de acuerdo con el enunciado, siendo los filetes un cuerpo gris ($a_2 = e_2$). Con esto, se obtiene que la temperatura de los filetes se expresa según la ecuación:

$$T_2 = \sqrt[4]{e_1 T_1^4 + \frac{\dot{Q}_C}{\bar{F}_{12} A_1 e_2 \sigma}}$$

El factor de visión refractario \bar{F}_{12} se calcula a partir de la figura 15.6, en la que se toma la curva 7 para un rectángulo 2:1:

$$\text{Relación } \frac{\text{Lado}}{\text{Distancia planos}} = \frac{90 \text{ cm}}{25 \text{ cm}} = 3,6$$

de la que se obtiene $\bar{F}_{12} = 0,82$.

Sustituyendo datos:

$$T_2 = \sqrt[4]{(0,85) (1.073)^4 \text{ K}^4 + \frac{600 \text{ W}}{(0,82) (0,45 \text{ m}^2) (0,45) \left(5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}\right)}}$$

$$T_2 = 1.044,6 \text{ K} (= 771,6 \text{ °C})$$

Problema 15.3

Por el interior de un tubo de 3 cm de diámetro externo y 2,5 mm de espesor de pared circula vapor saturado de agua a 2,1 kg/cm², lo que hace que la temperatura de la pared externa del tubo sea de 120 °C. Para evitar pérdidas de calor hacia el exterior, que podrían llegar a hacer condensar el vapor, se aísla la tubería con un aislante de 4 cm de espesor, y cuya conductividad térmica es de 0,1 kcal/(h·m·°C).

Si la tubería se halla inmersa en una habitación a 25 °C, calcular: a) La cantidad de calor que se disipa por metro lineal de tubería, cuando no se halla aislada. b) La temperatura que posee la superficie externa del aislante que recubre la tubería. c) ¿Qué porcentaje en las pérdidas de calor se ahorra con el recubrimiento?

a) Para la tubería no aislada el calor cedido hacia el exterior es debido a la convección y radiación simultáneas, siendo el área de intercambio $A_e = \pi d_e L$. Por lo que el flujo de calor intercambiado por metro de tubería será:

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \pi d_e (h_C + h_R) (T_P - T_G)$$

en la que: $T_P - T_G = 120 \text{ °C} - 25 \text{ °C} = 95 \text{ °C}$.

Para el cálculo de $(h_C + h_R)$ debe interpolarse en la tabla 15.1, obteniendo un valor:

$$(h_C + h_R) = 14,59 \text{ kcal}/(\text{h}\cdot\text{m}^2\cdot\text{°C})$$

Por tanto, el flujo de calor por metro de tubería intercambiado con los alrededores es:

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \pi (0,03 \text{ m}) \left(14,59 \frac{\text{kcal}}{\text{h}\cdot\text{m}^2\cdot\text{°C}} \right) (95 \text{ °C}) = 130,6 \frac{\text{kcal}}{\text{h}\cdot\text{m}}$$

b) Cuando el tubo se halla recubierto de aislante, el caudal de calor por metro de tubería que atraviesa el aislante es el mismo que se disipa hacia el exterior por radiación y convección:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{Q}}{L} &= \frac{\pi (d_0 - d_e)}{\ln \left(\frac{d_0}{d_e} \right)} \frac{k}{e_A} (T_P - T_0) = \\ &= \pi d_0 (h_C + h_R) (T_P - T_G) \end{aligned}$$

en la que d_0 y d_e son los diámetros externos de la tubería y del aislante ($d_0 = d_e + 2e_A$), siendo e_A el espesor del aislante. T_P y T_0 son las temperaturas de la pared externa de la tubería y del aislante, respectivamente.

Sustituyendo datos:

$$\frac{\pi (11 - 3) \cdot 10^{-2} \text{ m}}{\ln (11/3)} \frac{0,1 \frac{\text{kcal}}{\text{h}\cdot\text{m}\cdot\text{°C}}}{0,04 \text{ m}} (120 - T_0) \text{ °C} = \pi (0,11 \text{ m}) (h_C + h_R) (T_P - 25) \text{ °C}$$

operando se obtiene:

$$T_0 = \frac{168 + 25 (h_C + h_R)}{1,4 + (h_C + h_R)}$$

Ecuación que se resuelve por tanteo, para lo que se supone T_0 y se calcula $(T_0 - T_G)$, con este valor, a partir de la tabla 15.1 se determina $(h_C + h_R)$, lo que permite calcular la temperatura T_0 con la ecuación obtenida anteriormente. Al operar de este modo se obtiene:

$$T_0 = 37 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$(h_C + h_R) = 9,73 \text{ kcal}/(\text{h m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$$

Con estos datos, el caudal de calor perdido por metro de tubería es:

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \pi (0,11 \text{ m}) \left(9,73 \frac{\text{kcal}}{\text{h} \cdot \text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \right) (37 - 25) \text{ }^\circ\text{C} = 40,4 \frac{\text{kcal}}{\text{h} \cdot \text{m}}$$

c) Al observar las pérdidas de calor por unidad de tiempo y metro de tubería, en los dos apartados anteriores, es fácil obtener que el porcentaje de pérdidas ahorrado es del 69%.

Problema 15.4

Se desean calentar 10.000 kg de un producto en un horno eléctrico que posee forma cúbica, con una solera de 3 m \times 4 m, y en cuyo techo se ha instalado una hilera de resistencias cilíndricas de 4 m de longitud y 2 cm de diámetro, estando colocadas de tal forma que la distancia entre sus centros es 6 cm. La temperatura que alcanzan las resistencias es de 1.500 $^\circ\text{C}$, y se encuentran en un plano 2,5 m por encima del producto a calentar. Si las paredes del horno son refractarias y se hallan perfectamente aisladas del exterior, determinar el tiempo necesario para calentar el producto desde 20 $^\circ\text{C}$ hasta 500 $^\circ\text{C}$.

Datos. Emisividad de las resistencias 0,70. Emisividad de la carga 0,90. Calor específico del producto 1,046 kJ/(kg \cdot $^\circ\text{C}$).

Se calcula inicialmente el caudal de calor que desde las resistencias eléctricas llega al producto. Como las paredes del horno son refractarias, si T_1 es la temperatura de las resistencias y T la del producto, se cumple que [ec. 15.31]:

$$\dot{Q}_{1P} = \mathfrak{S}_{1P} A_1 \sigma (T_1^4 - T^4)$$

en la que \mathfrak{S}_{1P} es el factor gris definido por la ecuación 15.32. El factor refractario que aparece en esta ecuación se calcula como si fueran dos superficies paralelas separadas por refractarios, aunque debe corregirse con un factor F debido a que en realidad la emisión es por las resistencias.

Se supone que existe un plano imaginario paralelo al producto y a una distancia de 2,5 m. Ello implica calcular el factor geométrico entre planos paralelos de dimensiones 3 \times 4 m² separados por 2,5 m.

Con la relación: Lado menor/distancia entre planos = 3/2,5 = 1,2 y utilizando la figura 15.6 curva 7, se obtiene: $\bar{F} \cong 0,64$.

El factor de corrección F se obtiene a partir de la figura 15.7 (radiación a un banco de tubos). Se supone el plano de radiación con respecto a los tubos:

$$\frac{\text{Distancia al centro de los tubos}}{\text{Diámetro exterior de los tubos}} = \frac{6 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 3$$

Con este valor en abscisas y la curva total a una fila con una sola (curva 3), se obtiene: $F = 0,72$.

El valor del factor refractario es: $\bar{F}_{1P} = (0,64)(0,72) = 0,46$.

Las áreas son $A_1 = A_P = 12 \text{ m}^2$. Al aplicar la ecuación 15.32 se obtendrá el factor gris:

$$\mathfrak{S}_{12} = \frac{1}{\frac{1}{0,46} + \left(\frac{1}{0,7} - 1\right) + \frac{12}{12} \left(\frac{1}{0,9} - 1\right)} = 0,369$$

Con este valor el caudal de calor intercambiado por las resistencias y el producto es (ec. 15.31):

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{1P} &= (0,369)(12 \text{ m}^2) \left(5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}\right) (1,773^4 - T^4) \text{ K}^4 \\ \dot{Q}_{1P} &= 2,51 \cdot 10^{-7} (1,773^4 - T^4) \text{ W} \end{aligned}$$

Este calor que irradian las resistencias va hacia el producto, que lo acumula aumentando su temperatura. Al realizar un balance energético para el producto se obtiene:

$$\dot{Q} = m \hat{C}_P \frac{dT}{dt} = 2,51 \cdot 10^{-7} (1,773^4 - T^4) \text{ W}$$

en el que m es la masa del producto. Al sustituir en esta ecuación los datos del enunciado del problema:

$$(10.000 \text{ kg}) \left(1,046 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}\right) \frac{dT}{dt} = 2,51 \cdot 10^{-7} (1,773^4 - T^4) \text{ W}$$

de la que se obtiene una ecuación en variables separables que permitirá el cálculo del tiempo:

$$t = 4,17 \cdot 10^{13} \int_{293}^{773} \frac{dT}{(1,773^4 - T^4)}$$

al integrar se obtiene:

$$t = \frac{4,17 \cdot 10^{13}}{2 \cdot (1,773^3)} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1,773 + T}{1,773 - T} \right) + \text{arc tg} \left(\frac{T}{1,773} \right) \right]_{293}^{773} = 53.700 \text{ s}$$

Por tanto, para realizar el calentamiento indicado en el problema son necesarias 14 horas y 55 minutos.

Procesado térmico de alimentos 16

16.1. Introducción

Uno de los problemas principales que se presentan en la Ingeniería Alimentaria es la destrucción de los microorganismos presentes en los alimentos, no sólo para prevenir su potencial contaminante, sino también con el objetivo primordial de preservar los alimentos durante períodos de tiempo lo más largo posibles. Para conseguir la destrucción de las formas esporuladas y vegetativas, los alimentos son tratados térmicamente, bien en el interior de envases o en forma continua, envasándose posteriormente en un envase aséptico. Tanto si el tratamiento se realiza de uno u otro modo interesa obtener un producto final de alta calidad, minimizando las pérdidas de nutrientes y propiedades sensoriales.

El procesado térmico de productos envasados se realiza en aparatos que utilizan vapor de agua o agua caliente como fluido calefactor. En el procesado aséptico los productos son inicialmente tratados térmicamente para luego ser llevados a un envase previamente esterilizado y finalmente sellado bajo condiciones ambientales estériles. Esta es una técnica utilizada en fluidos como leche y zumos de frutas, aunque recientemente también se ha aplicado en productos alimentarios particulados. El procesado aséptico presenta diversas ventajas respecto al tratamiento térmico tradicional en envases, ya que el alimento sufre menos deterioro, los tiempos de procesado son más cortos, se reduce el consumo energético y la calidad del producto tratado mejora y es más uniforme.

Dentro del procesado térmico cabe distinguir la pasteurización y la esterilización. El primer término se utiliza para designar la destrucción térmica de microorganismos patógenos específicos, aunque el producto resultante no es estable si no se encuentra bajo refrigeración. La esterilización es el proceso por el que se obtienen productos estables sin necesidad de refrigeración.

16.2. Cinética de destrucción térmica

Para cualquier microorganismo que se encuentre en un determinado medio, y sea tratado térmicamente a cierta temperatura fija, la velocidad de destrucción si-

que una cinética de primer orden. Así, si N es el número de microorganismos, su variación con el tiempo se expresa como:

$$\frac{dN}{dt} = -kN \quad [16.1]$$

ecuación que puede integrarse con la condición límite que para el tiempo inicial existen N_0 microorganismos, obteniéndose:

$$N = N_0 \exp(-k t) \quad [16.2]$$

en la que N es el número de microorganismos presentes para el tiempo t , y k es la constante cinética de destrucción.

El valor de la constante cinética depende del tipo de microorganismo, del medio y de la temperatura. Asimismo, para un mismo microorganismo, también depende de si está en forma vegetativa o esporulada. Para formas vegetativas estas constantes son mucho mayores que para las esporuladas, lo que indica que estas últimas son mucho más difíciles de destruir. Los valores de la constante de destrucción térmica de las formas vegetativas suelen ser del orden de 10^{10} min^{-1} , mientras las esporuladas presentan valores de 1 min^{-1} .

16.2.1. Tiempo de reducción decimal D

En cálculos de problemas de tratamiento térmico, suele utilizarse lo que se denomina **tiempo de reducción decimal**, que se define como el tiempo de tratamiento necesario para que el número de microorganismos se reduzca a la décima parte, y se representa por D_T . En los cálculos de tratamientos térmicos se supone que este tiempo es independiente de la concentración inicial de microorganismos y dependiente de la temperatura, tipo de microorganismo y medio de cultivo o alimento en el que crecen los microorganismos.

De la ecuación 16.2 se obtiene:

$$D_T = \frac{2,303}{k} \log_{10} \left(\frac{N}{N_0} \right)$$

y como $N = 0,1 N_0$, el tiempo de reducción decimal se expresa en función de la constante cinética de destrucción térmica como:

$$D_T = \frac{2,303}{k} \quad [16.3]$$

y el tiempo de tratamiento se expresará según la ecuación:

$$t = D_T \log_{10} \left(\frac{N_0}{N} \right) \quad [16.4]$$

16.2.2. Curvas de destrucción térmica

La ecuación 16.2 se puede linealizar si se expresa en forma logarítmica:

$$\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -k t \quad [16.5]$$

Si se representa en coordenadas semilogarítmicas N/N_0 frente al tiempo, se obtiene una recta de pendiente $-k$ y ordenada en el origen 1. Esta recta se denomina **curva de destrucción térmica**, y para cada microorganismo viene determinada por la temperatura de tratamiento, de tal forma que si la temperatura es distinta, la pendiente de la recta también lo será, ya que la constante cinética de destrucción varía. Así, si la temperatura aumenta la pendiente es más pronunciada (figura 16.1).

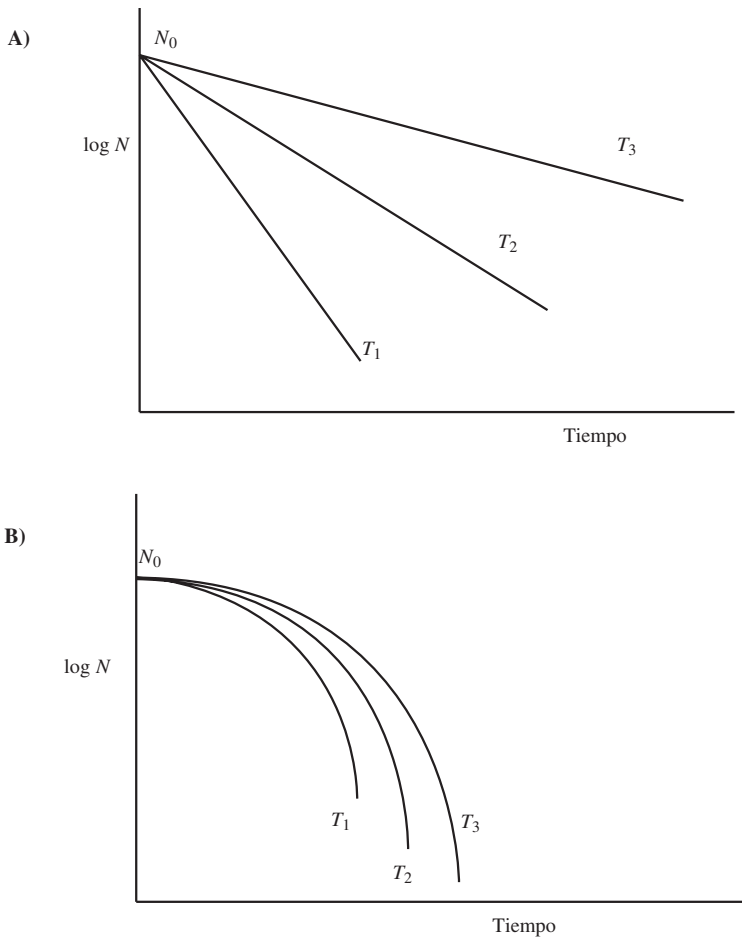


Figura 16.1. Curvas de destrucción térmica de microorganismos. $T_1 > T_2 > T_3$.
A) Formas vegetativas. B) Formas esporuladas.

Esto que es común a los tratamientos térmicos de microorganismos, en el caso de formas esporuladas puede no ser cierto, y al representar N/N_0 frente al tiempo en coordenadas semilogarítmicas, no se obtienen rectas, sino curvas, tal como se observa en la figura 16.1

En la figura 16.2 se representan curvas de destrucción térmica para algunos microorganismos presentes en la leche; mientras que en la figura 16.3 se dan las correspondientes a la destrucción térmica de algunas enzimas y factores biológicos.

En la figura 16.4 se representa una curva de destrucción térmica en la que para una temperatura de tratamiento determinada puede verse cómo se obtendría el valor del tiempo de reducción decimal.

16.2.3. Constante de tiempo de muerte térmica z

Los tratamientos térmicos se llevan a cabo a diferentes temperaturas, dependiendo en cada caso de las necesidades o disponibilidades de cada industria. Es por ello, que no necesariamente los tratamientos se llevan a cabo a la temperatura a la que se han obtenido los datos de destrucción térmica. Debe, por tanto, buscarse una

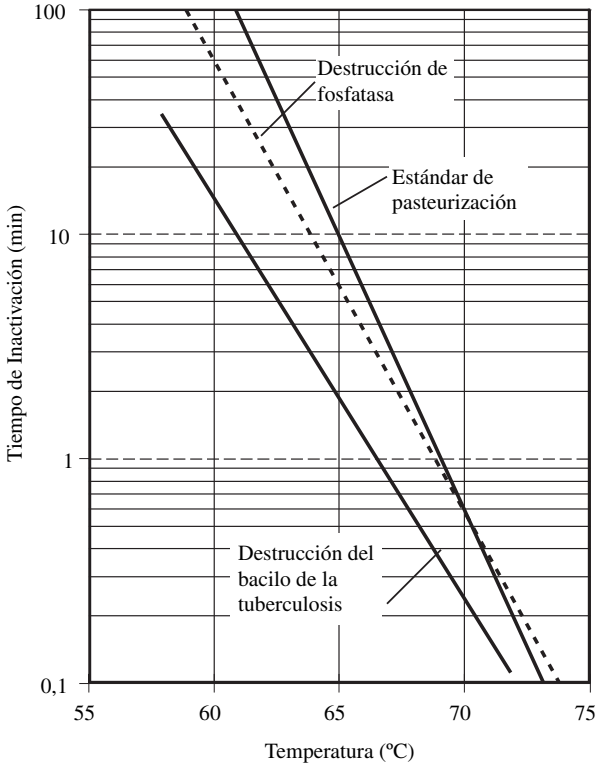


Figura 16.2. Curvas de destrucción térmica para leche (adaptado de Earle, 1983).

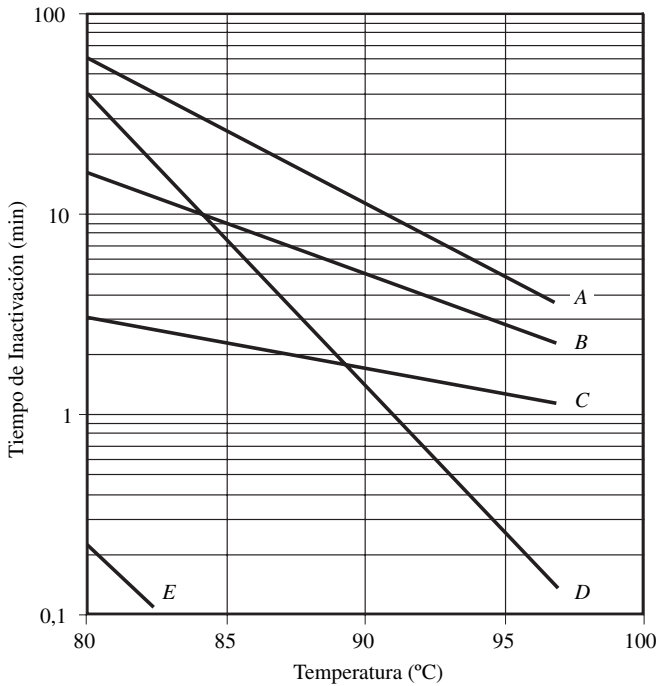


Figura 16.3. Curvas de destrucción térmica de factores biológicos: A) *Pectinesterasa* (cítricos). B) *Poligalacturonasa* (cítricos). C) *Ascórbico oxidasa* (melocotón). D) *Clostridium pasteurianum* (6D). E) *Mohos y levaduras* (12D). (Adaptado de Toledo y Chang, 1990).

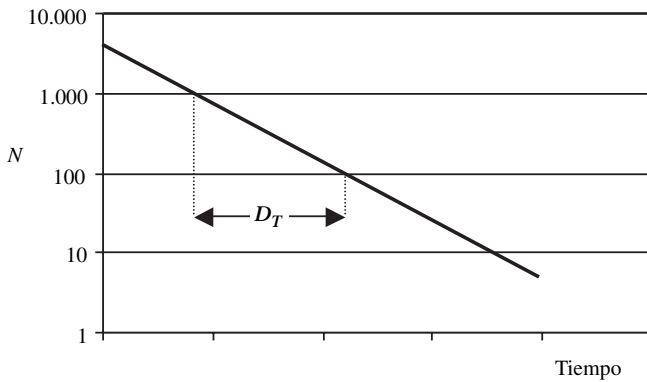


Figura 16.4. Curva TDT. Obtención del tiempo de reducción decimal.

relación entre el tiempo de destrucción térmica y la temperatura. Esta relación se da en forma gráfica en la figura 16.5, en la que se representa en coordenadas semilogarítmicas los tiempos de destrucción (TDT) o de reducción decimal (D_T)

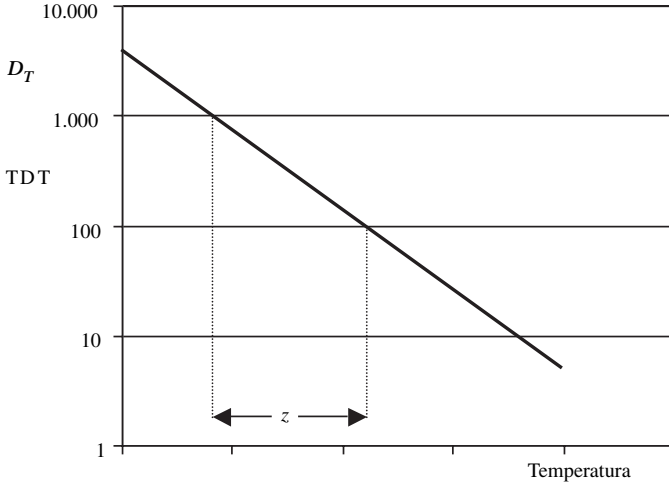


Figura 16.5. Curva de destrucción térmica TDT o D_T .

frente a la temperatura. Puede observarse que se obtiene una recta de pendiente negativa $-m$, cuyo valor es:

$$m = \frac{\log D_{T1} - \log D_{T2}}{T_1 - T_2} \tag{16.6}$$

en la que D_{T1} es el tiempo de reducción decimal a la temperatura T_1 , mientras que D_{T2} es el tiempo correspondiente a la temperatura T_2 .

Se define un parámetro z como la inversa de esta pendiente m , que mide la variación de la velocidad de destrucción térmica con la temperatura, y representa la elevación de temperatura necesaria para reducir el tiempo de tratamiento a la décima parte, o en su caso D_T .

De la figura puede obtenerse fácilmente una relación entre dos tiempos de tratamiento y sus temperaturas correspondientes:

$$\frac{\log t_1 - \log t_2}{\log 10} = \frac{T_2 - T_1}{z} \tag{16.7a}$$

o en función de tiempos decimales de reducción:

$$\frac{\log D_{T1} - \log D_{T2}}{\log 10} = \frac{T_2 - T_1}{z} \tag{16.7b}$$

Si una de estas temperaturas es la de referencia, se obtiene:

$$t_1 = t_R 10^{\frac{T_R - T_1}{z}} \tag{16.8a}$$

$$D_1 = D_R 10^{\frac{T_R - T_1}{z}} \tag{16.8b}$$

El valor z se utiliza para calcular la velocidad o eficacia letal L , que mide la letalidad a una temperatura T con respecto a la temperatura de referencia T_R :

$$L = 10^{\frac{T - T_R}{z}} \quad [16.9]$$

por lo que, tanto el tiempo de tratamiento t_T como el tiempo de reducción decimal D_T a una temperatura cualquiera T , se puede expresar en función de la velocidad letal:

$$t_T = \frac{t_R}{L} \quad [16.10a]$$

$$D_T = \frac{D_R}{L} \quad [16.10b]$$

16.2.4. Grado de reducción n

Para que la concentración de microorganismos al final de un tratamiento térmico fuera nula, de la ecuación 16.2 es fácil observar que sería necesario un tiempo de tratamiento infinito. Lo que indica que es imposible llegar a una esterilización total del producto. Ello hace que sea necesario definir una concentración final N_F que asegure que el producto tratado sea comercialmente estéril. Por tanto, no se puede hablar de esterilidad total de un producto, sino que se habla de esterilidad comercial.

El logaritmo decimal de la razón entre la cantidad de microorganismos iniciales N_0 a los de un tiempo determinado en los que se alcanza el nivel N_F , recibe el nombre de **grado de reducción**.

$$n = \log_{10} \left(\frac{N_0}{N_F} \right) \quad [16.11]$$

Este valor n es arbitrario y depende del tipo de microorganismo, aunque cuanto mayor sea el valor del grado de reducción mayor es la seguridad del tratamiento térmico. En la tabla 16.1 se dan valores de n para distintos microorganismos que son causa de deterioro en alimentos. Se puede observar que este valor es diferente dependiendo del tipo de microorganismo. Aquéllos que presentan valores superiores indican que para asegurar la esterilidad comercial es necesario rebajar el contenido de microorganismos a niveles más inferiores que aquellos que poseen un grado de reducción menor. En la bibliografía pueden encontrarse valores de los parámetros cinéticos para la degradación de componentes en alimentos (Lund, 1975).

16.2.5. Tiempo de muerte térmica F

Para una temperatura de tratamiento determinada T , el tiempo de tratamiento necesario para asegurar un grado de reducción n se denomina F_T . El valor de este tiempo de tratamiento puede obtenerse de la ecuación 16.5:

$$F_T = n D_T \quad [16.12]$$

Tabla 16.1. Parámetros de destrucción o degradación térmica de microorganismos y factores termolábiles

Alimento	Microorganismo o factor termolábil	T_R (°C)	D_T (min)	F_R (min)	z (°C)	n
Poco ácido (pH > 4,6)	<i>B. stearothermophilis</i>	121	4-5	15	9,5-10	5
	<i>C. thermosaccharolitico</i>	121	2-5	15	10	5
	<i>C. nigrificans</i>	121	2-5	15	10	5
	<i>C. botulinum</i>	121	0,1-0,3	2,5-3	10	12
	<i>C. sporogenes</i>	121	0,1-1,5	5	10	5
Ácido (4 < pH < 4,6)	<i>B. coagulans</i>	121	0,01-0,07	—	10	5
	<i>B. polymixa</i> y <i>macerans</i>	100	0,1-0,5	1,3-10 (F_{93})	14-17,5	—
	<i>C. pasteurianum</i>	100	0,1-0,5	1,3-10 (F_{93})	8	5
Muy ácido	Lactobacilos	65	0,5-6,0	0,1 (F_{93})	5-11	—
	<i>Leuconostoc</i>					
	Levaduras y mohos	121	$5 \cdot 10^{-8}$	10^{-6}	5-8	20
Maíz dulce y judías verdes	Peroxidasa	121	1,22	5,1	11-52	4
Espinaca	Catalasa	121	$2,3 \cdot 10^{-7}$	$9,3 \cdot 10^{-7}$	8,3	4
Guisante	Lipoxigenasa	121	$1,7 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-6}$	8,7	4
Pera	Polifenoloxidasa	121	$3,2 \cdot 10^{-8}$	$1,3 \cdot 10^{-7}$	5,6	4
Papaya	Poligalacturonasa	121	$4,4 \cdot 10^{-6}$	$1,7 \cdot 10^{-8}$	6,1	4
Espinaca y judías verdes	Vitamina B ₁	121	140	5,6	25	0,04
	Clorofila a	121	12,8	0,50	51-87	0,04
	Clorofila b	121	14,3	0,57	98-111	0,04

Es decir, el tiempo de tratamiento se obtiene al multiplicar el tiempo de reducción decimal por el grado de reducción. Esta ecuación es conocida como ley de supervivencia o primera ley de destrucción térmica de microorganismos o de degradación de alguno de los factores de calidad del alimento que pueden ser destruidos térmicamente. El valor de este parámetro F se denomina tiempo de muerte térmica.

Para un grado de reducción definido n , el tiempo de tratamiento depende de la temperatura, de tal forma que al aumentar la temperatura disminuye el tiempo necesario para conseguir dicho grado de reducción. Si se representa en coordenadas semilogarítmicas el tiempo de tratamiento frente a la temperatura, se obtiene una recta. Si el grado de reducción requerido es superior, por ejemplo $n+1$, se obtendrá una recta cuya pendiente sería la misma que para el grado de reducción n , aunque paralela a ella con una ordenada en el origen superior. Por contra, si el grado de reducción es $n-1$, la recta poseerá la misma pendiente, aunque su ordenada en el origen será inferior.

Generalmente, el tiempo de muerte térmica F referente a un microorganismo determinado se da en función de una temperatura de referencia T_R y un grado de reducción n .

La temperatura de referencia que se suele tomar es de $121,1\text{ }^\circ\text{C}$ ($250\text{ }^\circ\text{F}$), denominándose F_0 al valor de F correspondiente a esta temperatura. Es decir, es el tiempo requerido para una reducción de la población dada de una espora microbiana con un valor z de $10\text{ }^\circ\text{C}$ a $121,1\text{ }^\circ\text{C}$. Además, se define F_C para el valor de F en el centro del envase, mientras que F_S es la letalidad integrada del calor recibido en todos los puntos del envase:

$$F_S = n D_R \quad [16.13]$$

en la que D_R es el tiempo de reducción decimal a $121,1\text{ }^\circ\text{C}$. En sistemas con un calentamiento rápido del alimento a tratar, el valor de F_S se puede considerar el de F_0 o F_C . En la práctica el valor de F_0 se obtiene sumando las velocidades letales a intervalos de 1 minuto de la curva de calentamiento y enfriamiento del producto durante el procesado térmico. En el caso que el proceso de calentamiento sea lento, se corrige el tiempo requerido para el procesado térmico utilizando la siguiente ecuación:

$$B = f_n \log \left(\frac{j_h I_h}{g} \right) \quad [16.14]$$

en la que B es el tiempo de procesado térmico corregido con el tiempo necesario para que el dispositivo de tratamiento adquiera la temperatura de procesado, f_n son los minutos requeridos para que la curva de calentamiento semilogarítmica recorra un ciclo logarítmico, j_h es el factor de retraso de calentamiento, I_h es la diferencia entre la temperatura del dispositivo de tratamiento y la temperatura inicial del alimento, mientras que g es la diferencia de temperaturas entre el dispositivo de tratamiento y la máxima alcanzada en un punto determinado del alimento, que suele to-

marse como el de menor calentamiento (Stumbo *et al.*, 1983; Karel *et al.*, 1975a). A continuación se define cada uno de estos parámetros:

$$I_h = T_E - T_i \quad [16.15]$$

$$j_h = \frac{T_E - T_{ip}}{T_E - T_i} \quad [16.16]$$

$$g = T_E - T \quad [16.17]$$

siendo: T_E = Temperatura del dispositivo de tratamiento o esterilizador.

T = Temperatura en un punto dado del alimento.

T_i = Temperatura inicial del alimento.

T_{ip} = Temperatura obtenida por la intersección de la prolongación de la parte recta de la curva semilogarítmica de calentamiento y la línea vertical correspondiente al inicio del proceso, denominada temperatura pseudoinitial.

Además de estos parámetros, se pueden definir funciones análogas para la etapa de enfriamiento. De este modo I_f es la diferencia entre la temperatura al final del proceso de calentamiento (T_f) y la temperatura del agua de refrigeración (T_w). El factor de retraso de enfriamiento j_f correspondiente a la curva de enfriamiento, es similar al factor j_h y se define como:

$$j_f = \frac{T_w - T_{ip}}{T_w - T_i} \quad [16.18]$$

en la que T_i es la temperatura inicial del producto al inicio del enfriamiento y T_{ip} es la temperatura de enfriamiento pseudoinitial.

16.2.6. Valor de cocción C

El procesado térmico no sólo incide sobre los microorganismos presentes en el alimento, sino que afecta la calidad general del mismo, por lo que se utiliza un valor de cocción C , que es un concepto parecido a la letalidad, pero aplicado a la degradación sensorial. Para este valor se toma como temperatura de referencia 100 °C, con valores de z típicos que se encuentran en el intervalo de 20 a 40 °C.

$$C = C_{100} 10^{\frac{100 - T}{z}} \quad [16.19]$$

16.2.7. Efecto de la temperatura sobre los parámetros cinéticos y de tratamiento térmico

La destrucción térmica de microorganismos sigue una cinética de primer orden, de modo que al aumentar la temperatura de tratamiento, la constante cinética aumenta, con lo que la velocidad de destrucción térmica también aumenta. El

efecto de la temperatura sobre la constante cinética puede describirse mediante la ecuación de Arrhenius;

$$k = k_0 \exp\left(\frac{-E_a}{RT}\right) \quad [16.20]$$

en la que k es la constante cinética, K_0 es el factor de frecuencia, E_a la energía de activación, R la constante de gases y T la temperatura absoluta.

La relación entre las constantes cinéticas para dos temperaturas T_1 y T_2 se puede expresar como:

$$\frac{k_2}{k_1} = \exp\left[\frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right] \quad [16.21a]$$

o bien:

$$\log\left(\frac{k_2}{k_1}\right) = \frac{E_a}{2,303 R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) \quad [16.21b]$$

como $k = 2,303/D$ se cumple:

$$\log\left(\frac{k_2}{k_1}\right) = \log\left(\frac{D_1}{D_2}\right)$$

De la ecuación 16.7:

$$\frac{D_1}{D_2} = 10^{\frac{T_2 - T_1}{z}}$$

por lo que:

$$\log\left(\frac{k_2}{k_1}\right) = \frac{T_2 - T_1}{z}$$

Al combinar estas ecuaciones se obtiene:

$$\frac{T_2 - T_1}{z} = \frac{E_a}{2,303 R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$$

de la que se puede despejar el valor z en función de la energía de activación y las temperaturas:

$$z = \frac{2,303 R}{E_a T_1 T_2} \quad [16.22]$$

16.3. Tratamiento de productos envasados

En el apartado anterior se ha visto la gran importancia que tiene la temperatura de tratamiento sobre el tiempo de destrucción térmica. En productos envasados, los tratamientos se realizan en dispositivos en los que el envase pasa de una tempera-

tura ambiente a una de tratamiento para que, en un tiempo determinado, se consiga llegar a niveles de esterilización adecuados. En estos dispositivos el producto a tratar va elevando su temperatura hasta que llega a la que se denomina de mantenimiento o de proceso, para luego pasar a una etapa de enfriamiento.

16.3.1. Curva de penetración de calor

En este proceso es importante conocer el punto del producto envasado cuya temperatura es mínima, es decir, el punto de menor calentamiento. Ya que este punto es el que recibe un menor grado de tratamiento térmico, y en el que puede que no se llegue a realizar un tratamiento adecuado. Por ello, es necesario conocer la curva de penetración de calor en este punto, ya que da la variación de su temperatura con el tiempo de calentamiento.

La determinación de la curva de penetración para un producto y envase determinados suele realizarse experimentalmente, aunque en algunos casos puede determinarse de modo aproximado mediante métodos analíticos. Estos últimos suponen que el calor penetra en el alimento por conducción, lo que sólo es cierto en alimentos sólidos, calculando la temperatura del centro geométrico en función del tiempo. Sin embargo, para productos líquidos esto no se cumple, ya que la transmisión de calor no es únicamente por conducción, debe tenerse presente su componente convectiva. Además, el punto de menor calentamiento no coincide con el centro geométrico.

Cuando el envase que contiene el alimento se introduce en el dispositivo de tratamiento térmico, que se halla a una temperatura T_e , se observa que la temperatura del alimento va aumentando paulatinamente. Es importante conocer la evolución de la temperatura del punto de menor calentamiento (T_C), ya que éste es el punto que recibe un menor tratamiento térmico, y debe asegurarse que la carga microbiana sea eliminada correctamente. En el caso de que la transmisión de calor se realizara por conducción, el punto de menor calentamiento coincide con el centro geométrico. Sin embargo, si en el calentamiento aparecen corrientes convectivas en el interior del envase, el punto de menor calentamiento no se corresponde con el centro geométrico, sino que se halla situado en el eje vertical pero más cercano al fondo del envase.

Para caracterizar la penetración del calor en el alimento, se suele realizar una representación gráfica de los datos de la variación de la temperatura en el alimento con el tiempo de calentamiento. Se toma como temperatura del alimento la del centro geométrico T_C o T , y se observa que al representar el logaritmo de $g = (T_e - T)$ frente al tiempo de calentamiento se obtiene una función lineal. Utilizando una gráfica semilogarítmica se representa en el eje de ordenadas del lado izquierdo $(T_e - T)$, y en el eje de ordenadas de la derecha, los valores de $T = T_e - g$ (figura 16.6). En este último eje, aparecen los ciclos logarítmicos de $T_e - 1$ a $T_e - 10$ y a $T_e - 100$.

A partir de esta gráfica, la temperatura del producto se puede representar en forma semilogarítmica frente al tiempo, para lo que se invierte el papel semilogarítmico 180° y marcando la línea superior con un número equivalente a $T_e - 1$. El

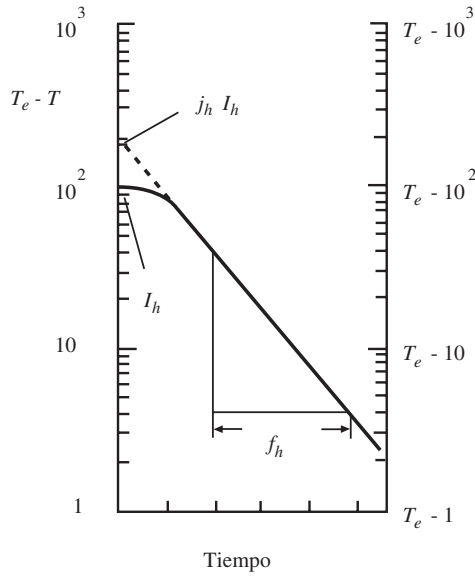


Figura 16.6. Curva de penetración de calor.

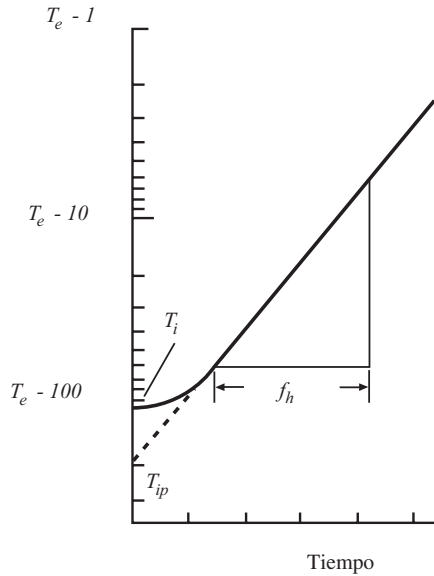


Figura 16.7. Gráfica de los datos de la curva de penetración de calor.

siguiente ciclo logarítmico se marca con un número equivalente a $T_e - 10$ y el tercer ciclo con un número equivalente a $T_e - 100$. Este tipo de gráfico se representa en la figura 16.7.

Cuando los alimentos envasados se colocan en el interior del dispositivo de tratamiento térmico existe un período de inducción antes que la temperatura del alimento empiece a aumentar. Esto hace que en las figuras 16.6 y 16.7 la curva de penetración de calor no sea lineal al inicio de la operación.

A partir de la figura 16.7 es posible determinar la temperatura pseudoinicial T_{ip} al prolongar la línea recta de la curva y cortar el eje de ordenadas. Con esta temperatura y las temperaturas inicial T_i y la del dispositivo de tratamiento T_e , se calcula j_h . El valor f_h se obtiene de la parte lineal de la curva de penetración del calor tomando el valor de la inversa de la pendiente de esta recta para un ciclo logarítmico en la curva de calentamiento.

16.3.2. Métodos para determinar la letalidad

A) Método gráfico

El nivel de esterilización se expresa como el tiempo y la temperatura de tratamiento para cada tipo de producto, forma y tamaño de envase. Si el producto se trata a una temperatura fija, el tiempo de tratamiento se obtendrá directamente de la ecuación 16.10. Sin embargo, la temperatura del producto varía, no sólo con la posición, sino también con el tiempo. Por eso, se suele establecer que el tiempo se mida desde que se alcanza la temperatura de trabajo hasta que finaliza el calentamiento.

Para una temperatura variable con el tiempo de tratamiento, es necesario integrar para obtener el grado de reducción requerido:

$$\log \left(\frac{C_0}{C} \right) = \int_0^t \frac{dt}{D_T} \quad [16.23]$$

Para resolver el término integral debe conocerse cómo varía el tiempo de tratamiento o de reducción decimal, a cada temperatura, con el tiempo de calentamiento. Para lo que es necesario conocer previamente la variación de la temperatura con el tiempo (curva de penetración). Existen diferentes métodos de resolución, sin embargo, se utilizará únicamente el de la curva TDT.

Para asegurar un tratamiento térmico adecuado, el término integral de la ecuación 16.23 debe ser superior al grado de reducción n preestablecido para cada tipo de microorganismo y producto:

$$\int_0^t \frac{dt}{D_T} = \int_0^t \frac{L}{D_R} dt \geq n \quad [16.24a]$$

y como el tiempo de tratamiento o de muerte térmica a una determinada temperatura es función del de reducción decimal ($F_T = n D_T$), se obtiene:

$$\int_0^t \frac{dt}{F_T} = \int_0^t \frac{L}{F_R} dt \geq 1 \quad [16.24b]$$

El valor del término integral se puede resolver gráficamente al representar $1/t_T$ frente al tiempo y obtener el área por debajo de la curva entre dos tiempos, de tal forma que su valor sea como mínimo 1. En el caso de que se utilice el tiempo de reducción decimal, debe representarse $1/D_T$ frente al tiempo, debiendo ser el valor del área de la curva superior al grado de reducción n (figura 16.8).

Para conocer los valores de los tiempos de tratamiento o de reducción decimal para cada temperatura, es necesario recurrir a las ecuaciones 16.8a y 16.8b.

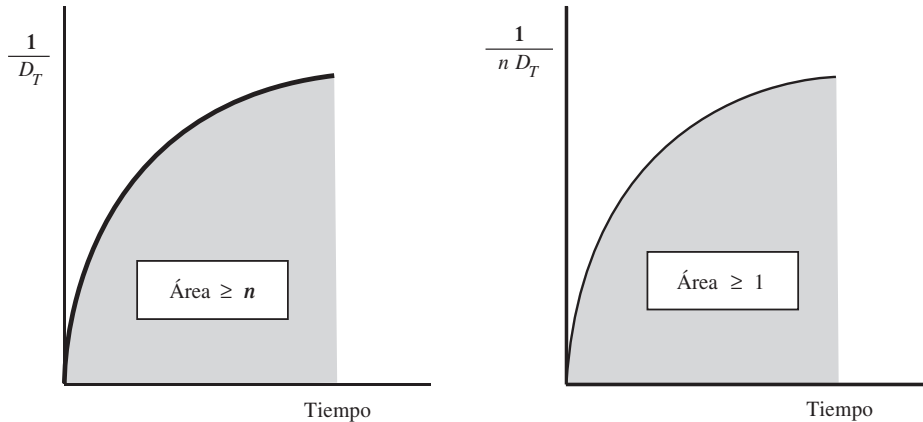


Figura 16.8. Método gráfico de la evaluación de la letalidad.

B) Método matemático

El método matemático utiliza la ecuación 16.14 para el cálculo del tiempo de procesado. Este tiempo se puede calcular si se conoce el valor f_h , la diferencia de temperaturas $T_e - T_i$, el factor de inducción térmica j_h y el valor g de la diferencia de temperatura entre el dispositivo de tratamiento T_e y el punto de menor calentamiento al final del procesado térmico. A partir de la curva de penetración del calor (figura 16.7) se pueden determinar los tres primeros parámetros, mientras que el factor g no se obtiene con tanta facilidad, ya que no se puede saber a priori cuál es la temperatura final para asegurar el nivel adecuado que asegure la esterilidad del alimento.

Este método fue desarrollado originariamente por Ball y está basado en la integración de los efectos letales producidos por la relación tiempo-temperatura. Se puede aplicar cuando la curva de penetración de calor, en coordenadas semilogarítmicas, es recta después de un período inicial de inducción. La ecuación desarrollada por Ball (ecuación 16.14) tiene en cuenta los efectos letales de la fase de enfriamiento. Se define un parámetro U que es el tiempo requerido para que a la temperatura del dispositivo de tratamiento se lleve a cabo la misma cantidad de destrucción microbiana, equivalente al valor F del proceso:

$$U = F F_R = F 10^{\frac{T_R - T_e}{z}} \quad [16.25]$$

en la que F_R es el tiempo a la temperatura T_R equivalente a 1 minuto a 121 °C (Stumbo *et al.*, 1983).

Stumbo y Longley (1966) sugirieron la incorporación de otro parámetro f_i/U , y se han publicado tablas de este parámetro en función de g para diferentes valores de z (Stumbo *et al.*, 1983). En la tabla 16.2 se da una de ellas para el caso de $z = 10$ °C. Para obtener estas tablas, Stumbo tomó datos de diferentes puntos del envase para tener distintos valores de j_h . Estas tablas suponen que la transmisión de calor es sólo por conducción, y realiza suposiciones no arbitrarias acerca de la forma de los perfiles de temperatura en la fase de enfriamiento. Este método está limitado por el intervalo de j_h y errores de redondeo en los cálculos numéricos. También se pueden encontrar gráficos que permiten obtener el valor de g al final del tratamiento, en los que en coordenadas semilogarítmicas se representa f_i/U frente a $\log g$, para diferentes valores de z , y en las que se obtienen diferentes curvas dependiendo del valor de j (Toledo, 1980; Teixeira, 1992).

El tiempo de procesado calculado por este método, supone que cuando los envases se introducen en el dispositivo de tratamiento la temperatura del mismo es T_e , esto sólo ocurre en dispositivos que trabajan de forma continua. Sin embargo, en el procesado discontinuo existe un tiempo de inducción hasta que el aparato adquiere la temperatura de tratamiento. Para corregir el aporte de este tiempo de inducción a la letalidad global, Ball (1923) supone que el 40% de este tiempo de inducción contribuye al procesado térmico, con lo que el tiempo real de procesado será:

$$t_R = B - 0,4 t_i \quad [16.26]$$

siendo t_i el tiempo de inducción para que en el dispositivo se alcance la temperatura de tratamiento T_e .

16.4. Tratamiento térmico en el procesado aséptico

En el envasado aséptico de productos alimentarios se utilizan diferentes tipos de dispositivos de tratamiento, en los que el alimento recibe el tratamiento que rebaja su carga microbiana de forma adecuada, para luego ser envasado asépticamente. Estos dispositivos constan esencialmente de tres partes bien diferenciadas: una primera de calentamiento en la que el alimento pasa de su temperatura inicial a la propia de tratamiento, una segunda denominada de mantenimiento en la que el alimento recibe el tratamiento térmico a una temperatura constante, para luego pasar a una tercera etapa de enfriamiento. Una vez tratado el alimento se lleva a un envase estéril que se sella en un ambiente aséptico. Tanto en la etapa de calentamiento como en la de enfriamiento se suelen utilizar intercambiadores de calor, que pueden ser de los diferentes tipos descritos en el capítulo 14.

En la etapa de mantenimiento, el alimento suele circular por una conducción cilíndrica recibiendo el calor a través de la pared del tubo en un intercambiador, en general de tubos concéntricos.

Tabla 16.2. Relaciones f_h/U : g para valores de $z = 10\text{ }^\circ\text{C}$

f_h/U	Valores de g ($^\circ\text{C}$) cuando j es:								
	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
0,2	$2,27 \cdot 10^{-5}$	$2,46 \cdot 10^{-5}$	$2,64 \cdot 10^{-5}$	$2,83 \cdot 10^{-5}$	$3,02 \cdot 10^{-5}$	$3,20 \cdot 10^{-5}$	$3,39 \cdot 10^{-5}$	$3,58 \cdot 10^{-5}$	$3,76 \cdot 10^{-5}$
0,4	$7,39 \cdot 10^{-3}$	$7,94 \cdot 10^{-3}$	$8,44 \cdot 10^{-3}$	$9,00 \cdot 10^{-3}$	$9,50 \cdot 10^{-3}$	$1,00 \cdot 10^{-2}$	$1,06 \cdot 10^{-2}$	$1,11 \cdot 10^{-2}$	$1,16 \cdot 10^{-2}$
0,6	$4,83 \cdot 10^{-2}$	$5,24 \cdot 10^{-2}$	$5,66 \cdot 10^{-2}$	$6,06 \cdot 10^{-2}$	$6,44 \cdot 10^{-2}$	$6,83 \cdot 10^{-2}$	$7,28 \cdot 10^{-2}$	$7,67 \cdot 10^{-2}$	$8,06 \cdot 10^{-2}$
0,8	0,126	0,136	0,148	0,159	0,171	0,182	0,194	0,205	0,217
1	0,227	0,248	0,269	0,291	0,312	0,333	0,354	0,376	0,397
2	0,85	0,92	1,00	1,07	1,15	1,23	1,30	1,38	1,45
3	1,46	1,58	1,69	1,81	1,93	2,04	2,16	2,28	2,39
4	2,01	2,15	2,30	2,45	2,60	2,74	2,89	3,04	3,19
5	2,47	2,64	2,82	3,00	3,17	3,35	2,53	3,71	3,88
6	2,86	3,07	3,27	3,47	3,67	3,88	4,08	4,28	4,48
7	3,21	3,43	3,66	3,89	4,12	4,34	4,57	4,80	5,03
8	3,49	3,75	4,00	4,26	4,51	4,76	5,01	5,26	5,52
9	3,76	4,03	4,31	4,58	4,86	5,13	5,41	5,68	5,96
10	3,98	4,28	4,58	4,88	5,18	5,48	5,77	6,07	6,37
20	5,46	5,94	6,42	6,89	7,37	7,84	8,32	8,79	9,27
30	6,39	6,94	7,56	8,11	8,72	9,33	9,89	10,5	11,1
40	7,11	7,72	8,39	9,06	9,72	10,4	11,1	11,7	12,4
50	7,67	8,39	9,11	9,83	10,6	11,3	12,0	12,7	13,4
60	8,22	8,94	9,72	10,5	11,2	12,0	12,7	13,5	14,3
70	8,67	7,78	10,2	11,1	11,8	12,6	13,4	14,2	15,0
80	9,01	9,89	10,7	11,6	12,3	13,2	14,0	14,8	15,6
90	9,44	10,28	11,2	12,0	12,8	13,7	14,5	15,3	16,2
100	9,78	10,7	11,6	12,4	13,3	14,1	15,0	15,8	16,7

En los dispositivos de tratamiento se debe asegurar que el tiempo de residencia del alimento fluido dentro del aparato sea como mínimo el tiempo necesario para reducir la carga microbiana en el grado de reducción deseado.

En cualquier aparato de tratamiento el tiempo de residencia es la relación entre el volumen del dispositivo V y el caudal volumétrico de circulación q :

$$t = \frac{V}{q} \quad [16.27]$$

Para el caso de circulación del fluido alimentario en dispositivos tubulares, el tiempo de residencia se obtiene mediante la expresión:

$$t = \frac{L}{v} \quad [16.28]$$

en la que L es la longitud del tubo y v la velocidad lineal de circulación del fluido a través del tubo.

Generalmente, en el procesado aséptico interesa calcular la longitud del tubo de mantenimiento, para lo que se utiliza la ecuación 16.28. En esta ecuación, la velocidad a utilizar depende del régimen de circulación y tipo de fluido. Para fluidos newtonianos que circulan en régimen turbulento se utiliza la velocidad media (v_m). Sin embargo, si el fluido circula en régimen laminar ($Re < 2.100$) debe utilizarse la velocidad máxima, que es función de la velocidad media:

$$v_{\text{máx}} = 2 v_m \quad [16.29]$$

Si el fluido presenta un comportamiento reológico de ley de la potencia, para calcular la velocidad máxima en función de la velocidad media debe utilizarse la gráfica dada en la figura 8.9 del capítulo 8.

En el procesado aséptico pueden presentarse problemas de cálculo cuando el producto a tratar está formado por dos fases, con partículas en suspensión en el seno de un fluido portador, como es el caso de sopas alimentarias. En estos casos, el problema reside en que cuando la fase fluida ha adquirido la temperatura de procesado las partículas sólidas poseen una temperatura inferior. Para asegurar un procesado térmico adecuado, los cálculos se deben realizar respecto a los puntos de menor calentamiento, que coinciden con el centro geométrico de las partículas sólidas. Esto hace que los tiempos de residencia en el tubo de mantenimiento sean mayores y que las partículas necesiten un mayor tratamiento térmico. Además, puede ocurrir que las partículas sólidas queden dañadas (Ohlsson, 1994). Es importante conocer la transmisión de calor hacia el interior de las partículas y obtener la evolución de la temperatura del centro geométrico de las mismas con el tiempo de procesado. Este será un proceso de calentamiento que transcurre en estado no estacionario, y deberá aplicarse alguno de los métodos descritos en el apartado 13.3 del capítulo 13. Para ello, debe evaluarse previamente el coeficiente de transmisión de calor desde el fluido hacia las partículas. En la bibliografía existen ecua-

ciones que permiten calcular los coeficientes de transmisión de calor para fluidos que circulan por el exterior de sólidos. Así, para fluidos que circulan por el exterior de esferas, una expresión que liga los módulos de Nusselt, Reynolds y Prandtl es (Ranz y Marshall, 1952):

$$(\text{Nu}) = 2 + 0,6 (\text{Re})^{0,5} (\text{Pr})^{1/3} \quad [16.30]$$

Si el fluido y las partículas circulan a la misma velocidad, el módulo de Reynolds se anula y se obtiene que $(\text{Nu}) = 2$.

Según Chandarana *et al.* (1990), si el fluido es agua se puede utilizar la expresión:

$$(\text{Nu}) = 2 + 1,33 \cdot 10^{-3} (\text{Re})^{1,08} \quad [16.31]$$

ecuación válida para $287 < (\text{Re}) < 880$.

Si el fluido que circula por el exterior de las partículas es una solución de almidón, se debe utilizar la expresión:

$$(\text{Nu}) = 2 + 2,82 \cdot 10^{-3} (\text{Re})^{1,16} (\text{Pr})^{0,89} \quad [16.32]$$

ecuación válida para $1,2 < (\text{Re}) < 27$ y $9,5 < (\text{Pr}) < 376$.

En todas estas ecuaciones, la velocidad que debe utilizarse en el cálculo del módulo de Reynolds, es la velocidad relativa con que las partículas circulan en el interior del tubo respecto al fluido.

En el caso de fluidos con partículas en suspensión, también pueden aplicarse ecuaciones que permiten el cálculo directo de los tiempos de procesado. Para ello, debe obtenerse inicialmente la distribución de temperaturas en las partículas. El valor F está relacionado con la difusividad, tamaño de las partículas (R) y posición en la tubería (r) mediante la ecuación:

$$F(t) = j \exp(-Bt)$$

$$F_0 = \frac{E[A \exp(-Bt_p)]}{B} 10^{\frac{T_A - T_R}{z}}$$

$$A = j 2,3 \frac{T_A - T_R}{z} \quad [16.33]$$

en la que T_A es la temperatura externa de la partícula, T_R la temperatura de referencia, t_p es el tiempo de procesado; $E(x)$ es la integral exponencial, mientras que j y B se pueden obtener mediante las relaciones dadas en la tabla 16.3, para diferentes tipos de partículas, en las que α es la difusividad térmica de las partículas y η_l la viscosidad del fluido portador.

16.4.1. Tiempos de permanencia

En dispositivos tubulares en los que el fluido circula en flujo de pistón, el tiempo de residencia de los microorganismos que contiene el fluido coincide con el

Tabla 16.3. Parámetros para el cálculo de F en la ecuación 16.33

Geometría de la partícula	Posición en la partícula	j	B
Esfera de radio R	Centro	2	$\frac{\pi^2 \alpha}{R^2}$
	Cualquiera	$\frac{2}{\pi} \frac{R}{r} \operatorname{sen} \frac{\pi r}{R}$	
Paralelepípedo (2X) (2Y) (2Z)	Centro	2,0641	
	Cualquiera	$2,0641 \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{X} \cos \frac{\pi}{2} \frac{y}{Y} \cos \frac{\pi}{2} \frac{z}{Z}$	$\frac{\pi^2 \alpha}{4} \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} \right)$
Cilindro (2R) (2L)	Centro	2,0397	$\frac{\alpha}{4} \left(\frac{\pi^2}{L^2} + \frac{\eta_l^2}{R^2} \right)$

tiempo de residencia medio. Por lo que no existirán problemas en el cálculo de tratamientos térmicos. Sin embargo, puede ocurrir que el fluido no circule en flujo de pistón, en cuyo caso habrá microorganismos que se introduzcan en el aparato al mismo tiempo, pero su tiempo de permanencia en el mismo sea distinto.

Así, a modo de ejemplo, si el fluido circula en régimen laminar por una conducción cilíndrica, existe un perfil parabólico de velocidades, de tal forma que los microorganismos que se introduzcan por la vena central poseerán una velocidad mayor, y su tiempo de permanencia será menor. Esto puede provocar que el tratamiento no sea adecuado, ya que el tiempo de permanencia de estos microorganismos sea menor que el tiempo medio de residencia. Es por ello que resulta imprescindible llegar a conocer la velocidad máxima y realizar los cálculos con ella, ya que es la que corresponde al mínimo tiempo de permanencia en el dispositivo de tratamiento.

En la figura 16.9 se observan los perfiles de velocidad en dispositivos tubulares para diferentes regímenes de circulación en tuberías y se da, asimismo, un esquema de un tanque agitado.

16.4.2. Dispersión de tiempos de permanencia

En los dispositivos reales de tratamiento térmico, los microorganismos que entran al mismo instante no permanecen en el dispositivo el mismo tiempo. Es conveniente conocer cual es la dispersión en los tiempos de permanencia para realizar un cálculo adecuado del tiempo de tratamiento.

A continuación se definen algunos parámetros que serán necesarios en apartados posteriores.

El **tiempo de permanencia** de un microorganismo en el dispositivo de tratamiento es el intervalo de tiempo transcurrido entre la entrada y salida.

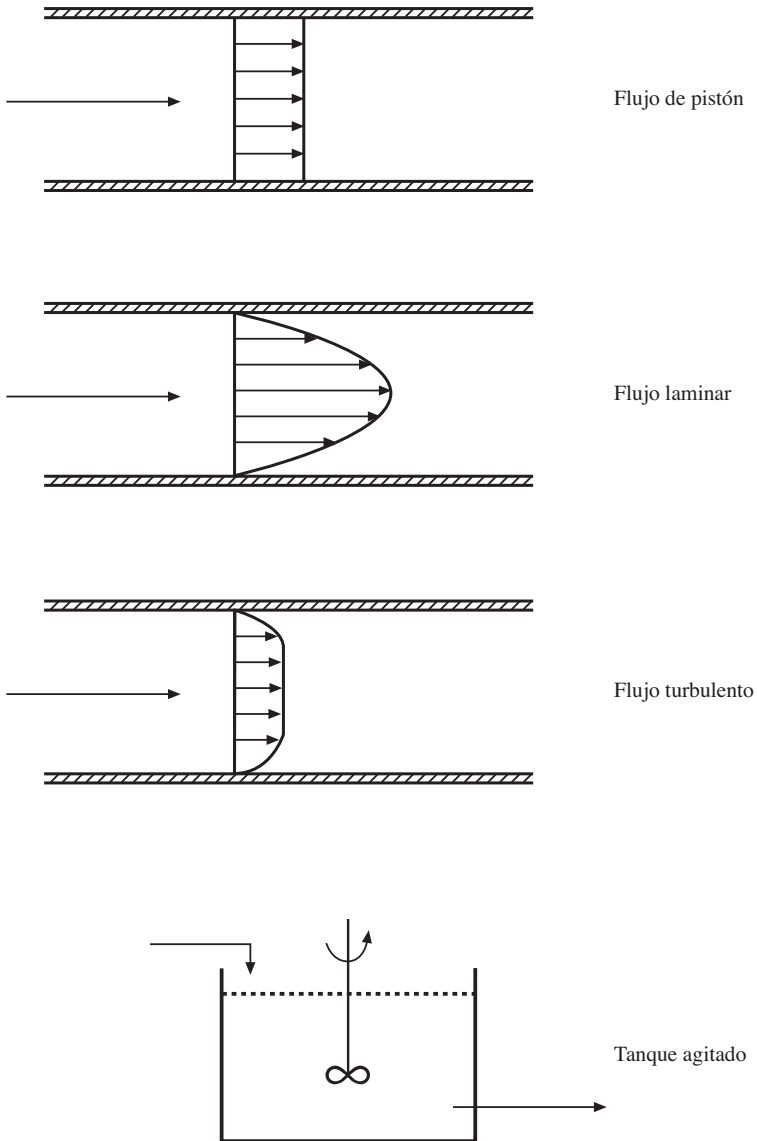


Figura 16.9. Flujo de fluidos en tuberías y en tanque agitado.

Edad es el tiempo transcurrido desde la entrada hasta el instante considerado.

Función de distribución de edades internas (I) es la curva que representa la distribución de edades en el interior del equipo de tratamiento.

Función de distribución de edades externas (E) es la curva que representa la distribución de edades de los microorganismos que abandonan el equipo de tratamiento; es decir, los tiempos de permanencia en él.

Para llegar a determinar estas funciones es necesario recurrir a técnicas experimentales, una de las cuales es la del **trazador-respuesta**. Esta técnica consiste en introducir un trazador en la corriente de entrada y medir su concentración a la salida.

Las **funciones entrada** más usuales son las de escalón y la de impulso o delta. En la primera de ellas, en un instante determinado se introduce el trazador con una cierta concentración y se mantiene esta entrada a lo largo de todo el experimento. En cambio, en la entrada delta o por impulso, como su nombre indica, el trazador se introduce en una cierta cantidad de una vez (figura 16.10). En esta figura, C_t es la concentración del trazador en un instante determinado t , mientras que C_0 es la concentración total del trazador.

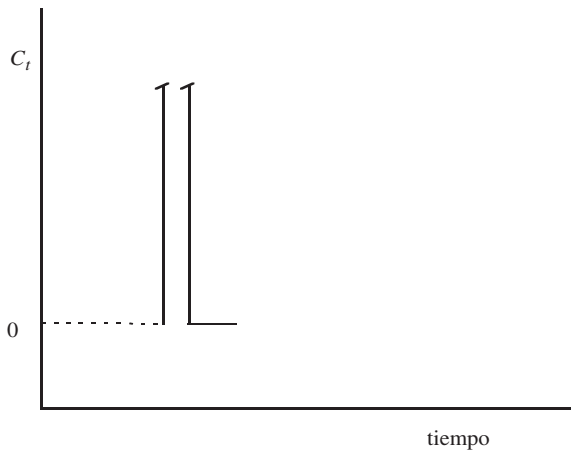


Figura 16.10. Entrada de trazador en forma de impulso.

Las **funciones respuestas** de cada una de las de entrada se representan por F y C , para la de escalón e impulso, respectivamente.

Es de resaltar que todas las funciones definidas en este apartado deben estar normalizadas.

Las relaciones entre las diferentes funciones de entrada y respuesta son las siguientes:

$$I = 1 - F \quad [16.34a]$$

$$E = C \quad [16.34b]$$

$$E = \frac{dF}{d\theta} = - \frac{dI}{d\theta} \quad [16.34c]$$

en las que θ es una variable adimensional de tiempo, definida como el cociente entre el tiempo t y el tiempo medio de residencia t_M .

De todas estas funciones, la que se utilizará en los cálculos de tratamientos térmicos en continuo será la función de distribución de edades externas E . Por ello, en

apartados sucesivos será la única de las funciones definidas en la que se hará hincapié de sus propiedades y cálculo.

16.4.3. Función distribución E en el comportamiento ideal

Se considerará circulación ideal del alimento en un dispositivo de tratamiento térmico, si el equipo se trata de alguno de los tres que se citan a continuación: tanque agitado de mezcla perfecta, flujo laminar o en pistón a través de un dispositivo tubular.

A continuación se dan las expresiones de la función distribución de edades externas para cada uno de estos dispositivos, en función de la variable tiempo real y adimensional:

- Tanque agitado de mezcla perfecta:

$$E = \frac{1}{t_M} \exp\left(-\frac{t}{t_M}\right) \quad [16.35a]$$

$$E_\theta = \exp(-\theta) \quad [16.35b]$$

- Dispositivo tubular en flujo de pistón:

$$E = \delta(t - t_M)$$

que se conoce como función distribución delta o de Dirac.

- Dispositivo tubular en flujo laminar:

$$E = \frac{t_M^2}{2 t^3} \quad [16.36a]$$

$$E_\theta = \frac{1}{2 \theta^3} \quad [16.36b]$$

En la figura 16.11 se representan todas estas funciones E respuesta de la entrada en impulso.

Para fluidos **no newtonianos** que circulan por conducciones circulares, también es posible obtener las funciones de distribución de edades externas. Así, para fluidos que siguen la **ley de la potencia**, la función se expresa:

$$E = \frac{2n}{3n+1} \frac{t_M^3}{t^3} \left(1 - \frac{n+1}{3n+1} \frac{t_M}{t}\right)^{\frac{n-1}{n+1}} \quad [16.37]$$

en la que n es el índice de comportamiento al flujo.

Para plásticos de Bingham que circulan por tuberías, se crea un perfil de velocidades en el que la vena central circula en flujo de pistón. La función distribución de edades externas es:

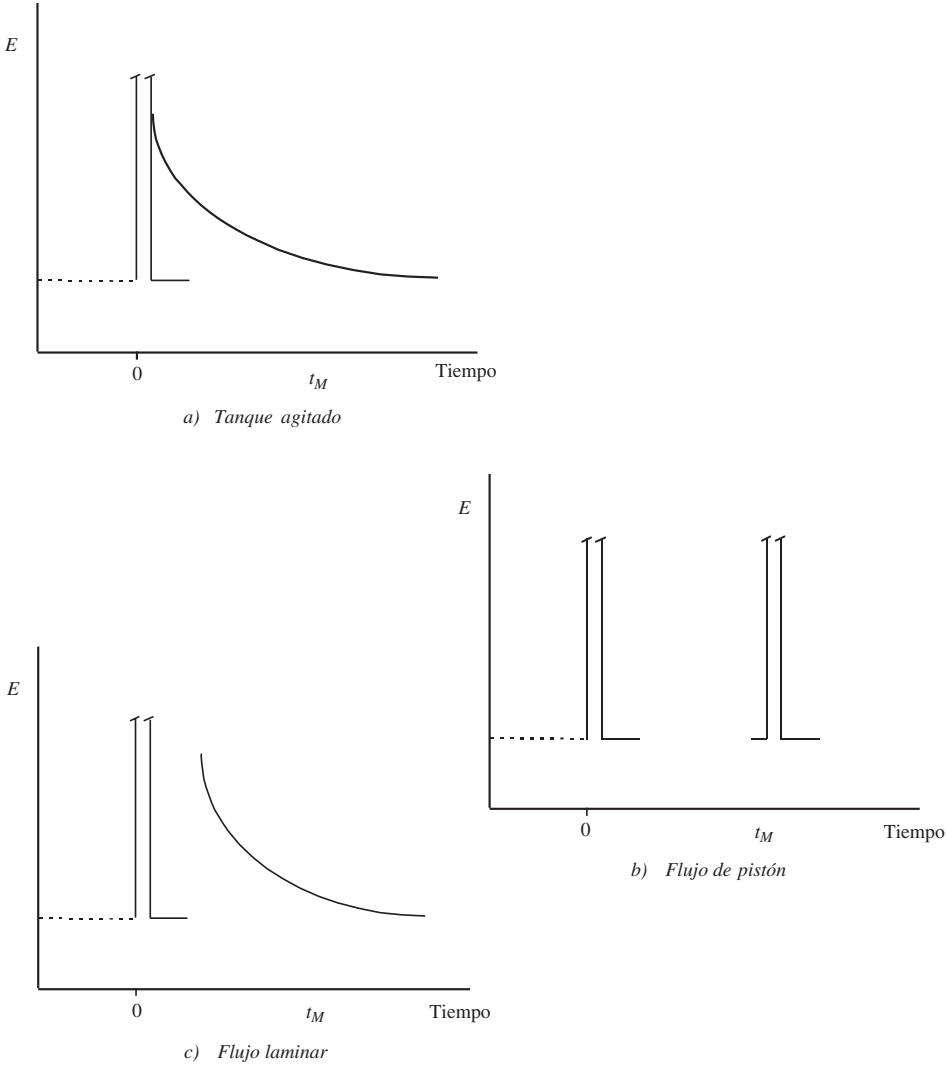


Figura 16.11. Función distribución de edades externas para diferentes tipos de flujo.

$$E = \frac{(1 - m) t_0 t_M^3}{t^3} \left[1 - m + \frac{m}{\sqrt{1 - \sigma_0 \frac{t_M}{t}}} \right] \quad [16.38]$$

en la que:

$$m = \frac{r}{R} = \frac{\sigma_0}{\sigma_{PARED}} \quad \text{y} \quad t_0 = \frac{m^2 + 2m + 3}{6}$$

siendo σ_0 el umbral de fluencia, σ_{PARED} el valor del esfuerzo cortante en la pared de la tubería, y t_0 es un parámetro que representa el tiempo de residencia del fluido en el núcleo central en flujo de pistón.

16.4.4. Función distribución E en el comportamiento no ideal

La función distribución de edades externas, como su nombre indica, es la función que da el tiempo de permanencia de cada elemento de fluido en el dispositivo o aparato de tratamiento. Esta función depende del camino que el fluido sigue en el interior del recipiente.

Si se considera un recipiente de tratamiento térmico, en el alimento que entra con un caudal volumétrico q , la función distribución de edades externas puede representarse según se indica en la figura 16.12. Para que esta función esté normali-

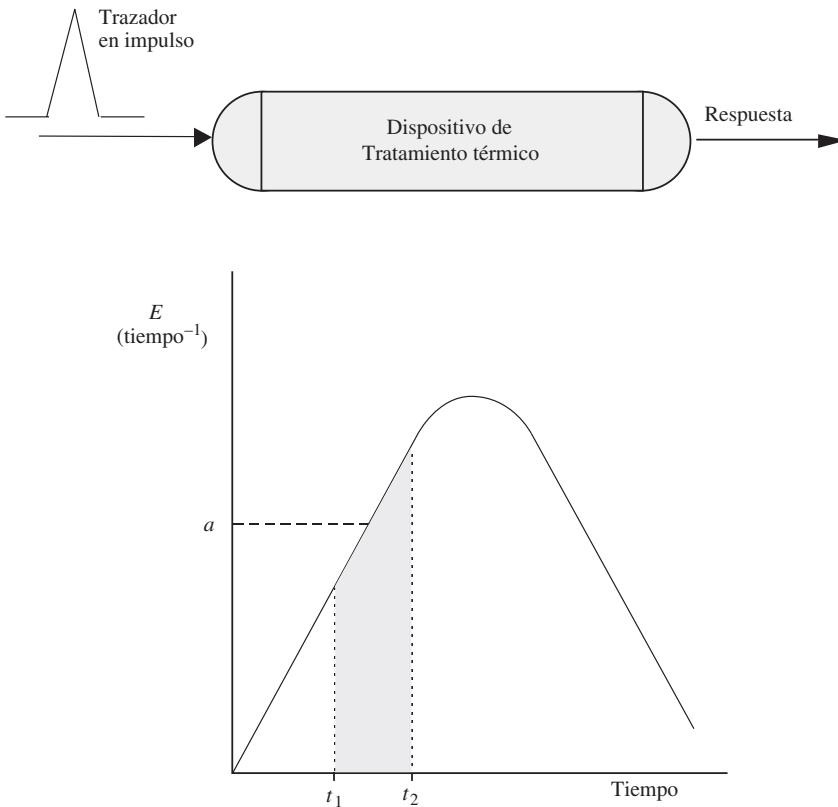


Figura 16.12. Obtención de la curva de edades externas.

zada el área por debajo de la curva debe valer la unidad:

$$\int_0^{\infty} E dt = 1 \quad [16.39]$$

La fracción de fluido que sale del recipiente entre dos tiempos cualesquiera t_1 y t_2 será:

$$E \Delta t = a (t_2 - t_1) \quad [16.40]$$

siendo a el valor medio de la función distribución de edades externas en este intervalo de tiempo.

La fracción de fluido que sale en un tiempo inferior a t_1 es:

$$\int_0^{t_1} E dt$$

mientras que la fracción que sale a tiempos superiores a t_1 :

$$\int_{t_1}^{\infty} E dt = 1 - \int_0^{t_1} E dt$$

Tal como se ha indicado anteriormente, la función E debe obtenerse experimentalmente inyectando un trazador y observando la respuesta. Para el caso concreto que el trazador se introduzca en forma de impulso en la corriente del alimento, debe operarse tal como se indicará a continuación. Si V es el volumen del dispositivo de tratamiento térmico, a través del cual circula una corriente con un caudal volumétrico q , en un instante determinado se introduce una cantidad M de trazador. En la corriente de salida se va analizando la cantidad de trazador que contiene. Si C_i es esta concentración, se tabula o grafica C_i frente al tiempo, obteniéndose la función de distribución de la concentración del trazador.

El área por debajo de esta curva será:

$$\int_0^{\infty} C_i dt = \sum_i C_i \Delta t = \frac{M}{q} \quad [16.41]$$

en la que M es la cantidad total de trazador inyectado.

La curva E se obtiene a partir de esta curva, pero como debe estar normalizada, en cada tiempo, la concentración obtenida se divide por el área dada por la ecuación 16.41:

$$E = \frac{C_i}{\int_0^{\infty} C_i dt} = \frac{q C_i}{M} \quad [16.42]$$

Es interesante resaltar que en muchos fluidos alimentarios sobre los que se realizan tratamientos térmicos contienen partículas sólidas en suspensión. En estos casos, las curvas de distribución de edades externas presentan un doble nodo, de tal forma que la curva respuesta empieza a salir a tiempos superiores a la mitad del

tiempo medio de residencia.

En cálculos posteriores será preciso utilizar tiempos medios de residencia, siendo necesario realizar su determinación. Además, una idea de la dispersión de tiempos de permanencia la da la varianza, ya que a mayor valor de varianza más grande es dicha dispersión. Es por ello que se darán ecuaciones que permitan el cálculo de la media y varianza.

La **media** permite el cálculo del tiempo medio de permanencia t_M . En general este valor se calcula a partir de la ecuación:

$$t_M = \frac{\int_0^{\infty} t_i C_i dt}{\int_0^{\infty} C_i dt} \quad [16.43]$$

Para el caso que el número de medidas sea discreto, la integral puede sustituirse por un sumatorio:

$$t_M = \frac{\sum_0^{\infty} t_i C_i \Delta t}{\sum_0^{\infty} C_i \Delta t} \quad [16.44]$$

Para funciones continuas, con medidas discretas a intervalos de tiempo iguales puede utilizarse la función distribución de edades externas en el cálculo de la media:

$$t_M = \int_0^{\infty} t_i E dt = \sum_0^{\infty} t_i E_i \Delta t \quad [16.45]$$

La **varianza** se obtiene a partir de la expresión:

$$\sigma^2 = \frac{\int_0^{\infty} t_i^2 C_i dt}{\int_0^{\infty} C_i dt} - t_M^2 \quad [16.46]$$

Cuando el número de valores es discreto la integral puede sustituirse por un sumatorio:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_0^{\infty} t_i^2 C_i \Delta t}{\sum_0^{\infty} C_i \Delta t} - t_M^2 \quad [16.47]$$

Para curvas continuas o medidas discretas a intervalos de tiempo iguales, la varianza puede calcularse mediante la ecuación:

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} t_i^2 E dt - t_M^2 = \sum_0^{\infty} t_i^2 E_i \Delta t - t_M^2 \quad [16.48]$$

16.4.5. Aplicación de los modelos de distribución al tratamiento térmico en continuo

En los dispositivos de tratamiento térmico se lleva a cabo la destrucción de microorganismos, o en su caso de algunos factores termolábiles del alimento. Esta destrucción sigue una cinética de primer orden, por lo que en realidad el dispositivo funciona como si se tratase de un reactor en el que se lleva a cabo una reacción de primer orden.

Para el cálculo de la concentración media C_M de la corriente que abandona el dispositivo de tratamiento térmico, en función de la concentración de entrada C_0 , puede aplicarse la expresión:

$$C_M = C_0 \int_0^{\infty} \left(\frac{C}{C_0} \right)_t E dt \quad [16.49]$$

Como la cinética de destrucción es de primer orden:

$$C = C_0 \exp(-kt)$$

al sustituir esta ecuación en la 16.49 se obtiene:

$$C_M = C_0 \int_0^{\infty} \exp(-kt)_t E dt \quad [16.50]$$

Cuando el número de valores es discreto, esta ecuación puede sustituirse por un sumatorio:

$$C_M = C_0 \sum_0^{\infty} [\exp(-kt)]_t E \Delta t \quad [16.51]$$

Las ecuaciones 16.50 ó 16.51 permiten realizar el cálculo de tratamientos térmicos de productos que circulan en forma continua a través del dispositivo de tratamiento.

En casos de comportamiento ideal (tanque agitado de mezcla perfecta, flujo de pistón y flujo laminar a través de tubos), existen soluciones analíticas a la ecuación 16.50. A continuación se dan estas soluciones para los tres casos mencionados.

Para un fluido que es tratado en un **tanque agitado de mezcla perfecta**, la función distribución de edades externas viene dada por la ecuación 16.35, que se debe sustituir en la ecuación 16.50 y realizar una integración de la misma:

$$C_M = C_0 \int_0^{\infty} \exp(-kt)_t \left[\frac{1}{t_M} \exp\left(-\frac{t}{t_M}\right) \right] dt \quad [16.52]$$

al integrar se obtiene:

$$C_M = C_0 \frac{1}{1 + kt_M} \quad [16.53]$$

Para circulación en **flujo de pistón** la función distribución de edades externas es la función delta de Dirac (ecuación 16.36), que al sustituir en la ecuación 16.50 se obtiene:

$$C_M = C_0 \int_0^{\infty} \exp(-k t)_t [\delta(t - t_M) dt = \exp(-k t_M) \quad [16.54]$$

Para fluidos que circulen en **régimen laminar** la función distribución de edades externas viene dada por la ecuación 16.37. Al sustituir en la ecuación 16.50 se obtiene:

$$C_M = C_0 \int_0^{\infty} \exp(-k t)_t \left(\frac{t_M^2}{2 t^3} \right) dt \quad [16.55]$$

PROBLEMAS

Problema 16.1

Un termopar localizado en el punto de menor calentamiento de un bote de tomate triturado, da la siguiente variación temperatura-tiempo:

Tiempo (min):	0	10	30	40	50	60
Temperatura (°C):	60	71	100	107	110	113

El bote está colocado en el centro de una pila sometida a un proceso de esterilización en un autoclave, cuya temperatura de procesado se mantiene a 113 °C. Suponiendo despreciable el efecto letal del período de enfriamiento, determinar el tiempo de procesado.

Datos y notas. La elevación de temperatura necesaria para bajar el tiempo de tratamiento a la décima parte, para un grado de reducción de 12 del *Bacillus Coagulans* es de 10 °C. Para conseguir este grado de reducción a 121 °C son necesarios 3 minutos.

El tiempo de tratamiento para una determinada temperatura se calcula a partir de la ecuación 16.8. En la que, según los datos del problema se cumple:

$$T_R = 121 \text{ °C} \quad F_R = 3 \text{ minutos} \quad z = 10 \text{ °C} \quad n = 12$$

Para resolver el problema deben cumplirse las condiciones dadas por la ecuación 16.24. Primero se evaluará el efecto producido en el tiempo de calentamiento, calculando los valores del tiempo necesario de procesado y de reducción decimal a cada temperatura. Se sabe que para una determinada temperatura se cumple la ecuación 16.8, lo que permitirá el cálculo de D_T a partir de F_T .

A partir de los datos de la tabla del enunciado del problema y las ecuaciones 16.8 y 16.12 es posible obtener la siguiente tabla 16.P1:

Tabla 16.P1. Valores de tiempo de muerte térmica y reducción decimal en función del tiempo de calentamiento

t_{calent} (min)	T (°C)	F_T (min)	D_T (min)	$1/F_T$ (min ⁻¹)	$1/D_T$ (min ⁻¹)
0	60	$3,8 \cdot 10^6$	$3,2 \cdot 10^5$	$2,7 \cdot 10^{-7}$	$3,2 \cdot 10^{-6}$
10	71	$3 \cdot 10^5$	$2,5 \cdot 10^4$	$3,3 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-5}$
20	85	$1,2 \cdot 10^4$	992	$8,4 \cdot 10^{-5}$	10^{-3}
30	100	378	31,5	$2,7 \cdot 10^{-3}$	0,032
40	107	75,4	6,3	0,013	0,159
50	110	37,8	3,2	0,027	0,320
60	113	18,9	1,6	0,053	0,635

Para la obtención de la letalidad para la esterilización se representa $1/F_T$ frente al tiempo, o bien $1/D_T$ (figura 16.8) frente al tiempo, y se realiza una integración

gráfica de las funciones obtenidas. Al realizar esta integración entre los tiempos inicial y final de calentamiento (60 minutos) se obtiene:

$$\int_0^{60} \frac{dt}{F_T} = 0,65 < 1$$

$$\int_0^{60} \frac{dt}{D_T} = 7,8 < 12$$

lo que indica que con el tiempo de calentamiento no es posible llegar a la esterilización del producto, y será necesario continuar el calentamiento a 113 °C durante un período de tiempo tal que el valor del nivel de letalidad de esterilización cumpla con la condición de la ecuación 16.24.

Para F_T falta $1 - 0,65 = 0,35$ para que se cumpla la ecuación 16.24 b, por lo que el tiempo adicional será:

$$t_{113} = (0,35) (18,9 \text{ min}) = 6,62 \text{ min}$$

Si se hubiera utilizado el tiempo de reducción decimal D_T lo que falta para la esterilización es $12 - 7,8 = 4,2$, siendo por tanto, el tiempo adicional:

$$t_{113} = (4,2)(1,58 \text{ min}) = 6,64 \text{ min}$$

Problema 16.2

Un bote cilíndrico de 6 cm de diámetro y 15 cm de altura contiene 250 g de crema de guisantes, posee una carga microbiana de 10^5 esporas de Clostridium sporogenes por cada kg de crema. Con el objeto de rebajar su contenido de esporas, el bote es sometido a un proceso de esterilización en un autoclave que condensa vapor de agua a 121 °C. El punto de menor calentamiento se encuentra inicialmente a 71 °C, y su temperatura a lo largo del tratamiento térmico evoluciona del siguiente modo:

t (s)	600	800	1.000	1.400	1.600	2.000	2.200	2.400	2.600
T (°C)	94	103	109	113,5	116	118	110	82	65

Para la temperatura de 121 °C, las esporas de Clostridium sporogenes presentan los siguientes valores $z = 10$ °C y $F = 1,67$ minutos. Calcular:

- Las esporas viables por kg de crema que existen en el punto de menor calentamiento cuando éste alcanza la máxima temperatura.
- Al cabo de 45 minutos, ¿cuál es la carga microbiana en dicho punto?

A partir de la ecuación 16.8 se calcula el tiempo de tratamiento a las distintas temperaturas que va adquiriendo el producto. Según los datos del problema se cumple:

$$T_R = 121 \text{ °C} \quad F_R = 1,67 \text{ minutos} \quad z = 10 \text{ °C}$$

Además, para *C. sporogenes* $n = 5$.

Como $t_T = D_T \cdot n$, es posible construir la siguiente tabla 16.P2:

Tabla 16.P2. Valores de tiempo de muerte térmica y reducción decimal en función del tiempo de calentamiento

t (s)	T (°C)	t_T (min)	$1/t_T$ (min ⁻¹)	D_T (min)	$1/D_T$ (min ⁻¹)	$1/D_T$ (s ⁻¹)
600	94	837,0	$1,19 \cdot 10^{-3}$	167,4	$5,97 \cdot 10^{-3}$	0,0008
800	103	105,4	0,009	21,07	0,047	0,0032
1.000	109	26,5	0,038	5,29	0,189	0,0053
1.200	111,3	15,8	0,063	3,15	0,317	0,0089
1.400	113,5	9,4	0,106	1,88	0,532	0,0158
1.600	116	5,3	0,189	1,06	0,947	0,0199
2.000	118	3,3	0,300	0,67	1,501	0,0250
2.200	110	21,0	0,048	4,20	0,238	0,0040
2.400	82	$1,33 \cdot 10^4$	$7,54 \cdot 10^{-5}$	2.653	$3,77 \cdot 10^{-4}$	$6,28 \cdot 10^{-6}$
2.600	65	$6,65 \cdot 10^5$	$1,50 \cdot 10^{-6}$	$1,33 \cdot 10^5$	$7,52 \cdot 10^{-6}$	$1,25 \cdot 10^{-7}$

El nivel de letalidad para la esterilización se obtendrá al realizar la integral desde el inicio del calentamiento hasta el tiempo de 2.000 s, que corresponde al tiempo de máxima temperatura.

$$\int_0^{2.000} \frac{dt}{D_T} = \log \left(\frac{C_0}{C} \right) = 13,11$$

por lo que la concentración de *C. sporogenes* en el producto al cabo de 2.000 s será:

$$C = C_0 \cdot 10^{-13,11} = 7,8 \cdot 10^{-9} \text{ esporas/kg}$$

Para un tiempo de 45 minutos la integral debe realizarse entre el tiempo inicial y 2.700 s:

$$\int_0^{2.700} \frac{dt}{D_T} = \log \left(\frac{C_0}{C} \right) = 15,84$$

obteniéndose $C = 1,45 \cdot 10^{-11}$ esporas/kg.

Problema 16.3

Un alimento envasado es tratado térmicamente en un dispositivo cuya temperatura de procesado es 130 °C, y se ha obtenido que la evolución de la temperatura del punto de menor calentamiento con el tiempo de procesado es:

t (min)	0	6,5	10	12	16,5	23	28	36	44
T (°C)	30	40	50	60	80	100	110	120	125

Si la carga microbiana inicial es de 10 ufc/envase y se desea rebajarla hasta 10^{-5} ufc/envase, calcular el tiempo de procesado. El microorganismo sobre el que

incide este procesado térmico, para la temperatura de referencia de 121 °C, posee un tiempo de reducción decimal de 2 minutos, y para reducir el tiempo de tratamiento a la décima parte es necesario elevar 10 °C la temperatura.

Este problema se solucionará por el método de Ball, utilizando la ecuación 16.14. Para el cálculo de la temperatura pseudoinicial se construirá la curva de penetración de calor análoga a la figura 16.7. Se toman los datos de la tabla del problema y se representan en forma gráfica en coordenadas semilogarítmicas en la figura 16.P3.

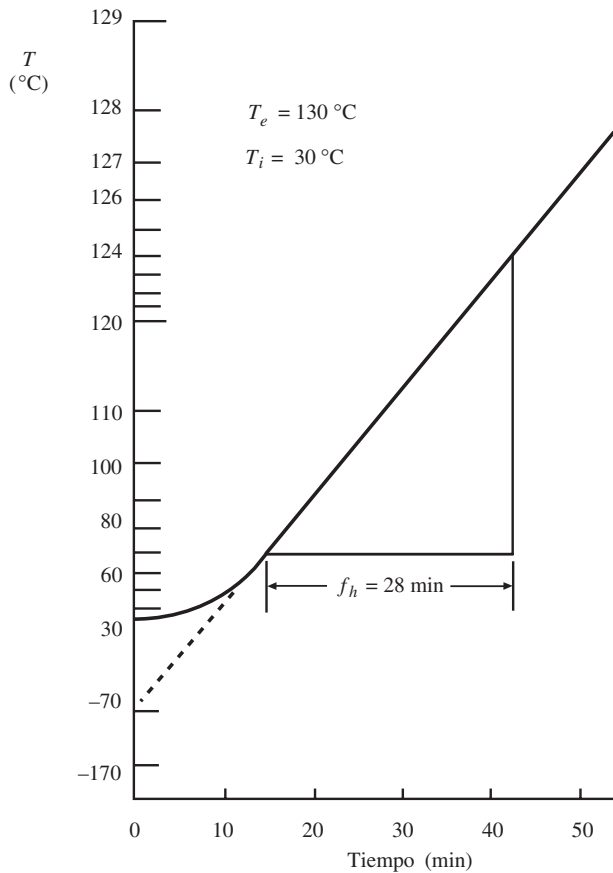


Figura 16.P3. Curva de penetración del calor.

A partir de esta figura es posible determinar los valores de la temperatura pseudoinicial $T_{ip} = -70$ °C. Con esta temperatura y las ecuaciones 16.15 y 16.16 se calcula I_h y j_h :

$$I_h = T_e - T_i = 130 - 30 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$j_h = \frac{T_e - T_{ip}}{T_e - T_i} = \frac{130 - (-70)}{130 - 30} = 2$$

De la figura 16.P3 también se obtiene el valor de f_h que es la inversa de la pendiente del tramo recto de la curva de penetración. De esta forma se obtiene que $f_h = 28$ minutos.

Se calcula el valor de F para este proceso, de tal forma que:

$$F = D_T \log \left(\frac{N_0}{N} \right) = (2 \text{ min}) \log \left(\frac{10}{10^{-5}} \right) = 12 \text{ minutos}$$

De la ecuación 16.25 se calcula el valor del parámetro U :

$$U = F10^{\frac{T_R - T_e}{z}} = (12 \text{ min}) 10^{\frac{121 - 130}{10}} = (12 \text{ min}) (0,1259) = 1,51 \text{ min}$$

por lo que se obtiene:

$$\frac{f_h}{U} = 18,53$$

con este valor y el de $j = 2$, por interpolación en la tabla 16.2 se obtiene el valor de $g = 8,84 \text{ }^\circ\text{C}$.

Ahora ya se puede aplicar la ecuación 16.14, ya que son conocidas todas las variables:

$$B = (28 \text{ min}) \log \left[\frac{(2)(100)}{8,84} \right] = (28 \text{ min}) (1,355) \approx 38 \text{ minutos}$$

es decir, el tiempo de procesado serán 38 minutos.

Problema 16.4

Un alimento infantil basado en un puré de manzana es tratado térmicamente a razón de 1.500 kg/h en un proceso de envasado aséptico. El producto es calentado desde 22 °C hasta 90 °C en un intercambiador de calor de placas. A continuación se introduce en un intercambiador de tubos concéntricos, cuyo diámetro interno es 5 cm, circulando por el espacio anular vapor de agua condensante, que permite mantener el producto a 90 °C mientras permanece en el intercambiador. La esterilización comercial del alimento a 90 °C se obtiene si dicho producto permanece durante 90 segundos a esta temperatura. Determinar la longitud que debe poseer el tubo de mantenimiento para asegurar el adecuado tratamiento térmico del alimento.

Datos. Propiedades del alimento: Densidad 1.200 kg/m³. Se comporta como un fluido de la potencia con un índice de consistencia de 2,4 Pa·sⁿ y un índice de comportamiento al flujo de 0,5.

La longitud del tubo de mantenimiento se obtendrá a partir de la ecuación 16.28, en la que el tiempo serán los 90 segundos que se tardan en asegurar un tratamiento adecuado del producto. La velocidad a utilizar en esta ecuación es la velocidad máxima, que es función de la velocidad media con la que circula el producto en el interior de la tubería.

La velocidad media de circulación del producto se obtiene a través de la ecuación de continuidad:

$$v_m = \frac{4 w}{\rho \pi d^2} = \frac{4 \left(1.500 \frac{\text{kg}}{\text{h}} \frac{1 \text{ h}}{3.600 \text{ s}} \right)}{\left(1.200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \pi (0,05)^2} = 0,177 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Al tratarse de un fluido con un comportamiento reológico de ley de la potencia se calculará previamente el valor del módulo de Reynolds generalizado, utilizando la ecuación 8.7 dada en el capítulo 8:

$$\text{Re}_G = \frac{(0,05 \text{ m})^{0,5} \left(0,177 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^{2-0,5} \left(1.200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)}{8^{0,5-1} (2,4 \text{ Pa}\cdot\text{s}^{0,5})} \left[\frac{4 \cdot (0,5)}{1 + 3 \cdot (0,5)} \right]^{0,5} \approx 21$$

con este valor, según la figura 8.1 (capítulo 8), la circulación del producto en la tubería es de régimen laminar. Como el producto presenta comportamiento reológico de fluido de la potencia, con la figura 8.9 (capítulo 8), para un índice de comportamiento al flujo de $n = 0,5$ se obtiene que la relación velocidad media/velocidad máxima es:

$$\frac{v_m}{v_{\text{máx}}} = 0,6$$

de la que se obtiene un valor de la velocidad máxima:

$$v_{\text{máx}} = 0,295 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Por tanto la longitud que debe poseer la tubería de mantenimiento será:

$$L = \left(0,295 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (90 \text{ s}) = 26,55 \text{ m}$$

Problema 16.5

Un sistema de procesado aséptico se utiliza para tratar una sopa vegetal, que contiene pequeños trozos de carne en suspensión. Puede considerarse que el fluido portador es una solución acuosa y las partículas de carne son esféricas de 12 mm de diámetro, y circulan con una velocidad de 0,002 m/s con respecto al fluido por-

tador. A la entrada del tubo de mantenimiento el fluido posee una temperatura de 150 °C, mientras que las partículas de carne poseen una temperatura uniforme de 90 °C. Para obtener un adecuado procesado de la sopa, debe conseguirse un grado de reducción microbiano de 12 en el centro de las partículas. Si el caudal volumétrico con el que circula la sopa es de 30 l/min, calcular la longitud que debe poseer la tubería de mantenimiento para lograr la reducción microbiana deseada si el diámetro interno de la tubería es de 4,5 cm.

Datos. Propiedades de la solución acuosa: Densidad 1.000 kg/m³. Conductividad térmica 0,58 W/(m·°C). Viscosidad 1,5 mPa·s. Calor específico 4,1 kJ/(kg·°C).

Difusividad térmica de la carne 1,3 · 10⁻⁷ m²/s.

El microorganismo contenido en la sopa posee un tiempo de reducción decimal de 1,5 s a 121 °C, y para rebajar el tiempo de tratamiento a la décima parte es necesario elevar la temperatura 10 °C.

Cuando la sopa entra al tubo de mantenimiento, el fluido portador posee una temperatura superior a las partículas de carne, por lo que dentro de este tubo existirá transmisión de calor desde el fluido hacia las partículas, con lo que la temperatura de dichas partículas irá aumentando progresivamente. Es necesario calcular la evolución de la temperatura del centro geométrico de las partículas para determinar la letalidad para la que el producto estará procesado adecuadamente.

El proceso de calentamiento de calor es en régimen no estacionario, por lo que la temperatura del centro de la partícula se calculará según se ha descrito en el apartado 13.3 (capítulo 13). Inicialmente se calculará el coeficiente individual de transmisión de calor, como el fluido es una solución acuosa se utilizará la ecuación 16.31. Los módulos de Reynolds y Prandtl serán:

$$(\text{Re}) = \frac{(1.000 \text{ kg/m}^3) (0,002 \text{ m/s}) (0,012 \text{ m})}{1,5 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}} = 16$$

$$(\text{Pr}) = \frac{[4.100 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{°C})] (1,5 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s})}{(0,58 \text{ J/s}\cdot\text{m}\cdot\text{°C})} = 10,6$$

$$(\text{Nu}) = 2 + 2,82 \cdot 10^{-3} (16)^{1,16} (10,6)^{0,89} = 2,575$$

de la que se obtiene un coeficiente individual de transmisión de calor por convección:

$$h = 249 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{°C})$$

Para aplicar el método descrito en el apartado 13.3 se deben calcular los siguientes módulos adimensionales:

$$m = \frac{k}{h r_0} = \frac{[0,58 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{°C})]}{[249 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{°C})] (0,006 \text{ m})} \approx 0,4$$

$$n = \frac{r}{r_0} = 0$$

$$(Fo) = \frac{\alpha t}{(r_0)^2} = 3,417 \cdot 10^{-3} t, \text{ expresando el tiempo } t \text{ en segundos.}$$

Se utilizará la figura 13.14 para el cálculo de la temperatura del punto de menor calentamiento. En la tabla 16.P5 se dan los diferentes datos obtenidos para los distintos tiempos supuestos.

Para el cálculo de la letalidad se utilizará el método gráfico descrito en el apartado 16.3.2, Para el cálculo de los tiempos de muerte térmica se supone que el grado de reducción deseado es de $n = 12$, por lo que;

$$F_R = n D_R = (12) (1,5 \text{ s}) = 18 \text{ s}$$

Para el cálculo de la velocidad letal se utiliza la ecuación 16.9, mientras que la letalidad global se calcula mediante la ecuación 16.24. En las últimas columnas de la tabla 16.P5 se dan los valores de estos parámetros para los diferentes tiempos de procesado.

Tabla 16.P5. Cálculo de la letalidad global

Tiempo (segundos)	(Fo)	T (°C)	$L = 10^{\frac{T-121}{10}}$	$\frac{L}{F_R}$ (s ⁻¹)	$\int_0^t \frac{L}{F_R} dt$
0	0	90			
30	0,103	102	0,0126	0,0007	
60	0,205	114	0,1995	0,0111	0,175
80	0,273	120	0,7943	0,0441	0,743
100	0,342	13,6	1,8197	0,1011	2,118

De los datos de la última columna de esta tabla se observa que para conseguir que el valor de la integral sea 1, el tiempo está entre 80 y 100 s. El valor que hace que esta integral sea 1 es precisamente un tiempo de 85 s.

$$\int_0^{85} \frac{L}{F_R} dt = 1$$

La velocidad lineal de circulación en el tubo de mantenimiento se calcula a partir de la ecuación de continuidad:

$$v = \frac{4 q}{\pi d^2} = \frac{4 \left(30 \frac{\text{litros}}{\text{min}} \frac{1 \text{ m}^3}{10^3 \text{ litros}} \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right)}{\pi (0,045 \text{ m})^2} \approx 0,314 \text{ m/s}$$

Como el régimen es laminar, la relación entre la velocidad máxima y la media es [ecuación 16.29]: $v_{\text{máx}} = 2v = 0,628 \text{ m/s}$.

Con lo que la longitud del tubo de mantenimiento será:

$$L = \left(0,628 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) (85 \text{ s}) = 53,38 \text{ m}$$

Problema 16.6

Una corriente de 1.000 kg/h de leche, que contiene el bacilo de la tuberculosis en una concentración de 10^8 ufc/cm^3 , se alimenta a un dispositivo tubular de tratamiento térmico, con el objeto de reducir su contenido hasta $0,01 \text{ ufc/cm}^3$. La sección tubular posee un diámetro interno de 1 pulgada, siendo la densidad de la leche 1.030 kg/m^3 . Mientras dura el tratamiento térmico la leche se mantiene a 71°C . Determinar la longitud que debe tener la sección tubular de tratamiento si la distribución de edades externas es una función δ de Dirac.

¿Cuál sería la carga microbiana final si el dispositivo de tratamiento fuese un tanque agitado de mezcla perfecta de 500 litros?

Para la temperatura de $71^\circ\text{C} = 159,8^\circ\text{F}$, de acuerdo con la figura 16.2, se obtiene que el tiempo de tratamiento deberá ser de $F_{71\text{C}} = 0,17 \text{ min} = 10,2 \text{ s}$.

Se supone que el grado de reducción es de $n = 12$, con lo que el tiempo de reducción decimal será: $D_T = 10,2/12 = 0,85 \text{ s}$.

La constante de destrucción del bacilo de la tuberculosis será:

$$k = \frac{2,303}{D_T} = 2,71 \text{ s}^{-1}$$

Para el dispositivo tubular la función distribución de edades externas es la delta de Dirac: $\delta(t - t_M)$; mientras que la concentración media de salida viene dada por la ecuación 16.54:

$$10^{-2} = 10^8 \exp(-2,71 \cdot t_M)$$

de la que se obtiene $t_M = 8,5 \text{ s}$, que es el tiempo medio de residencia en el interior del dispositivo.

La velocidad de circulación de la leche se calcula a partir de la ecuación de continuidad:

$$v = \frac{4w}{\rho \pi d^2} = 0,532 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La longitud del dispositivo tubular será:

$$L = (0,532 \text{ m/s}) (8,5 \text{ s}) = 4,52 \text{ m}$$

Para un tanque agitado, la función distribución de edades externas viene dada por la ecuación 16.35, mientras que la concentración media a la salida del

tanque se calcula con la ecuación 16.53. En este caso, el tiempo de residencia se obtiene al dividir el volumen del tanque por el caudal volumétrico de circulación del fluido:

$$t = \frac{V}{q} = \frac{\rho V}{w} = 1.854 \text{ s}$$

La concentración del bacilo de la tuberculosis en la leche que abandona el tanque agitado será [ec. 16.53]:

$$C = \frac{10^8 \text{ ufc/cm}^3}{1 + (2,71 \text{ s}^{-1})(1.854 \text{ s})} = 2 \cdot 10^4 \text{ ufc/cm}^3$$

Problema 16.7

Un fluido alimentario que contiene un microorganismo patógeno con una concentración de 10^8 ufc/cm^3 , es tratado en un dispositivo tubular a 120°C . El fluido circula en régimen de flujo de pistón con un tiempo de residencia medio de 15 s, lográndose un grado de reducción 12. Determinar la carga microbiana del fluido que abandona el dispositivo de tratamiento.

Calcular cuál sería la carga microbiana de este fluido si fuese tratado en un esterilizador en el que la distribución de edades externas viene dada por la tabla adjunta.

$t \text{ (s)}$	0	5	10	15	20	25	30	35
$E \text{ (s}^{-1}\text{)}$	0	0,03	0,05	0,05	0,04	0,02	0,01	0

De la definición de grado de reducción $n = \log(C_0/C)$, para $n = 12$ y $C_0 = 10^8 \text{ ufc/cm}^3$ se obtiene $C = 10^{-4} \text{ ufc/cm}^3$.

Inicialmente se calculará la constante cinética de destrucción del microorganismo. Como el dispositivo es tubular, se aplica la ecuación 16.54:

$$10^{-4} = 10^8 \exp(-k \cdot 15 \text{ s})$$

de la que se obtiene: $k = 1,84 \text{ s}^{-1}$.

Para la distribución de edades externas dada por la tabla del enunciado, el tiempo medio de residencia se puede calcular a partir de la ecuación 16.45:

$$t_M = 5 \times (5 \times 0,03 + 10 \times 0,05 + 15 \times 0,05 + 20 \times 0,04 + 25 \times 0,02 + 30 \times 0,01) = 5 \times 3 = 15 \text{ s}$$

A pesar de obtenerse un tiempo medio $t_M = 15 \text{ s}$, que es igual al del dispositivo tubular, como se verá a continuación, la concentración media de salida será distinta.

La concentración media de salida se calculará mediante la ecuación 16.51. Para ello, se construye la tabla 16.P7:

Tabla 16.P7

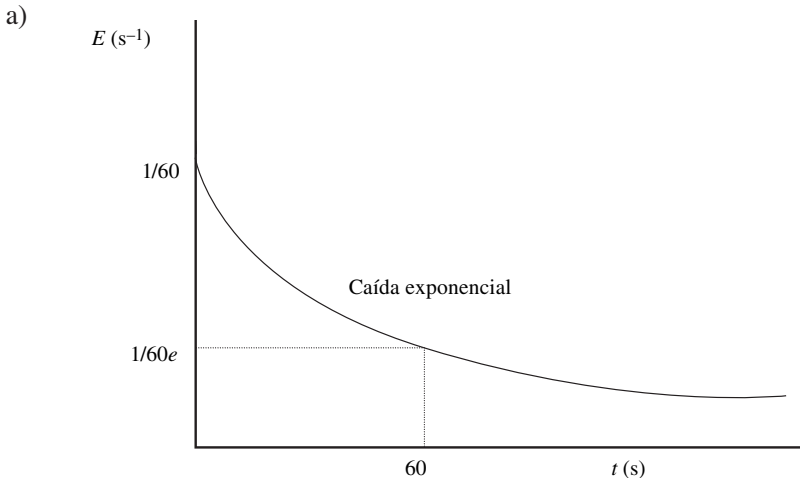
t (s)	E_t (s ⁻¹)	$\exp(-kt)$	$\exp(-kt) E_t \Delta t$
5	0,03	10^{-4}	$1,5 \cdot 10^{-5}$
10	0,05	10^{-8}	$2,5 \cdot 10^{-9}$
15	0,05	10^{-12}	$2,5 \cdot 10^{-13}$
20	0,04	10^{-16}	$2,0 \cdot 10^{-17}$
25	0,02	10^{-20}	$1,0 \cdot 10^{-21}$
30	0,01	10^{-24}	$5,0 \cdot 10^{-26}$
Total			$1,50 \cdot 10^{-5}$

por lo que: $C_M = (10^8 \text{ ufc/cm}^3) (1,5 \cdot 10^{-5}) = 1.500 \text{ ufc/cm}^3$

El aporte de esta concentración es debido prácticamente a la fracción que sale a los 5 s. A pesar que el tiempo medio de residencia es de 15 s, al igual que el caso de flujo de pistón, las ufc son muy superiores, lo que demuestra la gran influencia de la distribución de tiempos de residencia.

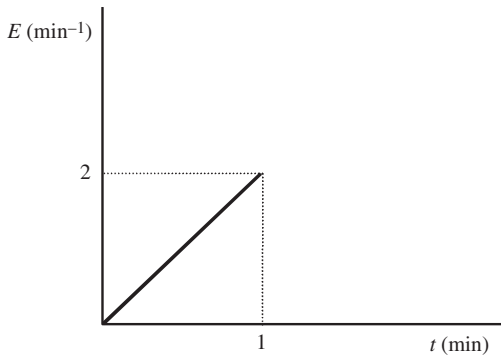
Problema 16.8

Un fluido alimentario contiene 10^7 ufc de microorganismos patógenos por litro, y es tratado térmicamente en un pasteurizador, que utiliza como fluido calefactor agua que mantiene la temperatura del fluido a 75 °C. De experimentos previos, se sabe que a esta temperatura el tiempo necesario para reducir a la décima parte la población inicial de microorganismos en el fluido es 6 segundos. Calcular la concentración de microorganismos en el fluido que abandona el pasteurizador, si éste se comporta de tal forma que la distribución de edades externas (E_t) fuera:



b) *Función de Dirac, en la que el tiempo de respuesta al impulso es 45 segundos.*

c)



La cinética de destrucción térmica de microorganismos es de primer orden, y se sabe que la constante cinética está relacionada con el tiempo de reducción decimal por la ecuación 16.3, de la que se obtiene:

$$k = \frac{2,303}{D_T} = \frac{2,303}{6 \text{ s}} = 0,384 \text{ s}^{-1} \cong 23 \text{ min}^{-1}$$

a) En este caso, la caída de E_t es exponencial, por lo que la ecuación será del tipo:

$E_t = a \exp(-bt)$, en la que a y b son constantes a determinar:

• Para $t = 0$
$$E = a = \left(\frac{1}{60}\right) \text{ s}^{-1}$$

• Para $t = 60 \text{ s}$
$$\frac{1}{60} e^{\left(\frac{1}{60}\right) \exp(-b \cdot 60)} =$$

de la que se obtiene: $b = \left(\frac{1}{60}\right) \text{ s}^{-1}$.

La ecuación que da la distribución de edades externas es:

$$E = \left(\frac{1}{60}\right) \exp\left(-\frac{t}{60}\right) \text{ si se expresa en s}^{-1}$$

$$E = \exp(-t) \text{ si se expresa en min}^{-1}$$

al comparar con la ecuación 16.35 se observa que el tiempo de residencia es:

$$t_M = 60 \text{ s} = 1 \text{ min},$$

y además se trata de un tanque agitado de mezcla perfecta.

La concentración media de salida de microorganismos se obtiene a partir de la ecuación 16.53:

$$C_M = C_0 \frac{1}{k t_M + 1} = 10^7 \frac{1}{(23 \text{ min}^{-1}) (1 \text{ min}) + 1} = 4,17 \cdot 10^5 \text{ ufc/l}$$

b) Para una distribución de edades externas delta de Dirac con $t_M = 45 \text{ s}$, $\delta = t - 45$ si se expresa en s^{-1} , o $\delta = t - 0,75$ si se expresa en min^{-1} . La concentración media de salida de microorganismos se obtiene con la ecuación 16.54:

$$C_M = \exp(-23 \cdot 0,75) = 0,32 \text{ ufc/l}$$

c) Para la distribución dada por la gráfica, se obtiene que se puede expresar según la ecuación: $E = 2 t \text{ min}^{-1}$, para los tiempos comprendidos entre 0 y 1 minuto.

En este caso, la concentración media de salida se calcula mediante la ecuación 16.50:

$$C_M = C_0 \int_0^{\infty} \exp(-k t) 2 t dt$$

como al cabo de 1 minuto han salido los microorganismos que han entrado en el mismo instante, esta integral debe realizarse entre 0 y 1 minuto. De esta integración se obtiene:

$$C_M = 2 C_0 \left[\frac{1}{k^2} - \frac{k+1}{k^2} \exp(-k) \right]$$

$$C_M = 2 (10^7 \text{ ufc/l}) (1,89 \cdot 10^{-3}) = 3,78 \cdot 10^4 \text{ ufc/l}$$

17.1. Congelación

Uno de los procesos más utilizados en la conservación de alimentos es la congelación. Ello es debido a dos factores fundamentales, uno es que muchos microorganismos no pueden crecer a las bajas temperaturas utilizadas en la congelación. Además, cuando un alimento se congela, parte del agua se transforma en hielo, por lo que la actividad del agua del alimento desciende. Este descenso de la actividad de agua influye en el crecimiento de muchos microorganismos, y hace que no se puedan desarrollar en condiciones de actividad de agua más baja.

La congelación de los alimentos puede realizarse de distintos modos, y dependiendo de ello, la calidad del alimento congelado variará. Así, si la congelación es instantánea se logra que existan muchos puntos del alimento donde empieza la formación de hielo; es decir, existe una gran nucleación, y los cristales de hielo que se forman son de pequeño tamaño, por lo que los tejidos del alimento quedarán poco afectados. Por contra, si la congelación es lenta, existe poca nucleación, y los pocos cristales de hielo formados irán creciendo con el tiempo. Esto acarrea el que se formen cristales de gran tamaño que pueden afectar la calidad final del producto congelado.

En la congelación de alimentos es importante conocer cómo varía la temperatura del alimento a lo largo del proceso de congelación. De todos es conocido cómo varía la temperatura del agua pura con el tiempo cuando se congela (figura 17.1). La temperatura de congelación del agua pura es $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, por lo que si se parte de agua a una temperatura superior, inicialmente existe un descenso por debajo de $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Es decir, existe un subenfriamiento por lo que posteriormente, y debido al inicio de la formación de hielo, se desprende el calor de fusión, con lo que la temperatura alcanza de nuevo los $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. En este punto la temperatura permanece constante hasta que toda el agua se ha convertido en hielo, punto en el que la temperatura desciende de nuevo, con una pendiente mayor, ya que la conductividad térmica del hielo es superior a la del agua líquida. En los alimentos, este proceso es distinto al del agua pura (figura 17.2). Si T_C es la temperatura a la que se inicia la congelación del producto, inicialmente la temperatura desciende por debajo de ella. Una vez que se forman los primeros cristales de hielo la temperatura aumenta hasta el valor T_C . Sin embargo, la temperatura no se mantiene,

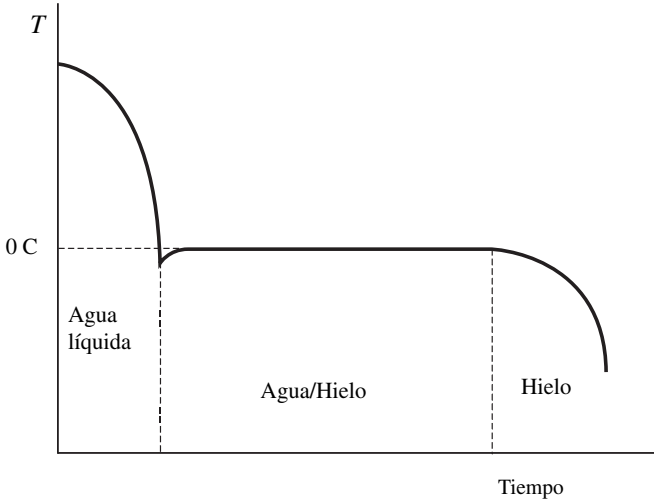


Figura 17.1. Congelación de agua pura.

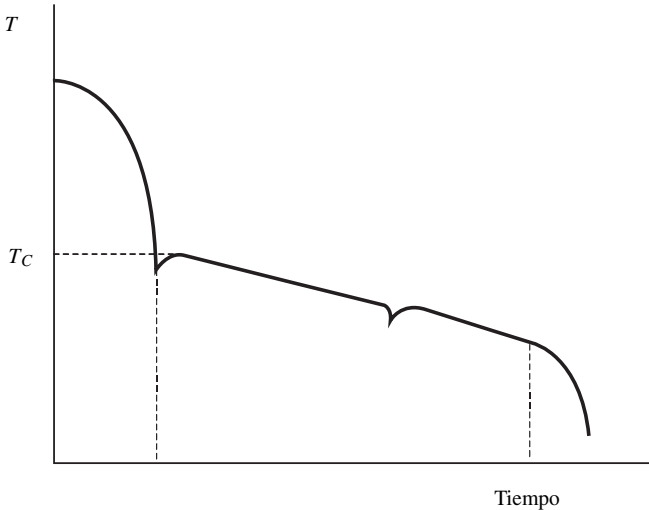


Figura 17.2. Congelación de un producto alimentario.

sino que existe un pequeño descenso continuado, debido a que el agua se transforma en hielo, y el agua no congelada se va concentrando en los sólidos solubles que contiene el alimento. Llega un momento en que puede empezar la cristalización de alguno de los solutos, y se libera el calor de cristalización, aumentado de esta forma la temperatura. Finalmente se llegará a una temperatura en la que no

es posible congelar más agua, ya que el contenido en sólidos solubles es tan elevado que se necesitarían temperaturas muy bajas. Este es el punto final de congelación del producto, y a partir de aquí el producto va disminuyendo su temperatura hasta alcanzar la del medio congelante.

Es importante resaltar que en los productos congelados no toda el agua puede congelar, sino que queda una porción de agua no congelada, que se la conoce como agua ligada. Además, el tiempo transcurrido desde que el alimento alcanza su temperatura inicial de congelación T_C hasta que se llega al punto final de congelación se le conoce como tiempo de congelación. Este es un parámetro necesario en todos los cálculos de los procesos de congelación, ya que es preciso en el diseño de los congeladores.

En la industria alimentaria existen diferentes tipos de congeladores, que se utilizan dependiendo del tipo de congelación que se quiere llevar a cabo. Así, uno de ellos es el de placas, en el que el producto a congelar se le da forma de paralelepípedo y es colocado entre unas placas que se encuentran a temperaturas inferiores a la de congelación del producto. Existe una transmisión de calor desde el alimento hacia las placas, para conseguir la congelación final del producto. En este tipo de congeladores, el proceso suele ser lento, por lo que predominará el crecimiento de cristales de hielo sobre la nucleación. Otros tipos de congeladores utilizan fluidos frigoríficos, en los que se coloca el alimento a congelar. Dependiendo del tipo de fluido y de su temperatura, la congelación puede ser más o menos rápida. Así, si el fluido es nitrógeno líquido, como su temperatura es muy baja, existirá una gran nucleación y se formarán cristales pequeños de hielo, predominando la nucleación sobre el crecimiento, siendo bajo el tiempo de congelación. Por contra, si se utiliza como fluido aire frío, la congelación es más lenta, predominando el crecimiento de cristales sobre la nucleación. Esto hace pensar que, dependiendo de las necesidades y calidad deseada del producto, se utilizarán uno u otro tipo de congeladores.

17.2. Temperatura de congelación

La temperatura de congelación es aquella en la que empiezan a formarse los primeros cristales de hielo; es decir, la temperatura en la que coexisten en equilibrio cristales de hielo y agua líquida. Para el agua pura esta temperatura corresponde a $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ (273 K). Sin embargo, el agua de los alimentos contiene sólidos solubles, y es conocido que el efecto de estos sólidos hace descender el punto de congelación del agua. Por ello, la temperatura a la que se inicia la congelación de los alimentos es inferior a los $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Es evidente que para un alimento la concentración de sólidos solubles del agua no congelada va aumentando a medida que se avanza en su congelación, lo que determina el que la temperatura de congelación varíe con el tiempo. Por esta razón, desde el punto de vista de cálculos posteriores, se suele utilizar la temperatura inicial de congelación, correspondiente a la aparición de los primeros cristales de hielo.

Al inicio de la congelación la solución acuosa es diluida, por lo que en una primera aproximación podría calcularse la temperatura inicial de congelación (T_C) aplicando la ley de Raoult, en la que el descenso crioscópico se expresa como:

$$\Delta T_C = T_{0A} - T_C = K_A \frac{m_S}{M_S} \quad [17.1]$$

en la que: m_S = g soluto/1.000 g agua.

M_S = masa molecular del soluto.

K_A = 1,86 °C kg agua/mol (constante criogénica del agua).

T_{0A} = temperatura de congelación del agua pura.

Cabe resaltar que para alimentos, M_S es una masa molecular equivalente de los solutos contenidos en el alimento.

En la bibliografía existen ecuaciones empíricas que permiten determinar la temperatura inicial de congelación para ciertos alimentos, únicamente en función de su contenido de humedad (Levy, 1979).

Conocida la humedad del alimento, se puede calcular la fracción molar del agua, y una ecuación que permite el cálculo de la temperatura inicial de congelación es:

$$T_C = \frac{T_{0A} \lambda}{\lambda - RT_{0A} \ln X} \quad [17.2a]$$

siendo: T_{0A} = temperatura de congelación del agua pura (273 K).

λ = calor latente de congelación del agua (6.003 kJ/kmol).

R = constante de gases (8,314 kJ/kmol·K).

X = fracción molar del agua no congelada.

En la tabla 17.1 se dan los valores de temperatura inicial de congelación para ciertos alimentos.

17.2.1. Agua no congelada

A lo largo del proceso de congelación, en el alimento siempre existe una fracción de agua no congelada. Incluso, tal como se ha comentado anteriormente, en el punto final de congelación existe el agua ligada, que no está en forma de hielo. El determinar la cantidad de agua no congelada es importante, ya que va a afectar no sólo a las propiedades del producto, sino también a la entalpía necesaria para llevar a cabo la congelación.

Si en un instante determinado las fracciones másicas de agua no congelada y sólidos en el alimento son x_A y x_S , respectivamente, la fracción molar del agua no congelada se calculará a partir de la expresión:

$$X = \frac{(x_A/18)}{(x_A/18) + (x_S/M_S)} \quad [17.3a]$$

Tabla 17.1. Temperatura inicial de congelación para ciertos alimentos

Producto	Contenido en agua (%)	Temperatura de congelación (°C)
<i>Carne</i>	55-70	-1,0 a -2,2
<i>Frutas</i>	87-95	-0,9 a -2,7
Arándano	85,1	-1,11
Ciruela	80,3	-2,28
Frambuesa	82,7	-1,22
Melocotón	85,1	-1,56
Pera	83,8	-1,61
Fresa	89,3	-0,89
<i>Huevo</i>	74	-0,5
<i>Leche</i>	87	-0,5
<i>Pescados</i>	65-81	-0,6 a -2,0
Isotónicos		-1,8 a -2,0
Hipotónicos		-0,6 a -1,0
<i>Verduras</i>	78-92	-0,8 a -2,8
Cebolla	85,5	-1,44
Espárrago	92,6	-0,67
Espinaca	90,2	-0,56
Zanahoria	87,5	-1,11
<i>Zumos</i>		
Arándano	89,5	-1,11
Cereza	86,7	-1,44
Frambuesa	88,5	-1,22
Fresa	91,7	-0,89
Manzana	87,2	-1,44
Manzana en puré	82,8	-1,67
Manzana concentrado	49,8	-11,33
Mosto de uva	84,7	-1,78
Naranja	89,0	-1,17
Tomate en pulpa	92,9	-0,72

Fuente: Heldman (1992); Mafart (1994); Plank (1980).

ecuación en la que es necesario conocer la masa molecular equivalente de los sólidos. Por tanto, el agua no congelada es:

$$x_A = \frac{18 x_S X}{M_S (1 - x)} \tag{17.3b}$$

Con lo que la fracción másica de hielo formado (x_H) sería la fracción másica inicial de humedad (x_{0A}) del alimento menos el valor del agua no congelada:

$$x_H = x_{0A} - x_A$$

Para el cálculo de la fracción molar de agua no congelada podría utilizarse la ecuación 17.2a, que expresada convenientemente, da la fracción molar de agua no congelada en función de la temperatura de congelación:

$$\ln X = \frac{\lambda}{R} \left[\frac{1}{T_{0A}} - \frac{1}{T_C} \right] \tag{17.2b}$$

17.2.2. Masa molecular equivalente de solutos

En diferentes expresiones expuestas en el apartado anterior aparece la denominada masa molecular equivalente de los sólidos. Esta es una variable que es necesario determinar en los cálculos de congelación. En el caso que se considere una solución diluida ideal, se podría utilizar la ecuación 17.1, siempre y cuando se conozca la temperatura inicial de congelación. Asimismo, otra ecuación que permitiría determinar M_S es la ecuación 17.3.b, si se conocen las fracciones másica y molar del agua no congelada, así como la fracción másica de sólidos.

Además, existen ecuaciones empíricas (Chen, 1985) que permiten el cálculo de la masa molecular equivalente para ciertos alimentos:

- Zumos de naranja y manzana: $M_S = \frac{200}{1 + 0,25 x_S}$
- Carne de vaca: $M_S = \frac{535,4}{x_{0A}}$
- Bacalao: $M_S = \frac{404,9}{x_{0A}}$

17.3. Propiedades térmicas de los alimentos congelados

En las diferentes ecuaciones utilizadas en el cálculo de tiempos de congelación y diseño de sistemas de procesado aparecen como variables las propiedades térmicas del alimento. Por tanto, es imprescindible conocer el valor de estas propiedades para resolver los diferentes problemas que se puedan plantear. A pesar que en la bibliografía existen numerosas referencias sobre las propiedades de los alimentos congelados, es preciso disponer de ecuaciones que permitan su cálculo.

17.3.1. Densidad

Cuando un alimento es congelado se observa que su densidad disminuye, debido a la fracción de hielo que contiene. Una ecuación que permite el cálculo de la densidad de un producto congelado es:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{x_A}{\rho_A} + \frac{x_H}{\rho_H} + \frac{x_S}{\rho_S} \quad [17.4]$$

en la que x_A , x_H y x_S son las fracciones másicas del agua no congelada, hielo y sólidos totales, respectivamente. Las densidades del agua, hielo y sólidos totales pueden ser calculadas a partir de las ecuaciones dadas por Choi y Okos (1986a). Cabe resaltar que en el cálculo de la densidad de los sólidos totales es necesario conocer cuál es la composición de esta fracción.

17.3.2. Calor específico

El calor específico del producto congelado es función del contenido de agua no congelada, hielo y sólidos totales, según la expresión:

$$\hat{C}_p)_C = \hat{C}_p)_A \cdot x_A + \hat{C}_p)_H \cdot x_H + \hat{C}_p)_S \cdot x_S \quad [17.5]$$

Sin embargo, una ecuación general es la de Choi y Okos (1986a), en la que el calor específico del producto se expresa como un sumatorio del calor específico de cada componente por su fracción másica.

En el cálculo de las entalpías de los alimentos congelados se deben utilizar estas ecuaciones. Pero en la congelación, en general, la temperatura inicial del alimento no corresponde a la de congelación, sino a una temperatura superior. Por lo cual, también es importante determinar el calor específico del alimento no congelado. Una ecuación que permite el cálculo del calor específico del alimento no congelado en función del contenido de humedad es:

$$\hat{C}_p)_NC = \hat{C}_p)_A (0,3 + 0,7 x_{0A}) \quad [17.6]$$

En la bibliografía existen otras ecuaciones, algunas de las cuales son específicas para determinados productos (Mafart, 1994; Levy, 1979), aunque es mejor aplicar las ecuaciones de Choi y Okos, siempre y cuando se conozca la composición del alimento.

17.3.3. Conductividad térmica

El cálculo de la conductividad térmica de los productos congelados puede resultar más complicado que el de las otras dos propiedades consideradas, debido a que la conductividad térmica no sólo depende del contenido en agua, de las conductividades de la fase acuosa y sólida, sino también de la estructura del producto. Así, Kopelman (1966) considera que pueden existir tres modelos distintos de estructura en los alimentos. En uno de ellos se considera que el alimento es un sistema homogéneo de dos componentes en forma dispersa. En un segundo modelo se considera un sistema homogéneo de dos componentes en el que la fracción sólida se dispone en forma de fibras según dos direcciones, mientras que en el tercer modelo se supone un sistema homogéneo, en el que la fracción sólida se dispone en forma de capas paralelas en una sola dirección. Dependiendo del tipo de estructura, presenta diferentes ecuaciones que permiten el cálculo de la conductividad térmica del producto.

La conductividad de la fase líquida suele ser mucho más elevada que la de la fracción de sólidos, en cuyo caso, para un sistema homogéneo en que las dos fases se hallan dispersas, la conductividad del alimento se calcula mediante la ecuación:

$$k = k_L \frac{1 - (X_S^V)^2}{1 - (X_A^V)^2 (1 - X_S^V)} \quad [17.7]$$

en la que k_L es la conductividad térmica del líquido, mientras que X_S^V y X_A^V son la fracción volumétrica de sólidos y agua, respectivamente.

En el caso que las conductividades de la fase líquida y sólida sean similares, se debe utilizar la expresión:

$$k = k_L \frac{1 - Q}{1 - Q(1 - X_S^V)} \quad [17.8]$$

en la que:

$$Q = (X_S^V)^2 \left[1 - \frac{k_S}{k_L} \right]$$

siendo k_S la conductividad térmica de la fracción sólida.

Para los sistemas en que se considera que los sólidos se encuentran en forma de fibras estriadas o láminas, la conductividad depende de si se considera paralela o perpendicular a dichas fibras o láminas (Heldman, 1992).

17.4. Tiempo de congelación

El cálculo del tiempo de congelación es uno de los parámetros más importantes en el diseño de las etapas de congelación, ya que representa el tiempo que el alimento va a estar en el interior del aparato de congelación. En principio, representa el tiempo necesario para que el centro geométrico del alimento cambie su temperatura inicial hasta una final predeterminada, inferior a la de congelación, que también se le denomina **tiempo efectivo de congelación**. A veces, suele utilizarse el denominado **tiempo de congelación nominal**, que es el tiempo transcurrido desde que la superficie del alimento pasa de 0 °C hasta que el centro geométrico del mismo alcanza una temperatura 10 °C inferior a la inicial de congelación.

El cálculo del tiempo de congelación puede resultar complicado, ya que en el proceso va cambiando continuamente la temperatura de congelación del alimento, tal como se ha comentado anteriormente. Sin embargo, en una primera aproximación se puede calcular el tiempo transcurrido desde que el alimento se encuentra a su temperatura de congelación hasta que todo él se ha congelado.

Para ello, se supondrá una lámina de dimensiones infinitas, pero de espesor finito, lo que implica que la transmisión de calor sea unidireccional. Este cuerpo se halla inicialmente a la temperatura T_C y es introducido en un congelador en el que la temperatura externa es T_e . En el transcurso de la congelación se forma un frente de congelación que va avanzando desde la superficie a temperatura T_S hacia el centro de la lámina (distancia x) (figura 17.3). Al realizar un balance energético se obtiene que el término de salida de calor debe ser igual a la disipación de energía por congelación.

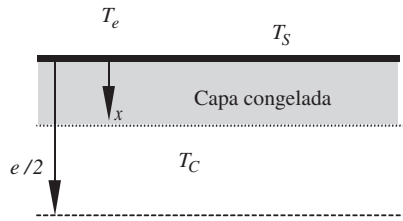


Figura 17.3. Frente de congelación de una lámina.

El calor se transmite a través de la capa congelada por conducción, y desde la superficie hacia el exterior por convección, por lo que el término de salida de calor en la unidad de tiempo se puede expresar como:

$$\dot{Q}_S = A \frac{k}{x} (T_C - T_S) = A h (T_S - T_e) = A \frac{T_C - T_e}{\frac{x}{k} + \frac{1}{h}}$$

El término de disipación de energía por congelación se expresará como:

$$\dot{Q}_D = A \rho \lambda_H \frac{dx}{dt}$$

ecuaciones en las que A es el área de la lámina, k y ρ la conductividad térmica y densidad de la capa congelada, mientras que h es el coeficiente de transmisión de calor por convección hacia el exterior.

Al igualar estas ecuaciones se obtiene:

$$\rho \lambda_H \frac{dx}{dt} = \frac{T_C - T_e}{\frac{x}{k} + \frac{1}{h}}$$

ecuación en variables separables, que se puede integrar con las siguientes condiciones límite:

- Para $t = 0$ $x = 0$
- Para $t = t_C$ $x = e/2$

siendo t_C el tiempo de congelación y e el espesor de la lámina. La ecuación integrada permite calcular el tiempo de congelación:

$$t_C = \frac{\rho \lambda_H}{T_C - T_e} \left(\frac{e^2}{8k} + \frac{e}{2h} \right) \quad [17.9]$$

Esta ecuación es conocida como ecuación de Plank, y es importante resaltar que es válida sólo para el período de congelación, es decir, se ha supuesto que el

alimento se encontraba inicialmente a su temperatura de congelación. Además, el calor latente λ_H es el de la fracción congelada, y se calcula multiplicando el correspondiente al agua pura λ por la fracción másica de agua congelada: $\lambda_H = x_H \lambda$.

Para cilindros de longitud infinita y esferas, el tiempo de congelación se obtiene de forma análoga, aunque la expresión resultante difiere en los valores de los coeficientes 8 y 2 que afectan a la conductividad y coeficiente de convección. Así, para cilindros estos valores son 16 y 4, mientras que para esferas dichos valores son 24 y 6. Además, la dimensión característica no será el espesor sino el radio.

Si se tiene presente que los módulos de Fourier, Biot y Stefan vienen definidos por las ecuaciones:

- Módulo de Fourier: $(Fo) = \frac{k}{\rho \hat{C}_p (e)^2}$
- Módulo de Biot: $(Bi) = \frac{he}{k}$
- Módulo de Stefan: $(Ste) = \frac{\hat{C}_p (T_C - T_e)}{\lambda}$

la ecuación se transforma en una expresión que correlaciona estos tres módulos:

$$(Fo) = \frac{1}{8} \frac{1}{(Ste)} + \frac{1}{2} \frac{1}{(Bi) (Ste)}$$

ecuación válida para láminas infinitas de espesor finito, pero que se puede generalizar a esferas y cilindros de altura infinita:

$$(Fo) = \frac{R}{(Ste)} + \frac{P}{(Bi) (Ste)} \quad [17.10]$$

en la que los valores de los parámetros P y R para láminas, cilindros infinitos y esferas se recogen en la tabla 17.2.

La ecuación de Plank es una aproximación al cálculo de procesos de congelación. Aunque no se puede utilizar para el cálculo exacto de los tiempos de congelación, sirve para obtener una aproximación de estos tiempos.

En la práctica, se presentan casos en los que se debe congelar un producto con una geometría finita. En dichos casos se podrá utilizar la misma ecuación 17.10,

Tabla 17.2. Parámetros P y R de la ecuación 17.10

Geometría	P	R	Dimensión
Lámina infinita	1/2	1/8	espesor e
Cilindro infinito	1/4	1/16	radio r
Esfera	1/6	1/24	radio r

aunque los parámetros P y R diferirán de los valores dados en la tabla 17.2. El cálculo de estos parámetros es bastante complejo. Así, para el caso de un paralelepípedo de espesor e , anchura a y longitud l , se definen los parámetros adimensionales de longitud $\beta_1 = l/e$ y $\beta_2 = a/e$, de tal forma que los valores de P y R se calculan a partir de las ecuaciones (Plank,1980):

$$P = \frac{\beta_1 \beta_2}{2 (\beta_1 \beta_2 + \beta_1 + \beta_2)} \quad [17.11a]$$

$$R = \frac{(M-1)(\beta_1-M)(\beta_2-M) \ln\left(\frac{M}{M-1}\right) - (N-1)(\beta_1-N)(\beta_2-N) \ln\left(\frac{N}{N-1}\right)}{8L} + \frac{2\beta_1 + 2\beta_2 - 1}{72} \quad [17.11b]$$

$$L = \sqrt{(\beta_1 - \beta_2)(\beta_1 - 1) + (\beta_2 - 1)^2}$$

$$M = \frac{\beta_1 + \beta_2 + 1 + L}{3}$$

$$N = \frac{\beta_1 + \beta_2 + 1 - L}{3}$$

La ecuación de Plank sirve para determinar los tiempos de congelación, pero sólo de forma aproximada. En todo el desarrollo de la ecuación de Plank se ha supuesto que al inicio de la congelación el alimento se hallaba justo a la temperatura de congelación. Sin embargo, por regla general, esto no es así, ya que el alimento suele encontrarse a una temperatura superior a la de congelación. El tiempo real deberá ser la suma del calculado mediante la ecuación de Plank más el necesario para que la temperatura en la superficie del producto alcance la temperatura de congelación desde la inicial que poseía. En el cálculo de este tiempo adicional se debe utilizar el método descrito en la transmisión de calor en estado no estacionario, pero utilizando las propiedades del alimento no congelado.

En la bibliografía se encuentran trabajos que intentan calcular este tiempo. Uno de ellos es el presentado por Nagaoka *et al.* (1955), en el que el cálculo del tiempo de congelación se realiza utilizando la ecuación:

$$t_c = \frac{\rho \Delta \hat{H}}{T_c - T_e} \left(\frac{R e^2}{k} + \frac{P e}{h} \right) [1 + 0,008 (T_i - T_c)] \quad [17.12]$$

en la que T_i es la temperatura del alimento al inicio de la congelación, mientras que $\Delta \hat{H}$ es la diferencia de entalpía por unidad de masa del alimento entre la temperatura inicial y la que posee al final del proceso de congelación.

El incremento de entalpía que experimenta el alimento en el proceso de congelación puede evaluarse mediante la ecuación:

$$\Delta \hat{H} = \hat{C}_p)_{NC} (T_i - T_C) + x_H \lambda_A + \hat{C}_p)_{C} (T_C - T_f) \quad [17.13]$$

en la que el primer sumando del segundo miembro de la igualdad, representa el calor que se debe eliminar del producto para pasar de la temperatura a la que se encontraba inicialmente, hasta la temperatura de congelación. El segundo sumando representa el calor desprendido en el cambio de estado de la fracción de agua congelada, mientras que el tercer sumando es el calor eliminado para que el alimento pase de la temperatura de congelación a la final T_f . Esta temperatura no tiene por qué coincidir con la del medio de congelación, sino que puede ser algo superior, aunque en el caso de que coincidan se cumple que $T_f = T_e$. Además, λ_A es el calor latente de fusión del agua pura, mientras que el calor específico del alimento antes y después de la congelación puede calcularse a partir de las ecuaciones 17.6 y 17.5, respectivamente.

Este es un sencillo método de cálculo del incremento de entalpía. En la bibliografía pueden encontrarse ecuaciones empíricas que también permiten calcular dicha variación entálpica (Chen, 1985; Levy, 1979; Succar y Hayakawa, 1983). Además, Riedel (1956, 1957,a,b) ha desarrollado diagramas que permiten el cálculo de las entalpías para diferentes productos (carne, huevos, frutas y zumos) en función del contenido en agua y fracción de agua congelada.

Otra modificación a la ecuación de Plank es la dada por Cleland y Earle (1976, 1982), en la que definen un nuevo módulo adimensional:

- Módulo de Plank: $(Pk) = \frac{\hat{C}_p)_A (T_i - T_C)}{\Delta \hat{H}}$

siendo $\hat{C}_p)_A$ el calor específico del agua no congelada.

Para calcular el tiempo de congelación se utiliza la ecuación de Plank [ec. 17.10], en la que los valores de los parámetros P y R dependen del tipo de geometría.

- Para láminas, se utilizan las ecuaciones:

$$P = 0,5072 + 0,2018 (Pk) + (Ste) \left[0,3224 (Pk) + \frac{0,0105}{(Bi)} + 0,0681 \right] \quad [17.14a]$$

$$R = 0,1684 + (Ste) [0,0135 + 0,274 (Pk)] \quad [17.14b]$$

- Para cilindros las ecuaciones a utilizar son:

$$P = 0,3751 + 0,0999 (Pk) + (Ste) \left[0,4008 (Pk) + \frac{0,071}{(Bi)} - 0,5865 \right] \quad [17.15a]$$

$$R = 0,0133 + (Ste) [0,3957 + 0,0415 (Pk)] \quad [17.15b]$$

- Para geometrías esféricas las ecuaciones a utilizar son:

$$P = 0,1084 + 0,0924 (Pk) + (Ste) \left[0,231 (Pk) - \frac{0,3114}{(Bi)} + 0,6739 \right] \quad (17.16a)$$

$$R = 0,0784 + (Ste) [0,0386 (Pk) - 0,1694] \quad [17.16b]$$

Además de estas modificaciones, estos autores introducen un parámetro denominado dimensión equivalente de la transferencia de calor, que tiene en cuenta la forma del producto a congelar. Sin embargo, la corrección debida a este factor proporciona tiempos de congelación más bajos, por lo que quizás resulte más conveniente no realizar tal corrección, ya que con ello se está en una posición más conservativa.

En todos los métodos descritos, el tiempo de congelación se calcula para alimentos de formas regulares. Sin embargo, en la realidad se puede presentar el caso de congelación de geometrías no regulares. Para resolver este problema se define un factor adimensional E , que es función del módulo de Biot y de los factores de forma β_i . Las ecuaciones que permiten el cálculo de este factor pueden encontrarse en la bibliografía (Cleland *et al.*, 1987a,b; Cleland,1992). Así, por ejemplo, en el caso de un cuerpo de forma elipsoidal, cuyos ejes posean las dimensiones r , $\beta_1 r$, $\beta_2 r$, el parámetro E se calcula según la expresión (Cleland,1992):

$$E = 1 + \frac{1 + (2/Bi)}{\beta_1^2 + (2 \beta_1/Bi)} + \frac{1 + (2/Bi)}{\beta_2^2 + (2 \beta_2/Bi)} \quad [17.17]$$

El valor de la dimensión característica r , del objeto irregular, se encuentra tomando la distancia más corta desde la superficie al punto de menor enfriamiento. Los parámetros β_1 y β_2 se obtendrán a partir de las ecuaciones:

$$A_x = \pi \beta_1 r^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi \beta_1 \beta_2 r^3$$

en las que A_x es la sección transversal más pequeña que contiene el centro térmico, mientras que V es el volumen del cuerpo considerado.

El cálculo del tiempo de congelación de un alimento, cualquiera que sea su geometría, se obtendrá al dividir el tiempo de congelación calculado para una lámina por el valor de este factor E .

17.5. Diseño de sistemas de congelación

En el diseño de los sistemas de congelación se necesita conocer qué cantidad de energía es necesario eliminar del alimento, para pasar de la temperatura inicial a

la final del producto congelado. Para ello, es preciso conocer la entalpía del alimento al inicio y final del proceso de congelación. Como la entalpía es una función de estado, debe darse con respecto a una temperatura de referencia, que en el caso de los procesos de congelación es $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$, es decir, a esta temperatura la entalpía de cualquier producto se considera nula.

Para el cálculo de la potencia necesaria para llevar a cabo la congelación, es necesario determinar la variación de entalpía que experimenta el producto desde que se introduce en el congelador, hasta que alcanza su temperatura final. Para ello, se utiliza la ecuación 17.13.

Otro de los factores que se precisa calcular, es la potencia que deben poseer los aparatos de congelación para llevar a cabo un determinado proceso. Esta potencia es la energía total a eliminar del alimento en la unidad de tiempo, y es una medida de la capacidad del sistema de congelación. Para calcular la potencia de congelación se utiliza la ecuación:

$$Pot = \frac{m \Delta \hat{H}}{t} \quad [17.18]$$

en la que m es la cantidad total de alimento a congelar, $\Delta \hat{H}$ el incremento de entalpía que experimenta el alimento desde la temperatura inicial a la final, y t el tiempo que el alimento permanece en el aparato de congelación. Este tiempo suele coincidir con el tiempo de congelación calculado en un apartado anterior.

Si en el cálculo del tiempo de congelación se utiliza la ecuación dada por Nagaoka *et al.* [ec. 17.12], la potencia puede calcularse mediante la expresión:

$$Pot = \frac{m (T_c - T_e)}{\rho \left(\frac{Re^2}{k} + \frac{Pe}{h} \right) [1 + 0,008 (T_i - T_c)]} \quad [17.19]$$

que, como se observa, no es necesario conocer el incremento de entalpía que experimenta el alimento, y por tanto, no se necesitan los valores de calor específico ni de la fracción de agua no congelada.

17.6. Refrigeración

La refrigeración se puede definir como el proceso en el que se elimina calor de un material que se encuentra a una temperatura superior que la de su alrededor. De modo general, la refrigeración es un término que se utiliza para denominar el almacenamiento de alimentos a temperaturas por debajo de $15\text{ }^{\circ}\text{C}$ y por encima del punto de congelación. Estos procesos se han aplicado a la conservación de alimentos. Desde antiguo se ha utilizado la denominada refrigeración natural, aprovechando que la nieve, hielo y salmueras permiten temperaturas inferiores a las ambientales. Cabe destacar que algunos productos

alimentarios se han almacenado y se siguen almacenando en bodegas, cuya temperatura es distinta de la ambiente, y constante con el tiempo. Sin embargo, en este capítulo se desarrolla la denominada refrigeración mecánica, en la que se utilizan dispositivos mecánicos y eléctricos para conseguir temperaturas inferiores a la ambiente.

Los alimentos una vez obtenidos de su fuente natural, presentan la problemática de ser perecederos y de vida comercial limitada. Esto es debido a que pueden alterarse, principalmente por tres mecanismos:

- a) Organismos vivos que los contaminan y deterioran. Destacando no sólo microorganismos (parásitos, bacterias y hongos), sino también insectos, en las diferentes fases de su ciclo vital.
- b) Actividades bioquímicas que se dan en los propios alimentos, como son la respiración, pardeamiento, sobremaduración, que en la mayoría de los casos son debidas a enzimas presentes en el alimento. Estas actividades pueden disminuir la calidad del alimento. Se presentan en vegetales después de su recolección y en alimentos animales después del sacrificio del animal.
- c) Procesos físicos, como puede ser la pérdida de humedad del alimento, que conlleva la deshidratación del mismo.

Un descenso de la temperatura de almacenamiento lleva asociado que las reacciones de deterioro disminuyan su velocidad, con lo que el alimento alarga su vida útil. Cuanto menor sea la temperatura menor será la velocidad de deterioro, lo que indica que es bueno rebajar la temperatura al máximo, siempre que sea superior a la de congelación. Sin embargo, esto no siempre es posible, ya que en algunos alimentos se ha observado que a temperaturas bajas, aunque sean por encima de la de congelación, se pueden dar reacciones indeseables. Así, en el almacenamiento de algunas frutas pueden aparecer pardeamientos internos y del corazón, como es el caso de las peras, que es aconsejable almacenar a 3-4 °C, ya que si se almacenan a 0 °C aparecen los citados deterioros. En patatas no es aconsejable almacenarlas por debajo de 3 °C, ya que pueden aparecer desequilibrios en el sistema almidón-azúcar que provocan la acumulación de azúcares, con el consiguiente deterioro de las patatas. En la tabla 17.3 se dan las temperaturas límite de almacenamiento por debajo de las cuales pueden aparecer problemas de deterioro en algunos tipos de alimentos.

Otro de los parámetros importantes en el almacenamiento de alimentos bajo refrigeración es la humedad relativa. Si ésta es inferior a la denominada humedad relativa de equilibrio, existe una pérdida de agua desde el alimento hacia el exterior, con lo que se produce una deshidratación del producto. Por contra, si la humedad relativa del ambiente es superior, se puede producir una condensación de agua en la superficie del alimento, lo que facilita en muchos casos el crecimiento microbiano y deterioro del producto.

En las tablas 17.4 y 17.5 se dan respectivamente, las temperaturas y humedades relativas para un almacenamiento óptimo de distintos alimentos.

Tabla 17.3. Deterioro de frutas y hortalizas bajo condiciones de almacenamiento

Producto	Temperatura crítica de almacenamiento (°C)	Tipo de deterioro entre la temperatura de congelación y la crítica
Aceituna	7	Pardeamiento interno.
Aguacate	4-13	Decoloración parda en pulpa.
Arándano	2	Textura caucho, pulpa roja.
Berenjena	7	Escaldado en superficie, podredumbre.
Boniato	13	Decoloración interna, picadura, podredumbre.
Calabaza	10	Podredumbre.
Judías	7	Picadura y enrojecimiento.
Lima	7-9	Picadura.
Limón	14	Picadura, mancha roja, manchado membranoso.
Mango	10-13	Decoloración grisácea de piel, maduración desigual.
Melón	7-10	Picadura, podredumbre de piel, no maduración.
Manzana	2-3	Pardeamiento interno y de corazón, escaldado, rotura húmeda.
Naranja	3	Picadura, manchas pardas.
Papaya	7	Picadura, podredumbre, no maduración.
Patata	3	Pardeamiento caoba, endulzamiento.
Pepino	7	Picaduras, podredumbre.
Piña	7-10	Color verde cuando maduran.
Plátano	12-13	Color opaco cuando maduran.
Pomelo	10	Escaldado, picadura.
Quingombó	7	Decoloración, picado, zonas agua embebida, podredumbre.
Sandía	4	Picadura, olor desagradable.
Tomate		
Maduro	7-10	Podredumbre, ablandamiento, agua embebida.
Verde	13	Poco color cuando maduran, podredumbre.

Fuente: Lutz y Hardenburg (1968).

Tabla 17.4. Temperatura de almacenamiento en atmósfera normal

T (°C)	Producto
Justo encima del punto de congelación	<i>Tejidos animales.</i> Carne mamíferos, pescado, pollo. <i>Frutas.</i> Albaricoque, limón (amarillo), pera, nectarinas, naranja (Florida), ciruelas, bayas, manzanas (algunas variedades), melocotón. <i>Hortalizas.</i> Espárrago, remolacha, guisantes, rábano, brócoli, col Bruselas, zanahoria, apio, coliflor, maíz, espinaca. <i>Leche.</i> <i>Huevo</i> (con cáscara).
2-7 °C	<i>Frutas.</i> Melón, naranjas (excepto Florida), manzana (algunas variedades), piña madura. <i>Hortalizas.</i> Patata temprana.
> 7 °C	<i>Frutas.</i> Aguacate, plátano, pomelo, mango, limón (verde), lima, piña verde, tomate. <i>Hortalizas.</i> Judías verdes, pepino, boniato, patata tardía.

Fuente: Karel et al. (1975a).

Tabla 17.5. Humedad relativa recomendada

Humedad relativa	Producto
Menor 85%	Mantequilla, queso, coco, frutos secos, ajo, nuez, cebolla seca, huevo (cáscara), dátil.
85-90%	<i>Tejidos animales.</i> Carne mamíferos (excepto ternera), pollo. <i>Frutas.</i> Plátano (amarillo), cítricos, piña, nectarina, ciruela, melocotón, tomate. <i>Hortalizas.</i> Boniato, patata temprana.
90-95%	<i>Tejidos animales.</i> Ternera, pescado. <i>Frutas.</i> Manzana (90%), bayas, pera, plátano (verde). <i>Hortalizas.</i> Judías verdes, pepino, maíz dulce, patata tardía, hojas hortalizas, guisantes verdes, raíces comestibles.

Fuente: Karel *et al.* (1975a).

17.7. Sistemas mecánicos de refrigeración

La segunda ley de la Termodinámica indica que el calor fluye sólo en la dirección decreciente de temperatura. Sin embargo, en los procesos industriales de refrigeración, la finalidad es eliminar calor de puntos de baja temperatura hacia puntos de mayor temperatura. Para lograr esto, se utilizan los denominados ciclos de refrigeración, en los que en un circuito cerrado circula un fluido en distintas etapas, lográndose el propósito deseado. Por ello, en el funcionamiento de un sistema de refrigeración se utilizan los denominados ciclos de refrigeración, siendo el más importante el de compresión de vapor. Un esquema simple de este ciclo se da en la figura 17.4. Este es un ciclo cerrado en el que el fluido que circula se denomina refrigerante. Suponiendo que el ciclo se inicia en el punto 1, de aspiración del compresor, el fluido en estado de vapor recibe energía del compresor, para pasar a un punto 2 a través de una compresión politrópica, en la que el fluido aumenta su presión y temperatura, y con ello su entalpía. Este fluido rebaja su contenido energético en un condensador, en un proceso isobárico, pasando a estado líquido (punto 3). A continuación, pasa por una válvula de expansión, en un proceso isentrópico, con disminución de su presión (punto 4), obteniéndose una mezcla líquido-gas. Esta mezcla pasa a estado de vapor saturado en el evaporador, en el que en un proceso isobárico el fluido recibe calor pasando a las condiciones del punto 1 de partida. Cabe resaltar que el sistema global toma calor del medio en el evaporador, y desprende calor en el condensador.

El proceso global puede representarse en el diagrama presión-entalpía (figura 17.5). En la etapa de compresión 1-2 el fluido recibe el trabajo de compresión, que es quizás la etapa más costosa de todo el sistema. Este trabajo de compresión se puede evaluar por la diferencia de entalpías entre el punto de descarga y el de aspiración del compresor. Así, el trabajo de compresión por unidad de masa de fluido es:

$$\hat{W}_C = \hat{H}_2 - \hat{H}_1 \quad [17.20]$$

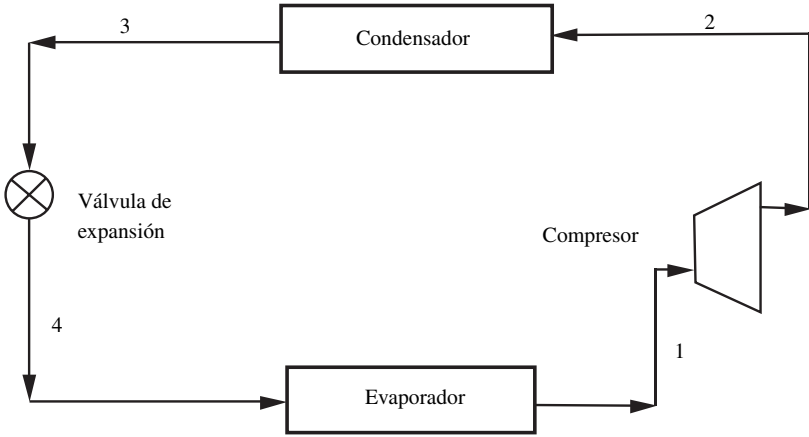


Figura 17.4. Sistema del ciclo de refrigeración (adaptado de Stoecker y Jones, 1982).

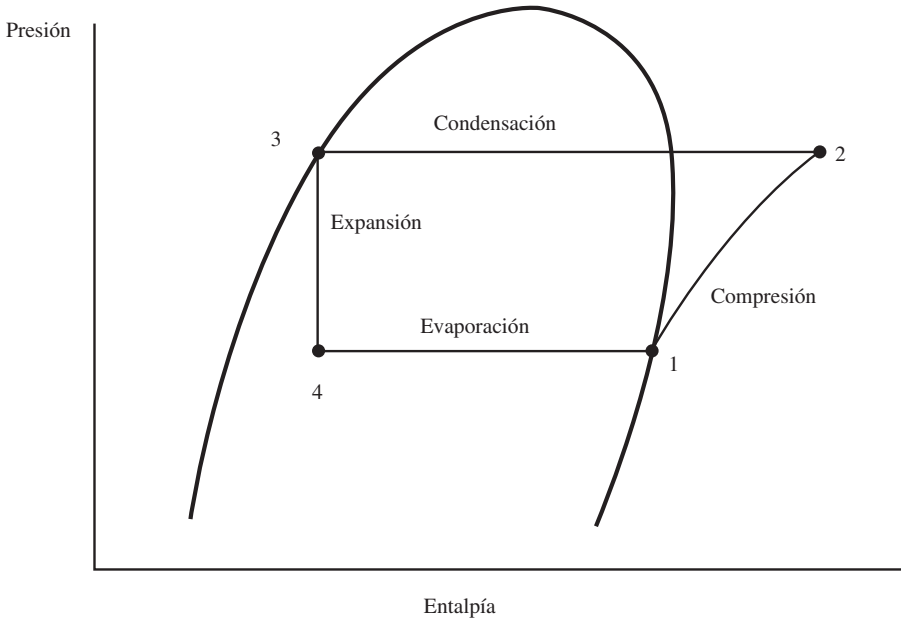


Figura 17.5. Ciclo de compresión del vapor.

Si se desea obtener la potencia teórica del compresor, se debe multiplicar este trabajo por el caudal másico del fluido que circula a través del sistema:

$$Pot = w \hat{W}_C = w (\hat{H}_2 - \hat{H}_1) \quad [17.21]$$

Como se puede observar, el caudal de circulación del fluido determina en parte el tamaño del compresor a utilizar, ya que cuanto mayor sea este caudal mayor será la potencia de compresión necesaria.

En el condensador, la cantidad de energía cedida por el fluido se determina a partir de las entalpías de los puntos 2 y 3. De tal forma, el caudal de calor cedido por el fluido será:

$$\dot{Q}_S = w (\hat{H}_3 - \hat{H}_2) \quad [17.22]$$

en la que w es el caudal másico del fluido, siendo \hat{H} la entalpía por unidad de masa del fluido. Como el punto 2, donde el fluido abandona el compresor posee una mayor entalpía que el punto 3, se obtiene un calor con signo negativo. Ello indica que es un calor cedido por el fluido, cuyo valor se utiliza en el dimensionado del condensador y el cálculo de la cantidad de fluido de enfriamiento a utilizar.

La etapa de evaporación 4-1 representa el efecto refrigerante del sistema, y en la que el calor transferido desde el medio hacia el fluido es:

$$\dot{Q}_E = w (\hat{H}_1 - \hat{H}_4) \quad [17.23]$$

Este calor es absorbido por el fluido y representa la capacidad refrigerante, que es la finalidad primordial de todo el proceso.

Existe un parámetro importante en estos procesos, que es el **coeficiente de rendimiento** (ϕ), el cual se define como el efecto refrigerante dividido por el trabajo aportado externamente. Como este trabajo es únicamente el de compresión, el coeficiente de rendimiento del sistema refrigerante será:

$$\phi = \frac{\hat{H}_1 - \hat{H}_4}{\hat{H}_2 - \hat{H}_1} \quad [17.24]$$

La potencia por kilovatio de refrigeración es la inversa del coeficiente de rendimiento, y un sistema de refrigeración eficiente debe poseer un bajo valor de potencia, pero un alto valor del coeficiente de rendimiento (Stoecker y Jones, 1982).

En algunos sistemas de refrigeración, el fluido que alimenta al compresor es vapor recalentado, asegurando de este modo que en el compresor no entra refrigerante en forma líquida. Para conseguir esto, el vapor saturado que sale del evaporador pasa a través de un intercambiador de calor, en el que el fluido que le cede calor es el de la corriente que abandona el condensador. Además del efecto citado, también se consigue que el líquido del condensador se subenfrie, previniéndose la formación de burbujas antes de su paso por la válvula de expansión.

17.8. Refrigerantes

Son varios los compuestos que se utilizan como fluidos refrigerantes. Los fluidos utilizados en los sistemas de compresión de vapor, se denominan refrigerantes primarios, mientras que los secundarios son los utilizados en el transporte a bajas temperaturas de un lugar a otro.

Generalmente, como refrigerantes secundarios se suelen utilizar soluciones con temperaturas de congelación por debajo de 0 °C. Los más utilizados son soluciones acuosas de etilenglicol, propilenglicol y cloruro cálcico. Las propiedades de todos ellos son similares, aunque el propilenglicol presenta la ventaja de no ser peligroso al contacto con los alimentos.

Son muchos los refrigerantes primarios que se han utilizado y se utilizan en la industria. En la tabla 17.6 se da un listado de algunos de ellos. Para los hidrocarburos y compuestos halocarbonados, la designación numérica de cada uno viene determinada del siguiente modo: el primer dígito de la derecha representa el número de átomos de flúor que posee, el segundo dígito es el número de átomos de hidrógeno aumentado en uno, y el tercer dígito es el número de átomos de carbono disminuido en uno. Para los compuestos inorgánicos los dos últimos dígitos representan su peso molecular.

Tabla 17.6. Algunos tipos de refrigerantes

Tipo	Número	Nombre químico	Fórmula
Halocarbonados	11	Tricloromono fluorometano	CCl ₃ F
	12	Diclorodifluorometano	CCl ₂ F ₂
	13	Monoclorotrifluorometano	CClF ₃
	22	Monoclorodifluorometano	CHClF ₂
	40	Clorometilo	CH ₃ Cl
	113	Triclorotrifluoroetano	CCl ₂ FCClF ₂
Hidrocarburos	114	Diclorotetrafluoroetano	CClF ₂ CClF ₂
	50	Metano	CH ₄
	170	Etano	C ₂ H ₆
Inorgánicos	290	Propano	C ₃ H ₈
	717	Amoníaco	NH ₃
	718	Agua	H ₂ O
	729	Aire	
	744	Dióxido carbono	CO ₂
	764	Dióxido azufre	SO ₂

Fuente: (Stoecker y Jones, 1982).

La elección del tipo de refrigerante depende del proceso en el que se va a utilizar. En los sistemas de refrigeración siempre pueden ocurrir fugas, y si el refrigerante entra en contacto con el alimento puede dar como resultado el que se produzca contaminación del producto. Así, si un alimento es expuesto por largo tiempo al contacto con amoníaco, puede quedar afectado en su gusto y olor. A pesar que se considera que los halocarbonados no presentan graves problemas al ser expuestos en contacto con los alimentos (Stoecker y Jones, 1982), debe tenerse presente que son compuestos cuyos efectos perjudiciales sobre la capa atmosférica de ozono va a limitar e incluso prohibir su uso como refrigerantes.

17.9. Sistemas multipresión

Un sistema multipresión es aquél que posee dos o más puntos de baja presión. Un punto de baja presión es la presión que tiene el refrigerante entre la válvula de expansión y la entrada al compresor. Sistemas de multipresión se pueden encontrar en la industria láctea (Stoecker y Jones, 1982), en la que un evaporador opera a $-35\text{ }^{\circ}\text{C}$ para fortalecer o endurecer el helado, mientras que otro opera a $2\text{ }^{\circ}\text{C}$ para enfriar leche.

En los sistemas de refrigeración, entre el condensador y el evaporador se puede obtener una corriente que es mezcla de líquido y vapor, debido a que pasa a través de una válvula de expansión. La fracción de gas puede separarse de la líquida utilizando un tanque de separación (figura 17.6). Así, el punto 1 indica las condiciones de un líquido saturado, que al expandirse da una mezcla 3, que puede ser separada en un líquido 4 y un vapor 6. Este vapor se alimenta al compresor, mientras que el líquido se lleva a través de una válvula de expansión, al evaporador. Este sistema necesita, por tanto, dos compresores. Sistemas de un único compresor suelen utilizarse poco, ya que no resultan muy eficientes (Stoecker y Jones, 1982).

Cuando se desea comprimir un gas entre dos presiones determinadas a la salida del compresor, el gas además de poseer una mayor presión también ha aumentado su temperatura. En muchos casos, al objeto de mejorar el rendimiento del proceso, se utilizan dos compresores con refrigeración intermedia del vapor, rebajando el sobrecalentamiento producido para obtener un vapor saturado. En los sistemas de refrigeración este método suele reemplazarse por uno alternativo, mostrado en la figura 17.7, en el que se utiliza líquido refrigerante del condensador como fluido de refrigeración para el refrigerador intermedio. El compresor de la primera etapa, descarga el vapor que burbujea en el líquido del refrigerador intermedio, del que sale como vapor saturado 4, con una menor temperatura que la del punto 2 de descarga. En este tipo de sistemas, si p_S es la presión de succión del primer compresor, y p_D la descarga del segundo compresor, la presión intermedia (p_i) se calcula como la media geométrica de las dos anteriores:

$$p_i = \sqrt{p_S p_D} \quad [17.25]$$

esta presión es la descarga del primer compresor y la de succión del segundo, y además es la presión a la que debe operar el refrigerador intermedio, para que la economía global del sistema sea óptima.

17.9.1. Sistemas de dos compresores y un evaporador

La compresión en dos etapas con refrigerador intermedio y separación de gas (figura 17.8), es usualmente la forma de obtener un evaporador de baja temperatura. Este sistema requiere menor potencia que uno de compresión simple, y a menudo, el ahorro de potencia justifica el costo extra del equipo.

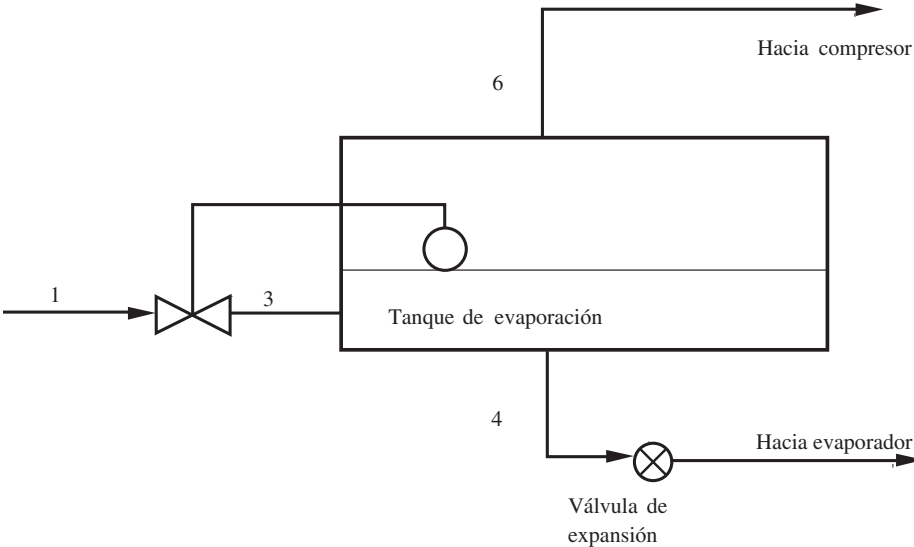
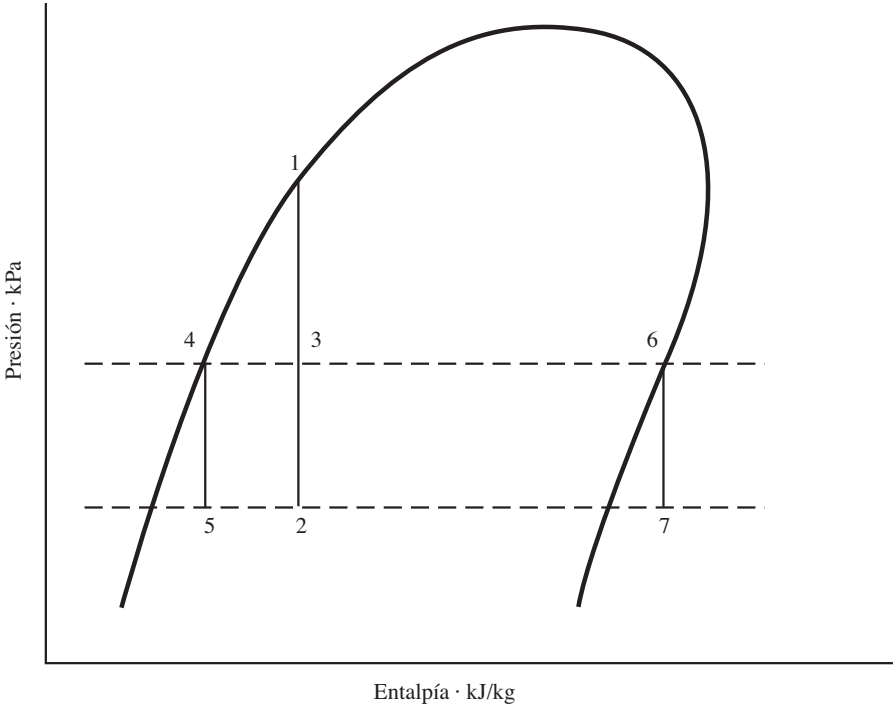


Figura 17.6. Proceso de expansión con separación de gas (adaptado de Stoecker y Jones, 1982).

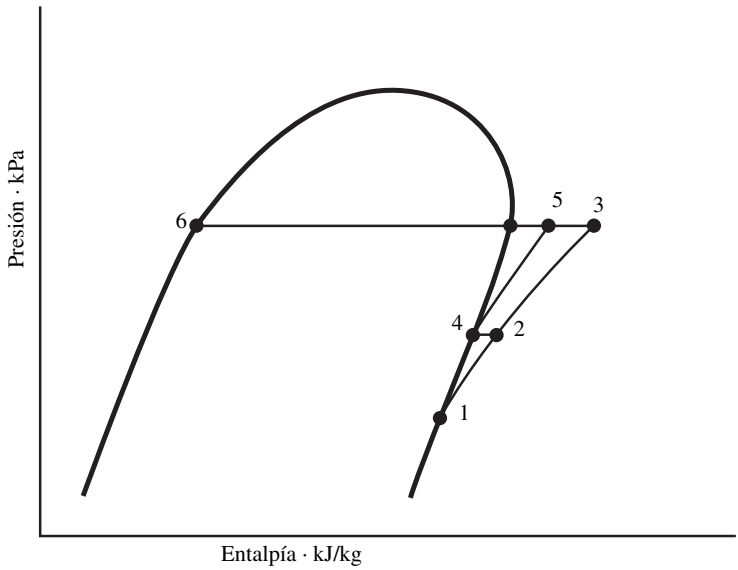
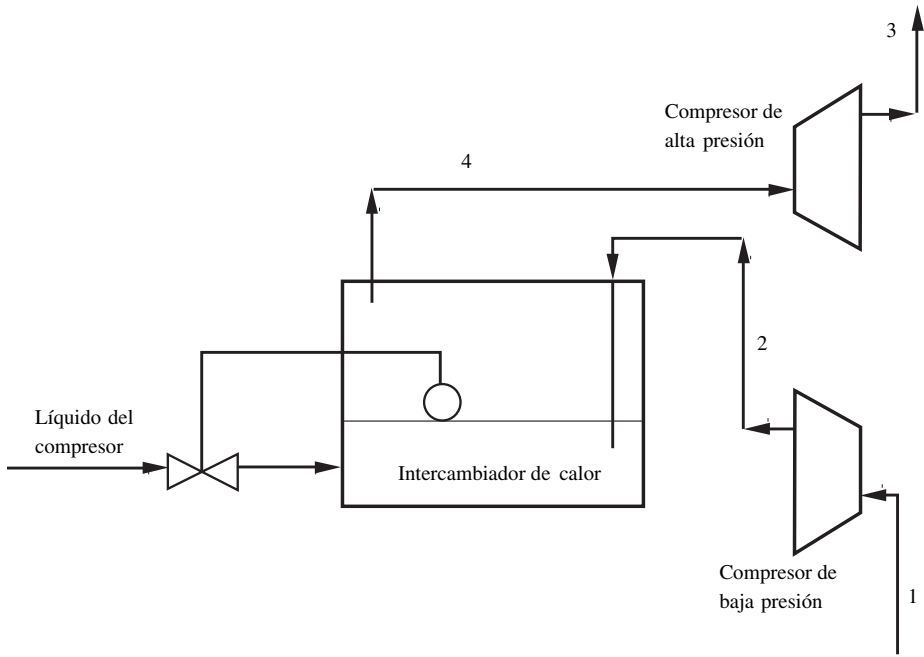


Figura 17.7. Refrigeración intermedia con líquido refrigerante (adaptado de Stoecker y Jones, 1982).

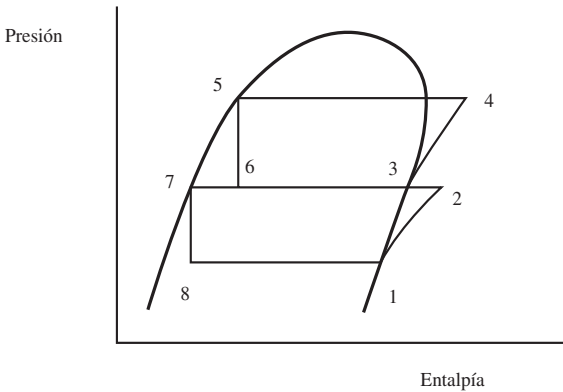
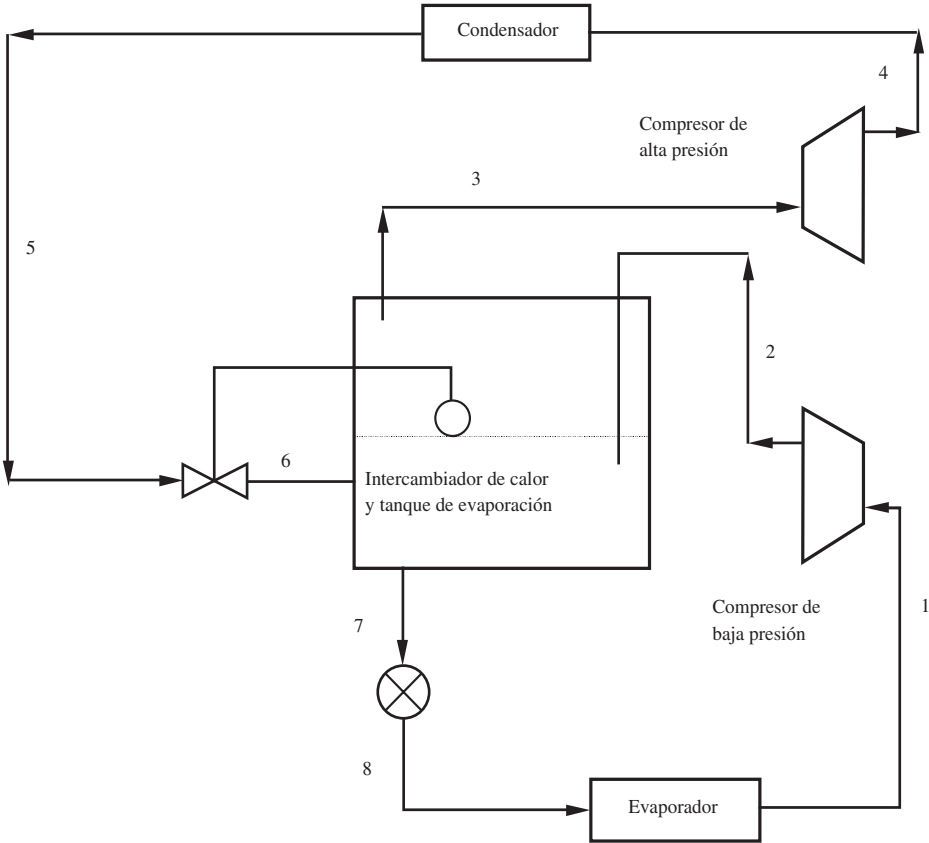


Figura 17.8. Operación con dos compresores y un evaporador (adaptado de Stoecker y Jones, 1982).

Se observa que el caudal de fluido que circula en distintos tramos de la instalación es el mismo, así:

$$w_1 = w_2 = w_7 = w_8 \quad [17.26a]$$

$$w_3 = w_6 \quad [17.26b]$$

Para la resolución de problemas con este tipo de instalación deben realizarse diferentes balances:

- Balance energético en el evaporador:

$$\dot{Q}_E = w_1 (\hat{H}_1 - \hat{H}_8) \quad [17.27]$$

- Balances en el refrigerador intermedio:

$$w_2 \hat{H}_2 + w_6 \hat{H}_6 = w_3 \hat{H}_3 + w_7 \hat{H}_7 \quad [17.28]$$

teniendo en cuenta las ecuaciones 17.26 se obtiene:

$$w_3 (\hat{H}_3 - \hat{H}_6) = w_2 (\hat{H}_2 - \hat{H}_7) \quad [17.29]$$

- Potencia de los compresores:

$$\text{Primer compresor: } Pot)_1 = w_1 \hat{W}_1 = w_1 (\hat{H}_2 - \hat{H}_1) \quad [17.30]$$

$$\text{Segundo compresor: } Pot)_2 = w_3 \hat{W}_2 = w_3 (\hat{H}_4 - \hat{H}_3) \quad [17.31]$$

17.9.2. Sistemas de dos compresores y dos evaporadores

Los sistemas que poseen dos compresores y dos evaporadores operando a diferente temperatura son comunes en la industria de refrigeración. A menudo, en diferentes procesos de una misma planta se requieren temperaturas de refrigeración distintas en varios puntos de la misma. Evaporadores a dos temperaturas diferentes pueden operar de modo eficiente, en un sistema de dos etapas que utiliza refrigerador intermedio y separador de vapor (figura 17.9). Cabe resaltar que la presión intermedia del sistema, es la correspondiente a la temperatura de saturación T_3 del segundo evaporador, y viene fijada precisamente por esta temperatura.

La resolución a los problemas se debe realizar a través de los balances másicos y energéticos en las diferentes partes del sistema.

En este sistema se cumple:

$$w_1 = w_2 = w_7 = w_8 \quad [17.32]$$

- Balances en los evaporadores:

$$\dot{Q}_{E1} = w_1 (\hat{H}_1 - \hat{H}_7) \quad [17.33]$$

$$\dot{Q}_{E2} = w_6 (\hat{H}_3 - \hat{H}_6) \quad [17.34]$$

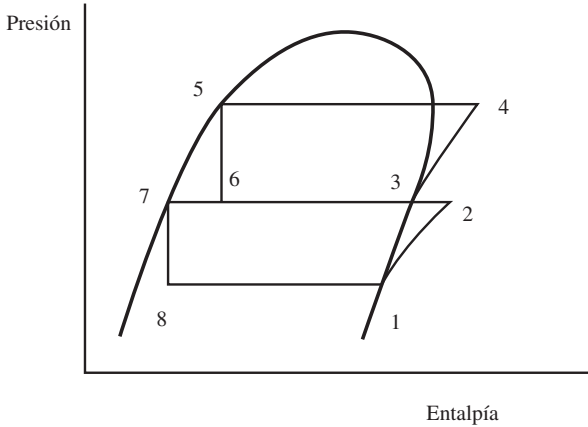
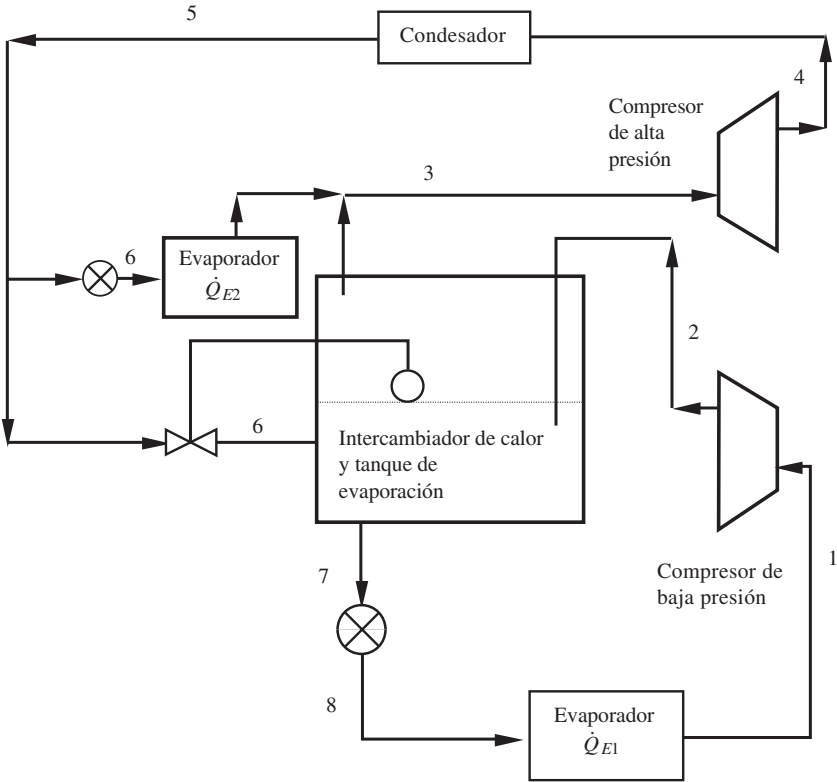


Figura 17.9. Operación con dos compresores y dos evaporadores (adaptado de Stoecker y Jones, 1982).

- Balances en el segundo evaporador y refrigerador intermedio:

$$w_2 \hat{H}_2 + w_5 \hat{H}_5 + \dot{Q}_{E2} = w_3 \hat{H}_3 + w_7 \hat{H}_7 \quad [17.35]$$

$$w_2 + w_5 = w_3 + w_7 \quad [17.36]$$

y como $w_2 = w_7$, también se cumple que: $w_3 = w_5$ con lo que:

$$w_3 (\hat{H}_3 - \hat{H}_5) = w_2 (\hat{H}_2 - \hat{H}_7) + \dot{Q}_{E2} \quad [17.37]$$

- Potencia de los compresores:

Primer compresor: $Pot)_1 = w_1 \hat{W}_1 = w_1 (\hat{H}_2 - \hat{H}_1) \quad [17.38]$

Segundo compresor: $Pot)_2 = w_3 \hat{W}_2 = w_3 (\hat{H}_4 - \hat{H}_3) \quad [17.39]$

PROBLEMAS**Problema 17.1**

Una lámina de carne magra de 3 cm de espesor se coloca en el interior de un congelador en el que existe una temperatura de -25°C . El coeficiente de transmisión de calor por convección desde la superficie de la carne es $15 \text{ J}/(\text{s}\cdot\text{m}^2\cdot^{\circ}\text{C})$. Determinar el tiempo necesario para congelar la lámina de carne si ésta contiene un 70% en peso de agua.

Datos. Propiedades de la carne magra: Conductividad térmica $1,7 \text{ J}/(\text{s}\cdot\text{m}\cdot^{\circ}\text{C})$. Calor específico $2,1 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C})$. Densidad $995 \text{ kg}/\text{m}^3$.

Para la carne magra se toma como temperatura inicial de congelación (tabla 17.1):

$$T_C = -2,2^{\circ}\text{C}$$

La fracción molar de agua en el punto de congelación se obtiene a partir de la ecuación 17.2.b:

$$\ln X_{0A} = \frac{6.003}{8,314} \left[\frac{1}{273} - \frac{1}{270,8} \right] ; X_{0A} = 0,9787$$

La masa molecular equivalente de los solutos se calcula mediante la ecuación 17.3b:

$$M_S = \frac{(18)(0,3)(0,9787)}{(0,7)(1 - 0,9787)} = 355,18 \text{ kg}/\text{kmol}$$

La fracción molar de agua no congelada a -25°C se obtiene a partir de la ecuación 17.2b:

$$\ln X_A = \frac{6.003}{8,314} \left[\frac{1}{273} - \frac{1}{248} \right] ; X_A = 0,7660$$

La fracción másica de agua no congelada se obtiene de la ecuación 17.3.b:

$$x_S = \frac{(18)(0,3)(0,766)}{(355,18)(1 - 0,766)} = 0,04976$$

La fracción másica de agua congelada es:

$$x_H = x_{A0} - x_A = 0,65024$$

El calor latente efectivo se calcula a partir de la fracción de hielo que contiene la carne:

$$\lambda_H = x_H \lambda = (0,65024)(6.003) = 3.903,4 \text{ kJ}/\text{kmol} = 216,86 \text{ kJ}/\text{kg}$$

A continuación se aplica la ecuación de Plank para determinar el tiempo de congelación. Para ello, es necesario determinar previamente los módulos de Biot y Stefan:

- Módulo Biot: $(Bi) = \frac{h e}{k} = \frac{(15) (0,03)}{(1,7)} = 0,2647$
- Módulo de Stefan: $(Ste) = \frac{\hat{C}_P (T_C - T_e)}{\lambda_H} = \frac{(2,1) [-2,2 - (-25)]}{(216,86)} = 0,2208$

El módulo de Fourier se obtiene de la ecuación de Plank para una lámina:

$$(Fo) = \frac{1}{8} \frac{1}{(0,2208)} + \frac{1}{2} \frac{1}{(0,2647) (0,2208)} = 9,120$$

El tiempo de congelación se obtiene al despejarlo del módulo de Fourier:

$$t = (Fo) \frac{\rho \hat{C}_P (e)^2}{k} = (9,12) \frac{(995) (2,1) (0,03)^2}{(0,0017)} = 10.089 \text{ s}$$

$$t = 2 \text{ h } 48 \text{ min}$$

Problema 17.2

Bloques de 4 kg de yema de huevo batida, contenida en una geometría rectangular de 5 cm de espesor, 20 cm de anchura y 40 cm de longitud, son introducidos en un congelador continuo de cinta, en el que circula aire a -25 °C. La yema se introduce en el congelador a 20 °C, y lo abandona a -10 °C. Determinar el tiempo necesario para congelar la yema.

Si en el interior del congelador cada bloque de yema se mueve 1 m cada minuto, ¿qué longitud deberá poseer la cinta del congelador? Calcular la potencia que debe poseer el congelador si se tratan de forma simultánea 100 bloques de yema.

Datos. Composición en peso de la yema de huevo: 48,4% de agua, 16% de proteínas, 34% de lípidos, 0,5% de hidratos de carbono y 1,1% de cenizas.

Coficiente individual de transmisión de calor por convección 20 J/(s·m²·°C).

Las propiedades térmicas de la yema a 20 °C se calculan mediante las ecuaciones de Choi y Okos, para lo que inicialmente se determinan las de sus componentes:

Componente	k (J/s·m·°C)	\hat{C}_P (kJ/kg·°C)	ρ (kg/m³)	X_i^m	X_i^V
Agua	0,6037	4,177	995,7	0,484	0,4931
Proteína	0,2016	2,032	1.319,5	0,160	0,1230
Grasa	0,1254	2,012	917,2	0,340	0,3761
Hidratos carbono	0,2274	1,586	1.592,9	0,005	0,0021
Cenizas	0,3565	1,129	2.418,2	0,011	0,0070

$$\begin{aligned}
 k &= (0,6037) (0,4931) + (0,2016) (0,123) + (0,1254) (0,3761) + (0,2274) (0,0021) + \\
 &\quad + (0,3565) (0,007). \\
 \hat{C}_p &= (4,177) (0,484) + (2,032) (0,16) + (2,012) (0,34) + (1,586) (0,005) + \\
 &\quad + (1,129) (0,011). \\
 \frac{1}{\rho} &= (1/995,7) (0,484) + (1/1319,5) (0,16) + (1/917,2) (0,34) + (1/1592,9) (0,005) + \\
 &\quad + (1/2418,2) (0,011). \\
 k &= 0,3726 \text{ J/(s}\cdot\text{m}\cdot^\circ\text{C)}; \quad \hat{C}_p = 3,051 \text{ kJ/(kg}\cdot^\circ\text{C)}; \quad \rho = 1.014,5 \text{ kg/m}^3
 \end{aligned}$$

Las propiedades de la yema congelada se determinarán a la temperatura de -10°C . Es necesario calcular previamente la fracción de agua no congelada a esta temperatura. La temperatura a la que empieza a congelar la yema es a $-0,5^\circ\text{C}$.

La fracción molar de agua de la yema cuando empieza a congelar se calcula mediante la ecuación 17.2.b:

$$\ln X_{0A} = \frac{6,003}{8,314} \left[\frac{1}{273} - \frac{1}{272,5} \right]; \quad X_{0A} = 0,9952$$

este valor permite calcular la masa molecular equivalente de los solutos mediante la ecuación 17.3.b:

$$M_S = \frac{(18) (0,516) (0,9952)}{(0,484) (1 - 0,9952)} = 3.944,8 \text{ kg/kmol}$$

La fracción molar de agua no congelada a -10°C se obtiene a partir de la ecuación 17.2.b.

$$\ln X_A = \frac{6,003}{8,314} \left[\frac{1}{273} - \frac{1}{263} \right]; \quad X_A = 0,9043$$

La fracción másica de agua no congelada se obtiene de la ecuación 17.3.b:

$$x_S = \frac{(18) (0,516) (0,9043)}{(3.944,8) (1 - 0,9043)} = 0,0223$$

La fracción másica de agua congelada es:

$$x_H = x_{A0} - x_A = 0,4617$$

Las propiedades térmicas de los componentes a la temperatura de -10°C se dan en la tabla adjunta:

Componente	k (J/s·m·°C)	\hat{C}_p (kJ/kg·°C)	ρ (kg/m ³)	X_i^m	X_i^V
Agua	0,5541	4,234	996,8	0,0223	0,0220
Proteína	0,1666	1,996	1.335,1	0,160	0,1177
Grasa	0,2083	1,969	929,8	0,340	0,3591
Hidratos carbono	0,1871	1,529	1.602,2	0,005	0,0031
Cenizas	0,3153	1,073	2.426,6	0,011	0,0045
Hielo	22,922	2,002	918,2	0,4617	0,4938

Aplicando las ecuaciones de Choi y Okos se obtienen las propiedades de la yema a la temperatura de $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$:

$$k = 1,240 \text{ J}/(\text{s}\cdot\text{m}\cdot^{\circ}\text{C}); \quad \hat{C}_P = 2,027 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C}); \quad \rho = 982 \text{ kg}/\text{m}^3$$

Para el cálculo del tiempo de congelación se utilizará la ecuación generalizada de Plank [ec. 17.10], debiéndose determinar previamente los módulos de Biot y Stefan, utilizando las propiedades térmicas de la yema a $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$.

- Módulo Biot: $(\text{Bi}) = \frac{h e}{k} = \frac{(20) (0,05)}{(1,240)} = 0,8065$

- Módulo de Stefan:

Se calcula el calor latente efectivo a partir de la fracción de hielo que contiene la yema:

$$\lambda_H = x_H \lambda_A = (0,4617) (6,003) (1/18) = 154 \text{ kJ}/\text{kg}$$

con lo que el módulo de Stefan es:

$$(\text{Ste}) = \frac{\hat{C}_P (T_C - T_e)}{\lambda_H} = \frac{(2,027) [-0,5 - (-25)]}{(154)} = 0,3225$$

Los parámetros P y R se determinan a partir de las ecuaciones 17.11, en las que $\beta_2 = (20)/(5) = 4$ y $\beta_1 = (40)/(5) = 8$,

de las que se obtiene:

$$P = 0,3636 \quad \text{y} \quad R = 0,0993$$

- El módulo de Fourier se obtiene de la ecuación de Plank para una lámina:

$$(\text{Fo}) = \frac{0,0993}{(0,3225)} + \frac{0,3636}{(0,8065) (0,3225)} = 1,706$$

El tiempo de congelación se obtiene al despejarlo del módulo de Fourier:

$$t_C = (\text{Fo}) \frac{\rho \hat{C}_P (e)^2}{k} = \frac{(1,706) (982) (2,027) (0,05)^2}{(0,00117)} = 7.256 \text{ s}$$

Este tiempo se corresponde al necesario para la congelación si el producto se halla inicialmente a la temperatura de congelación. Por lo que debe calcularse el tiempo para que la temperatura de la superficie del producto pase de $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ a $-0,5\text{ }^{\circ}\text{C}$. Debe aplicarse la regla de Newman para una geometría paralelepípedica. Sin embargo, la anchura y longitud de los bloques de yema son bastante superiores al espesor. Por ello, se supondrá que la transmisión de calor predomina en esta dirección. Utilizando módulos adimensionales:

$$Y = \frac{T_e - T_C}{T_e - T_i} = \frac{-25 - (-0,5)}{-25 - 20} = 0,544$$

$$m = \frac{k}{k(e/2)} = \frac{(0,372)}{(20)(0,025)} = 0,744$$

$$n = 1$$

gráficamente (figura 13.12) se obtiene el módulo adimensional de tiempo: $\tau = 0,5$ el cual permite el cálculo del tiempo para rebajar la temperatura hasta la inicial de congelación:

$$t = \frac{\tau(e/2)^2 \rho \hat{C}_P}{k} = \frac{(0,5)(0,025)^2(1.014,5)(3,051 \cdot 1.000)}{0,372} = 2.591 \text{ s}$$

El tiempo total será:

$$t_{TOTAL} = t_C + t = (7.256) + (2.591) = 9.840 \text{ s} = 164 \text{ min}$$

El tiempo de residencia del alimento en el congelador debe ser como mínimo el de congelación. Si v es la velocidad con que los bloques de yema se mueven en el interior del congelador, la longitud que debe recorrer la yema de huevo en el congelador es:

$$L = t_{TOTAL} v = (164)(1) = 164 \text{ m}$$

El tiempo total de congelación calculado a partir de la ecuación de Plank es una aproximación, por lo que a continuación se calculará este tiempo a partir de la ecuación de Nagaoka *et al.* [ec. 17.12]. Para ello se debe calcular previamente la variación entálpica que experimenta el producto, que se calcula a partir de la ecuación 17.13:

$$\Delta \hat{H} = (3,051)[20 - (-0,5)] + (154) + (2,027)[-0,5 - (-10)] = 235,8 \text{ kJ/kg}$$

Sustituyendo los datos en la ecuación 17.12 se obtendrá el tiempo total de congelación:

$$t_T = \frac{(982)(235,8 \cdot 10^3)}{-0,5 - (-25)} \left[\frac{(0,0993)(0,05)^2}{1,240} + \frac{(0,3636)(0,05)}{20} \right] [1 + 0,008(10 - (-0,5))]$$

obteniendo:

$$t_T = 12.202 \text{ s} \equiv 203,4 \text{ min}$$

Con lo que la longitud total será:

$$L = (203,4 \text{ min})(1 \text{ m/min}) = 203,4 \text{ m}$$

Se observa que la longitud de la cinta del congelador calculada por este método es superior, y la obtenida mediante la ecuación de Plank es sólo una estimación.

La masa total a congelar es: $m = (100)(4) = 400 \text{ kg}$.

La potencia del congelador se calcula aplicando la ecuación 17.18:

$$Pot = \frac{m \Delta \hat{H}}{t_{TOTAL}} = \frac{(400)(235,8)}{(12.202)} = 7,73 \text{ kW}$$

Problema 17.3

En una instalación industrial se necesitan 100 kW de potencia de refrigeración. Para cubrir estas necesidades se ha instalado un sistema estándar del ciclo de compresión de vapor, que utiliza amoníaco como fluido refrigerante. Este ciclo opera con una temperatura de condensación de 30 °C y una temperatura de evaporación de -10 °C. Calcular: a) El caudal másico de circulación del fluido refrigerante. b) La potencia necesaria en el compresor. c) El coeficiente de rendimiento. d) La potencia por kilovatio de refrigeración.

Se trata de un ciclo de compresión de vapor, con lo que el proceso global es el mostrado en el diagrama presión - entalpía de la figura 17.5.

La entalpía del punto 1 se determina en el diagrama o las tablas para amoníaco (apéndice A-3), y se corresponde a un vapor saturado a -10 °C:

$$\hat{H}_1 = 1.450,2 \text{ kJ/kg} \quad p_1 = 291,6 \text{ kPa}$$

La entalpía del punto 2 se determina en la isentrópica que pasa por el punto 1 y corta a la isobara correspondiente a la temperatura de 30 °C:

$$\hat{H}_2 = 1.650 \text{ kJ/kg} \quad p_2 = 1.173 \text{ kPa}$$

La entalpía del punto 3 se corresponde a la de líquido saturado a 30 °C, y se obtiene de las tablas: $\hat{H}_3 = 341,8 \text{ kJ/kg}$. Además: $\hat{H}_4 = \hat{H}_3 = 341,8 \text{ kJ/kg}$.

a) La potencia de refrigeración representa el caudal de calor absorbido en el evaporador. De la ecuación 17.23:

$$w = \frac{\dot{Q}_E}{\hat{H}_1 - \hat{H}_4} = \frac{100 \text{ kW}}{(1.450,2 - 341,8) \text{ kJ/kg}} = 0,090 \text{ kg/s} \approx 324,8 \text{ kg/h}$$

que es el caudal de refrigerante.

b) La potencia necesaria en el compresor se calcula a partir de la ecuación 17.21:

$$Pot = w (\hat{H}_2 - \hat{H}_1) = (0,09 \text{ kg/s}) [(1.650 - 1.450,2) \text{ kJ/kg}] \approx 18 \text{ kW}$$

c) El coeficiente de rendimiento se obtiene a partir de la ecuación 17.24:

$$\phi = \frac{\hat{H}_1 - \hat{H}_4}{\hat{H}_2 - \hat{H}_1} = \frac{w (\hat{H}_1 - \hat{H}_4)}{w (\hat{H}_2 - \hat{H}_1)} = \frac{100 \text{ kW}}{18 \text{ kW}} = 5,56$$

d) La potencia de refrigeración o potencia del compresor por kilovatio de refrigeración es la inversa del coeficiente de rendimiento:

$$\text{Potencia refrigeración} = \frac{18 \text{ kW}}{100 \text{ kW}} = 0,18$$

Problema 17.4

Las necesidades frigoríficas en una industria son de 400 kW, para lo que se instala un sistema de dos compresores con refrigerador intermedio y eliminación de vapor. El sistema utiliza amoníaco como fluido refrigerante. Si la temperatura de evaporación es $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ y la de condensación $30\text{ }^{\circ}\text{C}$, calcular la potencia de los compresores.

El sistema instalado es el descrito en la figura 17.8.

Según los datos del problema, la presión de succión del primer compresor, p_S , y la de descarga del segundo, p_D , se corresponden a la de saturación para las temperaturas del evaporador y condensador, respectivamente. De las tablas de amoníaco (apéndice A-3):

$$\begin{array}{lll} T_S = -20\text{ }^{\circ}\text{C} & \text{le corresponde:} & p_S = 190,7\text{ kPa} \\ T_D = 30\text{ }^{\circ}\text{C} & \text{le corresponde:} & p_D = 1.168,6\text{ kPa} \end{array}$$

La presión intermedia para un óptimo económico se obtiene con la ecuación 17.25:

$$p_i = \sqrt{p_S p_D} = \sqrt{(190,7)(1.168,6)} = 472,1\text{ kPa}$$

A partir de las tablas y gráficas del amoníaco se determinan las entalpías en los diferentes puntos representativos del sistema:

- *Punto 1.* Vapor saturado a $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ posee una entalpía: $\hat{H}_1 = 1.437,2\text{ kJ/kg}$.
- *Punto 2.* Se halla situado en la isentrópica que pasa por el punto 1 y corta a la isobara $p_i = 472,1\text{ kPa}$. De la que se obtiene: $\hat{H}_2 = 1.557,5\text{ kJ/kg}$.
- *Punto 3.* Vapor saturado a la presión $p_i = 472,1\text{ kPa}$, le corresponde una temperatura $T_3 \approx 2,5\text{ }^{\circ}\text{C}$, y una entalpía: $\hat{H}_3 = 1.464,3\text{ kJ/kg}$.
- *Punto 4.* Se sitúa en la isentrópica que pasa por el punto 3 y corta la isobara a la presión de descarga del segundo compresor $p_D = 472,1\text{ kPa}$. Del punto de corte se obtienen las condiciones del punto 4, con una entalpía: $\hat{H}_4 = 1.590\text{ kJ/kg}$.
- *Punto 5.* Se corresponde a líquido saturado a $30\text{ }^{\circ}\text{C}$, y de las tablas es posible obtener el valor de su entalpía: $\hat{H}_5 = 341,8\text{ kJ/kg}$.
- *Punto 6.* Es una mezcla líquido-vapor a la presión de $472,1\text{ kPa}$, pero con la misma entalpía que el punto 5: $\hat{H}_6 = \hat{H}_5 = 341,8\text{ kJ/kg}$.
- *Punto 7.* Es líquido saturado a $472,1\text{ kPa}$. Por interpolación en las tablas se puede obtener el valor de su entalpía: $\hat{H}_7 = 211,6\text{ kJ/kg}$.
- *Punto 8.* Es una mezcla líquido-vapor a $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$, pero con la misma entalpía que el punto 7: $\hat{H}_8 = \hat{H}_7 = 211,6\text{ kJ/kg}$.

Una vez obtenidos los valores de los diferentes puntos representativos del sistema, ya es posible determinar las diferentes variables que intervienen.

El caudal másico de circulación del fluido refrigerante en el primer compresor se obtiene a partir del balance energético en el evaporador [ec. 17.27]:

$$w_1 = \frac{\dot{Q}_E}{\hat{H}_1 - \hat{H}_8} = \frac{400\text{ kW}}{(1.437,2 - 211,6)\text{ kJ/kg}} = 0,326\text{ kg/s} \approx 1.175\text{ kg/h}$$

Además se sabe [ecs. 17.26a, b] que existen diferentes corrientes en el sistema que poseen el mismo caudal de circulación. Así:

$$w_1 = w_2 = w_7 = w_8 \quad \text{y} \quad w_3 = w_6$$

Al realizar el balance energético en el refrigerador intermedio se obtiene la ecuación 17.29, que permite calcular el caudal de circulación del fluido refrigerante en el segundo compresor:

$$w_3 = \frac{w_2 (\hat{H}_2 - \hat{H}_7)}{(\hat{H}_3 - \hat{H}_6)} = \frac{0,326 (1.557,5 - 211,6)}{(1.464,3 - 341,8)} = 0,391 \text{ kg/s} \approx 1.409 \text{ kg/h}$$

La potencia de los compresores se obtiene a partir de las ecuaciones 17.30 y 17.31:

$$Pot)_1 = w_1 (\hat{H}_2 - \hat{H}_1) = (0,326) (1.557,5 - 1.437,2) = 39,2 \text{ kW}$$

$$Pot)_2 = w_3 (\hat{H}_4 - \hat{H}_3) = (0,391) (1.590 - 1.464,3) = 49,2 \text{ kW}$$

La potencia total de compresión para el sistema es: $Pot = 88,4 \text{ kW}$.

18.1. Introducción

La deshidratación o secado de alimentos es una de las operaciones unitarias más utilizadas en la conservación de los mismos. Ya era utilizada en tiempos prehistóricos por nuestros antepasados, pues les permitía obtener productos alimenticios con un tiempo de vida superior. Con el paso del tiempo, la demanda de alimentos ha ido creciendo con el aumento de la población, y cada vez es mayor esta demanda, lo que ha acarreado el que la industria de conservación por secado haya adquirido una gran importancia en el sector alimentario. El desarrollo de la industria del secado ha ido ligado a la demanda de alimentos que debían cubrir las necesidades de los soldados en las guerras que se han dado a lo largo del mundo. La deshidratación es especialmente útil para los propósitos militares, ya que reduce el peso y tamaño de los alimentos. Los avances logrados en el campo militar han sido transferidos a la industria del secado en general, lo que ha traído consigo un mejor y mayor avance de la industria del secado de alimentos.

En los procesos de deshidratación el agua del alimento es eliminada, en mayor o menor grado, y se consigue con ello una mejor conservación microbiológica, además de retardar muchas reacciones indeseables. Aunque esta conservación del alimento tiene una gran importancia, con la deshidratación también se logran disminuir los costes de envasado, manejo, almacenado y transporte, ya que se disminuye el peso del alimento, y en algunos casos el volumen.

A pesar de que los términos de secado y deshidratación se utilizan como sinónimos, en realidad no debiera ser así, ya que se considera que un alimento está deshidratado si no contiene más de 2,5% de agua, mientras que uno seco puede contener más de 2,5% (Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996).

A excepción de la liofilización, secado osmótico y secado a vacío, la eliminación del agua del alimento se consigue de forma mayoritaria mediante una corriente de aire seco, que elimina el agua de la superficie del producto hacia el seno de la corriente de aire. El proceso de secado de alimentos no sólo rebaja su contenido en agua, sino que puede afectar otras características físicas y químicas de los mismos, como son destrucción de nutrientes, reacciones enzimáticas y no enzimáticas, entre otras.

En el proceso de secado es importante conocer los mecanismos involucrados en el movimiento del agua en el interior y exterior del alimento. Este movimiento puede ser debido a fuerzas capilares, difusión del agua por gradientes de concentración, difusión en la superficie, difusión del vapor de agua en los poros llenos de aire, flujo debido a gradientes de presión y a la vaporización y condensación del agua.

18.2. Mezcla de dos corrientes de aire

En los procesos de secado por aire, la corriente gaseosa que abandona el secadero suele poseer un contenido energético que induce a pensar en su reutilización, aunque su humedad es más elevada que a la entrada del secadero. Por ello, la recirculación del aire que abandona el secadero es usual, y permite además que el proceso global de secado sea menos costoso. En la mayoría de los casos, una corriente de aire caliente y húmeda es recirculada parcialmente y mezclada con una corriente de aire fresco. Los balances de materia y energía, para esta operación, se pueden expresar como:

$$w_F X_F + w_C X_C = (w_F + w_C) X_m \tag{18.1}$$

$$w_F \hat{H}_F + w_C \hat{H}_C = (w_F + w_C) \hat{H}_m \tag{18.2}$$

en la que w es el caudal o flujo de aire, X es la humedad y H es la entalpía por unidad de masa, representando los subíndices F y C frío y caliente, respectivamente, mientras que el subíndice m se refiere a las condiciones de la mezcla. Este tipo de proceso puede visualizarse en el diagrama humedad-entalpía (figura 18.1), destacando que las diferencias de entalpía entre la corriente mezclada y las iniciales son proporcionales a los caudales máscicos.

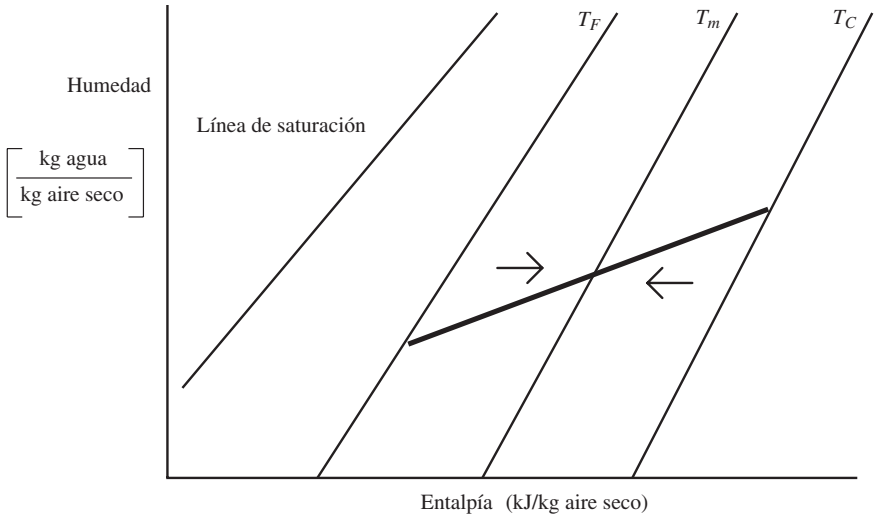


Figura 18.1. Representación de la mezcla de dos corrientes de aire.

18.3. Balances de materia y calor en secaderos ideales

18.3.1. Secadero continuo sin recirculación

Un deshidratador de este tipo consta esencialmente de una cámara en la que fluyen en contracorriente aire y los sólidos a secar (figura 18.2). Los sólidos se introducen a razón de w_S (kg de sólidos secos/h), cuyo contenido en agua es Y_E a una temperatura T_{SE} , abandonando el deshidratador a una temperatura T_{SS} con un contenido en agua Y_S . La corriente de aire se introduce en el secadero con un caudal w'_A (kg de aire seco/h), a una temperatura T_{AE} con un contenido en humedad de X_E (kg de agua/kg aire seco), mientras que lo abandona a una temperatura T_{AS} , con una humedad X_S .

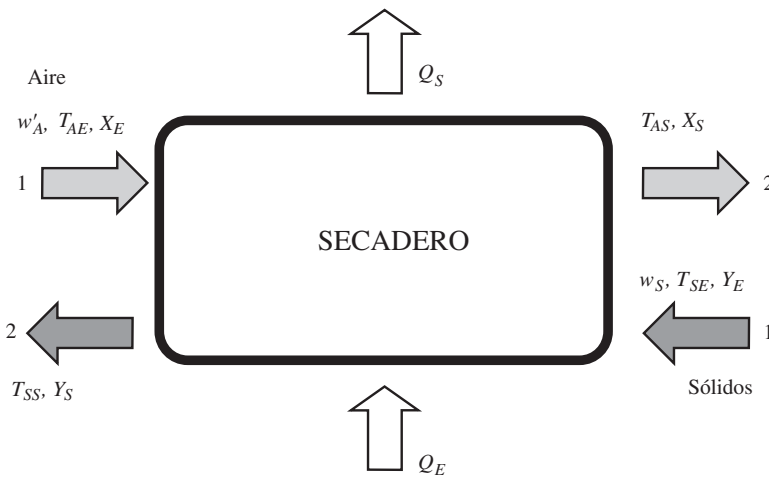


Figura 18.2. Secadero continuo ideal sin recirculación.

Al realizar un balance de materia para el agua se obtiene:

$$w_S (Y_E - Y_S) = w'_A (X_S - X_E) \quad [18.3]$$

mientras que el balance energético conduce a la expresión:

$$\dot{Q}_E + w'_A \hat{i}_E + w_S \hat{h}_E = \dot{Q}_S + w'_A \hat{i}_S + w_S \hat{h}_S \quad [18.4]$$

en la que \dot{Q}_E y \dot{Q}_S son los caudales de calor aportado y perdido en el secadero, respectivamente, siendo \hat{h} la entalpía de los sólidos, mientras que \hat{i} es la entalpía del aire expresada según la ecuación 6.16:

$$\hat{i} = \hat{s} (T - T^*) + \lambda_0 \cdot X = (1 + 1,92 X) (T - T^*) + \lambda_0 X \quad [18.5]$$

siendo \hat{s} el calor específico húmedo del aire. La entalpía del sólido será:

$$\hat{h} = \hat{C}_p)_S (T - T^*) + Y \hat{C}_p)_A (T - T^*) \quad [18.6]$$

en la que $\hat{C}_p)_S$ es el calor específico de los sólidos, y $\hat{C}_p)_A$ el correspondiente al agua que contiene. En estas últimas ecuaciones T^* representa la temperatura de referencia, que suele tomarse como 0 °C.

18.3.2. Secadero continuo con recirculación

En un secadero como el descrito en el apartado anterior, la corriente de aire que abandona el secadero contiene más agua que a la entrada, pero por contra su temperatura es más elevada. Por ello, la energía que contiene esta corriente se suele utilizar en forma de recirculación. Sin embargo, como su contenido en agua no permitiría una buena aplicación en el secado, esta corriente se mezcla con la de aire seco fresco y antes de introducir la mezcla en el secadero se pasa por un calentador, con objeto de subir su contenido entálpico (figura 18.3).

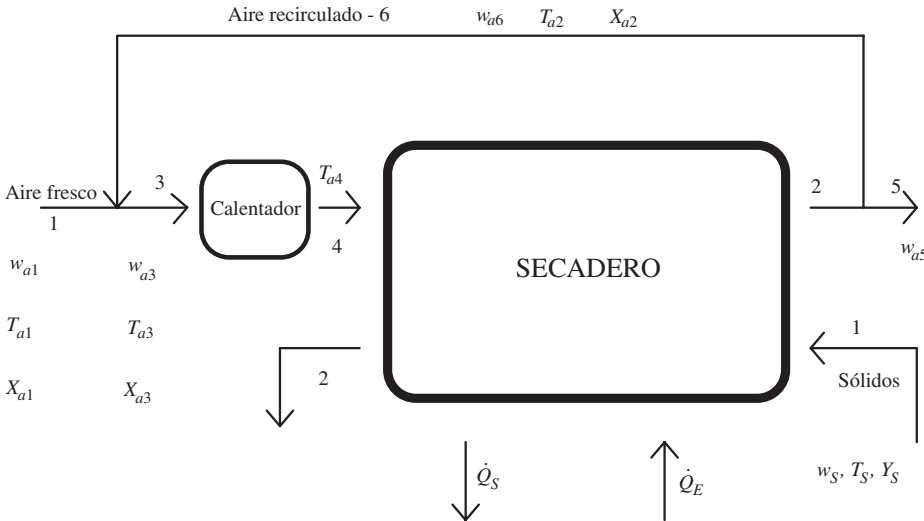


Figura 18.3. Secadero continuo ideal con recirculación.

Un balance másico en el calentador conduce a:

$$w'_1 X_1 + w'_6 X_2 = (w'_1 + w'_6) X_4 \tag{18.7}$$

en la que w'_1 es el caudal de aire fresco seco, w'_6 es el caudal de aire seco recirculado, siendo X_1 la humedad del aire fresco, X_2 la del aire recirculado, y X_4 la de la mezcla que abandona el calentador.

El balance másico realizado en el secador conduce a la expresión:

$$(w'_1 + w'_6) X_4 + w'_S Y_E = (w'_1 + w'_6) X_2 + w'_S Y_S \tag{18.8}$$

De igual modo pueden realizarse los balances entálpicos para el calentador, secadero o sistema completo.

18.4. Mecanismos de deshidratación

El secado se define como la eliminación de la humedad de un producto, y en la mayoría de las situaciones prácticas la etapa principal durante el secado es la transferencia interna de materia. En los procesos de secado, los mecanismos de transferencia de agua en el producto que se está secando se pueden resumir en los siguientes (Van Arsdel y Copley, 1963): movimiento de agua bajo fuerzas capilares, difusión del líquido por gradientes de concentración, difusión superficial, difusión del vapor de agua en los poros llenos de aire, flujo debido a gradientes de presión, y flujo debido a la vaporización-condensación del vapor de agua. Las fuerzas capilares son responsables de la retención del agua en los poros de los sólidos de construcción rígida, mientras que en sólidos formados por agregados de polvos finos, es la presión osmótica la responsable de esta retención, así como en la superficie del sólido.

El tipo de material que se desea secar es un factor muy importante en todos los procesos de secado, ya que sus propiedades físicas y químicas juegan un papel importante durante el secado, debido a los posibles cambios que puedan ocurrir y al efecto de estos cambios en la eliminación del agua del producto. Un material higroscópico es aquél que contiene agua ligada que ejerce una presión de vapor menor que el agua líquida a la misma temperatura. Productos en los que la base principal son carbohidratos, es de suponer que se comporten de forma higroscópica, pues los grupos hidroxilos alrededor de las moléculas de azúcar permiten que se creen puentes de hidrógeno con el agua. La interacción entre las moléculas de agua y los grupos hidroxilo conllevan la solvatación o solubilización de los azúcares. En proteínas solubles en agua, tal como la mayoría de las proteínas globulares, los aminoácidos polares están distribuidos uniformemente en la superficie, mientras que los grupos hidrófobos tienden a localizarse en el interior de la molécula. Esta disposición ocasiona la formación de puentes de hidrógeno con el agua, lo que explica la solubilidad de este tipo de proteínas.

18.4.1. Proceso de secado

En los procesos de secado, los datos suelen expresarse como la variación que experimenta el peso del producto que se está secando con el tiempo (figura 18.4). Aunque a veces los datos de secado pueden expresarse en términos de velocidad de secado.

El contenido en humedad del producto se define como la relación entre la cantidad de agua en el alimento y la cantidad de sólidos secos, y se expresa como:

$$Y_t = \frac{w_T - w'_S}{w'_S} \quad [18.9]$$

en la que w_T es el peso total de material en un tiempo determinado, siendo w'_S el peso de los sólidos secos, e Y_t la humedad expresada como peso de agua/peso de

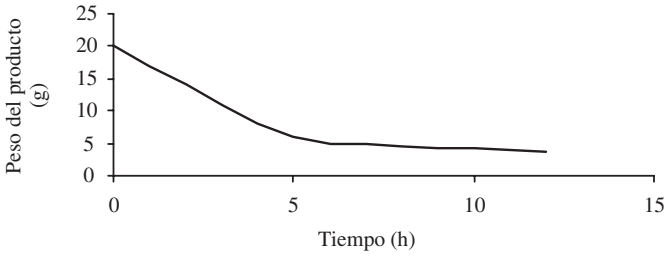


Figura 18.4. Variación del peso del producto en un proceso de secado.

sólido seco. En los procesos de secado, una variable muy importante es la denominada contenido de humedad libre, Y , que se define como:

$$Y = Y_t - Y_{eq} \tag{18.10}$$

en la que Y_{eq} es el contenido de humedad cuando se alcanza el equilibrio. Una típica curva de secado se obtiene al representar el contenido de humedad libre frente al tiempo de secado (figura 18.5).

La velocidad de secado, R , es proporcional al cambio del contenido de humedad con el tiempo:

$$R \propto \frac{dY}{dt} \tag{18.11}$$

A partir de la figura 18.5 se puede obtener el valor de dY/dt para cada punto de la curva, mediante el valor que adquiere la tangente a la misma en cada uno de los puntos.

La velocidad de secado R se puede expresar como (Geankoplis, 1983):

$$R = - \frac{w'_s}{A} \frac{dY}{dt} \tag{18.12}$$

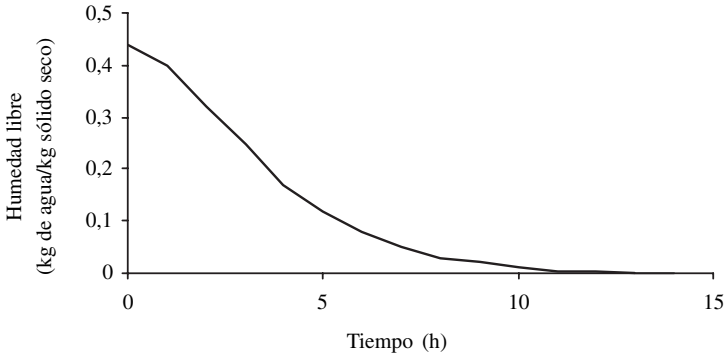


Figura 18.5. Contenido de humedad en función del tiempo de secado.

en la que w'_s es el caudal de sólido seco y A el área de la superficie que se está secando. Al representar la velocidad de secado frente al tiempo se obtiene una curva similar a la 18.4.

El proceso de secado de un material, puede describirse por una serie de etapas en las que la velocidad de secado juega un papel determinante. La figura 18.6 muestra una típica curva de velocidad de secado en la que los puntos A y A' representan el inicio de secado para un material frío y caliente, respectivamente. El punto B representa la condición de temperatura de equilibrio de la superficie del producto. El tiempo transcurrido para pasar de A o A' a B suele ser bajo, y a menudo se desprecia en los cálculos del tiempo de secado. El tramo de la curva $B-C$ es conocido como período de velocidad constante de secado, y está asociado a la eliminación del agua no ligada al producto, en el que el agua se comporta como si el sólido no estuviera presente. Al inicio, la superficie del producto se encuentra muy húmeda, presentando una actividad de agua cercana a la unidad. En los sólidos porosos el agua eliminada en la superficie es compensada por el flujo de agua desde el interior del sólido. El período de velocidad constante continúa mientras el agua evaporada en la superficie pueda ser compensada por la que se encuentra en el interior. La temperatura en la superficie se corresponde aproximadamente a la de bulbo húmedo (Geankoplis, 1983).

El período de velocidad decreciente se da cuando la velocidad de secado no se mantiene constante y empieza a disminuir; además, la actividad de agua en la superficie se hace menor que la unidad. En este caso, la velocidad de secado está gobernada por el flujo interno del agua y vapor. El punto C representa el inicio del pe-

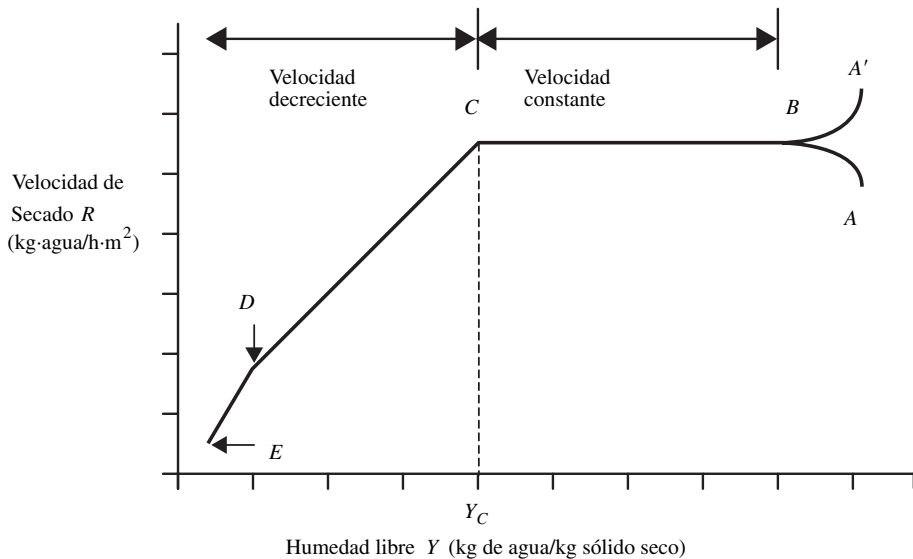


Figura 18.6. Curva de velocidad de secado (adaptado de Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996).

río de velocidad decreciente, pudiéndose dividir este período en dos etapas. La primera de ellas se da cuando los puntos húmedos en la superficie disminuyen continuamente hasta que la superficie está seca completamente (punto D), mientras que la segunda etapa del período de velocidad de secado decreciente se inicia en el punto D, cuando la superficie está completamente seca, y el plano de evaporación se traslada al interior del sólido. El calor requerido para eliminar la humedad es transferido a través del sólido hasta la superficie de evaporación, y el vapor de agua producido se mueve a través del sólido en la corriente de aire que va hacia la superficie. A veces no existen diferencias remarcables entre el primer y segundo período de velocidad decreciente. La cantidad de agua eliminada en este período puede ser baja, mientras que el tiempo requerido puede ser elevado, ya que la velocidad de secado es baja.

18.4.2. Período de secado a velocidad constante

Durante el período de secado a velocidad constante, los fenómenos de transporte que tienen lugar son la transferencia de materia de vapor de agua hacia el medio ambiente, desde la superficie del producto a través de una película de aire que rodea el material, y la transferencia de calor a través del sólido. Mientras dura el proceso de secado, la superficie del material permanece saturada de agua, ya que la velocidad de movimiento del agua desde el interior del sólido es suficiente para compensar el agua evaporada en la superficie. Si se supone que sólo existe transferencia de calor hacia la superficie del sólido por convección desde el aire caliente, y transferencia de materia desde la superficie hacia el aire caliente (figura 18.7), se obtiene:

$$q = h A (T - T_w) \quad [18.13]$$

$$N_a = k_y (X_w - X) \quad [18.14]$$

en las que h es el coeficiente de transmisión de calor, A es el área que se está secando, T_w es la temperatura de bulbo húmedo, T es la temperatura de secado, N_a es la densidad de flujo de vapor de agua, X_w el contenido de humedad del aire en la

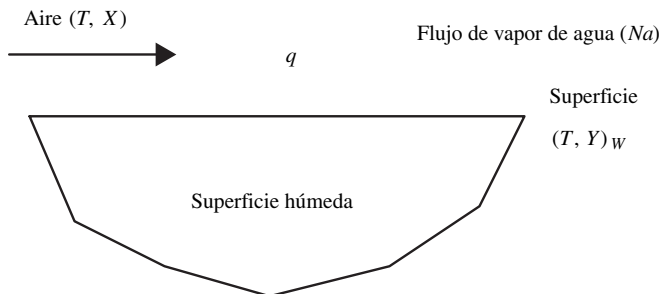


Figura 18.7. Transmisión de calor y materia en el secado (adaptado de Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996).

superficie del sólido, X el contenido de humedad del aire en el seno de la corriente de secado, y k_y el coeficiente de transferencia de materia.

El calor necesario para vaporizar el agua en la superficie del producto se puede expresar como:

$$q = N_a M_a \lambda_w A \quad [18.15]$$

en la que M_a es la masa molecular del agua, λ_w el calor latente de vaporización a la temperatura T_w .

La velocidad de secado en el período de velocidad constante se expresa (Okos *et al.*, 1992):

$$R_C = k_y M_b (X_w - X) \quad [18.16]$$

o

$$R_C = \frac{h(T - T_w)}{\lambda_w} = \frac{q}{\lambda_w A} \quad [18.17]$$

en la que M_b es la masa molecular del aire, X_w la humedad correspondiente a la temperatura de bulbo húmedo, y X es la humedad del aire en el seno de la corriente gaseosa. Si no existe transferencia de calor por conducción y radiación, la temperatura del sólido a la temperatura de bulbo húmedo es la del aire durante el período de velocidad constante de secado.

En los cálculos de secado es imprescindible conocer el coeficiente de transferencia de materia, que puede evaluarse mediante la expresión (Okos *et al.*, 1992):

$$\frac{k_y l}{D_{AB}} = 0,664 (\text{Re})^{1/2} (\text{Sc})^{1/3} \quad [18.18]$$

ecuación válida para flujo laminar paralelo a un plato plano, siendo l la longitud del plato en la dirección del flujo, y en la que los módulos de Reynolds y Schmidt están definidos por las expresiones:

$$(\text{Re}) = \frac{\rho v l}{\eta} \quad (\text{Sc}) = \frac{\eta}{\rho D_{AB}} \quad [18.19]$$

siendo D_{AB} la difusividad molecular de la mezcla aire-agua, l es la longitud característica o el diámetro, v la velocidad del fluido, ρ la densidad, y η la viscosidad.

El coeficiente de transmisión de calor puede obtenerse mediante la ecuación (Geankoplis, 1983):

$$h = 0,0204 (G)^{0,8} \quad [18.20]$$

en la que G es la densidad de flujo másica del aire expresada en $\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{h})$, obteniéndose el coeficiente de transmisión de calor en $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$. El coeficiente de transmisión de calor en una lámina se puede expresar en función del módulo de Nusselt, según una expresión del tipo (Chirife, 1983):

$$(\text{Nu}) = \frac{h l}{k} = 2 + \alpha (\text{Re})^{1/2} (\text{Pr})^{1/3} \quad [18.21]$$

siendo el módulo de Prandtl:

$$(\text{Pr}) = \frac{\hat{C}_p \eta}{k} \quad [18.22]$$

en las que k es la conductividad térmica, α una constante, y \hat{C}_p el calor específico.

18.4.3. Período de secado a velocidad decreciente

Este período sigue al de velocidad a secado constante, y como su nombre indica, la velocidad de secado R decrece cuando el contenido de humedad sobrepasa el contenido de humedad crítico Y_C . Para resolver este tipo de problemas, la ecuación 18.12 debe resolverse por integración, y el término integral se calcula mediante una integración gráfica al representar $1/R$ frente a Y .

El movimiento del agua en el sólido puede explicarse por distintos mecanismos (Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996), como son: difusión del líquido debido a gradientes de concentración, difusión del vapor debido a la presión parcial de vapor, movimiento del líquido por fuerzas capilares, movimiento del líquido por fuerzas de gravedad, y difusión superficial. El movimiento del agua a través del alimento depende tanto de su estructura porosa como de las interacciones del agua con la matriz alimentaria. De las diferentes teorías enumeradas, a continuación sólo se desarrollarán algunas de ellas, pudiéndose encontrar en la bibliografía el desarrollo completo de todas (Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996; Chen y Johnson, 1969; Bruin y Luyben, 1980; Fortes y Okos, 1980; Geankoplis, 1983).

Teoría de la difusión

El principal mecanismo en el secado de sólidos es la difusión del agua en sólidos de estructura fina y en los capilares, poros y pequeños huecos llenos con vapor. El vapor difunde hasta que alcanza la superficie donde pasa a la corriente global del aire. La ley de Fick aplicada a un sistema como el mostrado en la figura 18.8 se puede expresar como:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = D_{\text{efect.}} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \quad [18.23]$$

en la que Y es el contenido de humedad del producto, t el tiempo, x la dimensión en la dirección que ocurre la transferencia, y $D_{\text{efect.}}$ el coeficiente de difusión.

Dependiendo del tipo de geometría considerado, la solución de la ecuación de Fick toma diferentes formas. A continuación se dan estas soluciones para geometrías sencillas: Lámina, cilindro y esfera.

Lámina

$$\Gamma = \frac{Y - Y_s}{Y_0 - Y_s} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h_n^2} e^{\left(\frac{-h_n^2 \pi^2 D_{\text{efect.}} t}{4 L^2} \right)} \quad [18.24a]$$

$$h_n = 2n - 1$$

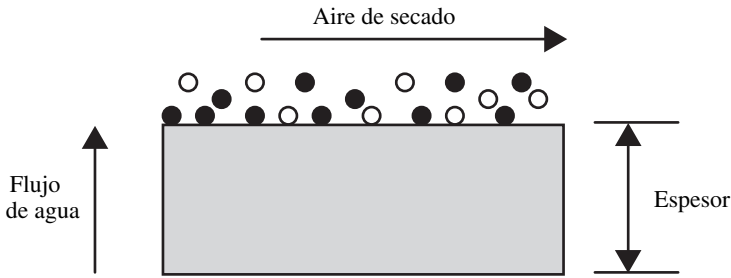


Figura 18.8. Mecanismo de difusión superficial y transporte de vapor de agua (adaptado de Bruin y Luyben, 1980).

en la que Y es el contenido de humedad en el tiempo t , Y_0 es la humedad inicial, Y_s la humedad en la superficie, y L es el espesor de la lámina.

Cilindro

$$\Gamma = \frac{Y - Y_s}{Y_0 - Y_s} = \frac{4}{r_a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2} e^{(-\beta_n^2 D_{efect} t)} \quad [18.24b]$$

en la que r_a es el radio del cilindro, y β_n son las raíces de la función de Bessel de primer tipo y orden cero.

Esfera

$$\Gamma = \frac{Y - Y_s}{Y_0 - Y_s} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{\left(\frac{-n^2 D_{efect} t}{r^2}\right)} \quad [18.24c]$$

en la que r es el radio de la esfera.

El coeficiente de difusión efectivo se determina experimentalmente a partir de datos de secado, al representar gráficamente el término $\ln \Gamma$ frente al tiempo, la pendiente del tramo lineal da el valor de D_{efect} . (Okos *et al.*, 1992).

La relación entre la difusividad y la humedad se presenta en la figura 18.9. La región A-B representa la adsorción monomolecular en la superficie del sólido que consiste en el movimiento del agua por difusión de la fase vapor. La región B-C cubre la desorción multimolecular donde la humedad empieza el movimiento en la fase líquida. En la región C-D juega un papel importante la microcapilaridad, donde la humedad emigra fácilmente en los poros llenos de agua. En la región D-E la humedad ejerce su máxima presión de vapor y la migración de la humedad es debida primordialmente a la capilaridad.

Valores de la difusividad efectiva para algunos productos alimentarios se dan en la tabla 18.1.

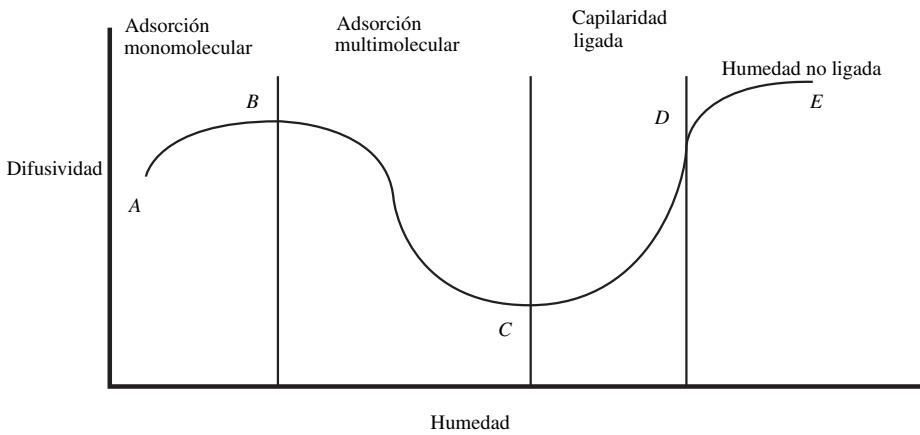


Figura 18.9. Relación entre el contenido de humedad y difusividad (adaptado de Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996).

Tabla 8.1. Difusividad efectiva de algunos productos alimentarios

Alimento	T (°C)	D_{efect} (m^2/s)
Leche entera espuma	50	$2,0 \cdot 10^{-9}$
	40	$1,4 \cdot 10^{-9}$
	35	$8,5 \cdot 10^{-10}$
	Manzana	66
Manzana liofilizada	25	$2,43 \cdot 10^{-10}$
Pasas	25	$4,17 \cdot 10^{-11}$
Patata	54	$2,58 \cdot 10^{-11}$
	60	$3,94 \cdot 10^{-11}$
	65,5	$4,37 \cdot 10^{-11}$
	68,8	$6,36 \cdot 10^{-11}$
	66	$9,63 \cdot 10^{-10}$
Peras-láminas	25	$3,07 \cdot 10^{-11}$
Zanahoria en cubos	40	$6,75 \cdot 10^{-11}$
	60	$12,1 \cdot 10^{-11}$
	80	$17,9 \cdot 10^{-11}$
	100	$24,1 \cdot 10^{-11}$

Fuente: Okos *et al.* (1992).

18.5. Secaderos de armario y lecho

El principal objetivo de la deshidratación de los alimentos es alargar la vida comercial del producto final. Para ello se reduce su contenido de humedad, a niveles en que se limite el crecimiento microbiano y se retarden las reacciones químicas deteriorativas. En la mayoría de las operaciones de secado se utiliza aire caliente, habiéndose utilizado este tipo de operación ampliamente a lo largo de mucho tiempo.

La configuración básica de un secadero atmosférico de aire es una cámara en la que se introduce el alimento, equipada con un ventilador y conductos que permiten la circulación de aire caliente a través y alrededor del alimento. El agua se elimina de la superficie del alimento y se conduce fuera del secadero junto con la corriente de aire que lo abandona en una operación simple. El aire se calienta a la entrada del secadero mediante intercambiadores de calor o directamente con una mezcla de gases de combustión. Este tipo de secadero se utiliza ampliamente en la elaboración de galletas, frutos secos y verduras troceadas, y en alimentos para animales domésticos.

En general, el fenómeno de secado depende de las características de transferencia de calor y materia para el aire de secado y el alimento. En el secado en un secador atmosférico hay dos tipos de fenómenos, el calentamiento del producto y la reducción del contenido de humedad, ambos en función del tiempo. En la figura 18.10 se dan los perfiles de humedad y temperatura en función del tiempo de secado.

Ciertos tipos de secaderos exponen al alimento a la corriente directa del aire caliente, que calienta el producto y elimina el vapor de agua. Sin embargo, la naturaleza de algunos alimentos no permite la exposición directa al aire caliente, y el calentamiento se lleva a cabo por medio de intercambiadores de calor, que previenen el contacto directo entre el producto y el medio calefactor. El primer tipo de secaderos se denominan directos, mientras que el segundo tipo se llaman secaderos indirectos, aunque en la operación de secado atmosférico se suelen utilizar los de tipo directo.

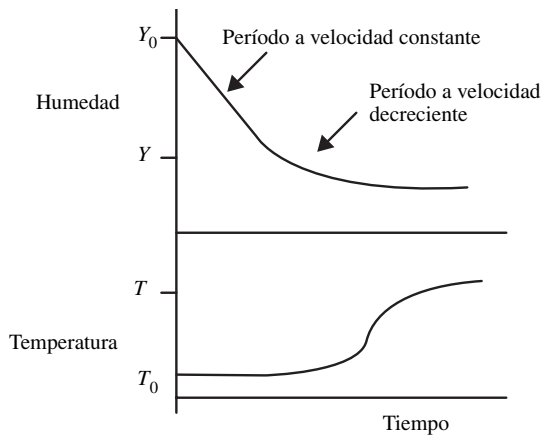


Figura 18.10. Perfiles de humedad y temperatura en la deshidratación de alimentos.

18.5.1. Componentes de un secadero

La configuración básica de un secadero consiste en un alimentador, un calentador, y un colector. La disposición final de estos componentes es característica de cada tipo de secadero. En la figura 18.11 se presenta un esquema básico de un secadero atmosférico.

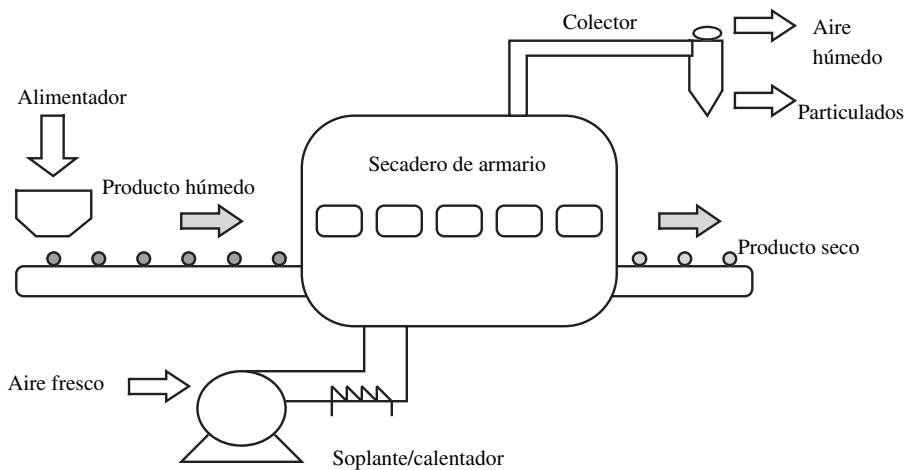


Figura 18.11. Configuración básica de un secadero atmosférico (adaptado de Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996).

Alimentador: Los más comunes para alimentos son transportadores de tornillo, tablas rotatorias, bandejas vibrantes, y cámaras rotatorias de aire. En algunos casos se necesitan alimentadores especiales, como es el caso de secaderos de lecho, en los que es necesario asegurar una distribución uniforme del material.

Calentador: Existen calentadores directos, en los que el aire es calentado al mezclarlo con gases de combustión. En los indirectos, el aire o el producto se calientan en un intercambiador de calor. El coste de un calentamiento directo es más bajo que el indirecto, pero algunos productos pueden dañarse con los gases. La temperatura máxima posible del aire en un calentador directo está en el intervalo de 648 a 760 °C, mientras que para un calentador indirecto es 425 °C.

Colector: La separación de los productos en polvo o particulados en la corriente del aire se puede conseguir mediante ciclones, filtros de saco o lavadores húmedos.

18.5.2. Balances de materia y calor

18.5.2.1. Secaderos discontinuos

Las condiciones del aire no permanecen constantes en un compartimento o secadero de bandeja durante el proceso de secado. Los balances de calor y materia se utilizan para estimar las condiciones del aire que abandona el secadero.

Para un secadero de bandeja, como el mostrado en la figura 18.12, al realizar un balance de calor para una longitud diferencial dL , y una sección de anchura z , se puede expresar como:

$$dq = G \hat{C}_s (z b) dT \quad [18.25]$$

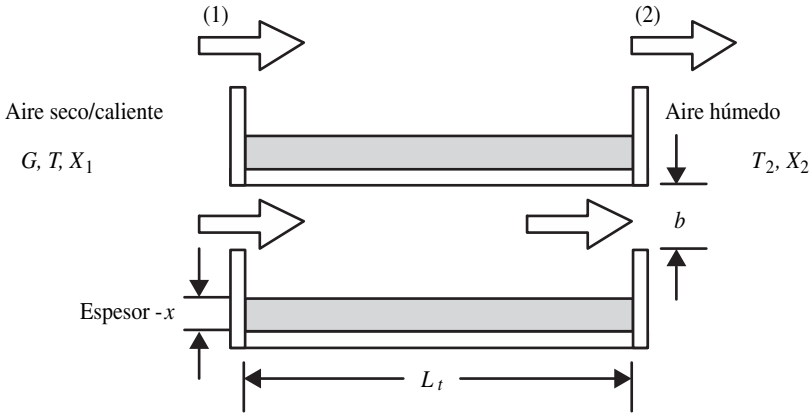


Figura 18.12. Secadero de bandeja (adaptado de Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996).

en la que G es la densidad de flujo másica del aire, b la distancia entre bandejas, z la anchura de las mismas, q la densidad de flujo de calor, T la temperatura y \hat{C}_s el calor específico húmedo de la mezcla aire-agua.

La densidad de flujo de calor también se puede expresar como:

$$dq = h (z dL_t) (T - T_w) \tag{18.26}$$

en la que h es el coeficiente de transmisión de calor, T_w la temperatura de bulbo húmedo, y L_t la longitud de la bandeja. Suponiendo que h y \hat{C}_s son constantes, al combinar estas dos últimas ecuaciones, por integración se obtiene:

$$\frac{h L_t}{G \hat{C}_s b} = \ln \left(\frac{T_1 - T_w}{T_2 - T_w} \right) \tag{18.27}$$

en las que T_1 y T_2 son las temperaturas del aire a la entrada y salida de la bandeja, respectivamente. La temperatura media logarítmica viene definida por:

$$\Delta T_{ml} = (T - T_w)_{ml} = \frac{(T_1 - T_w) - (T_2 - T_w)}{\ln \left(\frac{T_1 - T_w}{T_2 - T_w} \right)} \tag{18.28}$$

Combinando las ecuaciones [18.27] y [18.28]:

$$(T - T_w)_{ml} = \frac{(T_1 - T_w) \left(1 - \exp \frac{-h L_t}{G \hat{C}_s b} \right)}{\left(\frac{h L_t}{G \hat{C}_s b} \right)} \tag{18.29}$$

El caudal de calor que llega a la superficie desde el aire caliente se puede expresar como:

$$\dot{Q} = \frac{Q}{t} = h z L_t \Delta T_{ml} \quad [18.30]$$

este calor se utiliza para evaporar el agua de la superficie del alimento. El calor total para pasar de una humedad del producto Y_1 al inicio hasta la final, que se corresponde a la humedad crítica Y_C , será:

$$Q = (z L_t x \rho) \lambda_w (Y_1 - Y_C) \quad [18.31]$$

Al igualar estas dos últimas ecuaciones, y teniendo presente la ecuación 18.29, se obtiene que el tiempo de secado para el período de velocidad constante:

$$t_c = \frac{x \rho_s L_t \lambda_w (Y_1 - Y_C)}{G \hat{C}_s b (T_1 - T_w) \left[1 - \exp\left(\frac{-h L_t}{G \hat{C}_s b}\right) \right]} \quad [18.32]$$

donde Y_1 es el contenido inicial de humedad del producto, Y_c es el contenido de humedad crítico, x es el espesor del lecho, ρ_s es la densidad del sólido, y λ_w es el calor latente a la temperatura T_w .

El cálculo del tiempo de secado para el período de velocidad decreciente se determina del modo siguiente. La ecuación que da la velocidad de secado en este período es:

$$R = -\frac{w_s}{A} \frac{dY}{dt} \quad [18.33]$$

en la que w_s es la cantidad de sólidos. Esta velocidad puede expresarse también según la ecuación (Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996):

$$R = \frac{h}{\lambda_w} (T - T_w)_M \quad [18.34]$$

en la que se expresa en función de un incremento de temperaturas medio. Combinando estas ecuaciones, y suponiendo que la velocidad de secado es una función lineal de Y , al integrar con la condición límite para $t = 0$, $Y = Y_C$, y para el tiempo final $t = t_D$, $Y = Y_F$, se obtiene el tiempo de secado para este período decreciente (Geankoplis, 1983):

$$t_D = \frac{w_s \lambda_w Y_C \ln\left(\frac{Y_C}{Y_F}\right)}{A h (T - T_w)_M} \quad [18.35]$$

Si la diferencia media de temperaturas es la logarítmica, se puede sustituir la ecuación 18.29 y se obtiene:

$$t_D = \frac{x \rho_s L_t \lambda_w Y_C \ln \left(\frac{Y_C}{Y_F} \right)}{G \hat{C}_s b (T_1 - T_w) \left[1 - \exp \left(\frac{-h L_t}{G \hat{C}_s b} \right) \right]} \quad [18.36]$$

en la que Y_F representa la humedad final del producto.

El tiempo total de secado para pasar de una humedad Y_1 a la final Y_F se obtiene al sumar los tiempos calculados con las ecuaciones 18.32 y 18.36, siendo el tiempo total de secado $t_s = t_C + t_D$.

18.5.2.2. Secaderos discontinuos con circulación de aire a través del lecho

Otro tipo de secadero discontinuo es aquel en que el aire de secado se hace circular a través del lecho del alimento. En la figura 18.13 se representa un esquema de este tipo de secado. Se supone que el sistema es adiabático, que no existen pérdidas de calor, y que circula aire con una densidad de flujo másica G , entrando a una temperatura T_1 , con una humedad X_1 , mientras que a la salida, el aire posee una temperatura T_2 y una humedad X_2 .

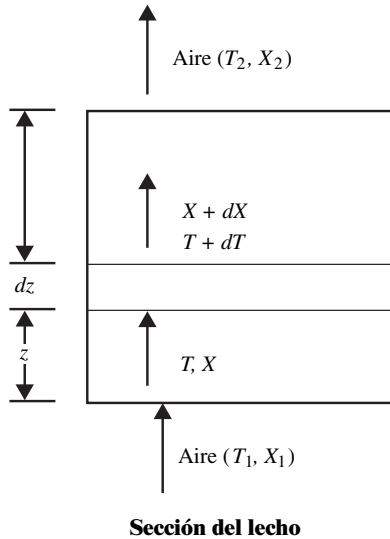


Figura 18.13. Secado por circulación del aire a través del lecho (adaptado de Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996).

La velocidad global de secado se puede expresar como:

$$R = G (X_2 - X_1) \quad [18.37]$$

mientras que para un diferencial dz de altura del lecho, la densidad de flujo de calor transmitido por el aire será:

$$dq = G \hat{C}_s A dT \quad [18.38]$$

en la que A es la sección transversal de paso. El calor transferido hacia el sólido se puede expresar según la ecuación:

$$dq = h a A (T - T_w) dz \quad [18.39]$$

en la que a es la superficie específica del lecho de partículas. Esta superficie específica se determina dependiendo del tipo de partícula, así:

- Partículas esféricas: $a = \frac{6(1 - \epsilon)}{D_p}$ [18.40]

- Partículas cilíndricas: $a = \frac{6(1 - \epsilon)(1 + 0,5 D_C)}{D_C l}$ [18.41]

en la que l es la longitud de la partícula, D_C es el diámetro del cilindro, D_p es el diámetro de la esfera, y ϵ es la fracción de huecos de sólido. Suponiendo que h y \hat{C}_s son constantes, al igualar las ecuaciones 18.38 y 18.39, e integrando se obtiene:

$$\frac{h a z}{G \hat{C}_s b} = \ln \left(\frac{T_2 - T_w}{T_1 - T_w} \right) \quad [18.42]$$

Considerando $w_s = A\rho_s/a$, las expresiones para los tiempos de secado serán (Geankoplis, 1983; Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996):

- Período de velocidad constante:

$$t_C = \frac{\rho_s \lambda_w (Y_l - Y_c)}{h A (T - T_w)_M} \quad [18.43]$$

o

$$t_C = \frac{\rho_s (Y_l - Y_c)}{a K_y M_B (X_w - X)} \quad [18.44]$$

en la que K_y es el coeficiente de transferencia de materia, M_B la masa molecular, y X_w la humedad del aire a la temperatura T_w .

- Período de velocidad decreciente:

$$t_D = \frac{\rho_s \lambda_w Y_c \ln \left(\frac{Y_c}{Y_F} \right)}{h a (T - T_w)_M} \quad [18.45]$$

$$o \quad t_D = \frac{\rho_s Y_C \ln \left(\frac{Y_c}{Y_F} \right)}{a K_y M_B (X_W - X)} \quad [18.46]$$

La diferencia de temperaturas a través del lecho se puede tomar como la media logarítmica [ec. 18.29], que al sustituir en las ecuaciones 18.43 y 18.45 se obtiene:

- Período de velocidad constante:

$$t_C = \frac{x \rho_s \lambda_w (Y_l - Y_c)}{G \hat{C}_S (T_1 - T_w) \left[1 - \exp \left(\frac{-h a x}{G \hat{C}_S} \right) \right]} \quad [18.47]$$

- Período de velocidad decreciente:

$$t_D = \frac{x \rho_s \lambda_w Y_C \ln \left(\frac{Y_c}{Y_F} \right)}{G \hat{C}_S (T_1 - T_w) \left[1 - \exp \left(\frac{-h a x}{G \hat{C}_S} \right) \right]} \quad [18.48]$$

donde x es el espesor del lecho.

El coeficiente de transmisión de calor para la circulación del aire de secado se puede evaluar mediante las ecuaciones (Geankoplis, 1983):

$$h = 0,151 \frac{(G_t)^{0,59}}{(D_p)^{0,41}} \quad \frac{D_p G_t}{\eta} > 350 \text{ para SI} \quad [18.49]$$

$$h = 0,214 \frac{(G_t)^{0,49}}{(D_p)^{0,51}} \quad \frac{D_p G_t}{\eta} < 350 \text{ para SI} \quad [18.50]$$

El diámetro equivalente (D_p) para una partícula cilíndrica es:

$$D_p = (D_C l + 0,5 D_C^2)^{1/2} \quad [18.51]$$

18.5.2.3. Secaderos continuos

Para un secadero en el que el alimento sólido y el aire circulan en contracorriente, la ecuación que permite el cálculo del tiempo de secado en el período de velocidad constante es (Geankoplis, 1983):

$$t_C = \left(\frac{G}{w_S} \right) \left(\frac{w_S}{A} \right) \frac{1}{K_y M_B} \ln \left(\frac{X_W - X_c}{X_W - X_1} \right) \quad [18.52]$$

en la que A/w_s es la superficie expuesta al secado. Esta ecuación se puede expresar como:

$$t_C = \left(\frac{G}{w_s} \right) \left(\frac{w_s}{A} \right) \frac{1}{K_y M_B} \left(\frac{X_1 - X_C}{\Delta X_{ML}} \right) \quad [18.53]$$

en la que ΔX_{ML} es la diferencia media logarítmica de la humedad:

$$\Delta X_{ML} = \frac{(X_1 - X_W) - (X_C - X_W)}{\ln \left(\frac{X_1 - X_W}{X_C - X_W} \right)} \quad [18.54]$$

en la que la humedad crítica es (Geankoplis, 1983):

$$X_C = X_2 + \frac{w_s}{G} (Y_C - Y_2) \quad [18.55]$$

Para el período de velocidad decreciente, el tiempo de secado se obtiene a partir de la ecuación:

$$t_D = \left(\frac{G}{w_s} \right) \left(\frac{w_s}{A} \right) \frac{Y_C}{Y_2 + (X_W - X_2) \left(\frac{G}{w_s} \right) K_y M_B} \ln \left[\frac{Y_C (X_W - X_C)}{Y_2 (X_W - X_1)} \right] \quad [18.56]$$

En el caso de flujo en equicorriente, como el mostrado en la figura 18.14, el aire caliente a la entrada se pone en contacto con el alimento húmedo, con lo que el balance másico se expresa como:

$$G X_1 + w_s Y_1 = G X_2 + w_s Y_2 \quad [18.57]$$

o

$$G (X_2 - X_1) = w_s (Y_1 - Y_2) \quad [18.58]$$

Que en términos de valores críticos se expresa:

$$G (X_C - X_1) = w_s (Y_1 - Y_C) \quad [18.59]$$

$$X_C = X_1 + \frac{w_s}{G} (Y_1 - Y_C) \quad [18.60]$$

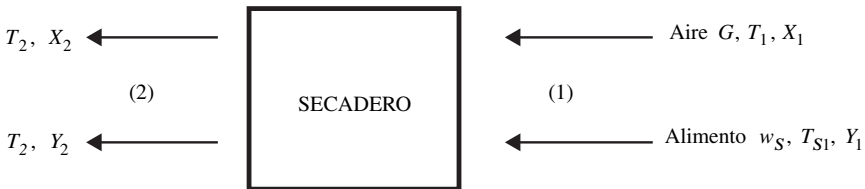


Figura 18.14. Operación de secado en equicorriente.

18.6. Secado por atomización

Este tipo de secado se utiliza para alimentos disueltos en agua, e incluye la formación de gotas que por secado posterior darán lugar a las partículas de alimento seco. Inicialmente, el alimento fluido es transformado en gotas, que se secan por atomización en un medio continuo de aire caliente. El modo más común utilizado en este tipo de secado es un ciclo abierto, tal como se muestra en la figura 18.15. El aire de secado es calentado utilizando un medio seco, además, es limpiado con ciclones antes de ser lanzado a la atmósfera. En este tipo de operación el aire que abandona el sistema todavía puede contener calor. Un segundo tipo es la utilización de un circuito cerrado con un medio de calefacción (aire, CO_2 , etc.). El aire se utiliza en el proceso de secado, después se limpia, se seca y se reutiliza de nuevo en un proceso continuo. La eficiencia de este tipo de secado es superior a la de los sistemas abiertos. En los sistemas de circuito cerrado únicamente sale del sistema el producto seco, mientras que en los de circuito abierto también se lanza al exterior aire caliente, que en algunas ocasiones puede contener micropartículas.

Este tipo de secado incluye la atomización del alimento en un medio de secado en el que se elimina la humedad por evaporación. El secado se realiza hasta que se llega al nivel de humedad fijado para el producto. Este secado se controla por las condiciones de flujo y temperatura, tanto del producto como del aire de entrada. El secado por atomización se utilizó por primera vez en el secado de leche hacia 1900, y más tarde se aplicó en huevos y café.

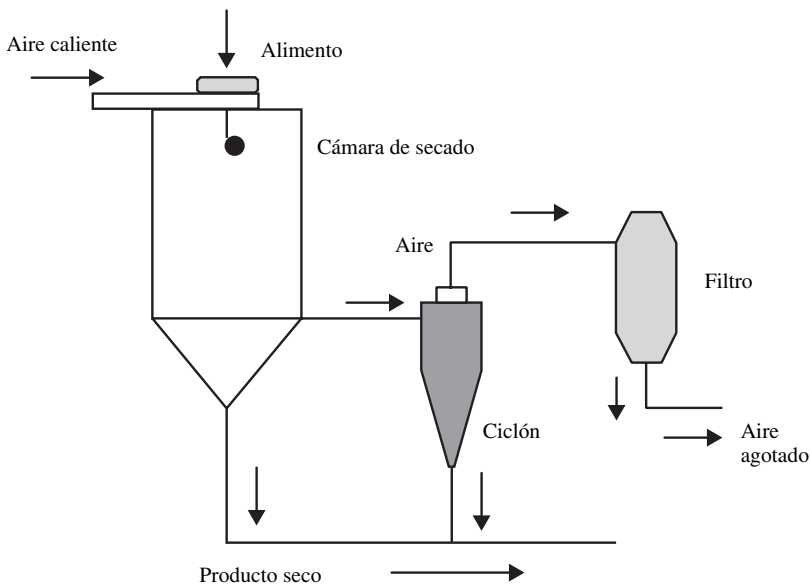


Figura 18.15. Ciclo abierto, secado por atomización en equicorriente (adaptado de Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996).

La característica más importante del secado por atomización es la formación de gotas y el contacto de éstas con el aire. La atomización del alimento se produce por la rotura de la corriente del alimento en pequeñas gotas, existiendo diferentes tipos de atomizadores (Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996).

18.6.1. Inyectores de presión

Para la formación de las gotas se utilizan inyectores de presión, en los que variando la presión es posible controlar el flujo del alimento y las características de la atomización. El tamaño medio de las gotas formadas es proporcional al flujo del alimento y a su viscosidad. En la figura 18.16 se muestra un tipo de inyector de presión.

El principio fundamental de este tipo de inyectores es la conversión de la energía de presión en energía cinética. Las capas del líquido se rompen bajo la influencia de las propiedades físicas del líquido y por los efectos de fricción con el aire. La potencia requerida para un inyector de presión es proporcional a la velocidad de alimentación y la presión del inyector (Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996):

$$P_k = 0,27 \frac{\Delta P}{\rho} \quad [18.61]$$

en la que ΔP es la caída total de presión y ρ es la densidad del alimento. La conversión de la energía de presión en cinética en un inyector de presión centrífugo, resulta en un movimiento rotatorio del líquido y puede ser expresado (Marshall, 1954):

$$E_h = 19,2 w \Delta P \quad [18.62]$$

en la que w es el caudal másico y E_h es la energía o potencia. El flujo de líquido del orificio de un inyector de presión centrífugo se puede expresar como:

$$2 (\pi r_1^2 V_{entrada}) = 2 (\pi b r_2 U_r) \quad [18.63]$$

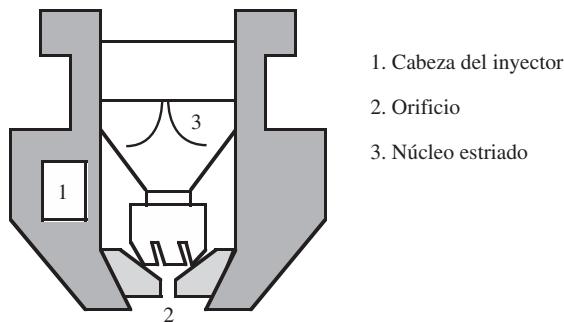


Figura 18.16. Inyector de presión estriado (adaptado de Masters, 1991).

$$V_{entrada} = \frac{w_1}{2 \pi r_1^2 \rho} \quad [18.64]$$

o

$$\frac{U_r}{V_{entrada}} = \frac{r_1^2}{r_2 b} \quad [18.65]$$

en la que b es el espesor de la película de líquido en el orificio, r_1 es el radio del canal de entrada, r_2 es el radio del orificio, $V_{entrada}$ es la velocidad del líquido a la entrada, U_r es la componente vertical de la velocidad de atomización, y w_1 es el caudal másico del líquido.

La velocidad del líquido que sale del inyector se expresa como:

$$V_{salida} = \sqrt{U_h^2 + U_v^2} \quad [18.66]$$

que expresado en términos de la caída de presión a través del inyector es:

$$V_{salida} = C_v (2 g h)^n = C_v \left(2 g \frac{\Delta P}{\rho} \right)^n \quad [18.67]$$

en la que U_h y U_v son las componentes horizontal y vertical de la velocidad, $n = 0,5$ para flujo turbulento, C_v es un coeficiente de velocidad, g es la fuerza gravitacional, n es una constante, y h es la presión de cabeza. El funcionamiento de un inyector de presión es afectado por la presión, densidad del líquido y viscosidad. Masters (1991) propuso una correlación entre los cambios de flujo a través del inyector con los cambios de presión y densidad, según la expresión:

$$\frac{w_2}{w_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{0,5} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{0,5} \quad [18.68]$$

El efecto de la viscosidad en el flujo no está definido de modo claro, aunque podría determinarse de forma experimental. El efecto de las variables de proceso, tales como la capacidad del inyector, ángulo de atomización, presión, viscosidad, tensión superficial, y diámetro del orificio en el tamaño de la gota se dan en la tabla 18.2.

Los secaderos industriales que contienen multiinyectores se instalan para permitir el manejo de altas velocidades de alimentación, y que provean iguales condiciones en cada inyector para una mejor uniformidad del atomizado. Las configuraciones de los inyectores deben presentar las siguientes condiciones: fácil acceso para sacar los inyectores, uniformidad de distribución, posibilidad de aislamiento, y visibilidad de cada inyector. Algunas de las posibles configuraciones se muestran en la figura 18.17.

18.6.2. Atomizadores rotatorios

Los atomizadores rotatorios difieren de los inyectores de presión en que el líquido consigue su velocidad sin alta presión. Asimismo, la velocidad de alimentación puede ser controlada con discos, mientras que en el caso de inyectores, tanto

Tabla 18.2. Efecto de algunas variables de proceso en el tamaño de las gotas

Variable	Efecto
Capacidad del inyector	
Velocidad de alimentación por debajo de la diseñada	Atomización incompleta
Velocidad de alimentación bajo mínimos	Decrece el tamaño de las gotas
Velocidad alimentación especificada	Aumenta el tamaño de las gotas
Ángulo de rociado grande	Gotas pequeñas
Aumento de presión	Decrece el tamaño de las gotas
Viscosidad	
Aumento	Atomización gruesa
Muy alta	Operación imposible
Tensión superficial alta	Dificulta atomización
Tamaño orificio	Tamaño gota = $k D^2$ D diámetro orificio; k es una constante

Fuente: Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado (1996).

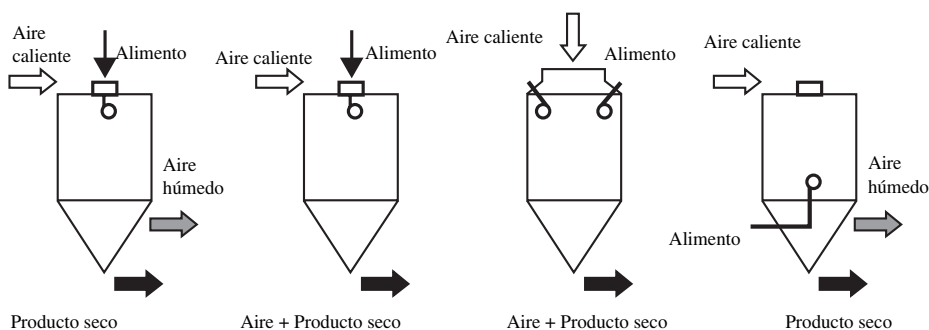


Figura 18.17. Configuración de inyectores de presión en secaderos industriales (adaptado de Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996).

la caída de presión como el diámetro del orificio cambian simultáneamente. En la figura 18.18 se muestran las propiedades físicas del alimento para el mecanismo de atomización, para el caso de discos. La formación y liberación de las gotas del borde del disco, considerando una baja velocidad de alimentación y del disco, se muestra en la figura 18.18a. La atomización consiste en una gota y dos satélites. Un aumento de la velocidad del disco y del alimento provoca un cambio en el mecanismo de formación de las gotas (figura 18.18b). Una disposición del líquido en láminas (figura 18.18c) se presenta cuando los ligamentos del líquido se juntan unos con otros, y se extiende más allá del borde del disco.

En los discos con paletas (figura 18.19a) la desintegración del líquido tiene lugar en el borde del disco, debido al efecto de fricción entre el aire y la superficie del líquido. El líquido emerge como una delgada película desde la paleta. El ta-



Figura 18.18. Atomización con discos sin paletas (adaptado de Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996).

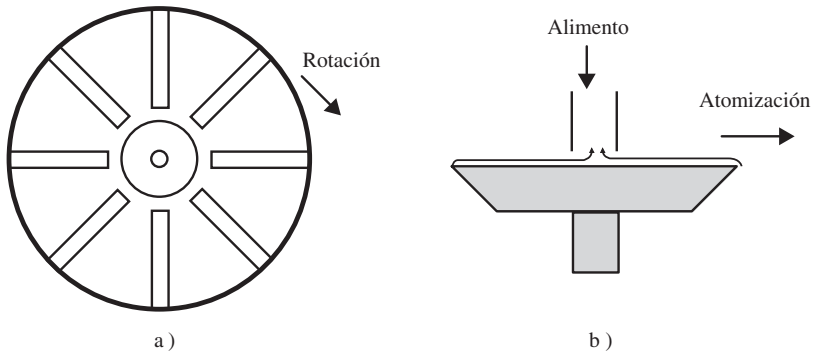


Figura 18.19. Atomizadores rotatorios: a) Disco con paletas. b) Disco plano con borde afilado (adaptado de Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996).

maño óptimo de la gota para una alimentación dada depende de las siguientes condiciones: rotación sin vibración, fuerza centrífuga, suave y completa humidificación de la superficie de la paleta, y una distribución y alimentación uniforme.

La aceleración a lo largo de la paleta cesa cuando el líquido alcanza el borde del disco, con lo que la velocidad del líquido se puede expresar (Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996):

$$U_r = 0,0024 \left(\frac{\rho \pi^2 N^2 D w^2}{\eta h^2 n^2} \right)^{0,33} \quad [18.69]$$

$$U_t = \pi D N \quad [18.70]$$

$$U_{res} = \sqrt{U_r^2 + U_t^2} \quad [18.71]$$

$$\alpha = \tan^{-1} (U_r/U_t) \quad [18.72]$$

en la que U_r es la componente radial de velocidad, U_t es la componente tangencial, U_{res} es la resultante del cese de velocidad, α es el ángulo del líquido liberado, D es el diámetro del disco, N es la velocidad de rotación del atomizador, n es el número de paletas, h es la altura de las paletas, y η es la viscosidad. El efecto de las varia-

bles de proceso, tales como la velocidad del disco, velocidad de alimentación, viscosidad del líquido, tensión superficial, y densidad del líquido en el tamaño de la gota para un atomizador rotatorio se dan en la tabla 18.3.

Tabla 18.3. Efecto de las variables de proceso en el tamaño de la gota para un atomizador rotatorio

Variable	Efecto	
Velocidad del disco Alimentación constante	$\frac{D_1}{D_2} = \left[\frac{N_2}{N_1} \right]^p$	D = diámetro del disco N = velocidad disco, rpm $p = 0,55 - 0,80$
Velocidad alimentación Velocidad del disco constante	$\frac{D_1}{D_2} = \left[\frac{q_1}{q_2} \right]^m$	q = velocidad de alimentación $m = 0,1 - 0,12$
Viscosidad del líquido	$\frac{D_1}{D_2} = \left[\frac{\eta_1}{\eta_2} \right]^r$	η = viscosidad $r = 0,2$
Tensión superficial	$\frac{D_1}{D_2} = \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right]^s$	σ = tensión superficial $s = 0,1 - 0,5$
Viscosidad del líquido	$\frac{D_1}{D_2} = \left[\frac{\rho_2}{\rho_1} \right]^t$	ρ = densidad $t = 0,5$

Fuente: Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado (1996).

El tamaño de distribución de la atomización, en un atomizador rotatorio se puede expresar como:

$$D_{medio} = \frac{K w^a}{N^b d^{0,6} (n h)^d} \quad [18.73]$$

en la que los valores de K , a , b y d son función de la velocidad del disco y velocidad de carga de la paleta. En la tabla 18.4 se recogen los valores de estas constantes.

Tabla 18.4. Valores de las constantes de la ecuación 18.73

Velocidad del disco (m/s)	Velocidad de carga de la paleta (kg/h·m)	a	b	d	$K \cdot 10^4$
Normal 85-115	Baja 250	0,24	0,82	0,24	1,4
Normal-alta 85-180	Normal 250-1.500	0,2	0,8	0,2	1,6
Muy alta 180-300	Normal-alta 1.000-3.000	0,12	0,77	0,12	1,25
Normal-alta 85-140	Muy alta 3.000-60.000	0,12	0,8	0,12	1,2

Fuente: Masters, 1991.

Los atomizadores rotatorios generalmente se instalan en el centro del techo en secaderos de atomización, para que haya suficiente tiempo de contacto entre la gota y el aire caliente y permita la evaporación del líquido (Shaw, 1994).

La relación entre el tamaño de gota húmeda y el tamaño de la partícula seca se expresa según la ecuación:

$$D_{HÚMEDA} = \beta \cdot D_{SECA} \quad [18.74]$$

en la que $D_{HÚMEDA}$ es el tamaño de la gota en la atomización, D_{SECA} el tamaño de la partícula seca y β es el factor de cambio de forma. Este factor es función del tipo de producto y temperatura y es útil en el cambio de escala de un secadero (Masters, 1991).

18.6.3. Atomizadores neumáticos. Dos fluidos

La atomización de líquido utilizando una alta velocidad de gas es conocida como atomización neumática. El mecanismo involucra una alta velocidad del gas que permite crear fuerzas de fricción elevadas, lo que causa la rotura del líquido en gotas. La formación de gotas tiene lugar en dos etapas: primero el líquido se rompe en filamentos y largas gotas; después los filamentos de líquido y las gotas grandes se rompen dando gotas pequeñas. Este proceso de formación de gotas se ve afectado por las propiedades del líquido (tensión superficial, densidad, y viscosidad), así como por las del flujo de gas (velocidad y densidad).

La atomización neumática utiliza como medio gaseoso primario aire y vapor. En el caso de ciclos cerrados se suelen utilizar gases inertes. Para lograr condiciones de fricción óptimas se requieren elevadas velocidades entre el aire y el líquido. Estas condiciones se obtienen por expansión de la fase gaseosa a velocidades del sonido y supersónicas, antes del contacto con el líquido o por flujo gaseoso directo sobre una película delgada de líquido en el inyector. Los inyectores neumáticos incluyen un mezclado interno y un mezclado interno/externo combinado. El requerimiento de potencia para una expansión isentrópica se expresa como:

$$P = 0,402 w_A T \left\{ 0,5 M_a^2 + 2,5 \left[1 - \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{0,286} \right] \right\} \quad [18.75]$$

en la que w_A es el flujo másico de aire, T la temperatura absoluta, M_a es el módulo de Mach, P_1 y P_2 son las presiones inicial y final, respectivamente. El tamaño medio de atomizado que se obtiene en un atomizador neumático se puede expresar como:

$$D = \frac{A}{(V^2 \rho_a)^\alpha} + B \left(\frac{w_{aire}}{w_{liq}} \right)^{-\beta} \quad [18.76]$$

en la que V es la velocidad relativa entre el aire y el líquido, α y β son función del inyector, A y B son constantes, w_{aire} es el flujo másico de aire, y w_{liq} es el flujo másico de líquido. En la tabla 18.5 se recogen los efectos de las variables de proceso en las gotas para atomizadores neumáticos.

Tabla 18.5. Efecto de las variables de proceso en las gotas para atomizadores neumáticos

Variable	Efecto
Razón máscica aire/líquido	
Aumento razón	Disminución tamaño de gota
$w_{aire}/w_{liq} < 0,1$	Atomización deteriorativa
$w_{aire}/w_{liq} \geq 10$	Límite superior para razón efectiva
	Aumento para crear partículas de menor tamaño
Velocidad relativa	
Aumento velocidad aire	Disminución tamaño de gota
Viscosidad	
Aumento viscosidad fluido	Aumento tamaño de gota
Aumento viscosidad aire	Disminución tamaño de gota

Fuente: Masters, 1991.

18.6.4. Interacción entre las gotas y el aire de secado

La distancia que recorre una gota hasta que se ve afectada por completo por el aire depende del tamaño de la misma, forma y densidad. Los atomizadores ordinarios son más independientes del flujo de aire, mientras que en los atomizadores finos debe considerarse el flujo del aire (Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996). El movimiento de la atomización se puede clasificar de acuerdo al diseño del secadero como equicorriente, contracorriente o flujo mezclado (figura 18.20).

El movimiento de atomización se puede explicar para una simple gota. Las fuerzas que actúan sobre una gota son:

$$\frac{\pi}{6} D^3 \rho_w \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{6} D^3 (\rho_w - \rho_a) g - 0,5 C_d \rho_a V_r^2 A \quad [18.77]$$

en la que D es el diámetro de la gota, C_d es el coeficiente de arrastre, V_r es la velocidad relativa de la gota con respecto al aire, A es el área de la gota, ρ_w es la densi-

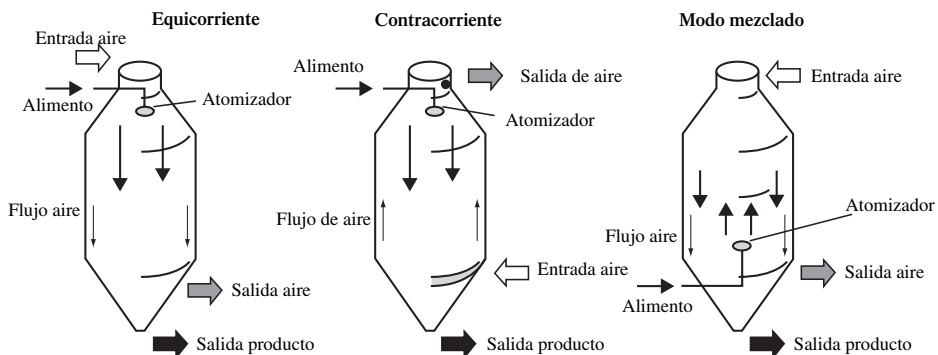


Figura 18.20. Clasificación de secaderos según el movimiento de atomización (adaptado de Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996).

dad de la gota, y ρ_a es la densidad del aire. El movimiento de la atomización bajo diferentes condiciones de flujo ha sido discutido por Masters (1991).

Los perfiles de temperatura en el interior de los secaderos es un aspecto importante, y son función del tipo de flujo (Masters, 1991; Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996).

18.6.5. Balances de calor y materia

En el secado de alimentos por atomización, el líquido que debe ser eliminado casi siempre es agua, aunque la eliminación de disolventes orgánicos en operaciones de ciclo cerrado es también usual. Si se tiene un sistema como el mostrado en la figura 18.21, los balances de calor y materia que se realizan conducirán a las siguientes ecuaciones.

Un balance másico aplicado a todo el sistema conduce a la ecuación:

$$w_S (Y_{S1} - Y_{S2}) = G_a (X_{a2} - X_{a1}) \quad [18.78]$$

en la que w_S es el flujo de sólido seco, Y_{S1} el contenido de humedad del sólido que entra al secadero, Y_{S2} la humedad del sólido que abandona el secadero, G_a el flujo

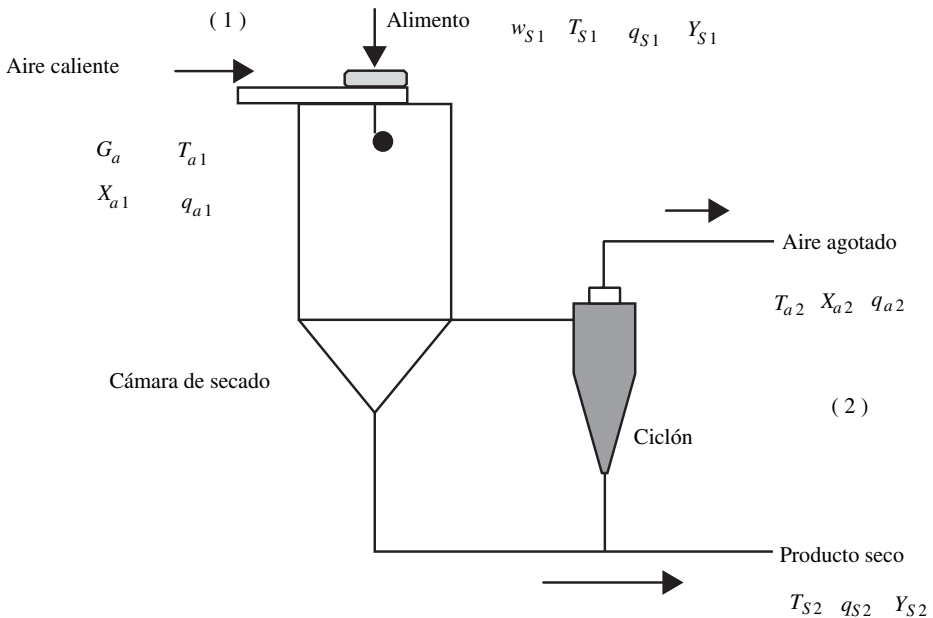


Figura 18.21. Datos del secadero para balances de calor y materias (w_S , velocidad sólidos secos; T_S , temperatura de sólidos; q_S , entalpía de sólidos; Y_S , contenido de humedad de sólidos; G_a , velocidad del aire seco; T_a , temperatura del aire; X_a , humedad del aire; q_a , entalpía).

de aire seco, X_{a1} la humedad del aire que entra al secadero, y X_{a2} el contenido de humedad del aire que sale del secadero.

Un balance entálpico conduce a la ecuación:

$$w_S q_{S1} + G_a q_{a1} = w_S q_{S2} + G_a q_{a2} + q_L \quad [18.79]$$

en la que q_{S1} y q_{S2} son las entalpías del sólido a la entrada y salida del secadero respectivamente, mientras que q_{a1} y q_{a2} son las entalpías del aire a la entrada y salida del secadero, y q_L las pérdidas de calor.

El rendimiento de un secado por atomización se mide en términos de eficiencia térmica, la cual está relacionada con la entrada de calor requerida para producir una unidad en peso del producto seco con las especificaciones deseadas. La eficiencia térmica global (ϕ_{global}) se define como la fracción del calor total suministrado a la usada en el secadero en el proceso de evaporación:

$$\phi_{\text{global}} = 100 \frac{(T_1 - T_2)}{(T_1 - T_0)} \quad [18.80]$$

siendo T_1 la temperatura del aire caliente a la entrada, T_2 la correspondiente a la salida y T_0 la temperatura del aire atmosférico. La eficiencia de evaporación ($\phi_{\text{evaporación}}$) se define como la razón de la capacidad actual de evaporación a la capacidad obtenida en un caso ideal de agotamiento de aire a la temperatura de saturación:

$$\phi_{\text{evaporación}} = 100 \frac{(T_1 - T_2)}{(T_1 - T_{\text{sat}})} \quad [18.81]$$

18.7. Liofilización

La liofilización se desarrolló para superar las pérdidas de los compuestos responsables de los aromas en alimentos, los cuales se perdían en las operaciones convencionales de secado (Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996). El proceso de liofilización consiste esencialmente en dos etapas: 1) el producto se congela, y 2) el producto se seca por sublimación directa del hielo bajo una presión reducida. Este tipo de secado se introdujo inicialmente a gran escala en la década de 1940 para la producción de plasma seco y productos de sangre. Después, antibióticos y materiales biológicos se prepararon a escala industrial por liofilización. En la figura 18.22 se muestra un esquema básico de un sistema de liofilización.

La liofilización se ha mostrado como un método efectivo para ampliar la vida media de los alimentos, y tiene dos características importantes:

- 1) *Ausencia de aire durante el procesado.* La ausencia de aire y la baja temperatura previene el deterioro debido a la oxidación o las modificaciones del producto.

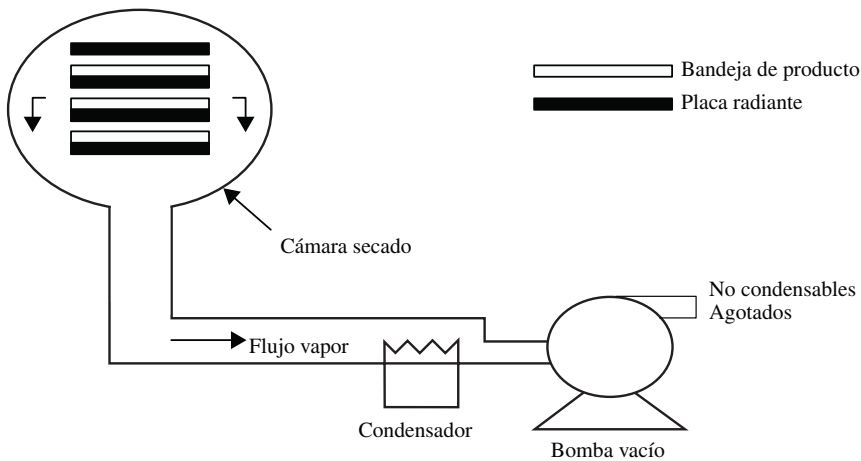


Figura 18.22. Sistema básico de liofilización (adaptado de Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996).

- 2) *Secado a una temperatura inferior a la ambiente.* Los productos que se descomponen o sufren cambios en su estructura, textura, apariencia, y/o aromas, como consecuencia de temperaturas altas, pueden secarse bajo vacío con un daño mínimo.

Los productos liofilizados que han sido adecuadamente empaquetados pueden ser almacenados durante tiempos ilimitados, reteniendo la mayoría de propiedades físicas, químicas, biológicas y sensoriales de su estado fresco; además, se reducen las pérdidas de calidad debidas a las reacciones de pardeamiento enzimático y no enzimático. Sin embargo, la oxidación de lípidos, inducida por los bajos niveles de humedad conseguidos durante el secado, es superior en los productos liofilizados. Esta oxidación lipídica puede controlarse con envasados en paquetes impermeables al paso del oxígeno. El pardeamiento no enzimático apenas ocurre durante el secado, ya que la reducción de la humedad del producto en el proceso es casi instantánea. El uso de bajas temperaturas también reduce la desnaturalización de proteínas en este tipo de secado (Okos *et al.*, 1992).

Los productos liofilizados pueden volver a su forma y estructura original por adición de agua. La estructura esponjosa del producto liofilizado permite una rápida rehidratación del mismo. Las características del producto rehidratado son análogas a las que poseía el producto fresco. La porosidad de los productos liofilizados permite una rehidratación mucho más completa y rápida que la de alimentos secados con aire. Sin embargo, una de las mayores desventajas de la liofilización es el costo energético y el largo período de secado. Algunos de los productos comerciales obtenidos por liofilización son extractos de café y té, verduras, frutas, carnes y pescado. Estos productos poseen de un 10% a 15% del peso original, y no requieren refrigeración; incluso se puede llegar a obtener productos con humedad inferior al 2%.

Tal como se ha indicado anteriormente, el proceso de liofilización consta de dos etapas: congelación y secado. La congelación debe ser muy rápida con el objeto de obtener un producto con cristales de hielo pequeños y en un estado amorfo. La etapa de secado se realiza a presiones bajas para permitir la sublimación del hielo. En la figura 18.23 se presenta un diagrama de fases del agua, mientras que en la figura 18.24 se presentan las etapas del secado por liofilización.

En la liofilización se deben considerar tres importantes variables de diseño: 1) el vacío en el interior de la cámara de secado; 2) el flujo de energía radiante aplicado al alimento, y 3) la temperatura del condensador. La velocidad inicial de secado es alta, ya que la resistencia a los flujos de masa y energía es pequeña. Sin embargo, se acumula una pequeña capa alrededor del producto congelado que hace

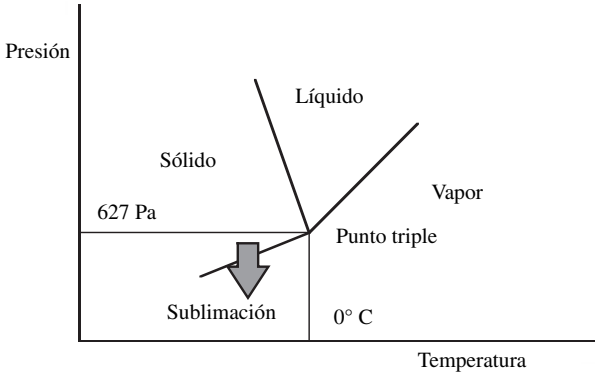


Figura 18.23. Diagrama de fases del agua (adaptado de Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996).

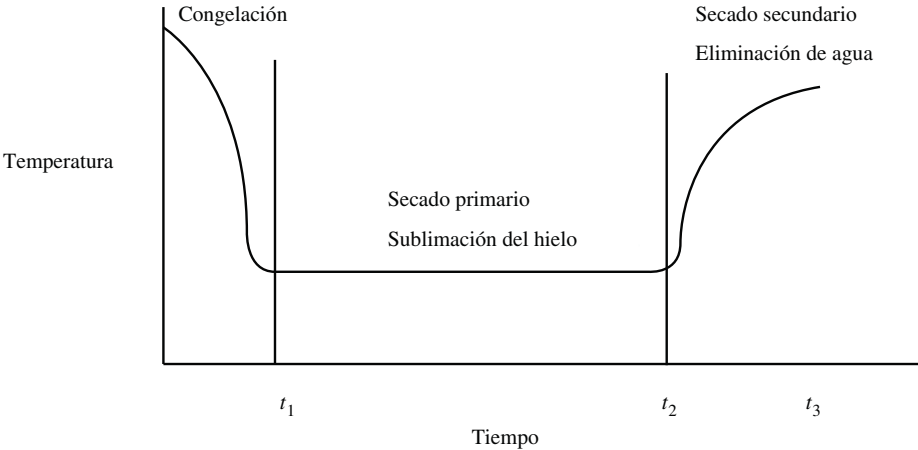


Figura 18.24. Etapas de la liofilización (adaptado de Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996).

decaer la velocidad de secado a medida que este avanza. Esta capa sirve de aislante y afecta la transmisión de calor hacia el frente de hielo. Además, la transferencia de materia desde el frente de hielo se reduce a medida que el espesor de la capa seca aumenta. Ello es debido a la reducción de la difusión desde la interfase de sublimación hacia la superficie del producto.

18.7.1. Etapa de congelación

La temperatura y tiempo de congelación de productos alimentarios es función de los solutos en solución que contienen. La temperatura de congelación para el agua pura permanece constante en el punto de congelación hasta que el agua se ha congelado. Para los alimentos, la temperatura de congelación es más baja que para el agua pura, ya que los solutos del agua no congelada se van concentrando, y la temperatura de congelación va disminuyendo continuamente hasta que la solución queda congelada. Al final de la congelación la masa entera del producto se ha convertido en rígida, formando un eutéctico, que consiste en cristales de hielo y componentes del alimento. Se requiere llegar al estado eutéctico para asegurar la eliminación de agua sólo por sublimación, y no por combinación de sublimación y evaporación.

La permeabilidad de la superficie congelada, puede verse afectada por la migración de componentes solubles durante la etapa de congelación. Sin embargo, la eliminación de la fina capa de la superficie del producto congelado, o la congelación bajo condiciones que inhiban la separación de la fase de concentrado, dan lugar a mejores velocidades de secado (Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996).

18.7.2. Etapas primaria y secundaria de secado

Durante el proceso de liofilización se pueden distinguir dos etapas de secado, la primera de ellas es la sublimación del hielo bajo vacío. El hielo sublima cuando se suministra la energía correspondiente al calor latente. Debido a la baja presión de la cámara de secado, el vapor de agua generado en la interfase de sublimación es eliminado a través de los poros del producto. El condensador previene el retorno del vapor de agua hacia el producto. La fuerza impulsora de la sublimación es la diferencia de presión entre la presión del vapor de agua en la interfase del hielo, y la presión parcial del vapor de agua en la cámara de secado. La energía para la sublimación del hielo es suministrada por radiación o conducción a través del producto congelado, o por irradiación con microondas de las moléculas de agua.

La etapa secundaria de secado comienza cuando se ha agotado el hielo en el producto, y la humedad proviene del agua parcialmente ligada en el material que se está secando. En este momento la velocidad de calentamiento debe disminuir para mantener la temperatura del producto por debajo de los 30-50 °C, lo que evita el colapso del material. Si la parte sólida del material está demasiado caliente la estructura se colapsa, lo que se traduce en una disminución de la velocidad de sublimación de hielo en el producto (Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996).

18.7.3. Transferencia simultánea de calor y materia

Los fenómenos de transferencia de materia y calor durante la liofilización se pueden resumir en términos de difusión de vapor de agua del frente de sublimación, y la radiación y conducción de calor de la placa radiante. En el desarrollo de esta sección se va a suponer un modelo de estado estacionario, que facilita los cálculos.

La energía requerida para mantener la sublimación se supone que es igual al flujo radiante o conductivo, debido al gradiente de temperaturas entre el producto congelado y la fuente de calor en la cámara de secado. El agua sublima por debajo del punto triple bajo presiones de 627 Pa o menores. La interfase de sublimación está localizada por encima del frente de hielo, y la eliminación de agua tiene lugar cerca o en la interfase de sublimación. En la figura 18.25 se muestran los flujos de calor y materia en el secado de láminas congeladas.

El flujo de calor debido a la convección y conducción en la superficie de sublimación, para la figura 18.25a; se puede expresar (Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996):

$$q = h (T_e - T_s) = k \frac{(T_s - T_f)}{(L_2 - L_1)} \quad [18.82]$$

en la que q es la densidad de flujo de calor, h es el coeficiente externo de transferencia de calor por convección, T_e es la temperatura externa de vaporización del gas, T_s es la temperatura de la superficie del sólido seco, T_f es la temperatura de sublimación del frente de hielo, k es la conductividad térmica del sólido seco, y $(L_2 - L_1)$ es el espesor de la capa seca. En la tabla 18.6 se dan valores de conductividad térmica y temperaturas de sublimación para algunos productos liofilizados.

Tabla 18.6. Conductividad térmica y temperatura de sublimación de productos liofilizados

Producto	k (W/m K)	Producto	T_{sub} (°C)
Extracto café - 25%	0,033	Café	-23
Gelatina	0,016	Gamba	-18
Leche	0,022	Huevo entero	-17
Manzana	0,016-0,035	Manzana	-7
Melocotón	0,016	Pollo	-21
Pavo	0,014	Salmón	-29
Setas	0,010	Ternera	-14
Ternera	0,035-0,038	Zanahoria	-25

Fuente: Schwartzberg (1982).

La densidad de flujo de vapor de agua desde el frente de sublimación viene dada por (Okos *et al.*, 1992):

$$N_a = \frac{D' (P_{fw} - P_{sw})}{RT (L_2 - L_1)} = K_g (P_{sw} - P_{ew}) \quad [18.83]$$

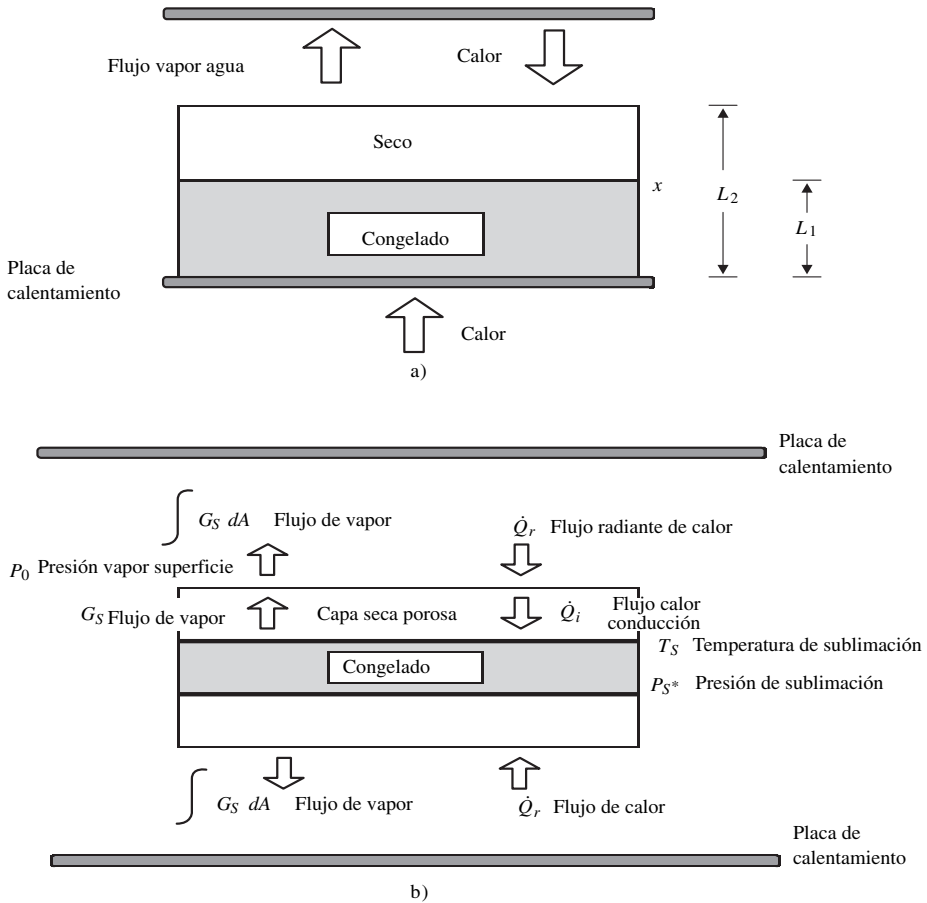


Figura 18.25. Flujos de calor y materia durante la liofilización: a) Secado por una cara. b) Disposición simétrica. Secado por las dos caras (adaptado de Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996).

en la que N_a es la densidad de flujo del vapor de agua, D' la difusividad efectiva media del vapor de agua en la capa seca, R la constante de gases, T es la temperatura media en la capa seca, P_{fw} es la presión parcial del vapor de agua en equilibrio con el frente de sublimación de hielo, P_{sw} la presión parcial del vapor de agua en la superficie, P_{ew} la presión parcial de vapor de agua en el seno de la fase externa de gas, y K_g es el coeficiente de transferencia externo de materia.

Las ecuaciones 18.82 y 18.83 se pueden combinar, expresando q y N_a en términos de las condiciones de operación externas de la forma (Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996):

$$q = \frac{(T_e - T_f)}{\left[\frac{1}{h} + \frac{(L_2 - L_1)}{k} \right]} \quad [18.84]$$

$$y \quad N_a = \frac{(P_{fw} - P_{ew})}{\left[\frac{1}{K_g} + \frac{RT(L_2 - L_1)}{D'} \right]} \quad [18.85]$$

Las constantes h y K_g dependen de las velocidades del gas y del secadero, mientras que k y D' dependen de la naturaleza del material secado. T_e y P_{ew} están dados por las condiciones de operación. Estas dos últimas ecuaciones se pueden relacionar a través del calor latente de sublimación (ΔH_S) como sigue:

$$q = \Delta H_S N_a \quad [18.86]$$

Combinando las ecuaciones 18.82, 18.85 y 18.86 se obtiene:

$$\frac{k(T_S - T_f)}{(L_2 - L_1)} = \frac{\Delta H_S (P_{fw} - P_{ew})}{\left[\frac{1}{K_g} + \frac{RT(L_2 - L_1)}{D'} \right]} \quad [18.87]$$

o

$$h(T_e - T_S) = \frac{\Delta H_S (P_{fw} - P_{ew})}{\left[\frac{1}{K_g} + \frac{RT(L_2 - L_1)}{D'} \right]} \quad [18.88]$$

Un aumento de T_e o T_S provoca un aumento en la velocidad de secado, tal como puede observarse de las ecuaciones 18.87 y 18.88. La temperatura T_S está limitada por la sensibilidad al calor del material y T_f debe ser menor que la temperatura de colapso del material. La sensibilidad está definida en términos de reacciones de degradación, mientras que la temperatura de colapso viene definida en términos de deformación de la estructura porosa de la capa seca.

La velocidad de secado se puede expresar como:

$$N_a = \left(\frac{L}{2 M_a V_S} \right) \left(\frac{-dx}{dt} \right) \quad [18.89]$$

en la que L es el espesor total del sólido, x es el espesor de la capa seca, t es el tiempo, M_a es la masa molecular del agua, V_S es el volumen del sólido ocupado por unidad de masa de agua (por kg de agua), expresado como $V_S = 1/(Y_0 \rho_S)$, siendo Y_0 el contenido inicial de humedad y ρ_S es la densidad del sólido seco. Una deducción análoga fue considerada por Schwartzberg (1982) para describir el proceso de liofilización, en el que consideraba la transferencia de materia y calor a través de las dos caras del producto (figura 18.25b). El flujo de vapor de agua en el sistema se puede expresar como:

$$G_S = \frac{K_P (P_S^* - P_0)}{x} \quad [18.90]$$

$$G_S = \frac{K_P (P_S^* - P_C^*)}{x} \tag{18.91}$$

$$G_S = \rho \frac{(Y_0 - Y_f)}{(1 + Y_0)} \frac{dx}{dt} \tag{18.92}$$

en la que P_S^* es la presión de vapor de agua en la interfase de sublimación, P_0 la presión parcial de agua en la superficie, P_C^* es la presión en el condensador que debe ser igual a P_0 , a menos que los no condensables sean introducidos en el secadero, K_P es la permeabilidad de la capa seca, ρ la densidad de la capa helada de la lámina, Y_0 la humedad inicial del alimento (masa agua/masa sólido seco), Y_f el contenido final de humedad, x el espesor de la capa seca y t es el tiempo de secado. La primera parte de la ecuación 18.92 representa el cambio en el contenido en agua por unidad de volumen del producto congelado. El cambio de espesor de la capa seca es función del tiempo, manteniéndose constante el área superficial. En la tabla 18.7 se dan valores de permeabilidad para algunos alimentos liofilizados.

Tabla 18.7. Permeabilidad de alimentos liofilizados

Producto	Permeabilidad (10^{-9} -kg/m·s·µmHg)
Café 20% sólidos	4,0-8,6
Café 30% sólidos	3,0
Leche entera	2,7-5,3
Manzana	3,3-6,0
Patata	1,3
Pescado	8,7
Plátano	1,1
Ternera	0,7-4,4
Tomate 22 °Brix	2,1
Zanahoria	2,0-5,6

Fuente: Schwartzberg (1982).

El tiempo de secado se obtiene por integración de la ecuación 18.92, dando:

$$t_S = \rho \frac{(Y_0 - Y_f)}{2 K_P (1 + Y_0)} \frac{a^2}{(P_S^* - P_0)} \tag{18.93}$$

siendo a el espesor de la mitad de la lámina.

El calor necesario para la sublimación se supone igual a la energía radiante, pudiéndose expresar como:

$$\dot{Q}_r = \dot{Q}_i = G_S \hat{H}_S \tag{18.94}$$

en la que \dot{Q}_i es el flujo interno de calor en el interior de la lámina y \hat{H}_S es el calor latente medio del vapor (Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996). El flujo de calor interno se puede expresar como:

$$\dot{Q}_i = \frac{K_t (T_0 - T_S)}{z} \quad [18.95]$$

en la que K_t es la conductividad térmica de la capa seca, T_0 la temperatura de la superficie de la lámina, T_S la temperatura de sublimación. Sustituyendo la ecuación 18.92 por G_S en la ecuación 18.95 se obtiene:

$$\frac{K_t (T_0 - T_S)}{z} = \rho \frac{(Y_0 - Y_f)}{(1 + Y_0)} \hat{H}_S \frac{dx}{dt} \quad [18.96]$$

Suponiendo que T_0 , T_S y K_t permanecen constantes:

$$t_S = \rho \frac{(Y_0 - Y_f)}{(1 + Y_0)} \hat{H}_S \frac{a^2}{K_t (T_0 - T_S)} \quad [18.97]$$

Combinando las relaciones de transferencia de masa y de calor para el tiempo de secado, t_S , se obtiene una relación que es función de las propiedades de la capa seca y de las condiciones de operación durante la liofilización:

$$(P_S^* - P_0) = \left(\frac{-K_t}{K_p \hat{H}_S} \right) (T_S - T_0) \quad [18.98]$$

Esta ecuación es la de una recta si P_S^* y T_S se consideran las variables, T_0 y P_0 están fijadas y K_t y K_p son independientes de P_S^* y T_S (Schwartzberg, 1982). Los valores de P^* pueden calcularse de la ecuación de sublimación como sigue:

$$\ln P^* = 30,9526 - \frac{6.153,1}{T} \quad [18.99]$$

en la que T es la temperatura absoluta. Las ecuaciones 18.98 y 18.99 pueden utilizarse conjuntamente para definir las condiciones finales de operación durante el proceso de liofilización.

Otra variable muy importante es la temperatura de la superficie, T_0 , cuyo valor está controlado por la velocidad de transferencia de calor desde la placa de calentamiento, cuya temperatura es T_p :

$$\dot{Q}_r = F_{op} \sigma (T_p^4 - T_0^4) \quad [18.100]$$

en la que σ es la constante de Stefan-Boltzmann y F_{op} es el factor de forma o visión, definido como:

$$F_{op} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_p} - 1 \right)} \quad [18.101]$$

siendo ϵ_0 la emisividad de la superficie del producto y ϵ_p la de la placa radiante. Suponiendo que $\epsilon_0 \approx 1$, se obtiene que $F_{op} \approx \epsilon_0$, y al combinar las ecuaciones 18.95, 18.97 y 18.100 se obtiene:

$$T_p^4 = T_0^4 + \frac{K_t (T_0 - T_s)}{\left[\frac{2 K_t (T_0 - T_s) (1 + Y_0)}{\hat{H}_s \rho (Y_0 - Y_f)} t + x^2 \right]^{0.5}} \quad [18.102]$$

18.8. Otros tipos de secado

18.8.1. Deshidratación osmótica

La concentración de alimentos mediante la inmersión de los mismos en una solución hipertónica se conoce como deshidratación osmótica. La ósmosis consiste en el movimiento molecular de ciertos componentes de una solución a través de una membrana semipermeable, hacia otra solución de menor concentración.

Las pérdidas de agua por parte del alimento en el proceso de secado osmótico, se pueden dividir en dos períodos (Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996): 1) un período de alrededor de dos horas con una alta velocidad de eliminación de agua y 2) un período, de dos a seis horas, con una velocidad decreciente de eliminación de agua. La temperatura y concentración de la solución osmótica afectan la velocidad de pérdida de agua del producto. Comparada con el secado por aire o con la liofilización, la deshidratación osmótica es más rápida, ya que la eliminación de agua ocurre sin cambio de fase.

La diferencia de potencial químico a través de la membrana semipermeable entre el producto y la solución osmótica, es la fuerza impulsora para la transferencia de materia. El potencial químico μ_i está relacionado con la actividad de agua según la expresión:

$$\mu_i = \mu_i^0 + RT \ln a_w \quad [18.103]$$

en la que μ_i^0 es el potencial químico de referencia, R la constante de gases y T la temperatura absoluta. La transferencia de materia se realiza hasta que las actividades de agua de la solución osmótica y del alimento se igualan. El mecanismo mayoritario por el que se realiza la transferencia de materia es la difusión debida al gradiente de concentración existente entre el alimento y la solución osmótica. La velocidad de difusión del agua puede estimarse mediante la ley de Fick modificada (Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996), y depende del tipo de geometría del producto a secar.

La temperatura es una de las variables que más afecta el proceso de deshidratación osmótica, ya que un aumento de la misma intensifica la eliminación de agua y la penetración de la sustancia osmótica en el tejido. En el alimento, el contenido de agua y de solutos es función del tiempo; así, en la figura 18.26 se muestra esta variación para la deshidratación de fruta, en la que se observa una disminución de agua y un aumento de los azúcares con el tiempo.

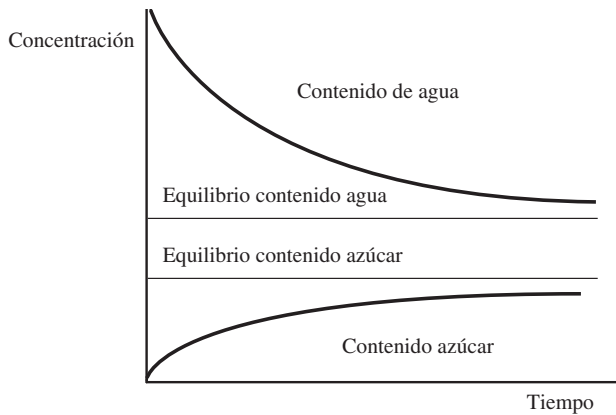


Figura 18.26. Contenido de agua y azúcar durante la deshidratación osmótica (adaptado de Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996).

También es muy importante la elección del soluto de la solución osmótica, debiéndose tener presente tres factores muy importantes: 1) las características sensoriales del producto; 2) el coste del soluto, y 3) la masa molecular del mismo. Generalmente, los solutos más usados en los procesos de deshidratación osmótica son cloruro sódico, sacarosa, lactosa, jarabe de fructosa y glicerol. En la tabla 18.8 se muestran los usos y ventajas de algunos solutos osmóticos.

Tabla 8.8. Usos y ventajas de algunos solutos osmóticos

Nombre	Usos	Ventajas
Cloruro sódico	Carnes y verduras Soluciones superior 10%	Alta capacidad de depresión de a_w
Sacarosa	Frutas	Reduce pardeamientos y aumenta retención de volátiles
Lactosa	Frutas	Sustitución parcial de sacarosa
Glicerol	Frutas y verduras	Mejora la textura
Combinación	Frutas, verduras y carnes	Características sensoriales ajustadas, combina la alta capacidad de depresión de a_w de las sales con alta capacidad de eliminación de agua del azúcar

Fuente: Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996.

18.8.2. Secado solar

La práctica del secado de alimentos cosechados mediante diseminación en finas capas expuestas al sol se denomina secado solar abierto o secado solar natural. Esta técnica es utilizada en el procesado de uva, higos, ciruelas, granos de café, cacao, pimientos, pimienta y arroz, entre otros. Este tipo de secado presenta ciertas limitaciones, como son:

- Falta de control sobre el proceso de secado, que puede dar lugar a un excesivo secado del alimento, pérdida de granos en germinación y cambios nutricionales.
- Falta de uniformidad del secado.
- Contaminación por hongos, bacterias, roedores, pájaros o insectos.

Debido a ello, se han desarrollado secaderos solares, todos basados en la utilización de la energía proveniente del Sol y la utilización del aire caliente generado para el secado del alimento. De tal modo, existen secaderos solares de convección natural, en los que no se requiere ningún tipo de energía mecánica o eléctrica. Aunque también existen los secaderos de convección forzada, que requieren del uso de ventiladores o soplantes para bombear el aire caliente.

18.8.3. Secaderos de tambor

Estos secaderos consisten en cilindros de metal huecos, que rotan sobre un eje horizontal y son calentados interiormente con vapor, agua caliente u otro medio de calentamiento. Los secaderos de tambor se utilizan en el secado de pastas y en soluciones. Las escamas o copos de patatas se obtienen utilizando estos secaderos. En la figura 18.27 se muestran varios tipos de estos secaderos.

La velocidad global de secado de la película de alimento colocada en la superficie del tambor, se puede expresar como (Heldman y Singh, 1981):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{U A \Delta T_{ml}}{\lambda} \quad [18.104]$$

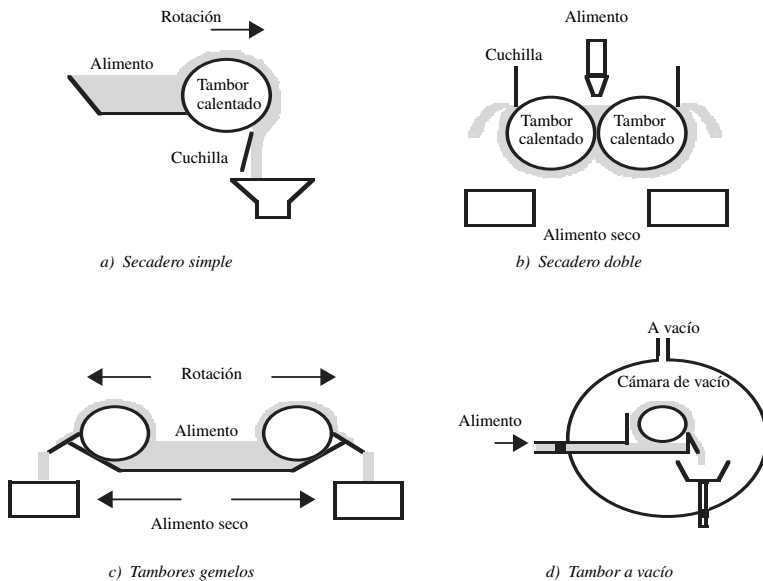


Figura 18.27. Secadero de tambor (adaptado de Barbosa-Cánovas y Vega-Mercado, 1996).

en la que ΔT_{ml} es la diferencia de temperatura media logarítmica entre la superficie del tambor y el producto, U el coeficiente global de transmisión de calor, A el área de la superficie de secado, λ el calor latente a la temperatura de evaporación de la superficie que se seca, y X es la humedad.

18.8.4. Secado por microondas

Las microondas son ondas de alta frecuencia. Las ventajas de calentamiento por microondas sobre el calentamiento por convección o conducción son:

- Sólo absorbe energía el producto que va a ser calentado.
- No existen pérdidas por calentamiento del medio circundante (aire y paredes).
- Profundidad de penetración de la fuente de calor que da un calentamiento más efectivo y uniforme.

En la industria alimentaria, las microondas se utilizan en: secado de patatas chips, escaldado de verduras, descongelación rápida de pescado congelado, precocinado de pollo y tocino, eliminación de mohos en frutos secos y productos lácteos.

18.8.5. Secaderos de lecho fluidizado

Las partículas que forman un lecho pueden ser fluidizadas si la caída de presión a través del lecho se iguala al peso del lecho, llegándose a la expansión y suspensión en el aire de las partículas. Los sistemas se comportan como un fluido cuando el módulo de Froude es menor que la unidad (Karel, 1975b), en los que generalmente la velocidad del aire está en el intervalo de 0,05 a 0,075 m/s.

En los lechos fluidizados, las partículas no presentan puntos de contacto entre ellas, lo que facilita que el secado de las mismas sea más uniforme.

PROBLEMAS

Problema 18.1

Se desea secar un sólido que contiene 0,075 kg de agua/kg de sólido seco, hasta una humedad de 0,005 kg de agua/kg sólido seco. Para ello, se alimentan 645 kg/h del sólido a un secadero completamente aislado térmicamente, en el que circula en contracorriente aire, que se introduce a 100 °C con una humedad de 0,010 kg de agua/kg aire seco y sale del secadero a 45 °C. Si los sólidos se introducen a 25 °C y salen del secadero a 70 °C, calcular el flujo de aire necesario para llevar a cabo esta operación de secado. El calor específico de los sólidos es 1,465 kJ/kg·K.

El tipo de secadero utilizado es continuo sin recirculación, siendo el esquema del mismo el dado en la figura 18.2. Si el secadero está aislado térmicamente se puede suponer que no hay ni entradas ni pérdidas de calor con el exterior, es decir:

$$\dot{Q}_E = \dot{Q}_S = 0$$

El caudal de sólido seco que se introduce en el secadero es:

$$w_S = 645/(1 + 0,075) = 600 \text{ kg sólido seco/h}$$

Las entalpías de las corrientes de aire se obtienen a partir de la ecuación 18.5:

$$\hat{i}_E = (1 + 1,92 \cdot 0,010) (100 - 0) + (2.490) \cdot (0,01) = 126,82 \text{ kJ/kg aire seco}$$

$$\hat{i}_S = (1 + 1,92 X_S) (45 - 0) + 2.490 X_S = 4 + 2.576,4 X_S \text{ kJ/kg aire seco}$$

Las entalpías de los sólidos se obtienen de la ecuación 18.6:

$$\hat{h}_E = 1,465 (25 - 0) + 0,075 \cdot (4,185) (25 - 0) = 44,47 \text{ kJ/kg sólido seco}$$

$$\hat{h}_S = 1,465 (70 - 0) + 0,05 \cdot (4,185) (70 - 0) = 104,02 \text{ kJ/kg sólido seco}$$

Al sustituir todos estos datos en la ecuación 18.4:

$$w'_A 126,82 + (600) (44,47) = w'_A (45 + 2.576,4 X_S) + (600) (104,2)$$

Del balance de materias (ecuación 18.3) se obtiene:

$$600 (0,075 - 0,005) = w'_A (X_S - 0,01)$$

Al resolver estas dos últimas ecuaciones se obtiene que la humedad del aire que abandona el secadero es $X_S = 0,0264$ kg de agua/kg aire seco, mientras que el caudal de aire seco que se debe introducir en el secadero es: $w'_A = 2.567$ kg aire seco/h.

Problema 18.2

Una bandeja de 60 × 60 cm y 3 cm de profundidad contiene un producto granular húmedo que se desea secar con una corriente de aire. La corriente de aire es

caliente y aporta el calor necesario para el secado mediante un mecanismo de convección. El aire a 65 °C fluye a una velocidad de 5 m/s, siendo su humedad de 0,02 kg de agua/kg de aire seco. Si se considera que los lados y fondo de la bandeja están completamente aislados, determinar la velocidad constante de secado.

A partir del diagrama psicrométrico, para aire a 65 °C y humedad absoluta de 0,02 kg de agua/kg de aire seco se obtienen las siguientes propiedades:

$$\text{Temperatura } T_w = 32,5 \text{ °C} \quad X_w = 0,034 \text{ kg de agua/kg de aire seco}$$

El volumen húmedo se obtiene a partir de la ecuación 6.8:

$$V_H = \left(\frac{1}{28,9} + \frac{0,02}{18} \right) \frac{(0,082)(273 + 65)}{1} = 0,9898 \text{ m}^3/\text{kg aire seco}$$

con lo que la densidad del aire húmedo será:

$$\rho = \frac{1 + 0,02}{0,9898} = 1,031 \text{ kg/m}^3$$

La densidad de flujo másica es:

$$G = \rho v = (1,031) (6) (3.600) = 22.269,6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{h}}$$

El coeficiente de transmisión de calor por convección se puede calcular a partir de la ecuación 18.20:

$$h = 0,0204 (22.269,6)^{0,8} = 61,35 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{°C})$$

Para $T_w = 32,5 \text{ °C}$ el calor latente es $\lambda_w = 2.423,4 \text{ kJ/kg}$.

La velocidad de secado se puede calcular a partir de la ecuación 18.17:

$$R = \frac{h (T - T_w)}{\lambda_w} = \frac{(61,35) (3.600) (65 - 32,5)}{(2.423,4) (1.000)} = 2,96 \frac{\text{kg}}{\text{h} \cdot \text{m}^2}$$

Como la superficie que se está secando posee un área de 0,36 m², la velocidad total de evaporación será: 1,066 kg agua/h.

Problema 18.3

Un sólido poroso con un contenido crítico de humedad de 0,22 kg de agua/kg sólido seco se somete a un proceso de secado para rebajar su humedad desde 0,22 a 0,15 kg de agua/kg sólido en 4 horas. El espesor de los sólidos es de 6 cm y el secado únicamente tiene lugar en una de las caras del sólido. Calcular el tiempo de secado necesario para un sólido con unas características similares, pero cuyo espesor es de 8 cm, y el secado tiene lugar de forma simultánea en las dos caras expuestas al aire.

Inicialmente debe calcularse el valor de la difusividad efectiva a través del sólido. Para un sólido de esta geometría se puede utilizar la solución de la ecuación de Fick dada por la expresión 18.24a. Se supone que $Y_s = 0$, y que toda el agua que alcanza la superficie se evapora de forma inmediata.

$$\Gamma = \frac{Y}{Y_0} = \frac{8}{\pi^2} e^{\left(\frac{-h_n^2 \pi^2 D_{\text{efect}} t}{4 L^2} \right)}$$

en la que $h_n = 1$, $Y = 0,15$; $Y_0 = Y_C = 0,22$; $L = 0,06$ m; y $t = 14.400$ s. Al sustituir estos datos en la ecuación anterior se puede llegar a obtener la difusividad efectiva:

$$D_{\text{efect}} = 1,75 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$$

Para la segunda parte del problema, como el tipo de producto es el mismo, se puede utilizar el valor de la difusividad que se ha obtenido, y la misma expresión dada anteriormente. Sin embargo, debe tenerse presente que el secado es por las dos caras de la lámina, con lo que el espesor deberá ser la mitad del valor de la misma, es decir, $L = 0,04$ m. Al operar con el nuevo espesor y el valor de la difusividad efectiva obtenido anteriormente se obtiene un tiempo de secado de 6.419 s, o 1,78 h.

Problema 18.4

Un producto alimentario se obtiene en forma de partículas esféricas de 15 mm de diámetro, con un contenido en humedad de 1,5 kg de agua/kg sólido seco. El contenido de humedad de equilibrio es 0,01 kg agua/kg sólido seco. Para rebajar la humedad de este producto hasta 0,2 kg agua/kg sólido seco, se coloca en un secadero sobre una malla porosa, formando un lecho de 5 cm de profundidad. La densidad aparente del lecho es 560 kg/m³, mientras que los sólidos secos poseen una densidad de 1.400 kg/m³. A través del lecho de partículas se hace circular aire a una velocidad de 0,8 m/s. El aire a la entrada está a 120 °C y posee una humedad de 0,05 kg agua/kg aire seco. Si la humedad crítica es 0,5 kg agua/kg sólidos seco, calcular el tiempo total de secado.

Contenido de humedad libre:

- Inicial: $Y_1 = 1,5 - 0,01 = 1,59$ kg agua/kg sólido seco
- Final: $Y = 0,02 - 0,01 = 0,01$ kg agua/kg sólido seco
- Crítica: $Y_C = 0,5 - 0,01 = 0,49$ kg agua/kg sólido seco

Condiciones del aire a la entrada (a partir de la carta psicrométrica):

$$\begin{array}{ll} T_1 = 120 \text{ °C} & X_1 = 0,05 \text{ kg agua/kg aire seco} \\ T_w = 49 \text{ °C} & X_w = 0,083 \text{ kg agua/kg aire seco} \quad \lambda_w = 2.382 \text{ kJ/kg} \end{array}$$

Volumen de aire húmedo (ecuación 6.8):

$$V_H = \left(\frac{1}{28,9} + \frac{X}{18} \right) \frac{RT}{P} = \left(\frac{1}{28,9} + \frac{0,05}{18} \right) \frac{(0,082)(273 + 120)}{1} =$$

$$= 1,205 \text{ m}^3/\text{kg aire seco}$$

Densidad del aire húmedo que entra:

$$\rho = \frac{(1 + 0,05)}{1,205} \frac{\text{kg/kg aire seco}}{\text{m}^3/\text{kg aire seco}} = 0,872 \frac{\text{kg aire seco} + \text{kg agua}}{\text{m}^3}$$

La densidad de flujo es:

$$G = v \rho = \left(0,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \left(0,872 \frac{\text{kg aire seco} + \text{agua}}{\text{m}^3} \frac{1 \text{ kg aire seco}}{1,05 \text{ kg aire seco} + \text{agua}} \right)$$

$$G = 0,6644 \frac{\text{kg aire seco}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} = 2,393 \frac{\text{kg aire seco}}{\text{h} \cdot \text{m}^2}$$

El aire que circula a través del lecho va ganando agua y a la salida este contenido es superior al de la entrada. Se estima un valor medio de la humedad, que puede ser 0,07 kg agua/kg aire seco, por lo que la densidad de flujo másica media para el aire será:

$$G_t = G (1 + 0,07) = 2,559 \frac{\text{kg aire seco} + \text{agua}}{\text{h} \cdot \text{m}^2}$$

Asimismo, el calor húmedo se calcula con esta humedad media supuesta:

$$\hat{s} = 1 + (1,92)(0,07) = 1,1344 \text{ kJ}/(\text{kg aire seco} \cdot ^\circ\text{C})$$

Debe calcularse la fracción de huecos, a partir de las densidades de las partículas y de la aparente del lecho:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\rho_a}{\rho_s} = 1 - \frac{560}{1.400} = 1 - 0,4 = 0,6$$

La superficie específica del lecho se calcula mediante la ecuación 18.40:

$$a = 6 \frac{(1 - 0,6)}{0,015} = 160 \frac{\text{m}^2}{\text{m}^3}$$

Para estimar la viscosidad del aire se supone una temperatura media de 93 °C, lo que supone un valor $\eta = 2,15 \cdot 10^{-5}$ Pa.

El módulo de Reynolds será:

$$(\text{Re}) = \frac{G_t D_p}{\eta} = \frac{\left(\frac{2.559}{3.600} \frac{\text{kg}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \right) (0,015 \text{ m})}{2,15 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}} = 496$$

El coeficiente de transmisión de calor por convección se calcula a partir de la ecuación 18.49:

$$h = 0,151 \frac{(2.559)^{0,59}}{(0,015)^{0,41}} = 86,6 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$$

El tiempo de secado se obtiene a partir de las ecuaciones 18.47 y 18.48:

- Período constante: $t_C = 1,44$ horas
- Período decreciente: $t_D = 0,66$ horas

Con lo que el tiempo total de secado será: $t = 2,1$ horas.

Problema 18.5

Una lámina de carne de ternera de 2 cm de espesor se seca mediante un proceso de liofilización. Inicialmente el producto contiene una humedad del 75%, y se desea secarlo hasta que posea únicamente un 5% de humedad. La densidad inicial de la ternera es $1.050 \text{ kg}/\text{m}^3$. Si la presión de sublimación se mantiene a $260 \mu\text{mHg}$ y en el condensador se mantiene una presión de $100 \mu\text{mHg}$, calcular el tiempo de secado. Suponer que $K_p = 0,75 \cdot 10^{-9} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s} \cdot \mu\text{mHg})$.

Según los datos del problema:

$$\begin{aligned} a &= 0,01 \text{ m} & P_0 &= P_0^* \\ Y_0 &= 0,75/0,25 = 3 & Y_f &= 0,05/0,95 = 0,0526 \end{aligned}$$

Utilizando la ecuación 18.93:

$$t_S = \rho \frac{(Y_0 - Y_f)}{2 K_p (1 + Y_0)} \frac{a^2}{(P_S^* - P_0)} = 1.050 \frac{(3 - 0,0526)}{2 (0,75 \cdot 10^{-9}) (1 + 3)} \frac{(0,01)^2}{(260 - 100)}$$

Por lo que el tiempo de secado será:

$$t_S = 322.372 \text{ s} = 89,55 \text{ horas.}$$

19.1. Introducción

La evaporación es una operación unitaria que consiste en la eliminación de agua de un alimento fluido mediante vaporización o ebullición. Son varios los alimentos que se obtienen en forma de soluciones acuosas, y que para facilitar su conservación y transporte se concentran en una etapa de eliminación de agua. Esta eliminación puede realizarse de diferentes formas, aunque es la evaporación uno de los métodos más utilizados. Los dispositivos para realizar esta eliminación de agua se denominan evaporadores.

Un evaporador consta, esencialmente, de dos cámaras, una de condensación y otra de evaporación. En la de condensación un vapor de agua se transforma en líquido, con lo que cede su calor latente de condensación, el cual es captado en la cámara de evaporación por el alimento, del que se desea eliminar el agua. El agua evaporada abandona la cámara de evaporación a la temperatura de ebullición, al mismo tiempo que se obtiene una corriente de solución concentrada.

En la figura 19.1 se muestra un esquema de un evaporador. El caudal de vapor vivo de agua es w_V , mientras que w_A es el del alimento, obteniéndose una corriente de vapor V y una de concentrado w_C . El vapor desprendido V se lleva a un condensador donde condensa. Es importante resaltar que muchas soluciones alimentarias son termolábiles, y pueden quedar afectadas si son expuestas a una temperatura demasiado elevada. Es por ello que en muchos casos es conveniente operar a vacío en la cámara de evaporación, lo que hace que la temperatura de ebullición de la solución acuosa sea menor, y el fluido se vea afectado por el calor en menor grado. Si se opera a vacío, es necesario disponer de un dispositivo que lo realice. Asimismo, será necesario que, en el condensador utilizado en la condensación del vapor desprendido en la cámara de evaporación, se disponga de una columna barométrica que compense la diferencia de presiones con el exterior.

Se define la **capacidad** del evaporador (V) como la cantidad de agua evaporada del alimento por unidad de tiempo. El **consumo** (w_V) es la cantidad de vapor de calefacción consumida por unidad de tiempo. La **economía** (E) es la cantidad de disolvente evaporado por unidad de vapor de calefacción:

$$E = \frac{\text{Capacidad}}{\text{Consumo}} = \frac{V}{w_V} \quad [19.1]$$

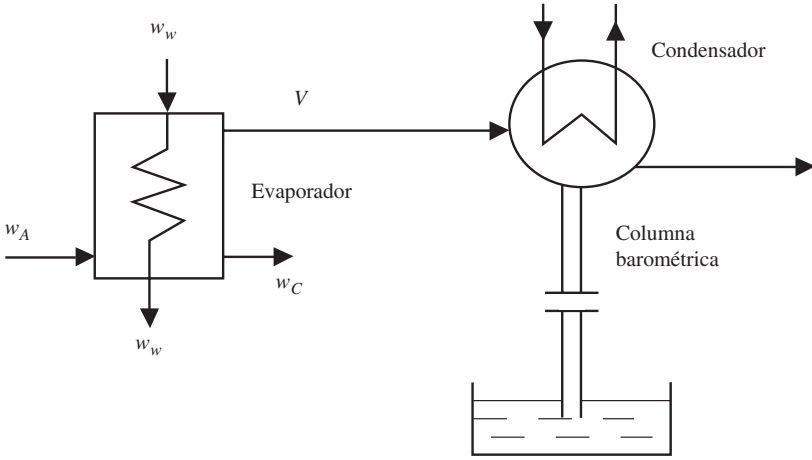


Figura 19.1. Esquema de la instalación de un evaporador.

19.2. Transmisión de calor en los evaporadores

En la figura 19.2 se halla esquematizado un evaporador simple, en éste se incluyen las diferentes variables de cada una de las corrientes. En la cámara de condensación se alimenta una corriente de vapor saturado w_v , que posee una temperatura T , siendo \hat{H}_{wi} su entalpía. El vapor condensa, y el único calor que cede es el de condensación, por lo que de esta cámara sale una corriente w_v de agua líquida a la temperatura de condensación T , siendo su entalpía \hat{h}_w , que se corresponde a la de agua a su punto de ebullición. El calor de condensación es transferido a través del área de intercambio del evaporador, y es captado por la corriente del alimento en la cámara de evaporación.

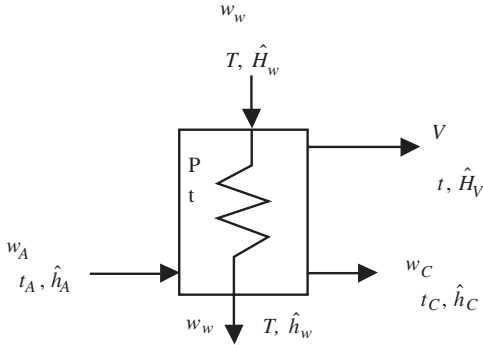


Figura 19.2. Evaporador simple.

En la cámara de evaporación se alimenta una corriente w_A , que se halla a una temperatura t_A , siendo su entalpía \hat{h}_A . Debido al calor que cede el vapor condensado (\dot{Q}), se obtiene una corriente concentrada w_C , cuya temperatura es t_C y \hat{h}_C es su entalpía. Además, se obtiene una corriente de vapor V , a una temperatura t_V y cuya entalpía es \hat{H}_V . Es importante resaltar que las temperaturas de las corrientes de concentrado y de vapor que abandonan la cámara de evaporación son iguales, y se corresponden a la temperatura de ebullición de la disolución concentrada que abandona esta cámara.

Los balances energéticos que deben realizarse son:

$$\bullet \text{ Cámara de condensación: } w_V \hat{H}_w = w_V \hat{h}_w + \dot{Q} \quad [19.2]$$

$$\bullet \text{ Cámara de evaporación: } w_A \hat{h}_A + \dot{Q} = w_C \hat{h}_C + V \hat{H}_V \quad [19.3]$$

$$\bullet \text{ Área de intercambio: } \dot{Q} = U A \Delta T = U A (T - t) \quad [19.4]$$

en la que U es el coeficiente global de transmisión de calor y A el área del evaporador.

19.2.1. Entalpías de vapores y líquidos

Por nomenclatura, las entalpías por unidad de masa de las corrientes de vapor se designarán por \hat{H} , mientras que las de líquido por \hat{h} .

La entalpía por unidad de masa de un vapor que se encuentra a una temperatura T se puede expresar como el sumatorio de la correspondiente a la entalpía de saturación \hat{H}_{SAT} más la integral entre la temperatura de ebullición T_e y la que posee T , de su calor específico por dT :

$$\hat{H} = \hat{H}_{SAT} + \int_{T_e}^T \hat{C}_p)_V dT \quad [19.5]$$

La entalpía \hat{H}_{SAT} es la entalpía que posee el vapor a su temperatura de condensación. El calor específico del vapor de agua $\hat{C}_p)_V$ depende de la presión, aunque su valor es cercano a 2,1 kJ/(kg·°C).

Como la entalpía es una función de estado, la correspondiente a un líquido se debe expresar en función de una temperatura de referencia. Si esta temperatura es t^* , y el líquido se encuentra a una temperatura t , se obtiene:

$$\hat{h} = \int_{t^*}^t \hat{C}_p dT = \hat{C}_p (t - t^*) \quad [19.6]$$

En la bibliografía se encuentran tablas que permiten el cálculo de estas entalpías. Generalmente, la temperatura de referencia es la de congelación del agua (0 °C).

La entalpía del líquido a su temperatura de ebullición se denomina \hat{h}_{SAT} , el calor latente de condensación o evaporación (λ) será la diferencia entre las entalpías de saturación del vapor y del líquido, ya que las temperaturas de evaporación y condensación coinciden.

$$\lambda = \hat{H}_{SAT} - \hat{h}_{SAT} \quad [19.7]$$

Los valores de las entalpías de vapor y líquido saturados se pueden obtener a partir de las tablas de vapor saturado de agua, siendo inmediato el cálculo del calor latente de condensación. Sin embargo, este valor puede obtenerse de forma aproximada a partir de la ecuación de Regnault:

$$\lambda = 2.538 - 2,91 T \quad \text{kJ/kg} \quad [19.8]$$

en la que T se expresa en °C.

Las entalpías de las corrientes líquidas, del alimento (\hat{h}_A) y del concentrado (\hat{h}_C), que aparecen en la ecuación 19.3 se expresarán:

$$\hat{h}_A = \int_{t^*}^{t_A} \hat{C}_P)_A dT = \hat{C}_P)_A (t_A - t^*) \quad [19.9]$$

$$\hat{h}_C = \int_{t^*}^{t_C} \hat{C}_P)_C dT = \hat{C}_P)_C (t_C - t^*) \quad [19.10]$$

La entalpía del vapor que aparece en la ecuación 19.3, será distinta si la solución que se concentra presenta o no aumento ebulloscópico. En el caso de que no exista aumento en el punto de ebullición de la solución concentrada, la entalpía del vapor será la del líquido saturado más el calor latente:

$$\hat{H}_{V_{SAT}} = \hat{C}_P (t_e - t^*) + \lambda \quad [19.11]$$

en la t_e que es la temperatura de ebullición de la solución.

Para el caso de que exista aumento ebulloscópico, la temperatura de ebullición de la solución (t) será superior a la del agua pura (t_e), por lo que la entalpía del vapor será:

$$\hat{H}_V = \hat{C}_P (t_e - t^*) + \lambda + \hat{C}_P)_V (t - t_e) \quad [19.12]$$

Para facilitar los cálculos, la temperatura de referencia que suele elegirse es la de ebullición del agua pura, es decir: $t^* = t_e$ lo que hace que para el caso que no exista aumento ebulloscópico, la entalpía del vapor que abandona la cámara de evaporación coincida con el calor latente de condensación. Asimismo, la entalpía de la corriente de concentrado se anulará, ya que $t_C = t_e = t$.

19.2.2. Aumento ebulloscópico

El agua hierve a una temperatura determinada, siempre que la presión permanezca constante. Si la presión varía, la temperatura de ebullición también. Para soluciones acuosas, la temperatura de ebullición ya no sólo depende de la presión, sino también de la cantidad de soluto que contienen. De tal forma que la presencia del soluto hace que la temperatura de ebullición aumente. La determinación del aumento ebulloscópico que presentan las soluciones alimentarias es de suma importancia en el cálculo de evaporadores, por ello se darán a continuación expresiones y modos de calcularlo.

Para soluciones diluidas, que cumplan la ley de Raoult, el aumento ebulloscópico puede calcularse mediante la expresión:

$$\Delta T_e = \frac{1.000 K_e X}{M_S} \quad [19.13]$$

en la que M_S es la masa molecular del soluto, X es la relación kg soluto/kg disolvente, y K_e es la denominada constante ebulloscópica del disolvente.

Para soluciones acuosas se puede utilizar la ecuación:

$$\Delta T_e = K_e \cdot C \quad [19.14]$$

en la que C es la concentración molar de soluto y K_e es una constante ebulloscópica, cuyo valor es 0,512 °C·kg agua/mol.

Una expresión general que permite el cálculo del aumento ebulloscópico, considerando solución ideal, es la ecuación:

$$\Delta T_e = \frac{-t_e}{1 + \frac{\lambda}{R t_e \ln X_W}} \quad [19.15]$$

Si las soluciones son diluidas se puede utilizar la ecuación:

$$\Delta T_e = \frac{R t_e^2}{\lambda} (1 - X_W) \quad [19.16]$$

En estas dos últimas ecuaciones X_W es la fracción másica de agua, λ el calor latente de evaporación, R la constante de gases y t_e la temperatura de ebullición del agua pura.

Para soluciones reales, el aumento ebulloscópico puede calcularse mediante la regla empírica de Dühring, que establece que la temperatura de ebullición de la solución es función lineal de la temperatura de ebullición del disolvente puro a la misma presión. Para una concentración de soluto determinada, al representar gráficamente las temperaturas de ebullición de la solución frente a las correspondientes al disolvente puro se obtienen rectas. En las figuras 19.3 y 19.4 se representan las gráficas de Dühring para dos sistemas acuosos.

Para el caso de soluciones azucaradas, existen correlaciones empíricas que permiten obtener el incremento ebulloscópico de las soluciones. Así, una de estas expresiones es (Crapiste y Lozano, 1988):

$$\Delta T_e = \alpha C^\beta P^\delta \exp(\gamma C) \quad [19.17]$$

en la que C es la concentración de la disolución expresada en °Brix, P es la presión en mbar, y α , β , δ y γ son constantes empíricas, cuyos valores dependen del soluto. En la tabla 19.1 se dan valores de estos parámetros para soluciones de sacarosa, de azúcares reductores y zumos de frutas.

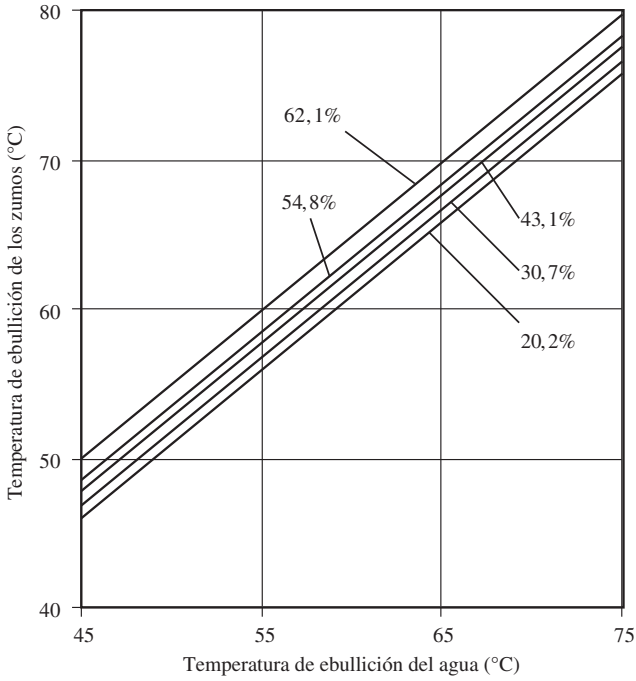


Figura 19.3. Gráfica de Dühring para zumos de tamarindo (adaptada de Manohar *et al.*, 1991).

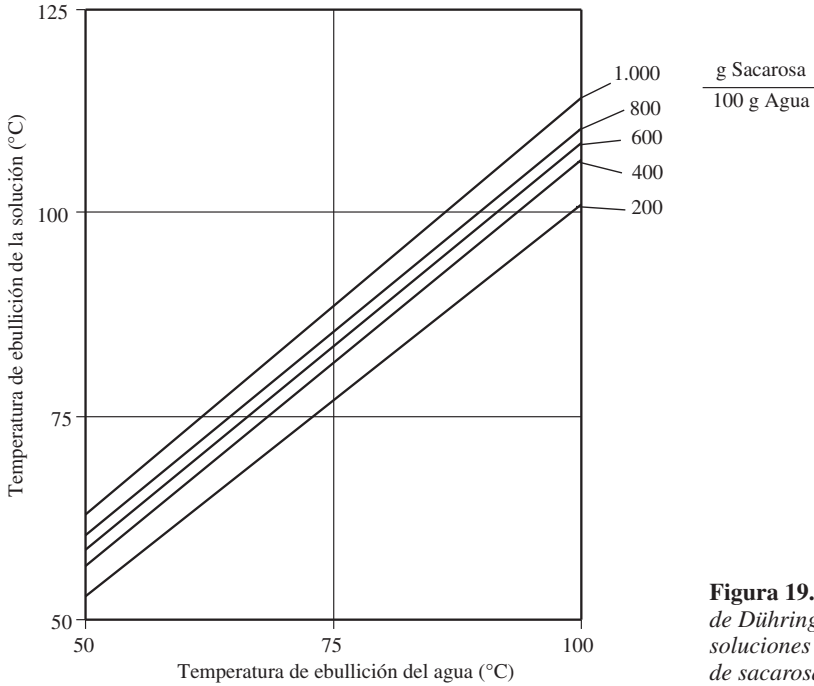


Figura 19.4. Gráfica de Dühring para soluciones acuosas de sacarosa.

Tabla 19.1. Parámetros α , β , δ y γ de la ecuación 19.17

Muestra	$\alpha \cdot 10^2$	β	δ	$\gamma \cdot 10^2$
Sacarosa	3,061	0,094	0,136	5,328
Azúcares reductores	2,227	0,588	0,119	3,593
Zumos	1,360	0,749	0,106	3,390

Fuente: Crapiste y Lozano (1988).

Esta ecuación ha sido modificada para zumos, añadiendo un nuevo término a la parte exponencial, de modo que la expresión final es (Ilangantileke *et al.*, 1991):

$$\Delta T_e = 0,04904 C^{0,029} P^{0,113} \exp(-0,03889 C + 6,52 \cdot 10^{-4} C^2) \quad [19.18]$$

19.2.3. Coeficientes de transmisión de calor

El cálculo del coeficiente global de transmisión de calor se obtiene a partir de la expresión:

$$\frac{1}{UA} = \frac{1}{h_C A'} + \frac{e_p}{k_p A_m} + \frac{1}{h_e A''} \quad [19.19]$$

en la que h_C es el coeficiente individual de transferencia de calor por convección para el vapor que condensa, mientras que h_e es el correspondiente a la solución que hierve. Los parámetros e_p y k_p son el espesor del sólido a través del cual se realiza la transmisión de calor y su conductividad térmica, respectivamente. En este tipo de operaciones se supone que las áreas son las mismas, con lo que la expresión se simplifica:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_C} + \frac{e_p}{k_p} + \frac{1}{h_e} \quad [19.20]$$

En el caso que hubiera deposiciones en la superficie de transmisión de calor sería necesario tener en cuenta la resistencia ofrecida por las mismas (R_D). Por lo que el coeficiente global real U_D sería:

$$\frac{1}{U_D} = \frac{1}{U} + R_D \quad [19.21]$$

A pesar de que el cálculo del coeficiente global teórico debe realizarse mediante la ecuación 19.20, en la bibliografía existen valores para este coeficiente, dependiendo del tipo de evaporador. En la tabla 19.2 se dan valores típicos para este coeficiente.

Tabla 19.2. Coeficientes globales de transmisión de calor para diferentes tipos de evaporadores

Evaporador	U (W/m ² ·°C)
Tubos largos verticales	
• Circulación natural	1.000-3.500
• Circulación forzada	2.300-12.000
Tubos cortos	
• Tubos horizontales	1.000-2.300
• Tipo calandria	800-3.000
De serpentín	1.000-2.300
Película agitada (líquidos newtonianos)	
Viscosidad 1 mPa·s	2.300
100 mPa·s	1.800
10 ⁴ mPa·s	700

Fuente: McCabe y Smith (1968).

19.3. Evaporador de simple efecto

En la figura 19.5 se halla esquematizado un evaporador de simple efecto con todas las corrientes y las diferentes variables. Para realizar el cálculo en este tipo de evaporadores deben realizarse balances másicos y energéticos.

- **Balances másicos:** Se realiza un balance global y otro de componente.

$$w_A = w_C + V \quad [19.22]$$

$$w_A X_A = w_C X_C \quad [19.23]$$

en la que X_A y X_C son las fracciones másicas de soluto en la corriente de alimento y la concentrada, respectivamente.

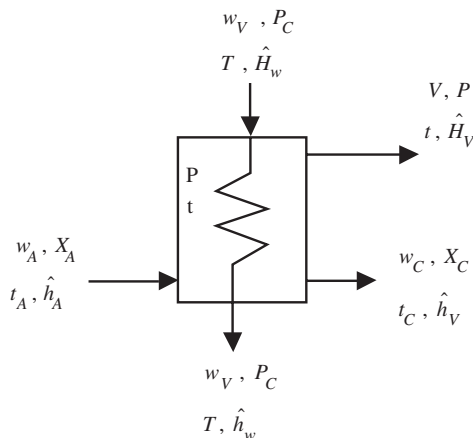


Figura 19.5. Evaporador de simple efecto.

- **Balances energéticos:** Se realizan los balances en las cámaras de condensación y evaporación, además de la ecuación de velocidad de transmisión de calor a través del área de intercambio.

Estos balances son los mismos que se han realizado anteriormente, y se dan en las ecuaciones 19.2, 19.3 y 19.4. Si se tienen en cuenta las expresiones de las entalpías de líquido y vapor dadas en el apartado 19.2.1 se tiene:

Cámara de condensación:

$$w_V (\hat{H}_W - \hat{h}_W) = w_V \lambda_W = \dot{Q} \quad [19.24]$$

Cámara de evaporación:

$$w_A \hat{C}_P)_A (t_A - t_e) + \dot{Q} = w_C \hat{C}_P)_C (t_C - t_e) + V [\lambda_V + \hat{C}_P)_V (t - t_e)] \quad [19.25]$$

Área de intercambio:

$$\dot{Q} = U A \Delta T = U A (T - t) \quad [19.4]$$

Teniendo en cuenta que $t_C = t$, es decir, las temperaturas de las corrientes que abandonan la cámara de evaporación son iguales, y que el incremento ebulloscópico de la solución es $\Delta T_e = t - t_e$. Al combinar las ecuaciones 19.24 y 19.25 se obtiene:

$$w_V \lambda_W = w_C \hat{C}_P)_C \Delta T_e + V [\lambda_V + \hat{C}_P)_V \Delta t_e] - w_A \hat{C}_P)_A (t_A - t_e) \quad [19.26]$$

En el caso que no exista aumento ebulloscópico ($\Delta T_e = 0$), la ecuación anterior se simplifica:

$$w_V \lambda_W = V \lambda_V - w_A \hat{C}_P)_A (t_A - t_e) \quad [19.27]$$

19.4. Aprovechamiento del vapor desprendido

El vapor desprendido en la cámara de evaporación contiene una energía que es posible aprovechar para otros fines industriales. Este vapor posee una temperatura inferior a la del vapor vivo, por contra su calor latente de condensación es mayor. Por ello, es de sumo interés poder aprovechar este calor latente. Existen diferentes métodos de aprovechamiento de esta energía, entre los que cabe citar: recompresión del vapor, bomba térmica y efecto múltiple. En este apartado se estudiarán los dos primeros de forma somera, mientras que en el siguiente apartado se estudiará con más detalle el efecto múltiple.

19.4.1. Recompresión del vapor desprendido

Una de las formas de aprovechar la energía que contiene el vapor desprendido es comprimirlo y utilizarlo como vapor de calefacción. En la práctica existen dos métodos de compresión de este vapor, como son la compresión mecánica y la térmica.

a) Compresión mecánica

Este tipo de operación consiste en comprimir el vapor desprendido en la cámara de evaporación mediante un compresor mecánico. Este vapor que abandona la cámara de evaporación a una temperatura t_1 y una presión P_1 , es comprimido hasta la presión P_2 , que corresponde a la del vapor vivo que se utiliza en la cámara de condensación (figura 19.6). En el diagrama de Mollier entalpía-entropía para vapor de agua (figura 19.7), las condiciones del vapor desprendido pueden representarse mediante el punto 1. La compresión mecánica, generalmente, es un proceso isentrópico, por lo que se sigue una recta perpendicular hasta alcanzar la isobara de presión P_2 . Las condiciones de este vapor pueden hallarse en el diagrama de Mollier, obteniéndose que la temperatura de salida del compresor es t_2 , su presión P_2 y su entalpía \hat{H}_2 . Puede observarse que el vapor obtenido después de la compresión es un vapor recalentado, por lo que antes de unirlo al vapor saturado proveniente de la caldera, se rebaja su temperatura haciendo recircular una corriente w_R . De este modo se logra que en la cámara de condensación se alimente un vapor que se halla saturado.

Tal como puede observarse en la figura 19.6, en este tipo de operación, los balances en la cámara de evaporación no se ven afectados. Sin embargo, deben realizarse unos balances adicionales en la cámara de condensación.

- Balances másicos y energéticos:

$$w_V = V + w_R + w_V^* \tag{19.28}$$

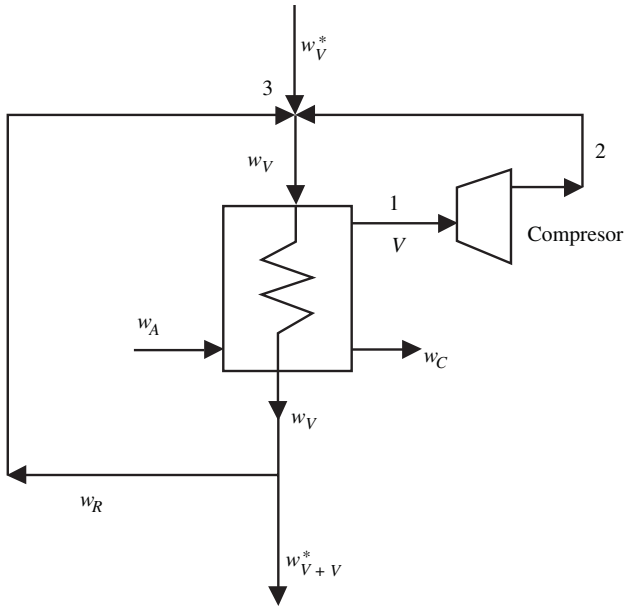


Figura 19.6. Evaporador simple con compresión mecánica del vapor desprendido.

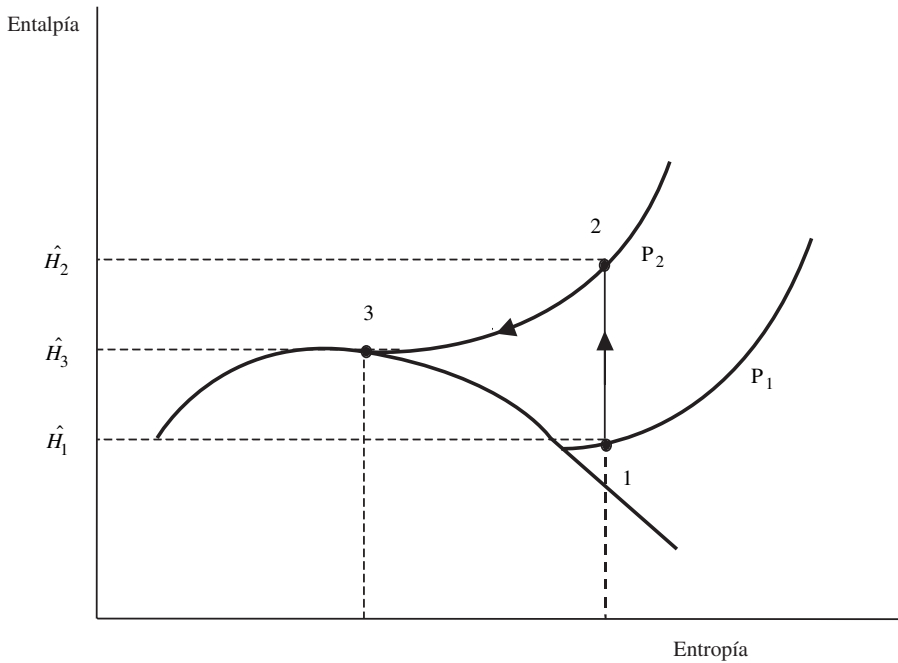


Figura 19.7. Evolución del vapor desprendido en la compresión mecánica.

$$w_V \hat{H}_W = V \hat{H}_1 + w_R \hat{h}_W + w_V^* \hat{H}_W \quad [19.29]$$

$$\dot{Q} = w_V \lambda_W \quad [19.30]$$

El cálculo del evaporador es análogo al descrito en el efecto simple, aunque en este caso deben tenerse presentes estos balances adicionales.

b) Compresión térmica

Otra forma de aprovechar la energía del vapor desprendido es utilizar un eyector, que arrastra parte de este vapor y se une al vapor vivo de caldera. En la figura 19.8 se representa un esquema del sistema evaporador-eyector. El eyector es un dispositivo que funciona por efecto Venturi, de tal forma que un chorro de vapor vivo arrastra parte del vapor desprendido en la cámara de evaporación. El vapor que entra a la cámara de condensación es saturado, aunque su presión es intermedia entre el vapor vivo y el desprendido. Si se alimenta el eyector con un caudal w_V^* de vapor vivo de presión P_W y entalpía \hat{H}^* , este vapor arrastra una fracción a del vapor V , que se halla a una presión P_I , una temperatura t_I y posee una entalpía \hat{H}_I . El vapor que sale del eyector poseerá una presión P_C y una entalpía \hat{H}_W , con un caudal w_V . Al igual que en la compresión mecánica, los balances de la cámara de eva-

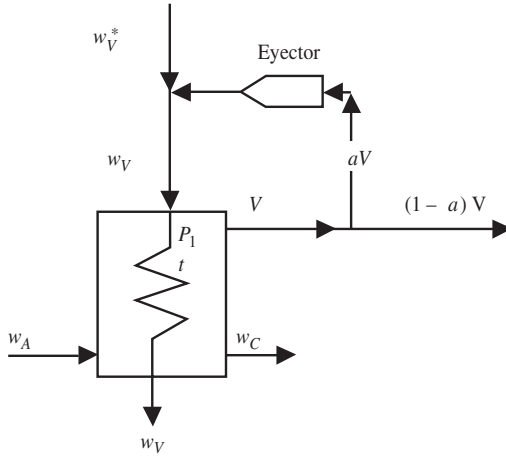


Figura 19.8. Evaporador simple con compresión térmica del vapor desprendido.

poración y condensación son inalterables. Sin embargo, deben realizarse nuevos balances en el eyector.

Balances en el eyector

$$w_V^* + a V = w_V \tag{19.31}$$

$$w_V^* \hat{H}^* + a V \hat{H}_1 = w_V \hat{H}_W \tag{19.32}$$

También existe una ecuación empírica que correlaciona las distintas variables, y que permite los cálculos de este tipo de compresión. Así, la expresión a utilizar es (Vián y Ocón, 1967):

$$\frac{a V}{w_V^*} + 1 = R \frac{\log \left(\frac{P_W}{P_1} \right)}{\log \left(\frac{P_C}{P_1} \right)} \tag{19.33}$$

en la que *R* es el rendimiento térmico del eyector.

19.4.2. Bomba térmica

En productos termolábiles, en los que una temperatura elevada puede afectar al producto, se suele utilizar la denominada bomba térmica. Con este dispositivo se logran temperaturas de ebullición bajas, lo que hace que el producto no se vea afectado excesivamente. En la figura 19.9 se da un esquema de esta instalación, mientras que en la figura 19.10 se representa el diagrama temperatura-entropía para el fluido calefactor.

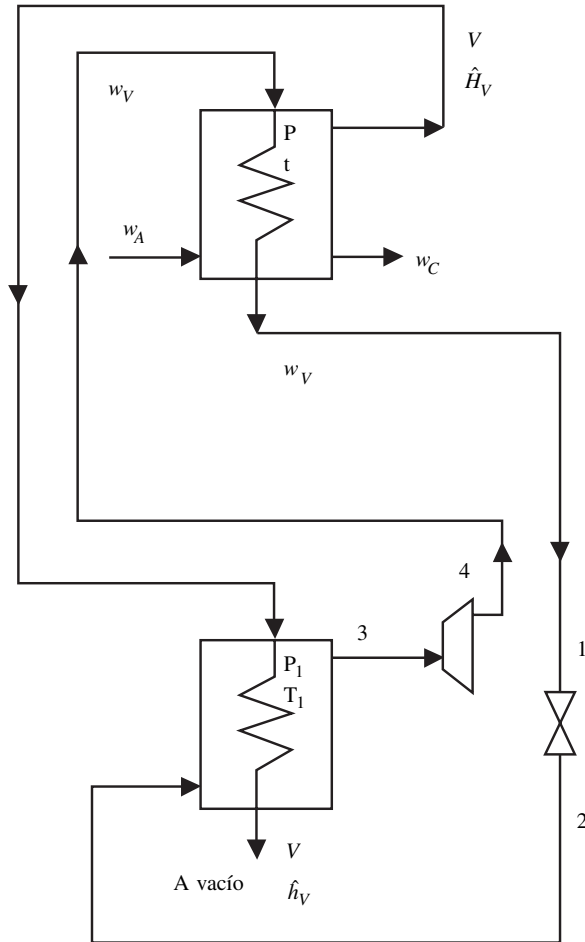


Figura 19.9. Instalación de bomba térmica.

En esta instalación se dispone de dos evaporadores. En el primero se alimenta la cámara de evaporación con el fluido que se desea concentrar, obteniéndose un vapor V que se utiliza como fluido calefactor del segundo evaporador. En la cámara de condensación del primer evaporador se alimenta un vapor, que puede ser NH_3 , que condensa. Este líquido sale de la cámara de condensación (punto 1), y se expande en una válvula (punto 2). Este líquido sirve de alimento a la cámara de evaporación del otro evaporador, obteniéndose una corriente de vapor (punto 3) que se alimenta a un compresor mecánico, al objeto de elevar su presión, y obtener un vapor más energético (punto 4). Este vapor sirve de vapor de calefacción del primer evaporador. Debe resaltarse que el circuito que describe el vapor calefactor es cerrado.

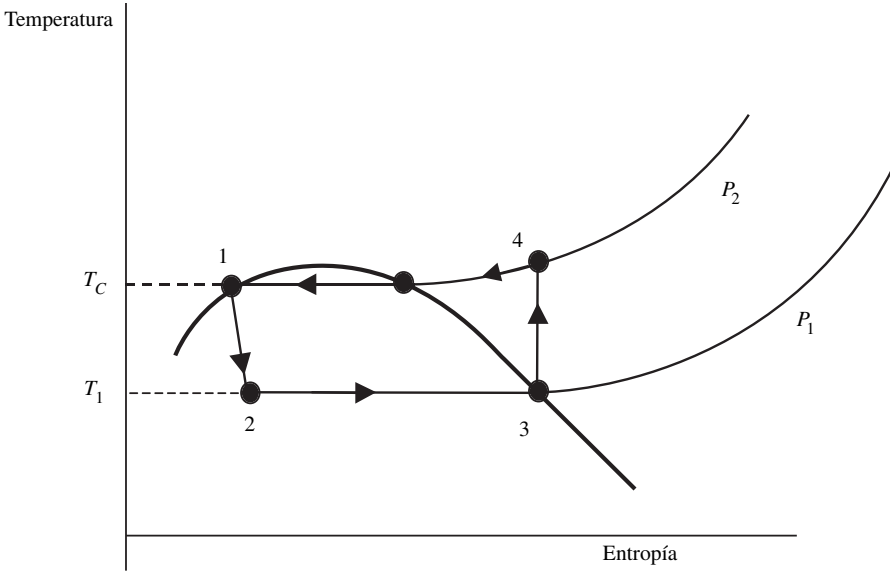


Figura 19.10. Evolución del fluido calefactor en el diagrama temperatura-entropía para la bomba térmica.

Este tipo de instalaciones suelen utilizarse en la concentración de algunos tipos de zumos, como por ejemplo de naranja, que suelen quedar afectados con las altas temperaturas.

19.4.3. Múltiple efecto

Una de las formas más usuales de aprovechamiento del vapor desprendido en la cámara de evaporación, es utilizarlo como fluido calefactor de otro evaporador. En la figura 19.11 se halla esquematizado un sistema de evaporación de tres efectos. Puede observarse que el vapor desprendido en el primer evaporador sirve de fluido calefactor del segundo, mientras que el vapor desprendido en este efecto, sirve de calefactor para el tercero. Finalmente el desprendido en el último efecto se lleva al condensador.

Por nomenclatura, las distintas corrientes llevarán los subíndices correspondientes del efecto que abandonan. Es conveniente resaltar que el vapor desprendido en los diferentes efectos es cada vez de menor temperatura y menor presión; es decir:

$$T > t_1 > t_{e1} > t_2 > t_{e2} > t_3 > t_{e3}$$

$$P_C > P_1 > P_2 > P_3$$

siendo t_1, t_2 y t_3 las temperaturas de ebullición de las soluciones que abandonan las cámaras de evaporación del primer, segundo y tercer efectos, respectivamente. Las temperaturas t_{e1}, t_{e2} y t_{e3} son las de ebullición del agua pura a las presiones P_1, P_2 y P_3 .

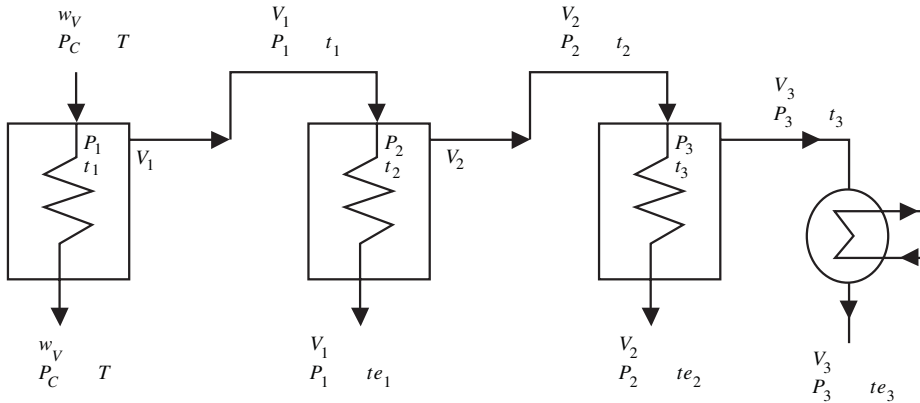


Figura 19.11. Esquema de aprovechamiento del vapor desprendido en un evaporador de tres efectos.

La cámara de evaporación del primer efecto se halla a una presión P_1 y una temperatura t_1 . El vapor que sale de este efecto V_1 lo hace en estas condiciones, y sirve de fluido calefactor del segundo efecto, donde se supone que llega saturado, es decir a su temperatura de ebullición t_{e1} . En la cámara de condensación de este segundo efecto la presión continúa siendo P_1 , mientras que la temperatura es t_{e1} . La cámara de evaporación del segundo efecto se halla a una presión P_2 y una temperatura t_2 , que son las mismas que las del vapor V_2 que abandona esta cámara. Este vapor condensa en la cámara de condensación del segundo efecto a una temperatura t_{e2} y una presión P_2 . La cámara de evaporación del tercer efecto se halla a una presión P_3 y una temperatura t_3 , poseyendo el vapor V_3 que abandona este efecto las mismas características. Este vapor se lleva a un condensador donde condensa a la temperatura de condensación t_{e3} , que se corresponde a la propia de la presión P_3 .

En el caso que no existiera aumento ebulloscópico de las soluciones que discurren a través del evaporador, las temperaturas de las cámaras de evaporación de un efecto y de condensación del siguiente coincidirían ($t_i = t_{ei}$).

Conviene resaltar que en este tipo de instalaciones, es necesario disponer de bombas de vacío para lograr las temperaturas adecuadas de las cámaras de cada efecto. Un estudio más detallado, que permite el cálculo de evaporadores de múltiple efecto se realiza en el siguiente apartado.

19.5. Evaporadores de múltiple efecto

De los diferentes casos de múltiple efecto que se pueden presentar en la práctica, únicamente se estudiará el caso de triple efecto, pero el tratamiento matemático en otros casos es análogo.

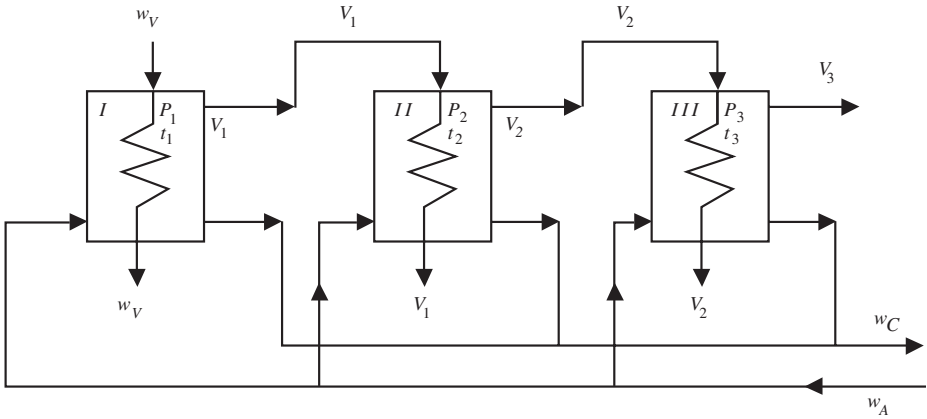
19.5.1. Sistemas de circulación de las corrientes

Tal como se ha comentado anteriormente, el vapor desprendido en la cámara de evaporación de un efecto sirve como fluido calefactor del siguiente. Sin embargo, dependiendo del sistema de circulación de las soluciones a concentrar se obtienen distintos sistemas de paso, que a continuación se explican.

a) Sistema en paralelo

El alimento se distribuye en distintas corrientes que sirven de alimento a cada uno de los efectos (figura 19.12.A), mientras que las corrientes de concentrado de cada efecto se recogen en una única corriente, que será la del concentrado final.

A) Sistema en paralelo



B) Sistema en corriente directa

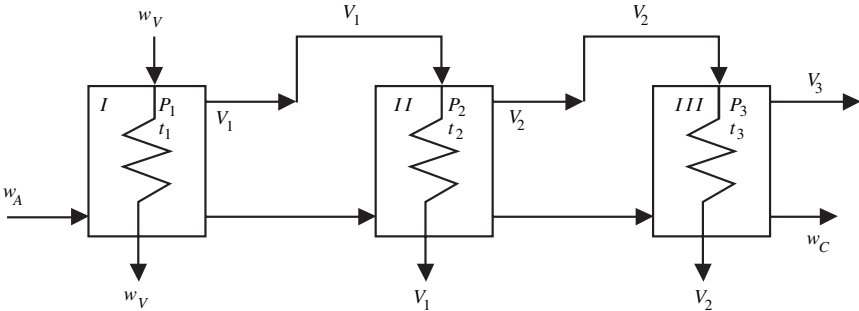


Figura 19.12. Sistemas de circulación de las corrientes fluidas para evaporadores de tres efectos.

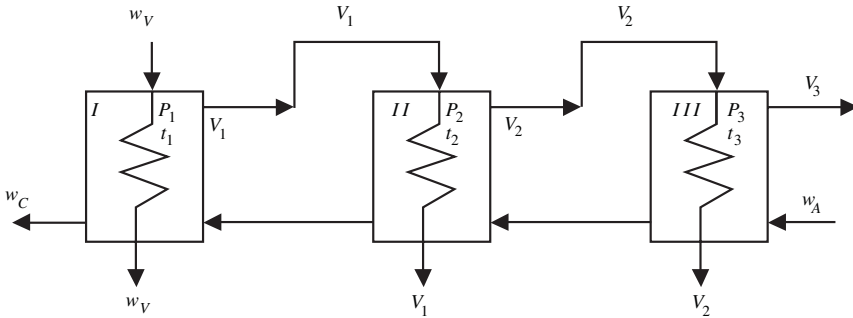
b) Sistema en corriente directa

La corriente diluida se alimenta al primer efecto, mientras que la concentrada que abandona cada efecto sirve como alimento del efecto siguiente (figura 19.12.B). Se puede observar que las corrientes de vapor y solución concentrada de cada efecto siguen sentidos paralelos. Este sistema de paso es uno de los más utilizados para soluciones en las que el calor las puede afectar, ya que la solución concentrada está en contacto con el vapor de menor temperatura.

c) Sistema en contracorriente

Como su nombre indica, el sentido de las soluciones a concentrar es en contracorriente con las de vapor (figura 19.12.C). La solución diluida se alimenta al último efecto, donde el vapor es de menor energía, mientras que las soluciones concentradas que abandonan cada efecto sirven de alimento al efecto anterior. Este

C) Sistema en contracorriente



D) Sistema en corriente mixta

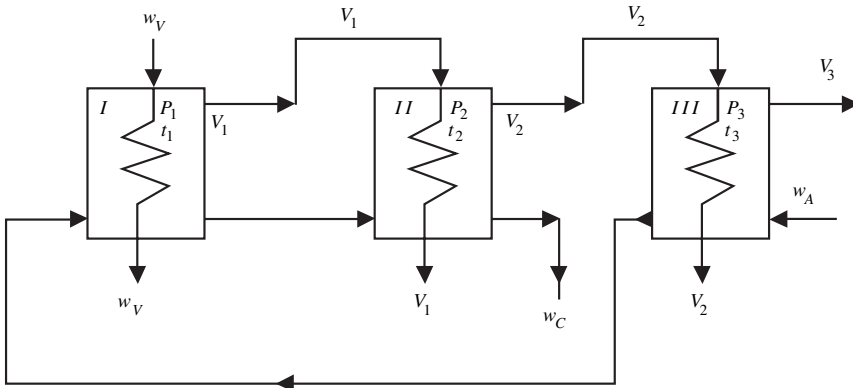


Figura 19.12 (continuación). Sistemas de circulación de las corrientes fluidas para evaporadores de tres efectos.

tipo de disposición debe utilizarse con cuidado en el caso de soluciones alimentarias, ya que la solución más concentrada recibe calor del vapor de mayor temperatura, y ello puede afectar al alimento.

d) Sistema en corriente mixta

En este tipo de disposición, la solución diluida puede alimentarse a cualquiera de los efectos, mientras que las concentradas pueden alimentarse a un efecto anterior o posterior. En la figura 19.12.D se muestra un sistema de paso mixto, en el que la solución diluida se alimenta al tercer efecto, mientras que la solución que abandona este efecto sirve de alimento al primero. La corriente que alimenta al segundo efecto es la solución concentrada que abandona el primer efecto, obteniéndose la solución concentrada final en este efecto.

19.5.2. Modelo matemático

De los diferentes casos que se pueden estudiar, sólo se realizará el estudio en un evaporador de tres efectos, cuyo sistema de paso es en contracorriente (figura 19.13). El modelo matemático que se plantea y su resolución sería análoga en cualquier otro tipo de circulación y número de efectos.

Para plantear el modelo matemático deben realizarse los balances máxicos globales y de componente, así como los entápicos y ecuaciones de velocidad de transferencia de calor a través del área de intercambio de cada efecto.

Las temperaturas de referencia, para el cálculo de las entalpías de las distintas corrientes, son las de ebullición del agua pura a la presión de la cámara de evaporación de cada efecto t_{ei} . El aumento ebulloscópico de cada efecto, es la diferencia entre la temperatura de ebullición de la solución que abandona la cá-

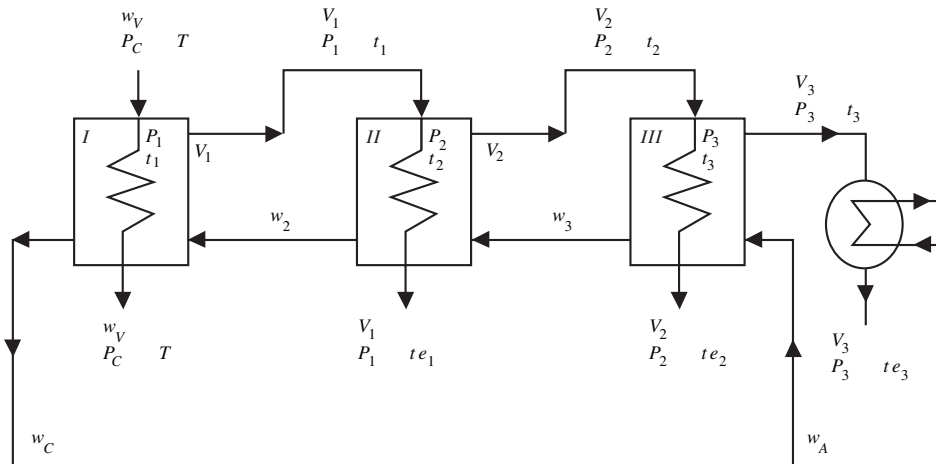


Figura 19.13. Evaporador de triple efecto en contracorriente.

mara de dicho efecto, y la de ebullición del agua pura a la presión de esta cámara $\Delta T_{ei} = t_i - t_{ei}$.

Por nomenclatura, las corrientes que abandonan un efecto poseerán el subíndice de ese efecto.

Balances máxicos

$$w_A = w_C + V_1 + V_2 + V_3 \quad [19.34]$$

$$w_A X_A = w_C X_C \quad [19.35]$$

$$w_2 = w_A - V_2 - V_3 \quad [19.36]$$

$$w_3 = w_A - V_3 \quad [19.37]$$

Balances entápicos

Los balances entápicos realizados para cada uno de los efectos conducen a las ecuaciones:

$$w_V \hat{H}_W + w_2 \hat{h}_2 = w_V \hat{h}_W + w_C \hat{h}_C + V_1 \hat{H}_{V1}$$

$$V_1 \hat{H}_{V1} + w_3 \hat{h}_3 = V_1 \hat{h}_{V1} + w_2 \hat{h}_2 + V_2 \hat{H}_{V2}$$

$$V_2 \hat{H}_{V2} + w_A \hat{h}_A = V_2 \hat{h}_{V2} + w_3 \hat{h}_3 + V_3 \hat{H}_{V3}$$

Al sustituir las expresiones de las entalpías de cada una de las corrientes, y reordenando se obtiene:

$$w_V (\hat{H}_W - \hat{h}_W) = w_C \hat{C}_P)_C (t_C - t_{e1}) + V_1 [\lambda_{V1} + \hat{C}_P)_V (t_1 - t_{e1})] - w_2 \hat{C}_P)_2 (t_2 - t_{e1}) \quad [19.38]$$

$$V_1 [\lambda_{V1} + \hat{C}_P)_V (t_1 - t_{e1})] = w_2 \hat{C}_P)_2 (t_2 - t_{e2}) + V_2 [\lambda_{V2} + \hat{C}_P)_V (t_2 - t_{e2})] - w_3 \hat{C}_P)_3 (t_3 - t_{e2}) \quad [19.39]$$

$$V_2 [\lambda_{V2} + \hat{C}_P)_V (t_2 - t_{e2})] = w_3 \hat{C}_P)_3 (t_3 - t_{e3}) + V_3 [\lambda_{V3} + \hat{C}_P)_V (t_3 - t_{e3})] - w_A \hat{C}_P)_A (t_A - t_{e3}) \quad [19.40]$$

Estas ecuaciones son generales, es decir, se supone que existe aumento ebulloscópico. Sin embargo, en el caso que no exista aumento ebulloscópico se simplifican bastante.

A pesar de que el vapor que abandona las cámaras de evaporación sea recalentado, se supone que cuando entra a la cámara de condensación del efecto siguiente lo hace como vapor saturado. Esto supone que las ecuaciones anteriores se simplifiquen:

$$w_V \lambda_W = w_C \hat{C}_P)_C (t_C - t_{e1}) + V_1 [\lambda_{V1} + \hat{C}_P)_V \Delta T_{e1}] - w_2 \hat{C}_P)_2 (t_2 - t_{e1}) \quad [19.41]$$

$$V_1 \lambda_{V1} = w_2 \hat{C}_P)_2 \Delta T_{e2} + V_2 [\lambda_{V2} + \hat{C}_P)_V \Delta T_{e2}] - w_3 \hat{C}_P)_3 (t_3 - t_{e2}) \quad [19.42]$$

$$V_2 \lambda_{V2} = w_3 \hat{C}_P)_3 \Delta T_{e3} + V_3 [\lambda_{V3} + \hat{C}_P)_V \Delta T_{e3}] - w_A \hat{C}_P)_A (t_A - t_{e3}) \quad [19.43]$$

Ecuaciones de velocidad

El calor transmitido a través del área de intercambio de cada efecto se obtiene a partir de las siguientes ecuaciones:

$$\dot{Q}_1 = w_V \lambda_W = U_1 A_1 (T - t_1) \quad [19.44]$$

$$\dot{Q}_2 = V_1 \lambda_{V1} = U_2 A_2 (t_{e1} - t_2) \quad [19.45]$$

$$\dot{Q}_3 = V_2 \lambda_{V2} = U_3 A_3 (t_{e2} - t_3) \quad [19.46]$$

Se supone que los vapores que entran a las cámaras de condensación son saturados, y que el único calor que ceden es el de condensación.

19.5.3. Resolución del modelo matemático

En los problemas de evaporadores, generalmente, los datos de que se disponen son el caudal de alimento a tratar, así como su composición y temperatura. Además, la composición del concentrado final también es conocida. Del vapor de caldera se conocen sus características, generalmente su presión, y como es vapor saturado, mediante las tablas de vapor de agua se obtiene su temperatura y calor latente. Del tercer efecto se suele conocer la presión de la cámara de evaporación, por lo que se saben también sus características. Mediante los diagramas de Dühring, o ecuaciones pertinentes, es posible obtener los aumentos ebulloscópicos, una vez que se conocen las composiciones de las corrientes que abandonan las cámaras de evaporación.

A partir de los balances másicos, entálpicos y ecuaciones de velocidad se obtiene un sistema de diez ecuaciones:

$$w_A = w_C + V_1 + V_2 + V_3 \quad [19.34]$$

$$w_A X_A = w_C X_C \quad [19.35]$$

$$w_2 = w_A - V_2 - V_3 \quad [19.36]$$

$$w_3 = w_A - V_3 \quad [19.37]$$

$$w_V \lambda_W = w_C \hat{C}_P)_C (t_C - t_{e1}) + V_1 [\lambda_{V1} + \hat{C}_P)_V \Delta T_{e1}] - w_2 \hat{C}_P)_2 (t_2 - t_{e1}) \quad [19.41]$$

$$V_1 \lambda_{V1} = w_2 \hat{C}_P)_2 \Delta T_{e2} + V_2 [\lambda_{V2} + \hat{C}_P)_V \Delta T_{e2}] - w_3 \hat{C}_P)_3 (t_3 - t_{e2}) \quad [19.42]$$

$$V_2 \lambda_{V2} = w_3 \hat{C}_P)_3 \Delta T_{e3} + V_3 [\lambda_{V3} + \hat{C}_P)_V \Delta T_{e3}] - w_A \hat{C}_P)_A (t_A - t_{e3}) \quad [19.43]$$

$$\dot{Q}_1 = w_V \lambda_W = U_1 A_1 (T - t_1) \quad [19.44]$$

$$\dot{Q}_2 = V_1 \lambda_{V1} = U_2 A_2 (t_{e1} - t_2) \quad [19.45]$$

$$\dot{Q}_3 = V_2 \lambda_{V2} = U_3 A_3 (t_{e2} - t_3) \quad [19.46]$$

Como el número de incógnitas es superior al de ecuaciones, existen infinitas soluciones. Para resolver el problema se supone que las áreas de cada uno de los efectos son iguales. Además, el calor transmitido a través de cada una de ellas es similar, y se puede considerar que es el mismo ($\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 = \dot{Q}_3$).

Como se cumple que $\dot{Q}_i/A_i = \text{cte}$, se tiene:

$$\frac{T - t_1}{\frac{1}{U_1}} = \frac{t_{e1} - t_2}{\frac{1}{U_2}} = \frac{t_{e2} - t_3}{\frac{1}{U_3}} \quad [19.47]$$

Por una de las propiedades de las razones, éstas serán iguales a la suma de numeradores partida por la suma de denominadores:

$$\frac{T - t_1}{\frac{1}{U_1}} = \frac{t_{e1} - t_2}{\frac{1}{U_2}} = \frac{t_{e2} - t_3}{\frac{1}{U_3}} = \frac{T - t_{e3} - \sum \Delta T_{ei}}{\sum \left(\frac{1}{U_i} \right)} \quad [19.48]$$

En la que ΔT_{ei} es el incremento ebulloscópico que experimenta la solución en el efecto i .

Estas suposiciones permiten resolver el sistema de ecuaciones planteado. Aunque en la resolución del modelo matemático obtenido en las diez ecuaciones anteriores deberá realizarse un proceso iterativo.

19.5.4. Procedimiento de cálculo

El procedimiento de cálculo de evaporadores necesita de un método iterativo, que en el caso de que no exista aumento ebulloscópico se simplifica.

a) Método iterativo cuando existe aumento ebulloscópico

Las etapas de cálculo se enumeran a continuación:

- 1) Se supone que los caudales de calor transferidos en cada etapa son los mismos. Asimismo, se supone que las áreas de intercambio de las diferentes etapas son iguales.
- 2) Mediante las ecuaciones 19.34 y 19.35 se determina w_C y el caudal total de vapor eliminado ($V_1 + V_2 + V_3$).
- 3) Se supone que los caudales de vapor eliminados en cada uno de los efectos son iguales: $V_1 = V_2 = V_3$.
- 4) Se calculan las concentraciones X_2 y X_3 .
- 5) Con las concentraciones de cada solución se determinan sus calores específicos correspondientes: $\hat{C}_p)_i$.
- 6) Se calculan los incrementos ebulloscópicos de cada efecto. Estos incrementos se calculan con la concentración de la solución que abandona el efecto.

- 7) Se calculan las temperaturas de todas las cámaras de evaporación y condensación desconocidas, utilizando la ecuación 19.48.
- 8) Con las temperaturas T , t_{e1} , t_{e2} y t_{e3} , se calculan los calores latentes de condensación del vapor saturado de agua a estas temperaturas λ_w , λ_{v1} , λ_{v2} y λ_{v3} .
- 9) Se resuelve el sistema de ecuaciones que se obtiene de los balances entálpicos y másicos, ecuaciones 19.34 a 19.43. Esta resolución permite encontrar w_w , w_2 , w_3 , V_1 , V_2 y V_3 .
- 10) A partir de las ecuaciones de velocidad (ecuaciones 19.44, 19.45 y 19.46), se obtienen las áreas de cada efecto A_1 , A_2 y A_3 .
- 11) Se compara si las áreas obtenidas difieren menos del 2% respecto al valor medio en cuyo caso el proceso iterativo se da por acabado.
- 12) Si las áreas son distintas, se recalculan X_2 y X_3 con los valores de V_2 y V_3 obtenidos en la etapa 9.
- 13) Recalcular los incrementos ebulloscópicos con las nuevas concentraciones.
- 14) Se determinan las nuevas temperaturas de las diferentes cámaras de evaporación y condensación. Para ello, se utilizan las expresiones:

$$(T - t_1)_j = (T - t_1)_{j-1} \left(\frac{A_1}{A_m} \right) \quad [19.49]$$

$$(t_{e1} - t_2)_j = (t_{e1} - t_2)_{j-1} \left(\frac{A_2}{A_m} \right) \quad [19.50]$$

$$(t_{e2} - t_3)_j = (t_{e2} - t_3)_{j-1} \left(\frac{A_3}{A_m} \right) \quad [19.51]$$

ecuaciones que indican que el incremento de temperaturas entre las cámaras de condensación y evaporación de cada efecto, en una etapa iterativa j es igual al incremento que existía entre dichas cámaras en la etapa de cálculo anterior $j - 1$, multiplicado por la relación entre el área de dicho efecto y el área media. En esta etapa se obtienen dos pares de valores para cada una de las temperaturas desconocidas, por lo que el valor que se toma será la media aritmética.

- 15) Se continúa a partir de la etapa 8 hasta coincidencia de valores en las áreas de cada efecto.

b) Método iterativo cuando no existe aumento ebulloscópico

Las etapas de cálculo se enumeran a continuación:

- 1) Se supone que los caudales de calor transferidos en cada etapa son los mismos. Asimismo, se supone que las áreas de intercambio de las diferentes etapas son iguales.

- 2) Mediante las ecuaciones 19.34 y 19.35 determinar w_C y el caudal total de vapor eliminado ($V_1 + V_2 + V_3$).
- 3) Se supone que los caudales de vapor eliminados en cada efecto son iguales: $V_1 = V_2 = V_3$.
- 4) Se calculan las concentraciones X_2 y X_3 .
- 5) Con las concentraciones de cada solución se determinan sus calores específicos correspondientes: $\hat{C}_P)_i$.
- 6) Se calculan las temperaturas de todas las cámaras de evaporación y condensación desconocidas, utilizando la ecuación 19.48.
- 7) Con las temperaturas T , t_{e1} , t_{e2} y t_{e3} , se calculan los calores latentes de condensación del vapor saturado de agua a estas temperaturas λ_w , λ_{v1} , λ_{v2} y λ_{v3} .
- 8) Se resuelve el sistema de ecuaciones que se obtiene de los balances entálpicos y másicos, ecuaciones 19.34 a 19.43. Esta resolución permite encontrar w_w , w_2 , w_3 , V_1 , V_2 y V_3 .
- 9) A partir de las ecuaciones de velocidad (ecuaciones 19.44, 19.45 y 19.46), se obtienen las áreas de cada efecto A_1 , A_2 y A_3 .
- 10) Se compara si las áreas obtenidas difieren menos del 2 % respecto al valor medio, en cuyo caso el proceso iterativo se da por acabado.
- 11) Si las áreas son distintas, se recalculan X_2 y X_3 con los valores de V_2 y V_3 obtenidos en la etapa 9.
- 12) Se determinan las nuevas temperaturas de las diferentes cámaras de evaporación y condensación. Para ello, se utilizan las ecuaciones 19.49, 19.50 y 19.51. En esta etapa se obtienen dos pares de valores para cada una de las temperaturas desconocidas, por lo que el valor que se toma será la media aritmética.
- 13) Se continúa a partir de la etapa 7 hasta coincidencia de valores en las áreas de cada efecto.

19.6. Equipos de evaporación

En los procesos de evaporación se utilizan aparatos muy diversos, pudiéndose distinguir aquellos en los que el fluido se hace circular mediante bombas frente a los que no necesitan estos dispositivos, denominándose evaporadores de circulación forzada a los primeros y de circulación natural a los últimos. Además, cabe mencionar aquellos evaporadores de tubos largos de película ascendente y descendente, así como evaporadores de placas y de flujo expandido. A continuación se realiza una breve descripción de cada uno de ellos.

19.6.1. Evaporadores de circulación natural

Existen varios tipos de evaporadores basados en la circulación natural de los fluidos, siendo el más sencillo el evaporador abierto. También existen evaporadores de tubos, generalmente cortos, basados en este principio.

19.6.1.1. Evaporador abierto

Estos evaporadores son los más simples, y constan esencialmente de un depósito abierto a la atmósfera, en el que el fluido se calienta directamente, o bien a través de un serpentín o camisa externa de calentamiento. Presentan una velocidad de evaporación baja, siendo pobre la economía térmica que presentan. A veces, y para permitir la operación a vacío, los depósitos pueden presentar un cierre hermético.

La ventaja más importante de estos evaporadores es que son de gran utilidad cuando se requieren unidades de baja capacidad. Sin embargo, en unidades de gran capacidad el calentamiento es poco efectivo, ya que la relación superficie de transmisión de calor a volumen de líquido es baja. Además, en las unidades que llevan instalados serpentines internos, se reduce la transferencia de calor, ya que dificultan la circulación del líquido.

En la industria alimentaria, este tipo de evaporadores, se utilizan en la concentración de pulpa de tomate, preparación de sopas y salsas, y en la ebullición de mermeladas y productos de confitería.

19.6.1.2. Evaporador de tubos cortos horizontales

Estos evaporadores están formados por una cámara, cuya parte inferior está atravesada por un banco de tubos horizontales (figura 19.14), circulando por su interior vapor de agua, que sirve de fluido calefactor. Por encima de los tubos existe un espacio que permite la separación por gravedad de las gotas arrastradas con el vapor desprendido en la base.

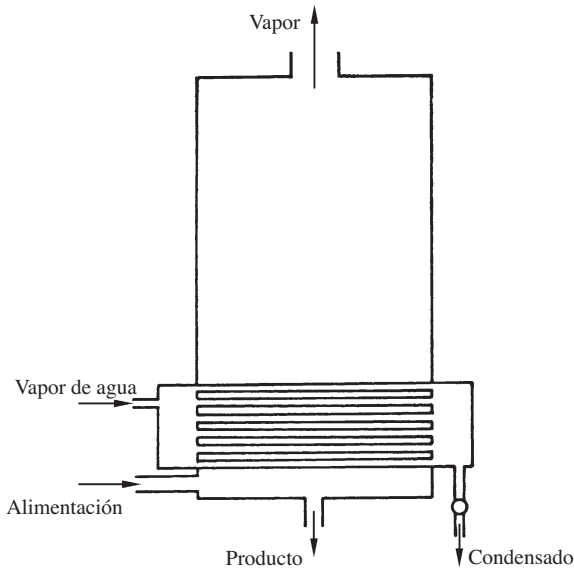


Figura 19.14. Evaporador de tubos cortos horizontales (adaptado de Brennan *et al.*, 1980).

Al objeto de facilitar la separación y el arrastre de las gotas, se hallan dispuestas unas láminas de choque. Debido a que el banco de tubos dificulta la circulación del líquido, estos evaporadores presentan unos coeficientes globales de transmisión de calor bajos. Se suelen utilizar en la concentración de líquidos que posean una viscosidad baja.

19.6.1.3. Evaporador de tubos cortos verticales

En la figura 19.15 se representa esquemáticamente un evaporador de este tipo, en el que el vapor de calefacción condensa en el exterior de unos tubos que se encuentran dispuestos verticalmente en el interior de la cámara de evaporación. El conjunto de tubos, denominado calandria, posee un gran tubo central de retorno, por el que circula un líquido que está más frío que el de los tubos calentadores de ascenso, lo que provoca la aparición de corrientes de circulación natural. La longitud de los tubos suele oscilar entre 0,5 y 2 metros, con un diámetro de 2,5 a 7,5 cm; mientras que el tubo central presenta una sección transversal de entre 25 y 40% de la sección total que ocupan los tubos.

Presentan unas velocidades de evaporación adecuadas con líquidos de viscosidad moderada, y no corrosivos. Las unidades pueden equiparse con calandrias de cesta que facilitan la limpieza, ya que se pueden desmontar fácilmente.

Se suelen utilizar en la concentración de soluciones de azúcar de caña y remolacha, así como en la concentración de zumos de fruta, extracto de malta, glucosa y sal.

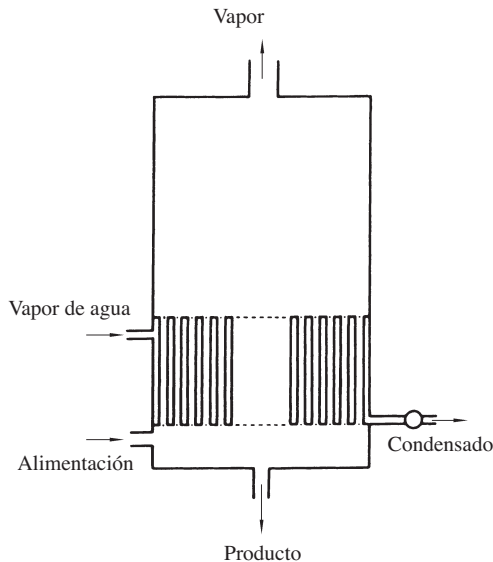


Figura 19.14. Evaporador de tubos cortos verticales (adaptado de Brennan *et al.*, 1980).

19.6.1.4. Evaporador con calandria exterior

En este tipo de evaporador (figura 19.16) el conjunto de tubos se halla fuera del espacio separador de vapor. Suelen operar a presiones reducidas, siendo muy fácil el acceso al conjunto de tubos. Además, la calandria puede sustituirse por un intercambiador de calor de placas, que es muy útil en el caso que se prevea que pueden formarse costras, pues son fáciles de desmontar y limpiar.

Como pueden operar bajo vacío, se utilizan en la concentración de productos alimentarios sensibles al calor, como pueden ser leche, extractos de carne y zumos de fruta.

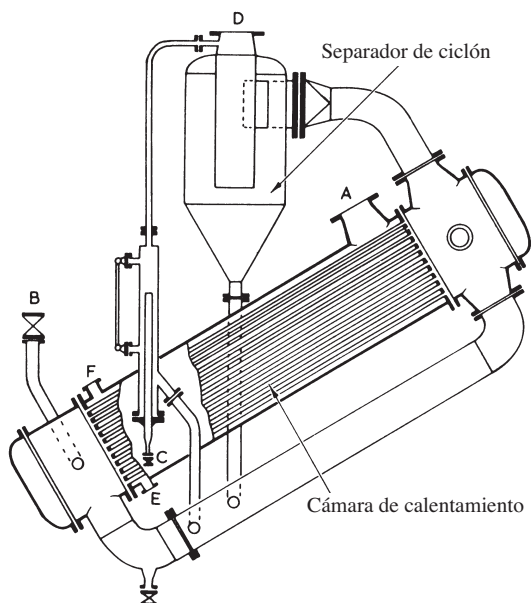


Figura 19.16. Evaporador con calandria exterior. A, entrada de vapor; B, entrada del líquido de alimentación; C, salida del líquido concentrado; D, salida del vapor; E, salida del condensado, y F, salida de gases incondensables (adaptado de Brennan *et al.*, 1980).

19.6.2. Evaporadores de circulación forzada

En estos evaporadores la circulación se logra mediante una bomba que impulsa el alimento a través de la calandria de tubos, para entrar posteriormente a una cámara de separación, en la que se obtiene la separación del vapor y del concentrado (figura 19.17). La bomba hace que el fluido circule a una velocidad de entre 2 y 6 m/s, y cuando pasa por el haz tubular adquiere el calor suficiente para recalentarlo, pero están diseñados para que el líquido esté sometido a una carga estática que impide su ebullición en los tubos. Sin embargo, cuando llega a la cámara, existe una evaporación súbita, en la que una pantalla de choque facilita la separación de la fase líquida del vapor.

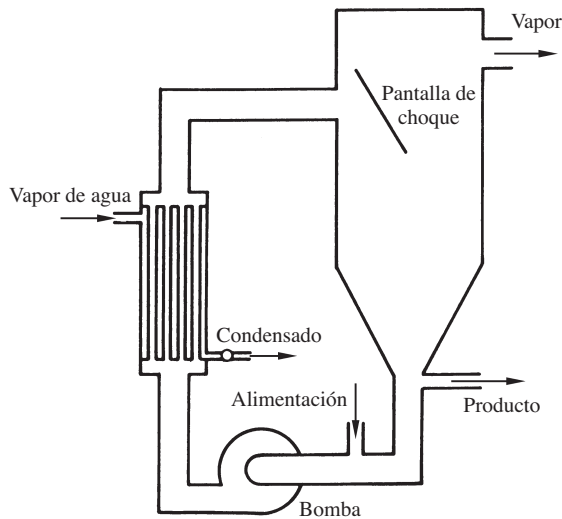


Figura 19.17. *Evaporador de circulación forzada* (adaptado de Brennan *et al.*, 1980).

Estos evaporadores son capaces de concentrar líquidos viscosos, siempre y cuando la bomba infiera al líquido la velocidad adecuada. Por ello, si los líquidos son poco viscosos, se utilizan bombas centrífugas, pero si los líquidos presentan una viscosidad más elevada deben utilizarse bombas de desplazamiento positivo.

19.6.3. Evaporadores de tubos largos

Son evaporadores que constan de una cámara vertical provista de un intercambiador tubular y de una cámara de separación. El líquido diluido, antes de entrar a los tubos, es precalentado hasta prácticamente su temperatura de ebullición. Una vez en el interior de los tubos empieza a hervir, y la expansión debida a la vaporización hace que se formen burbujas de vapor que circulan a gran velocidad y arrastran el líquido, que se va concentrando al avanzar en su trayecto. La mezcla líquido-vapor pasa a la cámara de separación, en la que existen placas deflectoras que ayudan a separar el vapor. El líquido concentrado que se obtiene, puede extraerse directamente, o bien mezclarse con líquido no concentrado y se recircula, o bien puede pasar a otro evaporador donde se aumenta su concentración.

Los evaporadores de tubos largos pueden ser de película ascendente, película descendente, o bien de película ascendente-descendente. En los evaporadores de película ascendente el líquido penetra por la parte inferior de los tubos, y se empiezan a formar burbujas de vapor, que ascienden por el centro del tubo, creándose así una fina película en la pared del tubo, que asciende a gran velocidad. En los evaporadores de película descendente, la alimentación se realiza por la parte superior de los tubos, en el que el vapor formado desciende por el centro de los mismos en forma de chorro a una gran velocidad. Cuando se desean conseguir altas velocidades

des de evaporación se utilizan evaporadores de película ascendente-descendente, en donde se combina la evaporación de película ascendente, obteniéndose un líquido de concentración intermedia, con una viscosidad alta. Este líquido se lleva a evaporación en tubos por los que circula en forma de película descendente.

Generalmente, los coeficientes globales de transmisión de calor son altos. En los evaporadores de película, el tiempo de residencia del líquido que se está tratando en la zona de calentamiento es corto, ya que circula a gran velocidad. Esto hace que el producto no se vea tan afectado por el calor, y son por tanto, muy útiles en la evaporación de líquidos sensibles al calor. Los evaporadores de película descendente son muy utilizados en la concentración de productos lácteos.

19.6.4. Evaporadores de placas

Tal como su nombre indica constan de un conjunto de placas, que se distribuyen en unidades, en las que el vapor condensa en los canales formados entre placas, y el líquido calentado hierve sobre las superficies de las placas, ascendiendo y descendiendo en forma de película sobre las mismas. La mezcla de líquido y vapor que se forma pasa a un evaporador centrífugo.

Estos evaporadores son útiles para concentrar productos sensibles al calor, pues se consiguen altas velocidades de tratamiento, lo que permite una buena transmisión de calor y cortos tiempos de residencia del producto en el evaporador. Además, ocupan poca superficie en el suelo, y son de fácil manejo en la operación de limpieza, ya que su desmontaje y montaje es fácil y rápido. Se suelen utilizar en la concentración de café, caldos de sopa, mermelada ligera y en zumos de cítricos.

Además de los evaporadores descritos, también se utilizan de otros tipos, como pueden ser los evaporadores de flujo expandido, los de superficie rascada o incluso aquéllos basados en el funcionamiento de bomba térmica, utilizados para la evaporación de productos muy sensibles al calor.

PROBLEMAS

Problema n° 19.1

Una solución salina se concentra desde 5 a 40% en peso de sal. Para ello, se alimentan 15.000 kg/h de la solución diluida a un evaporador de doble efecto que opera en contracorriente. El vapor vivo utilizado en el primer efecto es saturado de 2,5 at, manteniéndose la cámara de evaporación del segundo efecto a una presión de 0,20 at. Si la alimentación se encuentra a 22 °C, calcular: a) Caudal de vapor vivo necesario y economía del sistema. b) Área de calefacción de cada efecto. c) Temperaturas y presiones de las distintas cámaras de evaporación y condensación.

Datos. Considerar que únicamente la solución salina del 40% produce aumento ebulloscópico de 7 °C.

El calor específico de las soluciones salinas puede calcularse mediante la expresión: $\hat{C}_p = 4,18 - 3,34 X \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$, siendo X la fracción másica de sal en la solución.

Los coeficientes globales de transmisión de calor del primer y segundo efectos son, respectivamente, 1.860 y 1.280 $\text{W}/(\text{m}^2\cdot^\circ\text{C})$.

Calor específico del vapor de agua 2,1 $\text{kJ}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$.

El esquema del evaporador de doble efecto se representa en la figura 19.P1.

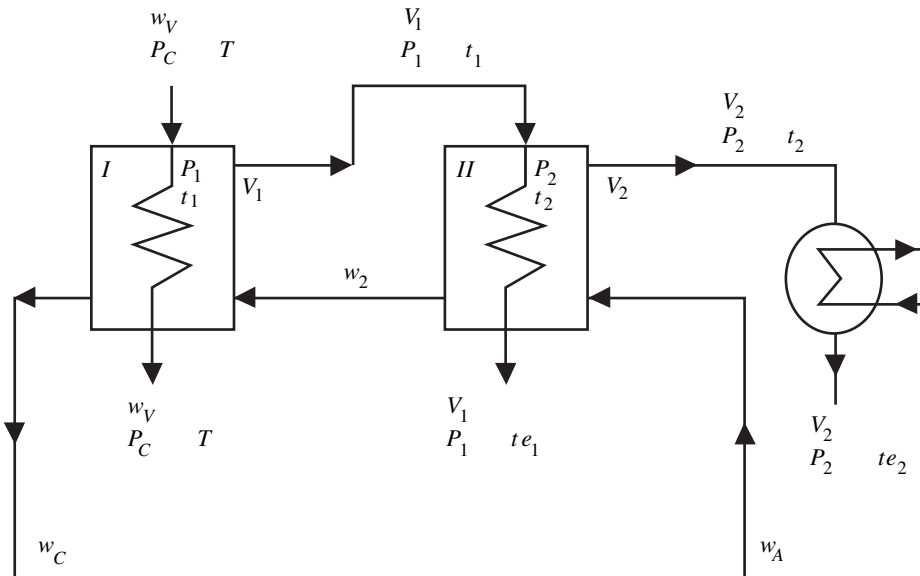


Figura 19.P1. Evaporador de doble efecto en contracorriente.

- Propiedades del vapor saturado de agua:

$$P_w = 2,5 \text{ at} = 2.452 \text{ mbar} \qquad T = 126,8 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\hat{h}_w = 533 \text{ kJ/kg}$$

$$\hat{H}_w = 2.716 \text{ kJ/kg} \qquad \lambda_w = 2.183 \text{ kJ/kg}$$

$$P_2 = 0,2 \text{ at} = 196 \text{ mbar} \qquad t_{e2} = 59,7 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\hat{h}_{v2} = 250 \text{ kJ/kg}$$

$$\hat{H}_{v2} = 2.609 \text{ kJ/kg} \qquad \lambda_{v2} = 2.359 \text{ kJ/kg } \lambda$$

- Balances máscopicos global y de componente:

$$15.000 = w_c + V_1 + V_2$$

$$(15.000) (0,05) = w_c (0,40)$$

obteniéndose: $w_c = 1.875 \text{ kg/h}$ y $V_1 + V_2 = 13.125 \text{ kg/h}$.

Inicialmente se supone $V_1 = V_2 = 6.562 \text{ kg/h}$, lo que supone que la composición de la corriente w_2 sea $X_2 = 0,09$.

- Los calores específicos de cada una de las corrientes se obtienen a partir de la ecuación dada en el enunciado:

– Para $X_A = 0,05$ $\hat{C}_{PA} = 4,01 \text{ kJ/(kg}\cdot^\circ\text{C)}$

– Para $X_C = 0,40$ $\hat{C}_{PC} = 2,84 \text{ kJ/(kg}\cdot^\circ\text{C)}$

– Para $X_2 = 0,09$ $\hat{C}_{P2} = 3,88 \text{ kJ/(kg}\cdot^\circ\text{C)}$

Según el enunciado del problema sólo existe incremento ebulloscópico en el primer efecto, mientras que en el segundo se puede despreciar, lo que conlleva que $t_2 = t_{e2} = 59,7 \text{ }^\circ\text{C}$.

Para realizar el proceso de cálculo se supone que las áreas y los caudales de calor transmitidos a través de estas áreas de intercambio son iguales en los dos efectos, cumpliéndose [ec. 19.48]:

$$\frac{\dot{Q}}{A} = \frac{T - t_{e2} - \Delta T_{e1}}{\frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2}} = \frac{(126,8 - 59,7 - 7) \text{ }^\circ\text{C}}{\left(\frac{1}{1.860} + \frac{1}{1.280} \right) \frac{\text{m}^2\cdot^\circ\text{C}}{\text{W}}}$$

con lo que $\dot{Q}/A = 45.569 \text{ W/m}^2$.

La temperatura t_{e1} se obtiene a partir de la ecuación de velocidad de transferencia de calor en el segundo efecto:

$$\dot{Q}/A = U_2 (T_{e1} - t_2) \qquad t_{e1} = 95,3 \text{ }^\circ\text{C}$$

y la temperatura de ebullición en el primer efecto será:

$$t_1 = t_{e1} + \Delta T_{e1} = 95,3 + 7 = 102,3 \text{ }^\circ\text{C}$$

Con la temperatura $t_{e1} = 95,3$ °C es posible encontrar las propiedades del vapor de agua saturado, a partir de las tablas de vapor saturado:

$$\begin{aligned} t_{e1} &= 95,3 \text{ °C} & P_1 &= 855 \text{ mbar} \\ \hat{h}_{V1} &= 399,3 \text{ kJ/kg} \\ \hat{H}_{V1} &= 2.668 \text{ kJ/kg} & \lambda_{V1} &= 2.268,7 \text{ kJ/kg} \end{aligned}$$

Aplicando los balances entálpicos a los dos efectos:

Primer efecto:

$$2.183 w_V = [2.268,7 + (2,1) \cdot (7)] V_1 + (2,84) (1.875) (102,3 - 95,3) - 3,88 w_2 (59,7 - 95,3)$$

$$\text{Segundo efecto: } 2.268,7 V_1 = 2.359,4 V_2 - (4,01) (15.000) (22 - 59,7)$$

y con las ecuaciones de los balances:

$$\begin{aligned} w_2 &= w_A - V_2 \\ V_1 + V_2 &= 13.125 \end{aligned}$$

se tiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, que al resolver se obtiene:

$$\begin{aligned} w_V &= 8.102 \text{ kg/h} & w_2 &= 9.056,5 \text{ kg/h} \\ V_1 &= 7.181,5 \text{ kg/h} & V_2 &= 5.943,5 \text{ kg/h} \end{aligned}$$

A partir de las ecuaciones de velocidad de transmisión de calor a través de las áreas es posible obtener el valor de las mismas:

$$\text{Primer efecto: } 8.102 (2.183/3.600) = 1,86 A_1 (126,8 - 102,3)$$

$$\text{Segundo efecto: } 7.181,5 (2.268,7/3.600) = 1,28 A_2 (95,3 - 59,7)$$

$$A_1 = 107,81 \text{ m}^2 \quad A_2 = 99,32 \text{ m}^2$$

con un área media $A_m = 105,56 \text{ m}^2$, y como estas áreas difieren en más de un 2%, es necesario reiniciar el proceso de cálculo, rectificando las temperaturas intermedias t_1 y t_{e1} , ya que las otras no varían:

$$\begin{aligned} t_{e1} - 59,7 &= (95,3 - 59,7) (A_2/A_m) & t_{e1} &= 93,8 \text{ °C} \\ 126,8 - t_1 &= (126,8 - 102,3) (A_1/A_m) & t_1 &= 101,3 \text{ °C} \end{aligned}$$

con esta temperatura se obtiene: $t_{e1} = 101,3 - 7 = 94,3$ °C.

Al ser distintas se toma la media de ambas, con lo que:

$$t_{e1} = 94 \text{ °C} \quad \text{y} \quad t_1 = 101 \text{ °C}$$

Se buscan en las tablas de vapor saturado de agua las nuevas entalpías para la temperatura de 94 °C:

$$\begin{aligned} t_{e1} &= 94 \text{ °C} & P_1 &= 815 \text{ mbar} \\ \hat{h}_{V1} &= 393,8 \text{ kJ/kg} \\ \hat{H}_{V1} &= 2.666 \text{ kJ/kg} & \lambda_{V1} &= 2.272,2 \text{ kJ/kg} \end{aligned}$$

Con el nuevo valor de λ_{V1} se vuelve a solucionar el sistema de cuatro ecuaciones planteado anteriormente, obteniendo:

$$\begin{aligned} w_V &= 8.090 \text{ kg/h} & w_2 &= 9.051 \text{ kg/h} \\ V_1 &= 7.176 \text{ kg/h} & V_2 &= 5.949 \text{ kg/h} \end{aligned}$$

Las áreas se recalculan a partir de las ecuaciones de velocidad:

$$A_1 = 102,22 \text{ m}^2 \quad A_2 = 103,16 \text{ m}^2$$

a) Economía del sistema:

$$E = \frac{V_1 + V_2}{w_V} = \frac{13.125}{8.090} = 1,62 \frac{\text{kg de vapor producidos}}{\text{kg de vapor vivo}}$$

b) Área por efecto: $A_m = 102,7 \text{ m}^2$

c) Primer efecto: $P_C = 2.452 \text{ mbar}$ $T = 126,8 \text{ °C}$
 $P_1 = 815 \text{ mbar}$ $t_1 = 101,0 \text{ °C}$

Segundo efecto: $P_1 = 815 \text{ mbar}$ $t_{e1} = 94,0 \text{ °C}$
 $P_2 = 196 \text{ mbar}$ $t_2 = 59,7 \text{ °C}$

Problema 19.2

Un evaporador de doble efecto, que opera en corriente directa, se utiliza para concentrar un zumo clarificado de fruta desde 15 hasta 72 °Brix. El vapor de caldera del que se dispone es saturado a 2,4 at, existiendo en la cámara de evaporación del segundo efecto un vacío de 460 mm Hg. El zumo diluido es alimentado al sistema de evaporación a una temperatura de 50 °C a razón de 3.480 kg/h. Si los coeficientes globales de transmisión de calor para el primer y segundo efecto son 1.625 y 1.280 W/(m²·°C), respectivamente, determinar: a) Caudal de vapor de caldera y economía del sistema. b) Superficie de calefacción de cada efecto. c) Temperaturas y presiones en las cámaras de condensación y evaporación de cada efecto.

Datos. Propiedades de los zumos de frutas:

- El incremento ebulloscópico puede calcularse según la expresión: $\Delta T_e = 0,014 C^{0,75} P^{0,1} \exp(0,034 C) \text{ °C}$, en la que C es el contenido en sólidos solubles en °Brix y P la presión en mbar.

- El calor específico es función de la fracción másica de agua según la ecuación:

$$\hat{C}_p = 0,84 + 3,34 X_{AGUA} \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$$

En la cámara de evaporación del segundo efecto existe un vacío de 460 mm Hg, con lo que su presión es $P_2 = 300 \text{ mm Hg}$.

Propiedades del vapor saturado de agua:

$P_W = 2,4 \text{ at} = 2.353 \text{ mbar}$	$T = 125,5 \text{ }^\circ\text{C}$
$\hat{h}_W = 527 \text{ kJ/kg}$	
$\hat{H}_W = 2.713 \text{ kJ/kg}$	$\lambda_W = 2.186 \text{ kJ/kg}$
$P_2 = 300 \text{ mmHg} = 400 \text{ mbar}$	$t_{e2} = 75,8^\circ\text{C}$
$\hat{h}_{V2} = 317 \text{ kJ/kg}$	
$\hat{H}_{V2} = 2.637 \text{ kJ/kg}$	$\lambda_{V2} = 2.320 \text{ kJ/kg}$

En la figura 19.P2 se muestra un esquema del evaporador de doble efecto que trabaja en corriente directa

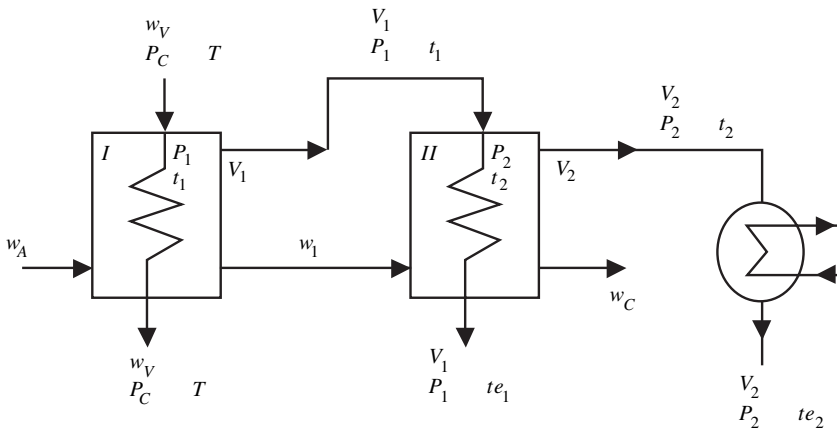


Figura 19.P2. Evaporador de doble efecto en corriente directa.

Balances másicos global y de componente:

$$3.480 = w_C + V_1 + V_2$$

$$(3.480)(0,15) = (0,72) w_C$$

obteniéndose: $w_C = 725 \text{ kg/h}$ y $V_1 + V_2 = 2.755 \text{ kg/h}$

Inicialmente se supone $V_1 = V_2 = 1.377,5 \text{ kg/h}$, por lo que la composición de la corriente w_2 será $X_2 = 0,248$, que se corresponde a un contenido de $24,8 \text{ }^\circ\text{Brix}$.

Los incrementos ebulloscópicos se calculan mediante la ecuación dada en los datos. La concentración utilizada es la de la corriente que abandona cada efecto:

Primer efecto: $C_1 = 24,8 \text{ }^\circ\text{Brix}$ $P_1 = ?$

Segundo efecto: $C_2 = 72,0 \text{ }^\circ\text{Brix}$ $P_2 = 400 \text{ mbar}$

obteniendo: $\Delta T_{e1} = 0,36 (P_1)^{0,1}$ $\Delta T_{e2} = 7,3 \text{ }^\circ\text{C}$

La temperatura de ebullición en el segundo efecto es:

$$t_e = t_{e2} + \Delta T_{e2} = 75,8 + 7,3 = 83,1 \text{ }^\circ\text{C}$$

Para obtener ΔT_{e1} es necesario conocer P_1 , pero se podría estimar. En el caso que $P_1 = 1.000 \text{ mbar}$, el aumento ebulloscópico $\Delta T_{e1} = 0,7 \text{ }^\circ\text{C}$.

Los calores específicos de cada una de las corrientes se obtienen a partir de la ecuación dada en el enunciado:

- Para $C_A = 15 \text{ }^\circ\text{Brix}$ $\hat{C}_{PA} = 3,68 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$

- Para $C_C = 72 \text{ }^\circ\text{Brix}$ $\hat{C}_{PC} = 1,78 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$

- Para $C_1 = 24,8 \text{ }^\circ\text{Brix}$ $\hat{C}_{P1} = 3,35 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$

Para realizar el proceso de cálculo se supone que las áreas y los caudales de calor transmitidos a través de estas áreas de intercambio son iguales en los dos efectos, cumpliéndose:

$$\frac{\dot{Q}}{A} = \frac{T - t_{e2} - \Delta T_{e1} - \Delta T_{e2}}{\frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2}} = \frac{(125,2 - 75,8 - 0,7 - 7,3) \text{ }^\circ\text{C}}{\left(\frac{1}{1.625} + \frac{1}{1.280}\right) \frac{\text{m}^2\cdot^\circ\text{C}}{\text{W}}}$$

con lo que $\dot{Q}/A = 29.858 \text{ W}/\text{m}^2$.

La temperatura t_{e1} se obtiene a partir de la ecuación de velocidad de transferencia de calor en el segundo efecto:

$$\dot{Q}/A = U_2 (t_{e1} - t_2) \quad t_{e1} = 106,4 \text{ }^\circ\text{C}$$

y la temperatura de ebullición en el primer efecto será:

$$t_1 = t_{e1} + \Delta T_{e1} = 106,4 + 0,7 = 107,1 \text{ }^\circ\text{C}$$

Con la temperatura $t_{e1} = 106,4^\circ\text{C}$ es posible encontrar las propiedades del vapor de agua saturado, a partir de las tablas de vapor saturado:

$$t_{e1} = 106,4 \text{ }^\circ\text{C} \quad P_1 = 1.271 \text{ mbar}$$

$$\hat{h}_{V1} = 447 \text{ kJ}/\text{kg}$$

$$\hat{H}_{V1} = 2.685 \text{ kJ}/\text{kg} \quad \lambda_{V1} = 2.238 \text{ kJ}/\text{kg}$$

Si se recalcula el incremento ebulloscópico en el primer efecto con la presión $P_1 = 1.271$ mbar, se obtiene una pequeña variación en las centésimas de grado, por lo que se toma el mismo incremento ebulloscópico obtenido anteriormente.

Aplicando los balances entálpicos a los dos efectos:

$$\text{Primer efecto: } (2.186) w_V = [2.238 + (2,1) (0,7)] V_1 + w_1 (3,35) (107,1 - 106,4) - (3.480) (50 - 106,4)$$

$$\text{Segundo efecto: } (2.238) V_1 = V_2 [2.320 + (2,1) (7,3)] + (725) (1,78) (83,1 - 75,8) - w_1 (3,35) (107,1 - 75,8)$$

y con las ecuaciones de los balances:

$$w_1 = w_A - V_1$$

$$V_1 + V_2 = 2.755$$

se tiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, que al resolver se obtiene:

$$w_V = 1.726 \text{ kg/h}$$

$$w_1 = 2.120 \text{ kg/h}$$

$$V_1 = 1.360 \text{ kg/h}$$

$$V_2 = 1.395 \text{ kg/h}$$

Con estos nuevos valores se calcula el contenido en sólidos solubles de la corriente w_1 y se obtiene 24,6 °Brix, valor que permite calcular el calor específico y el incremento ebulloscópico: $\hat{C}_{p1} = 3,36 \text{ kJ/(kg}\cdot\text{°C)}$ y $\Delta T_{e1} = 0,7 \text{ °C}$.

A partir de las ecuaciones de velocidad de transmisión de calor a través de las áreas es posible obtener el valor de las mismas:

$$\text{Primer efecto: } (1.726) \cdot (2.186)/(3.600) = (1,625) A_1 (125,5 - 107,1)$$

$$\text{Segundo efecto: } (1.360) \cdot (2.238)/(3.600) = (1,28) A_2 (106,4 - 83,1)$$

$$A_1 = 35,05 \text{ m}^2$$

$$A_2 = 28,35 \text{ m}^2$$

con un área media $A_m = 31,70 \text{ m}^2$, y como estas áreas difieren en más de un 2%, es necesario reiniciar el proceso de cálculo, rectificando las temperaturas intermedias t_1 y t_{e1} [ecs. 19.49 a 19.51], ya que las otras no varían:

$$t_{e1} - 83,1 = (106,4 - 83,1) (A_2/A_m) \quad t_{e1} = 103,9 \text{ °C}$$

$$125,5 - t_1 = (125,5 - 107,1) (A_1/A_m) \quad t_1 = 105,2 \text{ °C}$$

con esta temperatura se obtiene: $t_{e1} = 105,2 - 0,7 = 104,6 \text{ °C}$.

Al ser distintas se toma la media de ambas, con lo que:

$$t_{e1} = 104,2 \text{ °C} \quad \text{y} \quad t_1 = 104,9 \text{ °C}$$

Se buscan en las tablas de vapor saturado de agua las nuevas entalpías para la temperatura de 104,2 °C:

$$\begin{aligned} t_{e1} &= 104,2 \text{ °C} & P_1 &= 1.177 \text{ mbar} \\ \hat{h}_{v1} &= 437 \text{ kJ/kg} \\ \hat{H}_{v1} &= 2.682 \text{ kJ/kg} & \lambda_{v1} &= 2.245 \text{ kJ/kg} \end{aligned}$$

Con el nuevo valor de λ_{v1} se vuelve a solucionar el sistema de cuatro ecuaciones planteado anteriormente, obteniendo:

$$\begin{aligned} w_V &= 1.720,8 \text{ kg/h} & w_1 &= 2.118,6 \text{ kg/h} \\ V_1 &= 1.361,4 \text{ kg/h} & V_2 &= 1.393,6 \text{ kg/h} \end{aligned}$$

Las áreas se recalculan a partir de las ecuaciones de velocidad:

$$A_1 = 31,22 \text{ m}^2 \quad A_2 = 31,43 \text{ m}^2$$

a) Caudal vapor caldera: $w_V = 1.720,8 \text{ kg/h}$

$$\text{Economía del sistema: } E = \frac{V_1 + V_2}{w_V} = \frac{2.755}{1.720,8} = 1,6 \frac{\text{kg vapor producidos}}{\text{kg vapor caldera}}$$

b) Área por efecto: $A_m = 31,33 \text{ m}^2$

c) Primer efecto: $P_C = 2.353 \text{ mbar}$ $T = 125,5 \text{ °C}$
 $P_1 = 1.177 \text{ mbar}$ $t_1 = 104,9 \text{ °C}$

Segundo efecto: $P_1 = 1.177 \text{ mbar}$ $t_{e1} = 104,2 \text{ °C}$
 $P_2 = 400 \text{ mbar}$ $t_2 = 83,1 \text{ °C}$

Problema 19.3

El tamarindo es un importante condimento culinario utilizado como ingrediente acidificante. Debido a costos de transporte es conveniente obtenerlo como zumo concentrado, lo que se realiza en una etapa de evaporación. Una industria de la India desea obtener 1.000 kg/h de zumo concentrado de 62 °Brix a partir de un zumo de 10 °Brix, para lo que estudian la posibilidad de instalar un simple efecto con compresión mecánica del vapor, o bien un doble efecto que opere en corriente directa. Los coeficientes globales de transmisión de calor del primer y segundo efectos son 2.100 y 1.750 W/(m²·°C), respectivamente. El alimento se encuentra a 22 °C, mientras que el zumo de 62 °Brix no puede soportar temperaturas superiores a 70 °C. La industria dispone de una corriente de vapor saturado a 1,8 kp/cm², que se utiliza para realizar la concentración del zumo. Calcular: a) El caudal de zumo de 10 °Brix que se puede concentrar y el consumo de vapor vivo de 1,8 kp/cm² para las dos opciones. b) La potencia de compresión, para la primera opción, si el rendimiento isentrópico del compresor es del 88%. c) La op-

ción más rentable, si el coste de cada m^2 de evaporador es 22 euros, cada kW de potencia de compresión cuesta 4 euros, el coste de cada kWh es 8 céntimos de euro, cada kg de vapor de 1,8 kp/cm² cuesta 2 céntimos de euro. Considerar que la amortización del equipo se estima en 1 año.

Datos y notas:

- Los zumos cuyo contenido en sólidos solubles sea inferior a 18 °Brix no presentan aumento apreciable en su punto de ebullición.
- La planta funciona 300 días al año durante 16 horas diarias.
- Calor específico de los zumos de tamarindo:

$$\hat{C}_p = 4,18 + (6,84 \cdot 10^{-5} T - 0,0503) X_S \text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}$$

en la que X_S es el porcentaje en sólidos solubles y T la temperatura en Kelvin.

Evaporación en simple efecto con compresión mecánica

El diagrama de este tipo de instalación se corresponde a la figura 19.6.

La temperatura en la cámara de evaporación será $t_1 = 70$ °C, mientras que a partir de la gráfica de Dühring (figura 19.3) se obtiene la temperatura de ebullición del agua pura $t_{e1} = 66$ °C ($\Delta T_{e1} = 4$ °C).

A partir de las tablas de vapor saturado de agua es posible encontrar las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} P_C &= 1,8 \text{ at} = 1.765 \text{ mbar} & T_C &= 116,3 \text{ °C} \\ \hat{h}_W &= 488 \text{ kJ/kg} \\ \hat{H}_W &= 2.700 \text{ kJ/kg} & \lambda_W &= 2.212 \text{ kJ/kg} \\ t_{e1} &= 66 \text{ °C} & P_1 &= 262 \text{ mbar} = 0,27 \text{ at} \\ \hat{h}_{V1} &= 276 \text{ kJ/kg} \\ \hat{H}_{V1} &= 2.619 \text{ kJ/kg} & \lambda_{V1} &= 2.343 \text{ kJ/kg} \end{aligned}$$

El vapor que abandona la cámara de evaporación es recalentado a una temperatura $t_1 = 70$ °C, siendo su entalpía:

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_{V1} + \hat{C}_p \cdot \Delta T_{e1} = 2.619 + (2,1) (4) = 2.627,4 \text{ kJ/kg}$$

La compresión del vapor que sale de la cámara de evaporación es un proceso isentrópico (figuras 19.6 y 19.7), desde el punto 1 en una isóbara de 262 mbar hasta un punto 2 en la isóbara de 1.765 mbar. Gráficamente (figura A.1 del Apéndice) se obtienen las condiciones del punto 2 de salida de vapor del compresor:

$$\begin{aligned} P_2 &= P_C = 1.765 \text{ mbar} & t_2 &= 270 \text{ °C} \\ \hat{H}_2 &= 3.009 \text{ kJ/kg} \end{aligned}$$

El vapor (V) con estas condiciones es recalentado y se une al procedente de la caldera (w_V^*) que es saturado a la misma presión, lo que daría una mezcla de vapor

recalentado, y para evitar esto, se recircula parte del condensado (w_R) para obtener en el punto 3 un vapor saturado (w_V) que es el que se alimenta a la cámara de condensación del evaporador (figuras 19.6 y 19.7).

Los calores específicos de las corrientes de alimento y concentrado se calculan a sus respectivas concentraciones:

- Alimento $C_A = 10 \text{ }^\circ\text{Brix}$ $\hat{C}_P)_A = 3,88 \text{ kJ/(kg}\cdot\text{C)}$
- Concentrado $C_C = 62 \text{ }^\circ\text{Brix}$ $\hat{C}_P)_C = 2,52 \text{ kJ/(kg}\cdot\text{C)}$

Balances máxicos:

$$\begin{aligned} w_A &= w_C + V & w_A &= 1.000 + V \\ w_A X_A &= w_C X_C & w_A 0,1 &= w_C 0,62 \end{aligned}$$

de las que se obtiene: $w_A = 6.200 \text{ kg/h}$ $V = 5.200 \text{ kg/h}$

Si se realiza un balance entálpico en el evaporador es posible obtener la cantidad de vapor w_V que entra en la cámara de evaporación:

$$\begin{aligned} 2.212 w_V &= (5.200) [(2.343) + (2,1) (4)] + (1.000) (2,52) (4) - (6.200) (3,88) (22 - 66) \\ w_V &= 6.010,2 \text{ kg/h} \end{aligned}$$

Al realizar los correspondientes balances máxico y entálpico en el punto 3 de unión de las corrientes de vapor de caldera (w_V^*), vapor comprimido ($V_2 = V$) y condensado recirculado (w_R) se tiene:

$$\begin{aligned} 6.010,2 &= w_V^* + w_R + 5.200 \\ (6.010,2) (2.700) &= w_V^* (2.700) + w_R (488) + (5.200) (3.009) \end{aligned}$$

al resolver este sistema se obtiene: $w_V^* = 83,8 \text{ kg/h}$
 $w_R = 726,4 \text{ kg/h}$

El área del evaporador se obtiene de la ecuación de velocidad de transmisión de calor:

$$\begin{aligned} w_V \lambda_w &= U_1 A (T_C - t_1) \\ (6.010,2) (2.212)/3.600 &= (2,1) A (116,5 - 70) \end{aligned}$$

obteniéndose un área: $A = 37,82 \text{ m}^2$.

La potencia teórica de compresión se obtiene a partir de la expresión:

$$\begin{aligned} (Pot)_T &= V (\hat{H}_2 - \hat{H}_1) \\ (Pot)_T &= (5.200/3.600) \text{ kg/s} (3.009 - 2.627,4) \text{ kJ/kg} \\ (Pot)_T &= 551,2 \text{ kJ/s} \end{aligned}$$

La potencia real se obtiene dividiendo la teórica por el rendimiento isentrópico:

$$(Pot)_R = (551,2/0,88) = 626,4 \text{ kJ/s} = 626,4 \text{ kW}$$

El costo anual de operación se calcula a partir de la expresión:

$$C = C_A A + C_P (Pot)_R + C_{POT_{sh}} (Pot)_R h_T + C_V w_V^* h_T$$

en la que C_A , C_P , C_V y $C_{POT_{sh}}$ son los costos por m^2 de área de evaporador, costo por potencia de compresor instalado, costo del gasto de vapor vivo de caldera y costo de operación del compresor, respectivamente; mientras que h_T son las horas de operación anuales.

- Horas de operación: $h_T = (16) (300) = 4.800$ horas.

El costo anual será:

$$C = (22) (37,82) + (4) (626,4) + (0,08) (626,4) (4.800) + (0,02) (83,8) (4.800)$$

con lo que: $C = 251.920$ euros.

Evaporación con doble efecto en corriente directa

Este tipo de evaporador es análogo al presentado en la figura 19.P1. En la cámara de condensación del primer efecto llega un vapor de presión $P_C = 1,8$ at = 1.765 mbar, mientras que en el segundo efecto la temperatura de ebullición del zumo de 62 °Brix es $t_2 = 70$ °C, con lo que la temperatura de ebullición del agua pura es $t_{e2} = 66$ °C ($\Delta T_{e2} = 4$ °C).

De las tablas de vapor saturado de agua se obtiene:

$$\begin{array}{ll} P_C = 1,8 \text{ at} = 1.765 \text{ mbar} & T_C = 116,3 \text{ °C} \\ \hat{h}_W = 488 \text{ kJ/kg} & \\ \hat{H}_W = 2.700 \text{ kJ/kg} & \lambda_W = 2.212 \text{ kJ/kg} \\ t_{e2} = 66 \text{ °C} & P_2 = 262 \text{ mbar} = 0,27 \text{ at} \\ \hat{h}_{V2} = 276 \text{ kJ/kg} & \\ \hat{H}_{V2} = 2.619 \text{ kJ/kg} & \lambda_{V2} = 2.343 \text{ kJ/kg} \end{array}$$

De los balances másicos global y de componente se obtiene:

$$w_A = 6.200 \text{ kg/h} \quad V_1 + V_2 = 5.200 \text{ kg/h}$$

Inicialmente se supone que $V_1 = V_2 = 2.600$ kg/h, lo que permite obtener la concentración de la corriente w_1 que abandona el primer efecto: $C_1 = 17,2$ °Brix, lo que indica que no existirá aumento ebulloscópico apreciable ($\Delta T_{e1} = 0$ °C).

Los calores específicos de las distintas corrientes de zumo serán:

- Alimento $C_A = 10$ °Brix $\hat{C}_{PA} = 3,88$ kJ/(kg·°C)
- Corriente $C_1 = 17,2$ °Brix $\hat{C}_{P1} = 3,75$ kJ/(kg·°C)
- Concentrado $C_C = 62$ °Brix $\hat{C}_{PC} = 2,52$ kJ/(kg·°C)

Para realizar el proceso de cálculo se supone que las áreas y los caudales de calor transmitidos a través de estas áreas de intercambio son iguales en los dos efectos, cumpliéndose:

$$\frac{\dot{Q}}{A} = \frac{T - t_{e2} - \Delta T_{e2}}{\frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2}} = \frac{(116,3 - 66 - 4) \text{ }^\circ\text{C}}{\left(\frac{1}{2.100} + \frac{1}{1.750}\right) \frac{\text{m}^2 \cdot \text{ }^\circ\text{C}}{\text{W}}}$$

con lo que $\dot{Q}/A = 44.196 \text{ W/m}^2$.

La temperatura t_{e1} se obtiene a partir de la ecuación de velocidad de transferencia de calor en el segundo efecto:

$$\dot{Q}/A = U_2 (t_{e1} - t_2) \quad t_{e1} = 95,3 \text{ }^\circ\text{C}$$

y la temperatura de ebullición en el primer efecto será:

$$t_1 = t_{e1} + \Delta T_{e1} = 95,3 + 0 = 95,3 \text{ }^\circ\text{C}$$

Con la temperatura $t_{e1} = 95,3 \text{ }^\circ\text{C}$ es posible encontrar las propiedades del vapor de agua saturado, a partir de las tablas de vapor saturado:

$$\begin{array}{ll} t_{e1} = 95,3 \text{ }^\circ\text{C} & P_1 = 855 \text{ mbar} \\ \hat{h}_{v1} = 399,3 \text{ kJ/kg} & \\ \hat{H}_{v1} = 2.668 \text{ kJ/kg} & \lambda_{v1} = 2.268,7 \text{ kJ/kg} \end{array}$$

Aplicando los balances entálpicos a los dos efectos:

Primer efecto:

$$(2.212) w_v = (2.268,7) V_1 + w_1 (3,75) (0) - (6.200) (3,88) (22 - 95,3)$$

Segundo efecto:

$$V_1 2.268,7 = V_2 [2.343 + (2,1) (4)] + (1.000) (2,52) (70 - 66) - w_1 (3,75) (95,3 - 66)$$

y con las ecuaciones de los balances:

$$\begin{array}{l} w_1 = w_A - V_1 = 6.200 - V_1 \\ V_1 + V_2 = 5.200 \end{array}$$

se tiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, que al resolver se obtiene:

$$\begin{array}{ll} w_v = 3.425 \text{ kg/h} & w_1 = 3.637,8 \text{ kg/h} \\ V_1 = 2.562,2 \text{ kg/h} & V_2 = 2.637,8 \text{ kg/h} \end{array}$$

Con estos nuevos valores se vuelve a calcular la composición de la corriente w_1 , obteniéndose $C_1 = 17 \text{ }^\circ\text{Brix}$, que hace que no exista aumento ebulloscópico en

el primer efecto ($\Delta T_{e1} = 0 \text{ }^\circ\text{C}$), y que su calor específico sea prácticamente el mismo que el calculado anteriormente.

A partir de las ecuaciones de velocidad de transmisión de calor a través de las áreas es posible obtener el valor de las mismas:

$$\text{Primer efecto: } (3.425) (2.212)/(3.600) = (2,16) A_1 (116,3 - 95,3)$$

$$\text{Segundo efecto: } (2.562,2) (2.268,7)/(3.600) = (1,28) A_2 (95,3 - 70)$$

$$A_1 = 47,72 \text{ m}^2 \qquad A_2 = 36,47 \text{ m}^2$$

con un área media $A_m = 42,10 \text{ m}^2$, y como estas áreas difieren en más de un 2%, es necesario reiniciar el proceso de cálculo, rectificando las temperaturas intermedias t_1 y t_{e1} , ya que las otras no varían:

$$t_{e1} - 70 = (95,3 - 70) (A_2/A_m) \qquad t_{e1} = 92,0 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$116,3 - t_1 = (116,3 - 95,3) (A_1/A_m) \qquad t_1 = 92,5 \text{ }^\circ\text{C}$$

como $\Delta T_{e1} = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ se cumple que $t_{e1} = t_1$.

Al ser distintas se toma la media de ambas, con lo que: $t_{e1} = t_1 = 92,3 \text{ }^\circ\text{C}$.

Se buscan en las tablas de vapor saturado de agua las nuevas entalpías para la temperatura de $92,3 \text{ }^\circ\text{C}$:

$$t_{e1} = 92,3 \text{ }^\circ\text{C} \qquad P_1 = 770 \text{ mbar}$$

$$\hat{h}_{V1} = 387 \text{ kJ/kg}$$

$$\hat{H}_{V1} = 2.662 \text{ kJ/kg} \qquad \lambda_{V1} = 2.275 \text{ kJ/kg}$$

Con el nuevo valor de λ_{V1} se vuelve a solucionar el sistema de cuatro ecuaciones planteado anteriormente, obteniendo:

$$w_V = 3.405,4 \text{ kg/h} \qquad w_1 = 3.632,3 \text{ kg/h}$$

$$V_1 = 2.567,7 \text{ kg/h} \qquad V_2 = 2.632,3 \text{ kg/h}$$

Las áreas se recalculan a partir de las ecuaciones de velocidad:

$$A_1 = 41,52 \text{ m}^2 \qquad A_2 = 41,58 \text{ m}^2$$

con un área media por efecto: $A_m = 41,55 \text{ m}^2$.

El costo anual se obtiene a partir de la expresión:

$$C = C_A 2 A_m + w_V C_V h_T$$

El costo anual será:

$$C = (22) 2 (41,55) + (3.405,4) (0,02) (4.800)$$

$$C = 328.747 \text{ euros}$$

Por el resultado obtenido sería mejor instalar un solo efecto con recompresión de vapor, ya que el costo anual es inferior.

20.1. Introducción

La destilación es una operación unitaria que tiene por objeto separar, mediante vaporización, una mezcla de líquidos miscibles y volátiles en sus componentes. Esta separación se basa en aprovechar las distintas presiones de vapor de los componentes de la mezcla a una cierta temperatura.

El proceso de destilación es una de las operaciones unitarias más importantes en la industria química y del petróleo, aunque en la industria alimentaria también se utiliza, como es el caso de las industrias alcohólicas entre otras.

Cuando existe interacción entre las fases líquido y vapor, la destilación recibe el nombre de rectificación. En caso que no se presente esta interacción, se la denomina destilación simple. En la rectificación, al interaccionar las fases, la gaseosa va enriqueciéndose en el componente más volátil, mientras que la líquida lo hace en el más pesado. Esta interacción entre las fases puede llevarse a cabo en etapas de equilibrio o mediante un contacto continuo.

Otros tipos de destilación, distintos a los mencionados, son por arrastre de vapor, destilación azeotrópica y extractiva.

20.2. Equilibrio líquido-vapor

La transferencia de materia alcanza un límite cuando se llega al equilibrio entre las fases, y en este momento cesa la transferencia neta de alguno de los componentes. Por tanto, para que exista una fuerza impulsora de transferencia de materia se debe evitar llegar al equilibrio. El conocimiento del equilibrio entre las fases es muy importante para evaluar las fuerzas impulsoras. La composición del vapor en equilibrio con un líquido, de una composición dada, se determina experimentalmente mediante un destilador de equilibrio, denominado ebulómetro.

Si se consideran mezclas binarias cuyos componentes sean A y B , en las que A es el componente más volátil, la representación gráfica del equilibrio requiere un diagrama tridimensional. Aunque para un estudio más fácil se consideran secciones a temperaturas y presiones constantes, obteniéndose los diagramas isoterma e isóbaro, respectivamente.

Aplicando la regla de las fases de Gibbs a un sistema cerrado binario en equilibrio: $L = C - F + 2$; en donde L es el número de grados de libertad, C el de componentes y F el de fases. Para el caso presentado de la destilación binaria, el número de componentes y de fases es dos, por lo que los grados de libertad también serán dos. Luego si se especifican dos variables del sistema (temperatura y composición, temperatura y presión, o presión y composición), éste estará determinado, obteniendo sus valores del diagrama de equilibrio correspondiente.

En el diagrama isóbaro o diagrama de punto de ebullición, a presión constante, se observan dos curvas, una superior que refleja la variación de la composición del vapor con la temperatura de ebullición del líquido. Esta curva es la denominada curva de rocío o de condensación. La curva inferior, llamada curva de burbuja o ebullición, muestra la relación entre la temperatura de ebullición y la composición del líquido a presión constante. Las dos curvas delimitan tres zonas en el diagrama (figura 20.1). Una primera zona situada por debajo de la curva del punto de burbuja, en la que cualquier punto representa un sistema que se encuentra en fase líquida. La zona situada por encima de la curva de punto de rocío, en la que cualquier punto indica que el sistema que se representa se encuentra en fase vapor. Entre las dos curvas, de rocío y de burbuja, se encuentra encerrada una tercera zona, en la que cada punto representa sistemas que son

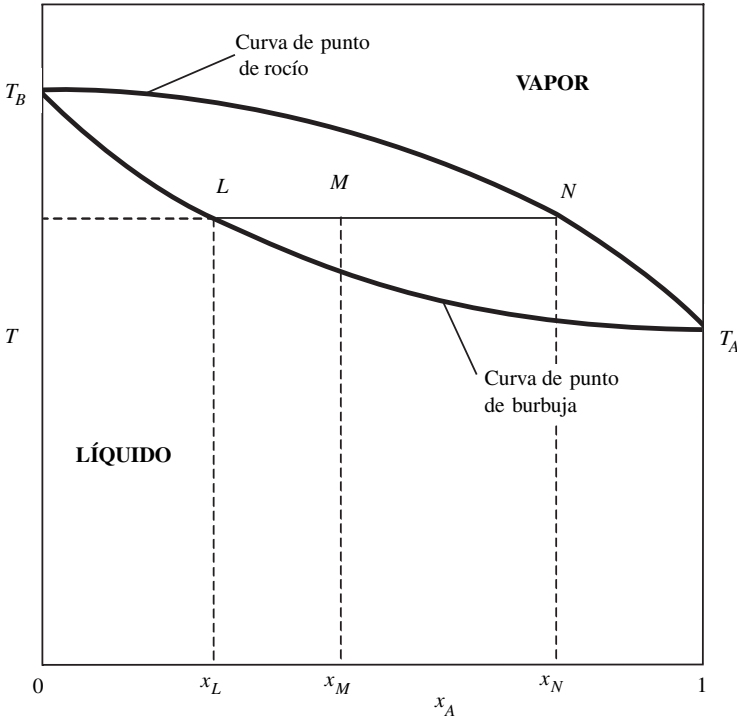


Figura 20.1. Diagrama temperatura-composición.

mezclas de dos fases. Así, el punto M del diagrama, que se encuentra en esta tercera zona, representa un estado en el que el sistema está constituido por una mezcla de líquido de composición x_L y de vapor de composición x_N , siendo la composición global del sistema x_M . La recta LN recibe el nombre de recta de reparto. Las cantidades relativas de ambas fases están relacionadas por los segmentos de unión:

$$\frac{\text{Moles de líquido}}{\text{Moles de vapor}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{ML}}$$

Existen sistemas en los que el diagrama isóbarico se desvía del comportamiento ideal, de tal forma que presentan curvas del tipo de la figura 20.2. Se observa que existe un mínimo en la curva de evaporación, que se corresponde a la temperatura de ebullición de una mezcla de composición x_Z , que es inferior a la del componente volátil puro. A la mezcla de composición x_Z se la conoce como mezcla azeotrópica o simplemente azeótropo. Puede verse que en este tipo de mezclas nunca se podrán obtener los componentes puros en una sola etapa de destilación, ya que tanto si se parte de mezclas de composición superior o inferior a x_Z , siempre se obtiene el azeótropo como una de las dos corrientes finales. Un sistema binario que se comporta como azeótropo es el agua-etanol. Además de este tipo de azeótropos con mínimo, existen sistemas azeotrópicos con máximos.

Como las destilaciones industriales tienen lugar básicamente a presión constante, resulta más adecuado representar las composiciones líquido-vapor sobre un diagrama de composición ($y-x$), denominado diagrama de equilibrio (figura 20.3). Las composiciones se dan en fracciones molares, estando representadas en absci-

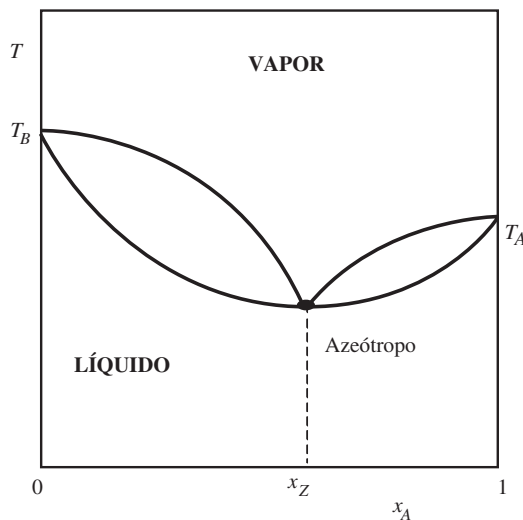


Figura 20.2. Diagrama T-x para un sistema binario con azeótropo.

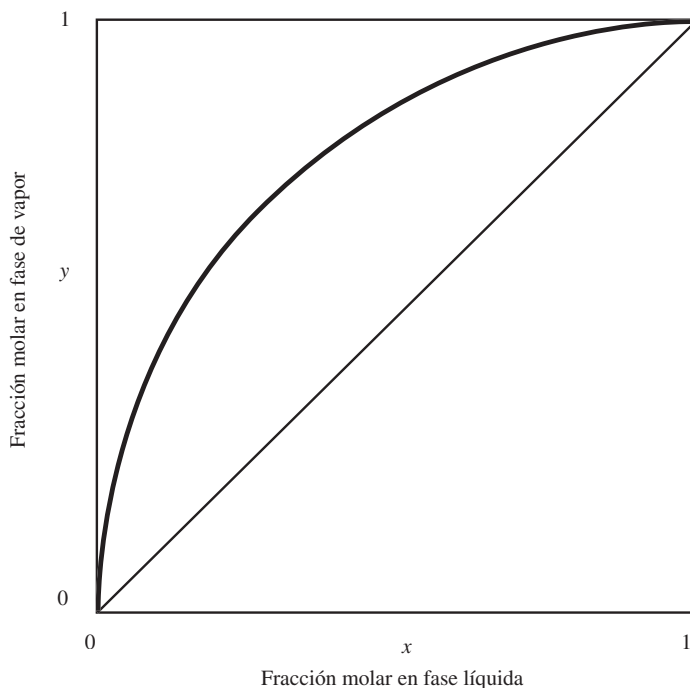


Figura 20.3. Diagrama de equilibrio y-x.

Las correspondientes a la fase líquida, mientras que en ordenadas se representan las fracciones molares de la fase gaseosa. En este diagrama la temperatura de cada punto varía a lo largo de la curva, y las líneas de unión se representan por puntos. Como el vapor es más rico en el componente más volátil, la curva se halla por encima de la diagonal. La facilidad de separación de los componentes es mayor cuanto mayor es la distancia entre la curva de equilibrio y la diagonal, pues mayor es la diferencia entre las composiciones del líquido y vapor.

En los diagramas isotermos se representan las variaciones de la presión con la composición a temperatura constante. En estos diagramas también se observan tres zonas, la de líquido, la de vapor y la de mezcla líquido-vapor.

20.2.1. Presiones parciales. Leyes de Dalton, Raoult y Henry

Si se supone una mezcla binaria, de componentes A y B, la presión parcial P_A que ejercerá el componente A en dicha mezcla, en fase vapor, será la que ejercería dicho componente a la misma temperatura si estuviera solo en el mismo volumen. La presión total es la suma de las presiones parciales de todos los componentes:

$$P = \sum P_i$$

Esta ecuación representa la conocida ley de Dalton para mezclas ideales. De la que se deduce que la presión parcial que ejerce un componente es proporcional a la fracción molar del componente en fase vapor:

$$P_i = y_i P \quad [20.1]$$

La ley de Raoult relaciona la presión parcial de cada componente en fase vapor con la fracción molar en la fase líquida, de forma que el factor de proporcionalidad es la presión de vapor del componente puro (P^0) a la misma temperatura:

$$P_i = x_i P^0 \quad [20.2]$$

esta relación se cumple normalmente tan sólo para elevados valores de x_i .

Las disoluciones ideales líquido-líquido siguen la ley de Raoult y la de Dalton en todo el intervalo de concentraciones de los componentes. Se considera como solución ideal, de dos líquidos volátiles, a la que se obtiene al mezclar dichos líquidos volátiles y se disuelven sin absorber ni desprender calor, de forma que los volúmenes resultan aditivos.

La ley de Henry relaciona la presión parcial del componente en fase vapor ejercida sobre la disolución, con la fracción molar en fase líquida:

$$P_i = x_i H \quad [20.3]$$

siendo H la denominada constante de Henry. Esta ley se podría enunciar del siguiente modo: *A temperatura constante, la solubilidad de un gas en un líquido es directamente proporcional a la presión parcial del gas en equilibrio con la disolución.* O bien que, supuesta la temperatura constante, la concentración de un gas disuelto en un líquido es directamente proporcional a la presión que el gas ejerce sobre la disolución con la que se encuentra en equilibrio.

Para una mezcla binaria, en la que A es el soluto y B el disolvente, la ley de Henry se cumple cuando x_A es pequeño, es decir, para soluciones diluidas, mientras que la de Raoult se cumple para valores pequeños de x_B . Si la ley de Henry es aplicable a un componente, para un intervalo de concentraciones, termodinámicamente se puede deducir que la ley de Raoult es aplicable al otro componente, en el mismo intervalo de concentraciones. Para soluciones ideales, las dos leyes son idénticas, y la constante de Henry coincide con la presión de vapor del componente en estado puro.

Las relaciones anteriores permiten calcular las composiciones de equilibrio en sistemas ideales líquido-vapor, si se conocen las presiones de vapor de las sustancias puras, a distintas temperaturas. Así, para un sistema binario, dado x_A es posible calcular la composición y_A en fase vapor, que se encuentra en equilibrio con x_A . Al combinar las expresiones de las leyes de Dalton y Raoult, es posible obtener la ecuación:

$$P_A = x_A \frac{P_A^0}{P} \quad [20.4]$$

La fracción molar x_A podrá calcularse al operar del siguiente modo:

$$P = P_A + P_B = x_A P_B^0 + x_B P_B^0 = x_A P_A^0 + (1 - x_A) P_B^0 \quad [20.5]$$

de la que se obtiene:

$$x_A = \frac{P - P_B^0}{P_A^0 - P_B^0} \quad [20.6]$$

20.2.2. Volatilidad relativa

Para relacionar las composiciones de equilibrio, entre la fase gaseosa y líquida, también se puede utilizar la volatilidad. Se define como volatilidad de un componente la relación entre la presión parcial en fase gaseosa y su fracción molar en la fase líquida:

$$\alpha_i = \frac{P_i}{x_i} \quad [20.7]$$

Para una mezcla binaria se define la volatilidad relativa de uno de los componentes respecto del otro como la razón entre las volatilidades de cada uno de dichos componentes:

$$\alpha_{AB} = \frac{\alpha_A}{\alpha_B} = \frac{P_A x_B}{P_B x_A} \quad [20.8]$$

y como:

$$\begin{aligned} P_A &= y_A P & , & & P_B &= y_B P \\ y_B &= 1 - y_A & , & & x_B &= 1 - x_A \end{aligned}$$

la volatilidad relativa será:

$$\alpha_{AB} = \frac{y_A (1 - x_A)}{x_A (1 - y_A)} \quad [20.9]$$

ecuación que permite despejar el valor de la fracción molar en fase líquida:

$$y_A = \frac{\alpha_{AB} x_A}{1 + (\alpha_{AB} - 1) x_A} \quad [20.10]$$

A partir de esta ecuación es posible construir la curva de equilibrio, dando valores a la composición en fase líquida se obtiene el correspondiente valor en fase gas.

Cuanto mayor sea el valor de la volatilidad relativa más fácilmente se logrará la separación de la mezcla. En el caso que su valor sea la unidad, no se logrará separación alguna. En un sistema ideal la volatilidad absoluta de cada componente es numéricamente igual a la presión de vapor del componente puro. Por tanto, la volatilidad relativa será: $\alpha_{AB} = P_A^0/P_B^0$.

La volatilidad relativa varía con la temperatura, de forma que al disminuir ésta, aquella crece. En el cálculo de la curva de equilibrio, a partir de la volatilidad relativa, debe tomarse un valor medio de ésta a lo largo de toda la columna. Esto es válido si las volatilidades en los extremos inferior y superior de la columna no difieren más del 15%. Cuando esto no es cierto, la curva de equilibrio se construirá para diferentes tramos, de forma que en cada tramo la volatilidad relativa sea la misma.

En algunos casos la relación de equilibrio entre las dos fases viene dada por una ecuación del tipo: $y_i = K x_i$, en la que K_i es en muchos casos constante en un amplio intervalo de temperaturas.

20.2.3. Diagrama entalpía-composición

En algunos problemas de destilación es preciso tener en cuenta los calores de mezcla, calores latentes y los calores sensibles de los componentes de la mezcla. En el caso de mezclas binarias, todas estas magnitudes, y los datos de equilibrio, pueden representarse en forma gráfica en el denominado diagrama entalpía-composición.

En un diagrama de este tipo se representa en abscisas la composición molar (o másica) del componente más volátil de la mezcla, y en ordenadas se representan las entalpías específicas (kJ/kg o kJ/kmol) correspondientes a cada composición. Estas entalpías están referidas a un estado de referencia del agua líquida a 0 °C y 1 atm.

En la figura 20.4 se representa un diagrama típico entalpía-composición, para una mezcla binaria. En abscisas se representa la fracción molar o másica del vapor (y) y del líquido (x); mientras que en ordenadas se dan las entalpías del vapor \hat{H} y del líquido \hat{h} . Al representar la entalpía del líquido saturado, \hat{h}_s , frente a

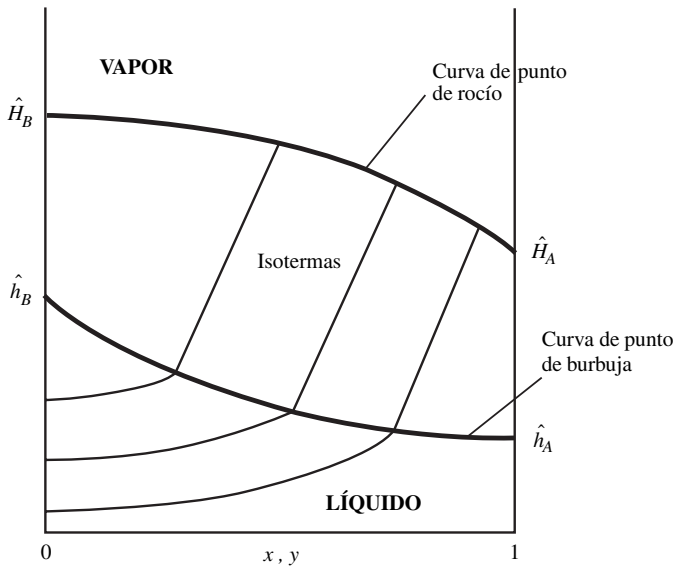


Figura 20.4. Diagrama entalpía-composición.

la composición, se obtiene la línea correspondiente al líquido saturado o curva de punto de burbuja. Si se representa la entalpía del vapor, \hat{H} , se obtiene la línea de vapor saturado o curva de rocío.

20.3. Destilación de mezclas binarias

En la práctica existen diferentes métodos de destilación de mezclas binarias; en este apartado se describen los métodos de destilación simple y flash, mientras que los métodos de rectificación, tanto continua como discontinua se describirán con más detalle en apartados posteriores.

20.3.1. Destilación simple

En la destilación simple abierta o diferencial se trabaja de forma discontinua en una sola etapa (figura 20.5). El modo de operar es el siguiente: se carga el calderín con la mezcla a destilar, y mediante aporte de calor se van formando vapores, que se retiran continuamente, de forma que no haya retorno de condensado hacia el calderín. Inicialmente, los vapores formados contendrán un elevado porcentaje del

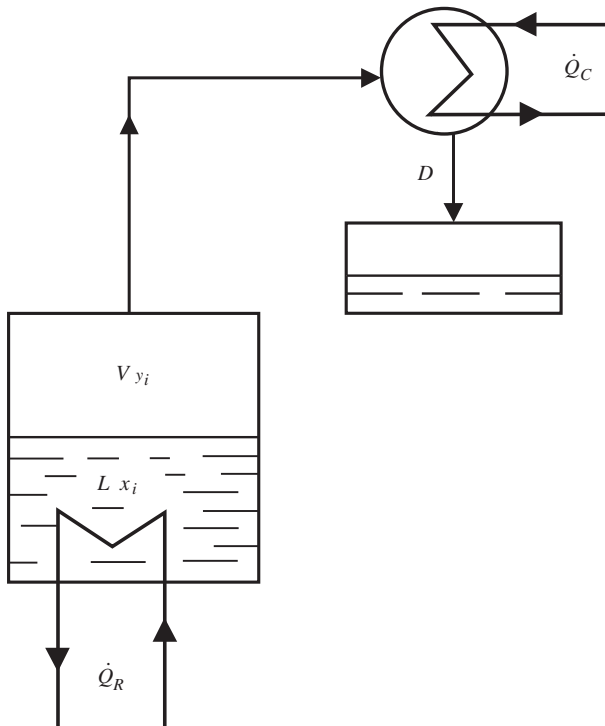


Figura 20.5. Destilación simple.

componente más volátil. La composición del calderín va variando continuamente, elevándose la composición del componente más pesado, no existiendo estado estacionario. Como la cantidad de calor que se aporta al calderín se hace a una velocidad constante, la temperatura de ebullición de la carga irá aumentando a medida que se vaya empobreciendo del componente más volátil.

Para obtener el modelo matemático de esta operación deben realizarse los balances que a continuación se detallan.

Se realiza un balance global molar:

$$\frac{d(L + V)}{dt} = -D \quad [20.11]$$

en la que L y V son las cantidades molares de líquido y vapor en el calderín, mientras que D es la cantidad de destilado obtenido. La densidad molar del vapor es muy inferior a la del líquido, y en el caso que V no sea muy elevada, la ecuación anterior se puede expresar como: $dL/dt = -D$

Balance de componente volátil:

$$\frac{d(Lx + Vy)}{dt} = -Dy \quad [20.12]$$

pero como $dL/dt = -D$

$$L \frac{dx}{dt} + x \frac{dL}{dt} = y \frac{dL}{dt}$$

$$(y - x) \frac{dL}{dt} = L \frac{dx}{dt} \quad [20.13]$$

que para un intervalo de tiempo diferencial se cumple:

$$\frac{dL}{L} = \frac{dx}{y - x} \quad [20.14]$$

Ecuación diferencial en variables separables. Si se parte de L_0 moles iniciales, de composición x_0 , la integración de esta ecuación conduce a la expresión:

$$\ln \left(\frac{L}{L_0} \right) = \int_{x_0}^x \frac{dx}{y - x} \quad [20.15]$$

Esta expresión recibe el nombre de ecuación de Rayleigh. El término integral se puede calcular gráfica o numéricamente, si se conoce la relación de equilibrio entre las composiciones en las fases vapor y líquido, para las temperaturas inicial y final. Si se representa gráficamente $1/(y - x)$ frente a x se obtiene el valor del término integral entre las composiciones x_0 y x , inicial y final, respectivamente.

En el caso de que la relación de equilibrio sea lineal, es decir, si se cumple $y = mx + c$, el término integral presenta solución analítica:

$$\frac{L}{L_0} = \left(\frac{y - x}{y_0 - x_0} \right)^{1/(m-1)} \quad [20.16]$$

Si la relación de equilibrio es $y = Kx$, se obtiene la ecuación:

$$\frac{L}{L_0} = \left(\frac{x}{x_0} \right)^{1/(K-1)} \quad [20.17]$$

Si se presenta el caso en el que se puede suponer constante la volatilidad relativa, el término integral también presenta solución analítica, obteniéndose la expresión:

$$\ln \left(\frac{Lx}{L_0 x_0} \right) = \alpha \ln \left[\frac{L(1-x)}{L_0(1-x_0)} \right] \quad [20.18]$$

20.3.2. Destilación súbita

La destilación súbita o *flash*, llamada también cerrada o de equilibrio, consiste en vaporizar una cierta cantidad de líquido, de forma que el vapor generado se halle en equilibrio con el líquido residual. El vapor es separado y se condensa separadamente. El modo de operar se halla esquematizado en la figura 20.6. Una mezcla con L_0 moles y composición x_0 se introduce en una cámara en que la presión es inferior a la de la mezcla, de este modo se separan V moles de vapor de composición y , y L moles de líquido de composición x . Las composiciones y , x de las fases separadas se hallan en equilibrio.

Del balance global y de componente volátil se obtienen las expresiones:

$$L_0 = V + L$$

$$L_0 x_0 = V y + L x$$

con lo que:

$$y = -\left(\frac{L}{V}\right)x + \left(\frac{L+V}{V}\right)x_0 \quad [20.19]$$

Si f es la fracción de moles de alimentación vaporizados: $f = V/L_0$, se tiene:

$$y = -\frac{1-f}{f}x + \frac{x_0}{f} \quad [20.20]$$

que en el diagrama $y-x$ se corresponde a la ecuación de una recta, que une las composiciones de la mezcla inicial con las de las corrientes vapor y líquida separadas. Por tanto, si se desea conocer las composiciones de estas corrientes, desde el punto de la diagonal de abscisa x_0 , se traza una recta de pendiente $-(1-f)/f$, y en el punto de corte de esta recta con la curva de equilibrio se obtienen las composiciones deseadas (figura 20.6).

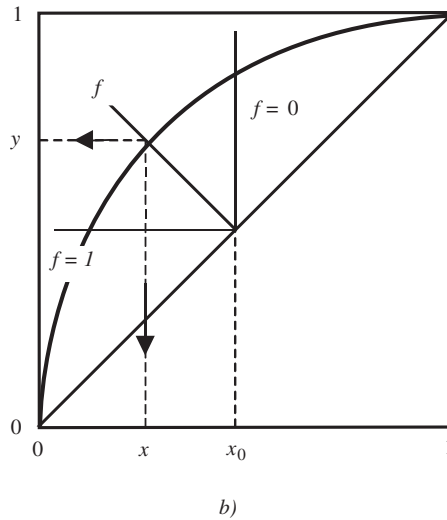
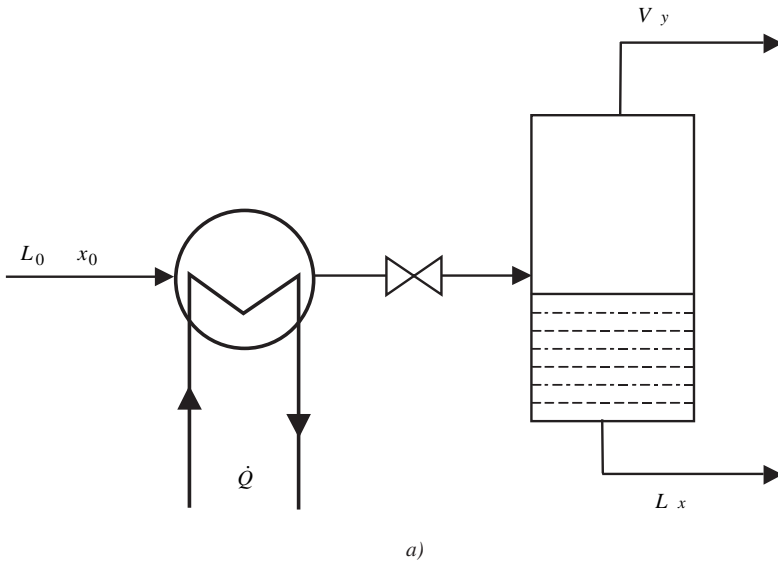


Figura 20.6. Destilación súbita: a) Esquema de la instalación. b) Operación en el diagrama de equilibrio.

En el caso que $f = 0$ no se obtiene corriente de vapor, y la mezcla no se logra separar. Si $f = 1$, toda la mezcla pasa a fase vapor, y lo único que se logra es un cambio de fase, sin separación de la mezcla.

20.4. Rectificación continua de mezclas binarias

En todo proceso de destilación el vapor que se forma en el calderín es más rico en el componente volátil que el líquido que queda en él. Sin embargo, el vapor contiene cantidades de ambos componentes, y el destilado raramente es una sustancia pura. Para aumentar la concentración del componente más volátil en el vapor, y separar el menos volátil de ésta, el vapor se pone en contacto con una corriente descendente de líquido hirviente. Por la parte superior de la columna de destilación se introduce una corriente de líquido de alta concentración del componente volátil, que se denomina reflujo. Los componentes más volátiles se concentran en la fase vapor, y los menos volátiles en la fase líquida. De esta forma, la fase vapor se va haciendo más rica en el componente más volátil a medida que va ascendiendo por la columna, mientras que la fase líquida es cada vez más rica en el componente más pesado conforme se desciende.

La separación que se logra de la mezcla, entre el producto superior y el inferior, depende de las volatilidades relativas de los componentes, el número de etapas de contacto y de la razón de reflujo.

El proceso descrito recibe el nombre de rectificación, y se lleva a cabo en columnas de fraccionamiento, que operan de forma continua. La figura 20.7 representa el esquema típico de una columna de rectificación. En estas columnas existe un aporte de calor \dot{Q}_R en la caldera, lo que crea una corriente de vapor ascendente. El vapor que sale por la parte superior de la columna V_D se condensa y se lleva en forma líquida a un acumulador. Parte de este condensado se obtiene como producto destilado D , rico en el componente más volátil, mientras que otra parte L_D se devuelve a la columna por la parte superior en forma de reflujo líquido. A la caldera llega líquido procedente de la columna, retirándose el exceso como corriente de residuo R , rica en el componente más pesado. La columna se alimenta de forma continua mediante una corriente A , que es la mezcla a destilar. El plato en el que se introduce la alimentación divide a la columna en dos partes, la superior que recibe el nombre de zona de rectificación o *enriquecimiento*, y la inferior o zona de *agotamiento*. En la zona de rectificación o enriquecimiento se produce un enriquecimiento en el componente más volátil, eliminando parte del componente más pesado del vapor ascendente. En la zona de agotamiento se elimina o agota el componente más volátil del líquido descendente.

En cada plato de la columna tiende a alcanzarse el equilibrio del sistema. En cada plato se encuentran el vapor ascendente y el líquido descendente, que no están en equilibrio. El componente más pesado condensa desde el vapor ascendente y su calor latente de condensación se utiliza para vaporizar parte del componente más volátil de la corriente de reflujo, con lo que el vapor se enriquece del componente más volátil, mientras que la corriente de reflujo líquido se va empobreciendo. El resultado de ello es que las corrientes que abandonan cada plato tienden al equilibrio. En la figura 20.8 se indica el proceso hacia el equilibrio en un plato que se halla a la temperatura T_n .

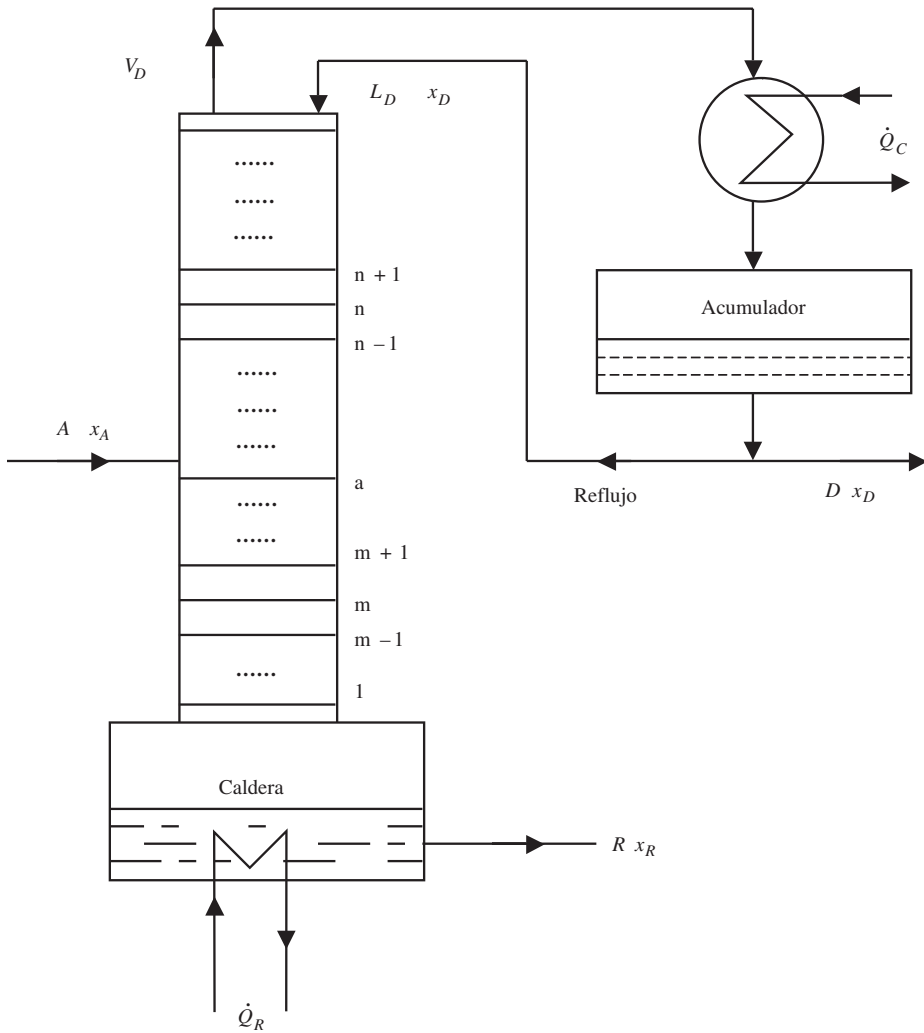


Figura 20.7. Columna de rectificación.

20.4.1. Cálculo del número de platos

En el diseño de las unidades necesarias que proporcionen un fraccionamiento dado, es necesario desarrollar un modelo matemático que permita calcular el número de platos necesarios. Otros factores fundamentales en el diseño de una unidad de destilación son, entre otros, el número de platos, el diámetro de la columna, el calor que debe suministrarse al calderín y el que debe retirarse en el condensador. El análisis del funcionamiento de las columnas de platos se basa en el planteamiento y resolución de los balances de materia y energía.

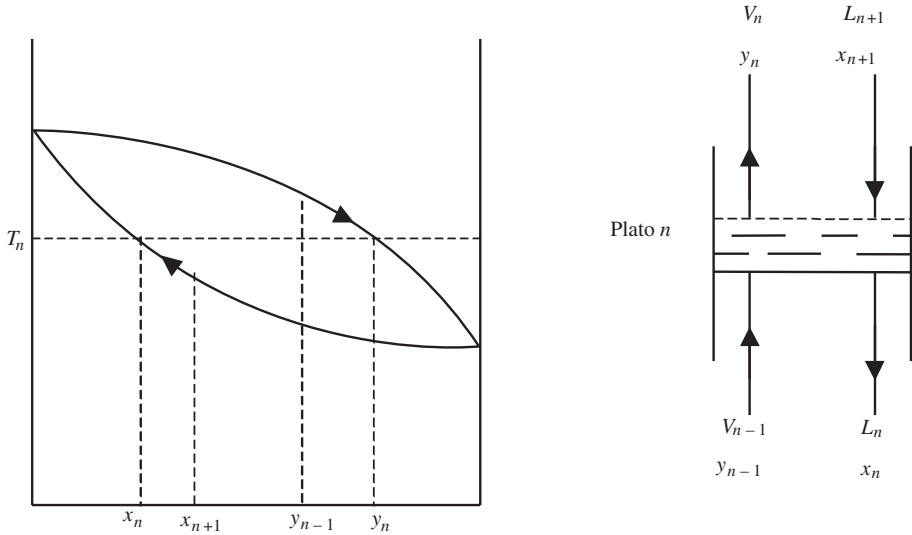


Figura 20.8. Evolución de las concentraciones de las fases en un plato n.

20.4.1.1. Modelo matemático

Para realizar el planteamiento del modelo matemático se supondrá que la columna se halla perfectamente aislada, con lo que las pérdidas de calor hacia el exterior se consideran nulas. Además, se considera un sistema ideal en el que el calor de mezcla es cero. Los balances se aplicarán a una columna de rectificación tal como la mostrada en la figura 20.7. El modelo matemático se obtendrá al realizar los balances en las distintas partes de la columna. Además, se utilizarán unidades molares, que facilitan los cálculos de problemas de destilación. Las entalpías de las corrientes de vapor se representarán por \hat{H} , mientras que las de líquido por \hat{h} . Las diferentes composiciones y variables llevan los subíndices de las corrientes correspondientes.

A) Balance global a toda la columna

Los balances molares global y de componente, así como el global de energía permiten obtener:

- Balance global: $A = D + R$ [20.21]
- Balance componente volátil: $Ax_A = Dx_D + Rx_R$ [20.22]
- Balance de energía: $A \hat{H}_A + \dot{Q}_R = D \hat{h}_D + R \hat{h}_R + \dot{Q}_D$ [20.23]

en las que A, D y R son las corrientes molares de alimento, destilado y residuo, respectivamente.

B) Balances en el condensador

Los balances realizados en condensador son:

$$V_D = L_D + D \quad [20.24]$$

$$V_D y_D = L_D x_D + Dx_D \quad [20.25]$$

si la condensación es total se cumple que $y_D = x_D$

$$V_D \hat{H}_D = (L_D + D) \hat{h}_D + \dot{Q}_D \quad [20.26]$$

El calor que se elimina en el condensador es:

$$\dot{Q}_D = V_D \hat{H}_D - (L_D + D) \hat{h}_D = V_D (\hat{H}_D - \hat{h}_D) \quad [20.27]$$

que en el caso que el vapor que entra al condensador V_D se halle en su punto de rocío, las entalpías del vapor \hat{H}_D y del líquido \hat{h}_D se hallan en su punto de saturación, cumpliéndose que $\hat{H}_D - \hat{h}_D = \lambda_C$, que es el calor latente de condensación de la mezcla del vapor que llega al condensador. Por tanto, la cantidad de calor eliminado en el condensador será:

$$\dot{Q}_D = \lambda_D V_D \quad [20.28]$$

C) Balances en la caldera

Al realizar los balances en la caldera se obtiene:

$$L_1 = R + V_R \quad [20.29]$$

$$L_1 x_1 = Rx_R + V_R y_R \quad [20.30]$$

$$L_1 \hat{h}_1 + \dot{Q}_R = R \hat{h}_R + V_R \hat{H}_R \quad [20.31]$$

con lo que el calor que se debe aportar en el calderín será:

$$\dot{Q}_R = R \hat{h}_R + V_R \hat{H}_R - L_1 \hat{h}_1 \quad [20.32]$$

Es importante resaltar que las entalpías de las distintas corrientes que aparecen en esta ecuación dependen no sólo de la temperatura, sino también de la composición. Por tanto, se debería escribir:

$$\hat{h}_R = \hat{h}_R(x_R, T_R) \quad \hat{H}_R = \hat{H}_R(y_R, T_R) \quad \hat{h}_1 = \hat{h}_1(x_1, T_1)$$

Por lo que es fácil observar que en la ecuación 20.32 el calor \dot{Q}_R no se obtiene directamente con el calor de condensación de la mezcla del calderín, ya que éste es la diferencia entre las entalpías del vapor y líquido del residuo, pero a la misma composición y_R y temperatura T_R : $\lambda_R = \hat{H}_R(y_R, T_R) - \hat{h}_R(y_R, T_R)$.

En el caso que la entalpía del líquido sea sólo función de la temperatura, y suponiendo despreciables los calores sensibles, se cumple:

$$\dot{Q}_R = \lambda_R V_R \quad [20.33]$$

D) Balances en la zona de enriquecimiento

Los balances se aplican entre un plato n (excluyéndolo) y la parte superior de la columna.

$$V_n - L_{n+1} = V_D - L_D = D \quad [20.34]$$

$$V_n y_n - L_{n+1} x_{n+1} = V_D y_D - L_D x_D = D x_D \quad [20.35]$$

$$V_n \hat{H}_n - L_{n+1} \hat{h}_{n+1} = V_D \hat{H}_D - L_D \hat{h}_D \quad [20.36]$$

E) Balances en la zona de agotamiento

Los balances se realizan entre un plato m (incluyéndolo) y el fondo de la columna.

$$V_m + R = L_{m+1} \quad [20.37]$$

$$V_m y_m + R x_R = L_{m+1} x_{m+1} \quad [20.38]$$

$$V_m \hat{H}_m + R \hat{h}_R = L_{m+1} \hat{h}_{m+1} - \dot{Q}_R \quad [20.39]$$

F) Balances en el plato de alimentación

Los balances en este plato dan las siguientes ecuaciones:

$$A = V_a - L_{a+1} + L_a - V_{a-1} = D - R \quad [20.40]$$

$$A x_A = V_a y_a - L_{a+1} x_{a+1} + L_a x_a - V_{a-1} y_{a-1} \quad [20.41]$$

$$A \hat{H}_A = V_a \hat{H}_a - L_{a+1} \hat{h}_{a+1} + L_a \hat{h}_a - V_{a-1} \hat{H}_{a-1} \quad [20.42]$$

20.4.1.2. Resolución del modelo matemático. Método de McCabe-Thiele

Una vez planteado el modelo matemático, el siguiente paso es resolverlo con los datos correspondientes. Generalmente, se dan como datos el caudal de alimentación A , las composiciones del alimento x_A , del residuo x_R y del destilado x_D .

Básicamente existen tres métodos de resolución del modelo matemático. Uno de ellos es el método de Ponchon-Savarit, en el que es necesario trabajar con el diagrama entálpico. Otro método es el de Lewis-Sorel, en el que se determina analíticamente el número de etapas teóricas mediante un cálculo piso a piso. Sin embargo, en este apartado sólo se describirá de forma detallada el método de McCabe-Thiele.

Para aplicar el método de McCabe-Thiele en el cálculo del número de platos teóricos de una columna de destilación es necesario realizar las siguientes hipótesis:

- Los calores específicos de todos los líquidos y vapores son constantes e iguales.
- Los calores latentes de vaporización son constantes e iguales.
- Los calores de mezcla son nulos.
- La columna trabaja de forma adiabática.

Si en el diagrama entalpía-composición las líneas de vapor y líquido saturado son rectas paralelas, los caudales de líquido y vapor en cada zona son constantes. Esto se cumple para diversas mezclas binarias de sustancias orgánicas en las que los calores latentes molares son parecidos. Si se cumplen las hipótesis establecidas, se cumplirá que al ser el calor molar de vaporización constante, al condensar V_{n-1} moles de vapor cederá una cantidad de calor suficiente para vaporizar V_n moles, con lo que $V_{n-1} = V_n$. Es decir, el flujo molar de vapor es constante a lo largo de toda la sección o zona considerada. Del balance entálpico se puede demostrar que $L_n = L_{n+1}$. De forma general, V_n y L_n son constantes en la zona de enriquecimiento, y V_m y L_m en la de agotamiento.

La condición del alimento es un dato muy importante en las operaciones de destilación. Se define q como la fracción del alimento A que está en forma líquida. Por tanto, al entrar el alimento en el plato de alimentación, la fracción $q \cdot A$ acompañará a la corriente de líquido que desciende por la columna. Si se tienen en cuenta las hipótesis anteriores, al realizar un balance en este plato se obtiene:

$$L_m = L_n + q \cdot A \quad [20.43]$$

$$V_m = V_n + (q - 1) A \quad [20.44]$$

Del balance entálpico en este plato [ec. 20.42]:

$$A \hat{J}_{L_A} = V_a \hat{H}_a - L_{a+1} \hat{h}_{a+1} + L_a \hat{h}_a - V_{a-1} \hat{H}_{a-1}$$

al cumplirse que las corrientes de líquido y vapor son constantes en cada zona, y de las ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$A [\hat{J}_{L_A} + (q + 1) \hat{H}_a - q \hat{h}_a] = V_n (\hat{H}_a - \hat{H}_a) + L_n (\hat{h}_a - \hat{h}_a) = 0$$

con lo que:

$$q = \frac{\hat{H}_a - \hat{J}_{L_A}}{\hat{H}_a - \hat{h}_a} \quad [20.45]$$

en el caso que la temperatura del plato de alimentación T_a sea la misma que la del alimento T_A se observa que la condición del alimento q es la relación entre el calor necesario para vaporizar un mol del alimento y el calor latente molar de la alimentación.

$$q = \frac{\text{Calor para vaporizar 1 mol del alimento}}{\text{Calor latente molar de la alimentación}}$$

Los balances molares de la zona de enriquecimiento han permitido obtener la ecuación 20.35, y si se tiene presente que se cumplen las hipótesis anteriores: $V_n = V_D$ y $L_n = L_D$ se obtiene:

$$y_n = \frac{L_D}{V_D} x_{n+1} + \frac{D x_D}{V_D} \quad [20.46a]$$

que en el diagrama de equilibrio $y-x$ es la ecuación de una recta, conocida como **recta de enriquecimiento**. Esta recta relaciona las composiciones del vapor del plato n con la del líquido del plato superior $n+1$.

Si se define la **relación de reflujo** $r = L_D/D$ como la relación entre las corrientes molares líquida que se devuelve a la columna como reflujo y la corriente de destilado, la ecuación anterior se puede expresar como:

$$y_n = \frac{r}{r + 1} x_{n+1} + \frac{x_D}{r + 1} \tag{20.46b}$$

que es otro modo de expresar la recta de enriquecimiento. En el diagrama $y-x$, esta recta pasa por los puntos (x_D, x_D) y $(0, D x_D/V_D)$ y siendo su pendiente L_D/V_D .

Del balance de componente volátil en la zona de agotamiento se ha obtenido la ecuación 20.38. Si se tienen presentes las hipótesis de McCabe-Thiele y en esta ecuación se sustituyen las ecuaciones 20.43 y 20.44 se obtiene:

$$y_m = \frac{L_n + q A}{V_n + (q - 1) A} x_{m+1} - \frac{R x_R}{V_n + (q - 1) A} \tag{20.47}$$

En el diagrama de equilibrio $y-x$ esta expresión es la ecuación de una recta que pasa por el punto (x_R, x_R) y tiene de pendiente la relación L_m/V_m . Además, correlaciona la composición del vapor que sale del plato m con la del líquido que proviene del plato superior $m+1$.

El punto de corte de las rectas de operación de enriquecimiento y agotamiento se obtiene al resolver el sistema formado por las ecuaciones 20.46a y 20.47. Al resolver este sistema se obtiene:

$$y = \frac{q}{q - 1} x - \frac{x_A}{q - 1} \tag{20.48}$$

que es la ecuación de una recta y representa el lugar geométrico de intersección de las rectas de operación en función de la condición q del alimento. A esta ecuación se la denomina **recta q** . La recta q pasa por el punto (x_A, x_A) y tiene de pendiente $m = q/(q - 1)$. Por tanto, conocida la recta de enriquecimiento, al unir el punto de corte de ésta en la recta q con el punto (x_R, x_R) se obtiene la recta de agotamiento.

Dependiendo de la condición del alimento el valor de q , y por tanto la pendiente de la recta q , serán diferentes:

$q > 1$	líquido subenfriado	$1 < m < \infty$
$q = 1$	líquido a su punto de burbuja	$m = \infty$
$0 < q < 1$	mezcla líquido-vapor	$\infty > m > 0$
$q = 0$	vapor a su punto de rocío	$m = 0$
$q < 0$	vapor sobrecalentado	$1 > m > 0$

Para determinar el **número de platos** o etapas teóricas, según el método McCabe-Thiele, se opera del siguiente modo:

Se trazan las rectas de operación en el diagrama $y-x$. Puede empezarse en la parte superior, trazando escalones a partir del punto (x_D, x_D) entre la recta de operación de la zona de enriquecimiento y la curva de equilibrio, hasta que se rebasa la recta q del alimento. A partir de este punto los escalones se trazan utilizando la recta de la zona de agotamiento, hasta rebasar el punto (x_R, x_R) . La fracción de etapa que pueda aparecer se supone como entera (figura 20.9).

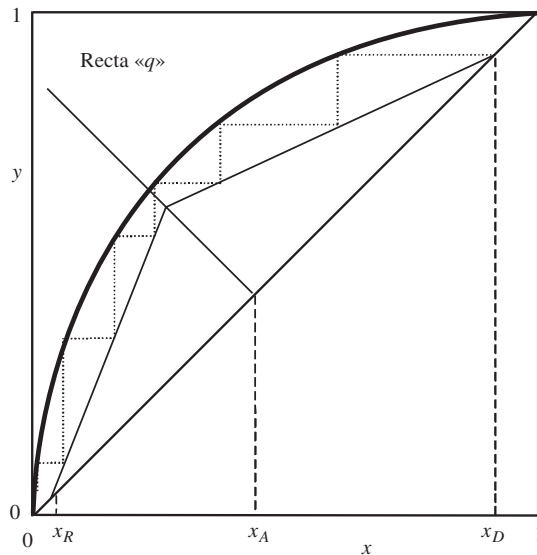


Figura 20.9. Cálculo del número de platos por el método de McCabe-Thiele.

De las infinitas soluciones del plato en que debe introducirse el alimento, es conveniente evaluar el óptimo; es decir, aquél que de lugar a un menor número de platos. Esta condición de óptimo se cumple cuando el alimento se introduce al rebasar el punto de corte de las rectas de operación (x_a^*, y_a^*) .

El método de McCabe-Thiele supone que el flujo molar en cada zona de la columna es constante, y en la mayoría de los casos se puede suponer que es así, ya que los calores molares de muchos sistemas difieren en menos del 10%. Este método no se podrá aplicar en los casos en que las líneas de operación presenten una fuerte curvatura. Tampoco debe utilizarse cuando la volatilidad relativa es inferior a 1,3 o superior a 5, o cuando la razón de reflujo es inferior a 1,1 la mínima, o bien si son necesarios más de 25 platos.

20.4.2. Relación de reflujo

Tal como se ha visto anteriormente, la relación de reflujo se define como el cociente entre la cantidad de reflujo que se devuelve a la columna por su cabeza en forma líquida, y la cantidad de producto destilado obtenido: $r = L_D/D$.

La recta de enriquecimiento puede ponerse en función de esta relación de reflujo [ecuación 20.46b]:

$$y_n = \frac{r}{r+1} x_{n+1} + \frac{x_D}{r+1} \quad [20.46b]$$

Por tanto, si se varía la relación de reflujo, se modificará la pendiente de esta recta de operación, y con ello variará el número de platos necesarios para una separación dada. Conocida la relación de reflujo r , la recta de enriquecimiento se obtendrá al unir los puntos de coordenadas (x_D, x_D) y $(0, x_D/r+1)$.

En el caso que todo el destilado se devuelva a la columna en forma de reflujo, se dice que la columna trabaja a **reflujo total**. Como no se obtiene destilado ($D = 0$), la recta de operación en la zona de enriquecimiento posee de pendiente la unidad y ordenada en el origen cero; es decir, esta recta posee de ecuación $y = x$, y coincide con la diagonal.

Si la relación de reflujo va disminuyendo, implica que el número de platos aumentará, pues la pendiente de la línea de operación se va haciendo menor. Si se va reduciendo r llega un momento en que la recta de operación corta a la de equilibrio, en el punto en que el valor de la composición es justamente x_A . Si la relación de reflujo se disminuye por debajo de este valor, es imposible llegar al plato de alimentación.

Cuando la recta de operación de la zona de enriquecimiento corta a la curva de equilibrio, el número de platos para alcanzar un alimento de composición x_A es infinito.

20.4.2.1. Relación de reflujo mínima

Como se ha visto, existe un valor de la relación de reflujo por debajo del cual es imposible realizar una separación dada, este valor recibe el nombre de relación o razón de reflujo mínima. Esta relación de reflujo mínima depende de la condición del alimento, es decir, de la recta q . En general, para obtener el valor de la razón de reflujo mínima se traza la recta de operación, desde el punto de la diagonal (x_D, x_D) al punto en que la recta q corta a la curva de equilibrio. De la pendiente de esta recta se obtiene la razón de reflujo mínima r_m .

Para un sistema binario normal, en que la curva de equilibrio es tal como se muestra en la figura 20.10, la recta q corta a la curva de equilibrio en el punto (x_A^*, y_A^*) . La pendiente de la recta que une los puntos (x_D, x_D) y (x_A^*, y_A^*) será:

$$\left(\frac{L}{V} \right)_{\min} = \frac{r_m}{r_m + 1} = \frac{x_D - y_A^*}{x_D - x_A^*}$$

con lo que la razón de reflujo mínima será:

$$r_m = \frac{x_D - y_A^*}{y_A^* - x_A^*} \quad [20.49]$$

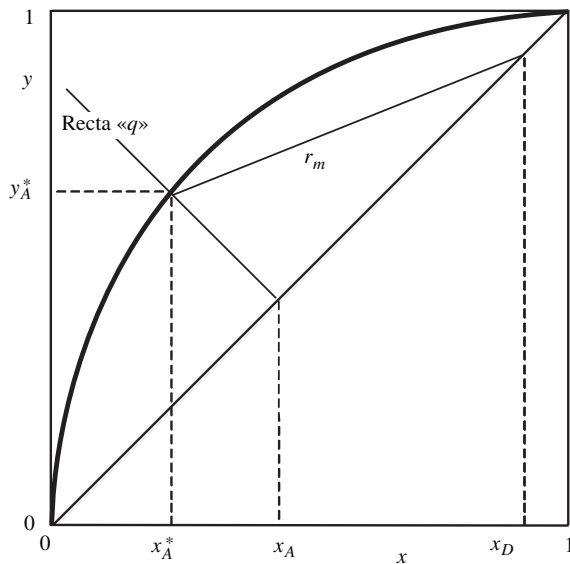


Figura 20.10. Relación de reflujo mínima.

Si el alimento es líquido a su punto de burbuja $q = 1$, resultando la recta q vertical, y corta a la curva de equilibrio en y_A^* , $x_A^* = x_A$, por lo que la relación de reflujo mínima será:

$$r_m = \frac{x_D - y_A^*}{y_A^* - x_A} \quad [20.50]$$

Si el alimento es vapor a su punto de rocío $q = 0$, resultando que la recta q es horizontal, y corta a la curva de equilibrio en un punto en que $y_A^* = x_A$, con lo que:

$$r_m = \frac{x_D - x_A}{x_A - x_A^*} \quad [20.51]$$

Existen casos, como el mostrado en la figura 20.11, en los que si se uniese el punto (x_D, x_D) con el punto de corte de la recta q con la curva de equilibrio, la recta de operación estaría por encima de la curva de equilibrio, y la operación no sería posible. En estos casos, la razón de reflujo mínima se obtiene a partir de la pendiente de la recta tangente a la curva de equilibrio, trazada desde el punto de la diagonal (x_D, x_D) .

En el caso que la inflexión fuese en la zona inferior de la curva, se traza desde (x_R, x_R) la tangente a la curva de equilibrio, y en el punto que corta a la recta q , se une al punto (x_D, x_D) , para obtener la recta de operación, que será la que da la razón de reflujo mínima (figura 20.11).

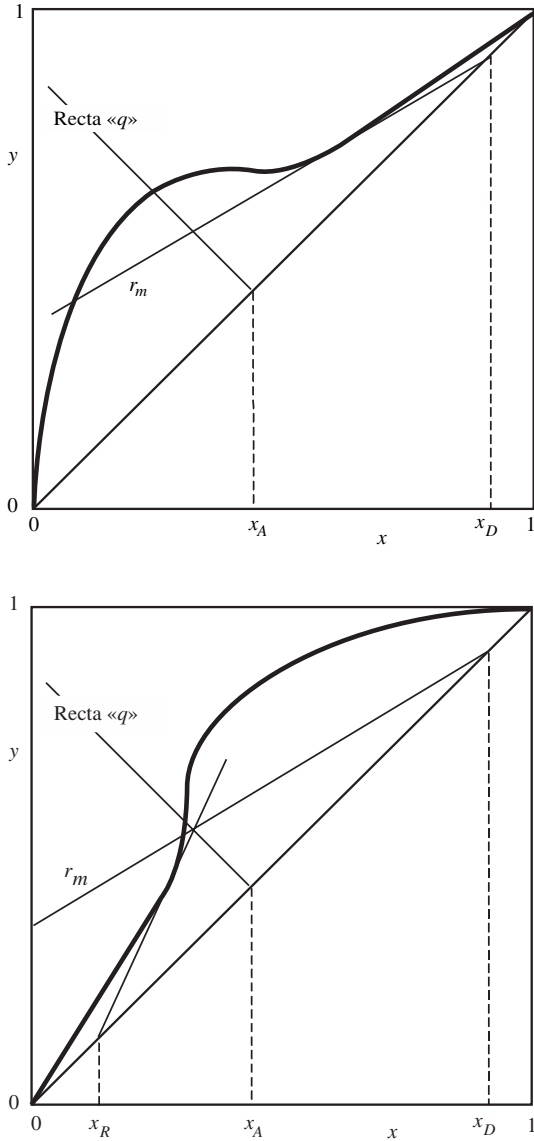


Figura 20.11. Obtención de la relación de reflujo mínima en sistemas especiales.

En el caso que la curva de equilibrio sea cóncava hacia arriba, la relación de reflujo mínima puede calcularse analíticamente, y en el caso particular de volatilidad relativa constante, se obtiene de la ecuación:

$$r_m = \frac{1}{\alpha - 1} \left(\frac{x_D}{x_A^*} - \alpha \frac{1 - x_D}{1 - x_A^*} \right) \quad [20.52]$$

que es la denominada ecuación de Fenske-Underwood.

20.4.2.2. Número de platos a reflujo total

Cuando todo el destilado que se obtiene en el condensador de cabeza se devuelve a la columna en forma de reflujo líquido, la recta de operación coincide con la diagonal, y el número de platos que se requieren para obtener una determinada separación es mínimo. Cuando la volatilidad relativa es constante se puede aplicar el método de Fenske, para obtener el número de platos necesarios en una separación dada, trabajando a reflujo total.

Para el caso de mezclas binarias, con dos componentes A y B , el número de platos teóricos N se calcula a partir de la expresión:

$$N + 1 = \frac{\log \left[\left(\frac{x_A}{x_B} \right)_D \left(\frac{x_B}{x_A} \right)_R \right]}{\log \alpha_{AB}} \quad [20.53]$$

siendo α_{AB} la volatilidad relativa de A respecto a B [ec. 20.8].

20.4.3. Alimentaciones múltiples y extracciones laterales

A veces se presentan casos en los que dos o más mezclas de alimentación de las mismas sustancias, pero de distinta composición, se deben destilar para obtener los mismos productos (figura 20.12). Para resolver este problema por el método McCabe-Thiele, la recta de enriquecimiento por encima de la alimentación A_1 se construye de forma usual. La que está entre las dos alimentaciones se construye desde el punto de intersección de la recta q_1 , de la alimentación más rica en componente volátil, con la de operación superior, con una pendiente L_1/V_1 ; donde L_1 y V_1 son las corrientes de líquido y vapor en esta zona de la columna. Estas corrientes se calculan al realizar un balance molar en el plato de alimentación superior:

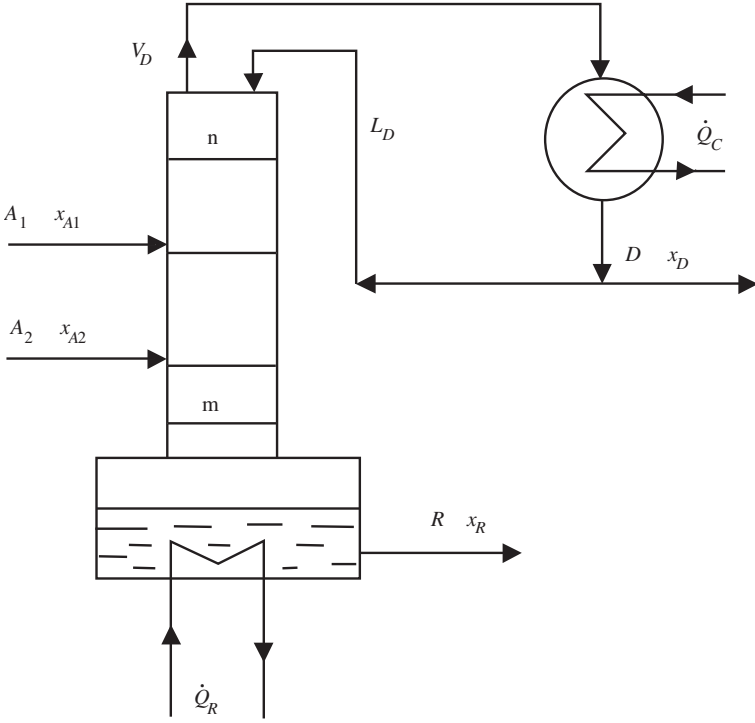
$$L_1 = L + q_1 A_1$$

$$V_1 = V + (q_1 - 1) A_1$$

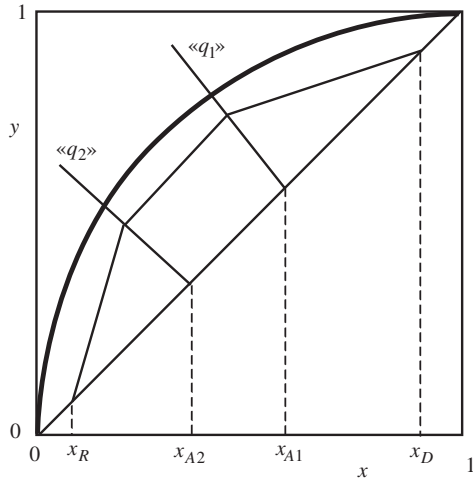
La recta de operación para la zona de agotamiento se construye uniendo el punto (x_R, x_R) , con el punto resultante de la intersección entre la recta de operación entre las dos alimentaciones y la recta q_2 de la condición del alimento A_2 .

Fijada una relación de reflujo, el número mínimo de platos se obtiene por el método usual, y las alimentaciones se introducen en la etapa cuya construcción en el diagrama de equilibrio $y-x$ señala la recta q respectiva (figura 20.12).

Una extracción lateral es cualquier corriente de producto distinta a la del producto de cabeza o del residuo. En la figura 20.13, la corriente E representa una extracción lateral. El número de platos de la columna, y el plato de extracción se obtienen al trazar los escalones entre las rectas de operación y la de equilibrio. Al igual que en el caso de alimentaciones múltiples, se deben trazar previamente las diferentes ecuaciones de las rectas de operación en los distintos tramos de la co-

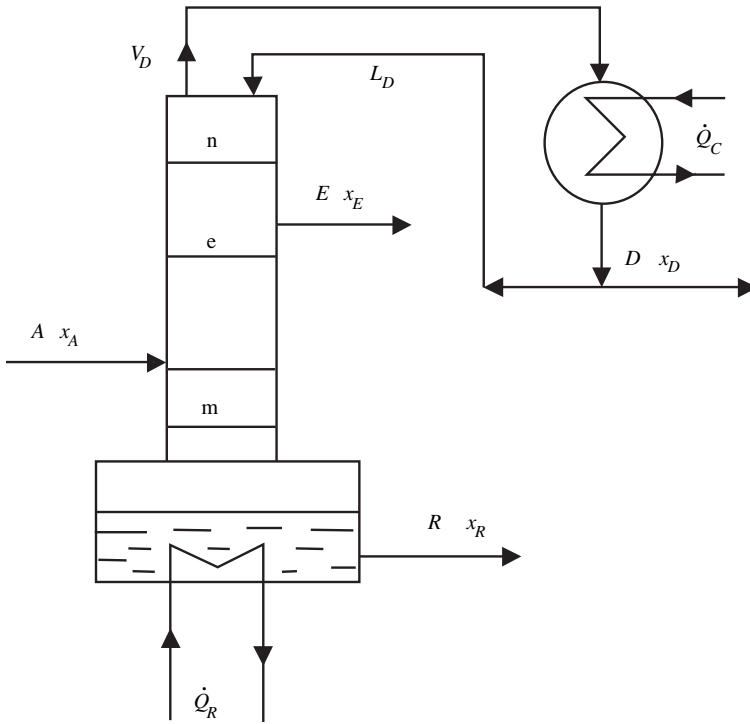


a) Esquema de la instalación

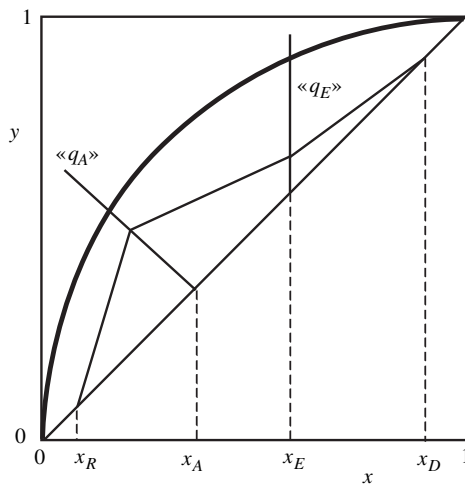


b) Operación en el diagrama de equilibrio

Figura 20.12. Rectificación con alimentación múltiple.



a) Esquema de la instalación



b) Operación en el diagrama de equilibrio

Figura 20.13. Rectificación con una extracción lateral.

lumna. Para ello se supone que la extracción lateral se realiza en forma líquida, estando dicha corriente a su punto de burbuja. Las distintas ecuaciones de las rectas de operación son:

- Zona por encima de la extracción lateral:

$$y = \frac{L_D}{V_D} x + \frac{D x_D}{V_D} \quad [20.46]$$

- Zona entre la extracción lateral y la alimentación:

$$y = \frac{L_D - E}{V_D} x + \frac{D x_D + E x_E}{V_D} \quad [20.54]$$

- Zona por debajo de la alimentación:

$$y = \frac{(L_D - E) + qA}{V_D + (q - 1)A} x - \frac{R x_R}{V_D + (q - 1)A} \quad [20.55]$$

Calculando las dos primeras rectas es suficiente, ya que si se unen el punto de corte de la línea de operación segunda [ec. 20.54] con la recta q y el punto (x_R, x_R) , se obtiene la recta de agotamiento.

20.4.4. Eficacia de platos

El número de platos necesarios para realizar una separación dada se puede calcular como se ha descrito anteriormente. En ellos se considera que las corrientes que abandonan cada plato están en equilibrio, y esto en realidad no es cierto. Por lo que se necesitará un mayor número de platos para realizar la destilación propuesta. Para el cálculo del número de platos o etapas reales se pueden utilizar tres tipos de eficacia: global, de Murphree y puntual o local.

La **eficacia global** se define como el cociente entre el número de etapas teóricas y el número real de etapas necesarias para una separación determinada:

$$\eta = \frac{N_{ET}}{N_{ER}} 100 (\%) \quad [20.56]$$

Sin embargo, se suele considerar que en la caldera se alcanza el equilibrio, y se descuenta una etapa; con lo que la eficacia global será:

$$\eta = \frac{N_{ET} - 1}{N_{ER} - 1} 100 (\%) \quad [20.57]$$

La **eficacia de Murphree** es función de cada plato y se define como la razón entre el cambio real conseguido en la composición y el que tendría lugar si se alcanzara el equilibrio:

$$\eta_{MV} = \frac{y_n - y_{n+1}}{y_n^* - y_{n-1}} 100 (\%) \quad [20.58]$$

en la que y_n es la concentración real de la fase vapor que sale del plato n , y_{n-1} es la concentración real de la fase vapor que entra al plato n , y_n^* es la concentración del vapor en equilibrio con el líquido que sale del plato n .

También se puede definir una eficacia de Murphree referida a la fase líquida:

$$\eta_{ML} = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1} - x_n^*} 100 (\%) \quad [17.59]$$

La eficacia de Murphree puede tener valores superiores a la unidad (superior al 100%), ya que el vapor producido a partir del líquido que llega al plato es más rico en componente volátil que el producido a partir del líquido que lo abandona. Puede ocurrir que se produzca un vapor de composición media más rica que la correspondiente al equilibrio. Esto sucede a menudo en columnas grandes.

La **eficacia local o puntual** se define de forma análoga a la de Murphree, pero considerando un solo punto del plato. Se utiliza muy poco en la práctica, ya que es necesario conocer las variaciones de la concentración en los diferentes puntos del plato.

20.4.5. Diámetro de la columna

Para el cálculo del diámetro de las columnas de platos, es necesario realizar ciertas consideraciones previas. Debido a que por el interior de la columna circulan en contracorriente el líquido que desciende y el vapor que sube hacia la cabeza, puede darse el fenómeno de **anegamiento**. En columnas de platos, el anegamiento se debe a que la pérdida de presión que experimenta la corriente de vapor y el caudal de líquido, son lo suficientemente elevados para que por los conductos de bajada no pueda pasar la corriente de líquido, de un plato al inferior, sin que ello provoque que el nivel del líquido en los platos exceda la distancia que existe entre ellos.

La velocidad a la que ocurre el anegamiento se obtiene mediante la ecuación de Souders-Brown:

$$v_{ANEG} = K \sqrt{\frac{\rho_L - \rho_G}{\rho_G}} \quad [20.60]$$

en la que ρ_L y ρ_G son las densidades de líquido y vapor, respectivamente; mientras que K es un coeficiente función de distintas variables.

El valor del coeficiente K puede obtenerse, para platos perforados y de campana, a partir de la figura 20.14, en la que en ordenadas se representan los valores de K frente a $(w_L/w_G) \sqrt{(\rho_G/\rho_L)}$. Las diferentes curvas se corresponden a distintas distancias entre platos, siendo w_L y w_G los caudales máxicos de las corrientes líquidas y de vapor, respectivamente.

En las columnas de platos, suele ocurrir que la corriente gaseosa ascendente arrastre gotas de líquido, desde un plato hacia su inmediato superior. Del mismo modo, la corriente líquida puede arrastrar burbujas hacia los platos inferiores. Este

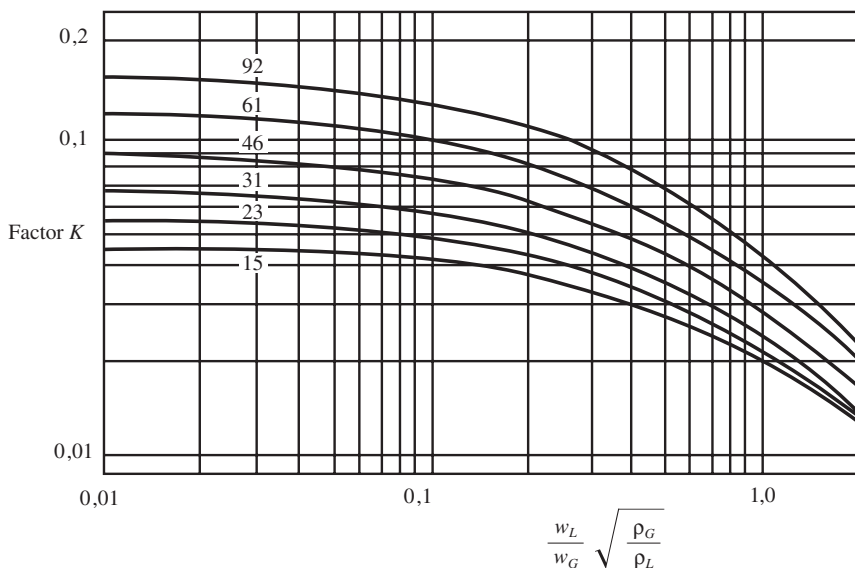


Figura 20.14. Factor K para inundación de platos (adaptado de King, 1980).

arrastre provoca una disminución en la eficacia de los platos, además de aumentar el flujo entre etapas. Para evaluar este efecto, se define el **arrastre** ψ como la razón entre los moles de líquido arrastrados por cada mol de líquido total que desciende. El valor de ψ está correlacionado con el porcentaje de anegamiento y con la relación $(w_L/w_G) \sqrt{(\rho_G/\rho_L)}$ (figura 20.15). Se aconseja que las columnas trabajen a valores de ψ inferiores a 0,15.

El cálculo del diámetro de la columna se inicia obteniendo el valor de la función $(w_L/w_G) \sqrt{(\rho_G/\rho_L)}$, y mediante la figura 20.14, para una distancia entre platos determinada, se obtiene el valor del coeficiente de anegamiento K . Para un valor del arrastre ψ , alrededor de 0,1 se obtiene el porcentaje de anegamiento ϕ , utilizando la figura 20.15. Como no toda la sección del plato es efectiva, se puede suponer que sólo un 70% de la misma es activa. Por ello, la verdadera velocidad de circulación de la corriente gaseosa será:

$$v = 0,7 \phi v_{ANEG} = 0,7 \phi K \sqrt{\frac{\rho_L - \rho_G}{\rho_G}} \quad [20.61]$$

Si el caudal de vapor que circula por la columna es V , la sección transversal de la columna se obtiene al dividir este valor por la densidad de flujo, que a su vez es el producto de la velocidad de circulación por la densidad. Al combinar con la ecuación 20.60, para columnas de sección cilíndricas, el diámetro de la columna se obtiene a partir de la siguiente ecuación:

$$D_C = \frac{4 V}{\pi \rho_G v} = \frac{4 V}{\pi \rho_G 0,7 \phi K} \sqrt{\frac{\rho_G}{\rho_L - \rho_G}} \quad [20.62]$$

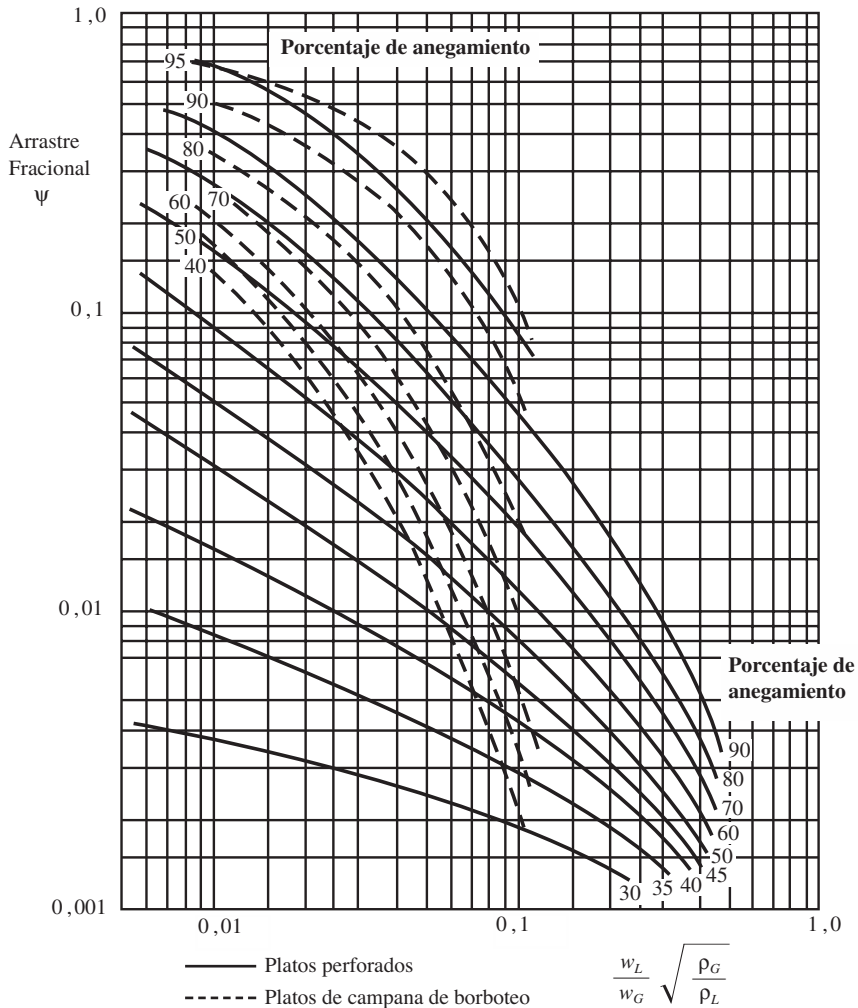


Figura 20.15. Correlación de arrastre (adaptado de King, 1980).

20.4.6. Columnas de agotamiento

En aquellos casos en que interese separar cantidades pequeñas del componente más volátil del componente más pesado, suelen utilizarse las denominadas columnas de agotamiento. En estas columnas, la corriente de alimento se introduce en forma líquida por la cabeza de la columna, lo que hace que no exista zona de enriquecimiento, sino tan sólo de agotamiento. La corriente del alimento sirve como reflujo, que asegura la rectificación en el interior de la columna. En este tipo de operación los vapores que abandonan la columna por su cabeza son condensados y se obtienen como corriente de destilado.

Suponiendo que se cumplen las hipótesis de McCabe-Thiele, la corriente de líquido que circula por la columna coincide con la del alimento; mientras que la de vapor coincide con la de destilado:

$$L_m = A$$

$$V_m = D = A - R$$

por lo que la recta de operación se transforma en la ecuación:

$$y_{m+1} = \left(\frac{A}{A - R} \right) x_{m-1} - \left(\frac{R}{A - R} \right) x_R \quad [20.63]$$

ecuación de una recta que pasa por el punto de la diagonal (x_R, x_R) , y cuya pendiente es $A/(A - R)$.

Para el cálculo del número de etapas se debe trazar una única recta de operación, la de agotamiento. En el diagrama de equilibrio y - x , esta recta de agotamiento pasa por el punto de coordenadas (x_R, x_R) . Además, esta recta pasará por el punto de ordenada $y = 1$, que se corresponde con el punto de abscisa:

$$x = 1 + \frac{R}{A} (x_R - 1) \quad [20.64]$$

Una vez obtenida esta recta de operación se trazan escalones entre la curva de equilibrio y esta recta, iniciando el trazado por el punto (x_R, x_R) hasta que se llegue a la composición del alimento.

20.5. Rectificación discontinua

En determinadas ocasiones la cantidad de alimento a destilar no es muy alta, y la operación en continuo puede resultar costosa, siendo más adecuado efectuar la destilación por cargas o en discontinuo. Operando en discontinuo, se carga el calderín con la mezcla a destilar y mediante calentamiento de la misma se hace circular los vapores formados a través de una columna de rectificación. La composición del destilado depende de la composición de la carga, del número de platos y de la razón de reflujo utilizada.

Cuando se inicia el proceso, el destilado es rico en el componente más volátil, mientras que la mezcla del calderín se irá empobreciendo de este componente. A medida que avanza la destilación, la corriente de destilado es cada vez más pobre en componente volátil, y el residuo se va enriqueciendo del componente más pesado.

La operación en discontinuo se puede llevar a cabo de forma que la composición del destilado sea constante, para lo cual se deberá cambiar continuamente la razón de reflujo. También se puede operar de forma que la razón de reflujo permanezca constante, con lo que la composición del destilado irá disminuyendo. De

cualquier forma, para la resolución de los problemas que se plantean se va a suponer que se cumplen las hipótesis de McCabe-Thiele.

Las columnas utilizadas en este tipo de operación son las mismas que cuando se opera en continuo, pero sin la corriente de alimento. Cabe destacar que la cantidad de destilado obtenido en un instante determinado (D) se obtiene en función del caudal de la corriente de destilado $D(t)$ según la expresión:

$$D = \int_0^t D(t) dt \quad [20.65]$$

mientras que la composición media del destilado (x_D) es función de la composición de la corriente de destilado:

$$x_D = \frac{\int_0^t x_D(t) D(t) dt}{\int_0^t D(t) dt} \quad [20.66]$$

20.5.1. Operación con composición de destilado constante

Si se supone que inicialmente se carga el calderín con R_0 moles de la mezcla a separar, cuya composición en componente volátil es x_{0R} , al cabo de un cierto tiempo de operación se habrá obtenido un destilado D de composición x_D , mientras que en el calderín quedarán R moles de composición x_R . Al realizar un balance global y de componente más volátil para toda la columna:

$$R_0 = R + D$$

$$R_0 x_{0R} = R x_R + D x_D$$

que permite obtener la expresión:

$$R = R_0 \frac{x_D - x_{0R}}{x_D - x_R} \quad [20.67]$$

en la que R_0 , x_{0R} y x_D son constantes, mientras que x_R y R son variables con el tiempo.

Cuando la operación se desarrolla a composición de destilado constante ($x_D = \text{cte}$), se debe ir variando la razón de reflujo. Al iniciar el calentamiento de la mezcla cargada se crea una corriente de vapor ascendente (V_D) a lo largo de la columna, y mediante un condensador colocado en la cabeza de la columna se obtiene un destilado, del cual una parte se devuelve como reflujo (L_D) y la otra se va acumulando en el recipiente de destilado. Al cabo de un cierto tiempo de operación t , en el calderín restan R moles de la mezcla, mientras se ha obtenido una cantidad de destilado D . El vapor V_D que condensa da lugar a las corrientes L_D y $D(t)$:

$$V_D = L_D + D(t)$$

Si el calor suministrado en la caldera es constante ($\dot{Q}_R = \text{cte}$), el caudal de vapor V_D también lo será. Sin embargo, L_D deberá ser variable para mantener constante la composición de destilado. El que L_D sea variable implica que la razón de reflujo también lo sea.

Para obtener la variación de R con el tiempo debe realizarse un balance diferencial a lo largo de la columna:

$$\frac{dR}{dt} = -D(t) = -(V_D - L_D) = -V_D + L_D$$

$$\frac{d(R x_R)}{dt} = -D(t) x_D$$

$$R \frac{dx_R}{dt} + x_R \frac{dR}{dt} = (-V_D + L_D) x_D$$

Sustituyendo los valores de R y dR/dt en esta última expresión se obtiene:

$$dt = \frac{R_0}{V_D} (x_D - x_{0R}) \frac{dx_R}{\left(\frac{-V_D + L_D}{V_D}\right) (x_D - x_R)^2}$$

Ecuación que puede integrarse con la condición límite: para tiempo inicial $t = 0$ la composición de la mezcla en la caldera es x_{0R} :

$$t = \frac{R_0}{V_D} (x_D - x_{0R}) \int_{x_R}^{x_{0R}} \frac{dx_R}{\left(\frac{-V_D + L_D}{V_D}\right) (x_D - x_R)^2} \quad [20.68]$$

Esta ecuación permite calcular el tiempo de operación, para una columna en la que se conoce el número de platos, y se desea obtener un residuo de composición x_R . Para calcular el valor del término integral se deben trazar distintas rectas de operación de pendiente $(L_D/V_D)_i$ desde el punto de la diagonal (x_D, x_D) , y mediante el diagrama de equilibrio, se trazan gráficamente el número de etapas para obtener en cada caso un valor de residuo x_{iR} . Con el corte de cada línea de operación con el eje de ordenadas se obtiene el valor de $x_D/(r_i + 1)$, lo que permite obtener el valor de la relación de reflujo r_i . A partir de los datos obtenidos se puede evaluar el término integral de forma gráfica o numérica, y de esta forma resolver el problema planteado.

Si el caudal de calor que se suministra a la caldera es constante, el caudal de vapor que se crea también lo será, con lo que:

$$\dot{Q}_R = V_D \lambda \quad [20.69]$$

siendo λ el calor latente molar.

Si durante el transcurso de la operación se va ajustando continuamente el reflujo, para que la composición de la corriente de destilado no varíe, en un instante cualquiera se cumple:

$$r = \frac{dL_D}{dD(t)}$$

y la cantidad total de reflujo que fluye hacia abajo de la columna se puede obtener a partir de la integración de esta expresión:

$$dL_D = r dD(t) \quad [20.70]$$

Además, el calor que se extraerá en el condensador para obtener el reflujo durante toda la destilación, será:

$$\dot{Q}_C = \lambda \int_0^{L_D} dL_D = \lambda \int_{r_1}^{r_2} r dD(t) \quad [20.71]$$

ecuación que puede integrarse si se conoce la relación existente entre la relación de reflujo y la corriente de destilado.

20.5.2. Operación a razón de reflujo constante

Si la columna trabaja a reflujo constante, la composición de la corriente de destilado irá variando con el tiempo de destilación. Si el calor suministrado en la caldera es constante, el caudal de vapor V_D también lo será, con lo que al ser constante la razón de reflujo, el caudal L_D que circula por la columna también será constante.

Al realizar los balances globales y de componente puede obtenerse la expresión:

$$R \frac{dx_R}{dt} + x_R \frac{dR}{dt} = (-V_D + L_D) x_D$$

a partir de la que se obtiene:

$$R \frac{dx_R}{dt} + x_R \frac{dR}{dt} = x_D \frac{dR}{dt}$$

que para un instante determinado cumple:

$$\frac{dR}{R} = \frac{dx_R}{x_D - x_R}$$

ecuación que puede integrarse con la condición límite: para tiempo inicial $t = 0$ la composición del residuo es x_{0R} , lo que permite obtener la conocida ecuación de Rayleigh:

$$\ln \left(\frac{R}{R_0} \right) = \int_{x_R}^{x_{0R}} \frac{dx_R}{x_D - x_R}$$

Para resolver el término integral se debe recurrir a una integración gráfica o numérica. Si se conoce el número de platos o etapas teóricas de la columna y la relación de reflujo, o bien la relación (L_D/V_D), el modo de resolver la integral se describe a continuación. Se fija un valor de la composición de destilado x_{iD} , desde el punto de la diagonal que se corresponde a este valor de destilado se traza una recta de pendiente L_D/V_D . Entre esta recta y la curva de equilibrio se construyen un número de escalones igual al de platos de la columna, con lo que se obtiene su correspondiente valor de composición del residuo x_{iR} . Se repite la operación con diferentes valores de composición de destilado, utilizando rectas con la misma pendiente que la primera, obteniéndose en cada caso el valor correspondiente de composición de residuo. Para cada valor de composición de residuo se obtiene el valor de $1/(x_D - x_R)$ y se representan estos valores frente a los del residuo. Mediante una integración gráfica o numérica puede evaluarse el valor del término integral de la ecuación de Rayleigh. Esta integración entre los valores de residuo de composición x_{0R} y x_R permite calcular la cantidad de mezcla que queda en el calderín.

Si se desea determinar el tiempo de operación es necesario realizar un balance global, del que se obtiene:

$$\frac{dR}{dt} = -D(t) = -V_D + L_D = \text{cte}$$

de la integración de esta ecuación diferencial se obtiene el tiempo de operación:

$$t = \frac{R_0 - R}{V_D \left(1 - \frac{V_D}{L_D}\right)} \quad [20.72]$$

Pero si se tiene presente que el calor aportado en el calderín es: $\dot{Q}_R = V_D \lambda$.

$$t = \frac{R_0 - R}{\frac{\dot{Q}_R}{\lambda} \left(1 - \frac{L_D}{V_D}\right)} \quad [20.73]$$

20.6. Destilación por vapor directo

Por regla general, el calor aportado a una columna de destilación se realiza de modo indirecto mediante un intercambiador de calor. Sin embargo, existen casos en que se utiliza el proceso de destilación por arrastre con vapor de agua. Así es el caso cuando uno de los componentes de la mezcla es agua y se retira como residuo, o bien si el agua forma una segunda fase inmiscible. También se utiliza este tipo de destilación cuando la mezcla a destilar posee un elevado punto de ebullición y puede dar lugar a la descomposición térmica de los componentes. El vapor de agua

se hace pasar directamente a través de la mezcla líquida contenida en el destilador, debiendo ser muy baja la solubilidad del vapor de agua en el líquido. Al operar de este modo, se puede prescindir de la caldera, aunque se necesitan más platos en la columna (figura 20.16). La sección de enriquecimiento de la columna no queda afectada, sin embargo, en la zona de agotamiento los balances de materia y energía globales quedan afectados.

Si C es el caudal de vapor que se alimenta a la columna, los balances global, de componente volátil y de energía, en la zona de agotamiento, se expresan:

$$\begin{aligned} L_{m+1} + C &= V_m + R \\ L_{m+1} x_{m+1} &= V_m y_m + R x_R \\ L_{m+1} \hat{h}_{m+1} + C \hat{H}_C &= V_m \hat{H}_m + R \hat{h}_R \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las hipótesis que se cumplen al aplicar el método de McCabe-Thiele: $L_{m+1} = R$ y $V_m = C$; la recta de agotamiento quedará de la forma:

$$y_m = \frac{R}{C} (x_{m+1} - x_R) \quad [20.74]$$

Se puede observar que para $x_{m+1} = x_R$ el valor de la ordenada en el origen es nulo ($y_m = 0$), lo que implica que, en el diagrama de equilibrio, la recta de agotamiento pasa por el punto $(x_R, 0)$, en lugar del punto (x_R, x_R) .

Con las hipótesis de McCabe-Thiele se supone que el calor latente de las

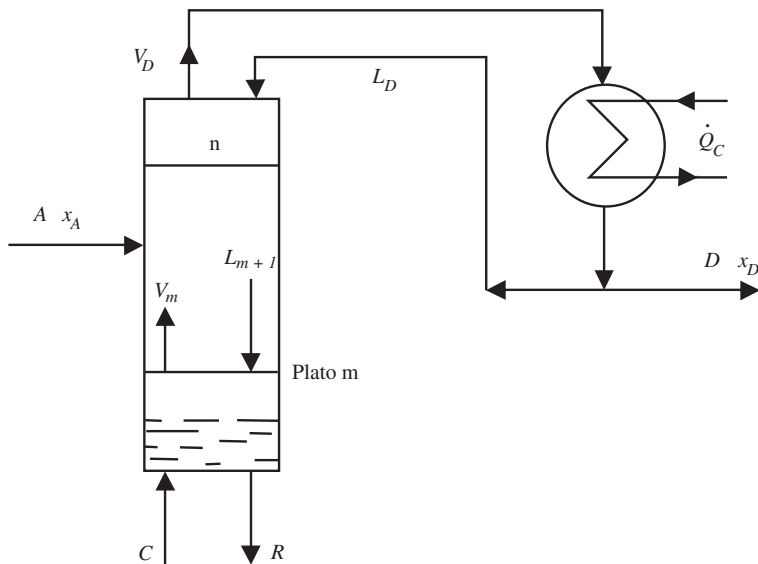


Figura 20.16. Destilación con vapor directo.

mezclas son iguales. Sin embargo, en general, si λ_m es el calor latente de la mezcla y λ_C es el calor latente del vapor de agua, si se desprecian los calores sensibles se cumple:

$$\lambda_m V_m = C \lambda_C,$$

por lo que:

$$L_{m+1} + C = V_m + R$$

$$L_{m+1} = C \frac{\lambda_C}{\lambda_m} + R - C$$

y la recta de agotamiento se expresará según la ecuación:

$$y_m = \frac{R + C \left(\frac{\lambda_C}{\lambda_m} - 1 \right)}{C \left(\frac{\lambda_C}{\lambda_m} \right)} x_{m+1} - \frac{R x_R}{C \left(\frac{\lambda_C}{\lambda_m} \right)} \quad [20.75]$$

PROBLEMAS

Problema 20.1

Una solución acuosa contiene un 30% en peso de etanol. Se utiliza una destilación simple para recuperar el 80% del alcohol contenido en dicha disolución. Determinar la composición de la solución residual.

Las masas moleculares del agua y etanol son 18 y 46 kg/kmol, respectivamente, por lo que para una fracción másica inicial de 0,3 se corresponde una fracción molar $x_0 = 0,144$.

El alcohol que permanece en el calderín en un tiempo determinado, es el que había inicialmente menos el que se ha destilado:

$$Lx = L_0 x_0 - D x_0 = L_0 x_0 - 0,8 L_0 x_0 = 0,2 L_0 x_0$$

Al sustituir en la ecuación de Rayleigh [ec. 20.15] se obtiene:

$$\ln \left(\frac{x}{0,2 x_0} \right) = \int_x^{x_0} \frac{dx}{y-x}$$

Esta ecuación permite calcular la composición en el calderín. Se supone un valor de x , se calcula el valor del término logarítmico, y el segundo miembro de la igualdad se obtiene por integración gráfica o numérica. Cuando los valores de estos dos términos coincidan, el valor de x que lo cumple es el de la composición del líquido residual.

De los datos de equilibrio para el sistema etanol-agua es posible construir la tabla 20.P1:

Tabla 20.P1. Datos para la resolución de la ecuación de Rayleigh

x	y	$\ln (x/0,2 x_0)$	Integral
0,01	0,103		
0,03	0,235	0,408	0,366
0,04	0,270	0,328	0,322
0,05	0,325	0,552	0,285
0,10	0,444	1,245	0,126

Se observa que para $x = 0,04$ los dos términos, el logarítmico y el integral prácticamente coinciden, por lo que el valor buscado es precisamente éste.

Problema 20.2

Se dispone de una columna de rectificación para recuperar el 90% del etanol contenido en una mezcla acuosa, cuya composición en peso del componente volátil es del 50%. El alimento se introduce como una mezcla de líquido-vapor, conte-

niendo un 50% de líquido. Cuando la columna opera con una relación de reflujo 50% superior a la mínima se obtiene una corriente de residuo con un contenido en peso de agua del 90%. Determinar: a) Composición molar del destilado. b) Plato de alimentación. c) Número de platos necesarios si la eficacia global de la columna es del 80%.

El diagrama de equilibrio se obtiene a partir de los datos de equilibrio del sistema etanol agua (tabla 20.P2):

Tabla 20.P2. Datos de equilibrio del sistema etanol-agua

x	y	x	y
0,01	0,103	0,50	0,652
0,03	0,235	0,60	0,697
0,05	0,325	0,70	0,753
0,10	0,444	0,80	0,818
0,20	0,529	0,85	0,856
0,30	0,573	0,87	0,873
0,40	0,613	0,894	0,894

en la que x e y son las fracciones molares de etanol en la fase líquida y vapor, respectivamente.

A partir de las composiciones en peso y de las masas moleculares del agua y etanol es posible obtener las fracciones molares del alimento y residuo:

$$x_A = 0,281 \quad x_R = 0,042$$

Se toma como base de cálculo $A = 100$ kmoles/h para la corriente de alimento.

La cantidad de alcohol en la corriente de destilado será: $D x_D = 0,9 A x_A$.

Del balance global y de componente para toda la columna [ecs. 20.21 y 20.22] se obtiene:

$$100 = D + R$$

$$(100) (0,281) = D x_D + R (0,042)$$

$$D x_D = 0,9 (100) (0,281)$$

que al resolver permite obtener los siguientes valores:

$$R = 66,9 \text{ kmoles/h} \quad D = 33,1 \text{ kmoles/h} \quad x_D = 0,764$$

Como el alimento contiene un 50% de líquido, se tiene $q = 0,5$. Por lo que la ecuación de la recta « q » de la condición del alimento [ec. 20.48] es:

$$y = -x + 0,562$$

Se traza la recta que une el punto de la diagonal x_D con el punto de corte de la recta q con la curva de equilibrio, obteniéndose la recta que da la razón de reflujo mínima. Esta recta posee una ordenada en el origen cuyo valor es:

$$\frac{x_D}{r_m + 1} = 0,4$$

de la que se obtiene un valor de relación de reflujo mínima $r_m = 0,91$. Como la relación de reflujo de operación es un 50% superior a la mínima $r = 1,365$.

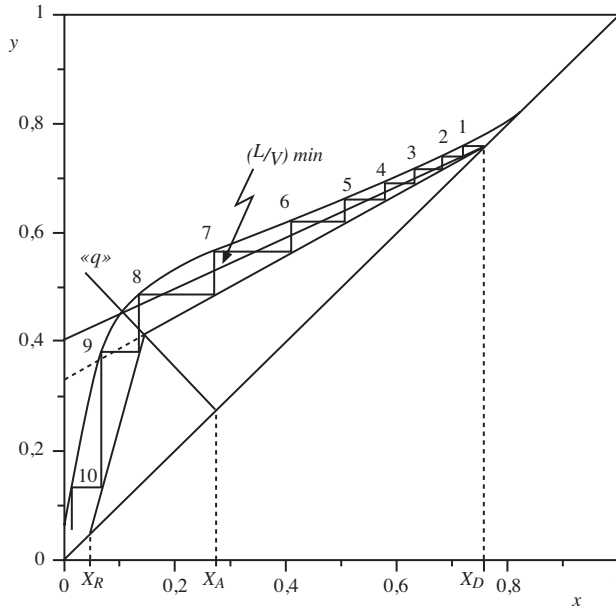


Figura 20.P2.

La recta de operación para la zona de enriquecimiento [ec. 20.46] será:

$$y = 0,577 x + 0,323$$

La recta de agotamiento se obtiene al unir el punto de la diagonal (x_R, x_R) con el punto de corte de la recta q con la de enriquecimiento.

El número de etapas teóricas se obtiene al trazar escalones entre las curvas de equilibrio y las rectas de operación. Gráficamente, se obtiene que el número de etapas teóricas es $N_{ET} = 10$ (9 platos + caldera), siendo el 8.º plato empezando por la cabeza en el que debe entrar la corriente de alimento.

Como se supone que en la caldera se alcanza el equilibrio, el número de etapas reales se obtiene a partir de la ecuación 20.57:

$$N_{ET} = 1 + \frac{10 - 1}{0,8} = 13 \text{ platos teóricos (12 platos + caldera)}$$

Problema 20.3

Se somete a una destilación fraccionada continua una mezcla binaria que contiene un 40% en volumen del componente volátil. Se desea obtener un destilado cuya fracción molar de componente volátil sea de 0,90, y un producto de cola de fracción molar en componente pesado 0,93. La volatilidad relativa del componente volátil respecto del pesado puede considerarse constante e igual a 2,85. La columna trabaja con una relación de reflujo 75% superior a la mínima. Calcular: a) Datos de equilibrio. b) Número de etapas teóricas si el alimento es vapor saturado. ¿En qué plato se debe introducir la corriente de alimentación? c) Si el alimento es líquido a 20 °C, encontrar la ecuación de la recta «q», de la condición del alimento.

Datos:

Componente	Masa Molecular (kg/kmol)	Temperatura ebullición (°C)	Calor Específico (kJ/kg·°C)	Calor Latente (MJ/kmol)
Volátil	40	75	1,85	30
Pesado	18	100	4,185	40

a) Los datos de equilibrio se obtienen a partir de la volatilidad relativa:

$$y = \frac{\alpha x}{1 + (\alpha - 1)x}$$

al dar valores a x se obtienen los datos de equilibrio que se dan en la tabla 20.P3.

Tabla 20.P3. Datos de equilibrio de la mezcla binaria

x	y	x	y
0,000	0,000	0,600	0,810
0,050	0,130	0,700	0,869
0,100	0,241	0,800	0,919
0,200	0,416	0,900	0,963
0,300	0,550	0,950	0,982
0,400	0,655	1,000	1,000
0,500	0,740		

b) Como el alimento es vapor saturado, $q = 0$, con lo que la recta «q» pasa por el punto (x_A, x_A) y es paralela al eje de abscisas.

Se representan en el diagrama de equilibrio los puntos representativos del alimento, destilado y residuo: $x_A = 0,4$ $x_D = 0,90$ $x_R = 0,07$.

La recta que da la relación de reflujo mínima se obtiene al unir el punto (x_D, x_D) con el de corte de la recta «q» con la curva de equilibrio. La pendiente de esta recta permite obtener la relación de reflujo mínima:

$$\left(\frac{L}{V}\right)_{\min} = \frac{r_m}{1 + r_m} = 0,704 \quad r_m = 2,38$$

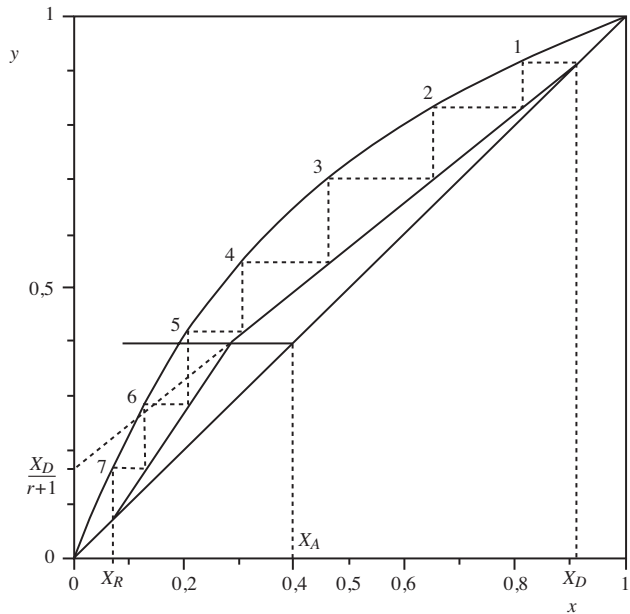


Figura 20.P3.

De la que se obtiene el valor de la relación de reflujo de trabajo:

$$r = 1,75 \quad r_m = 4,17$$

Con este valor se obtiene que la recta de enriquecimiento será:

$$y = 0,807 x + 0,174$$

La recta de agotamiento se obtiene al unir el punto de corte de la recta q y la recta de enriquecimiento con el punto (x_R, x_R) .

Se trazan gráficamente escalones entre la curva de equilibrio y las rectas de operación, obteniéndose $N_{ET} = 7$. El alimento entra por el plato 5.º desde la cabeza de la columna.

c) El valor de q se obtiene a partir de la ecuación 20.45, siendo preciso obtener los valores de las entalpías de vapor y líquido del plato de alimentación.

- Temperatura del plato de alimentación:

$$T_A = (0,4) (75) + (0,6) (100) = 90 \text{ °C}$$

Como el alimento se encuentra a 20 °C, se trata de un líquido subenfriado.

En el cálculo de las entalpías se toma como temperatura de referencia $T^* = 0 \text{ °C}$.

- Calores específicos:

Volátil: $\hat{C}_p = (1,85) (40) = 74 \text{ kJ/(kmolK)}$

Pesado: $\hat{C}_p = (4,185) (18) = 75,33 \text{ kJ/(kmolK)}$

Mezcla: $\hat{C}_p = (0,4) (74) + (0,6) (75,33) = 74,8 \text{ kJ/(kmolK)}$

- Calor latente: $\lambda_A = [(0,4) (30) + (0,6) (40)] 10^3 = 36.000 \text{ kJ/(kmol)}$
- Entalpía de líquido: $\hat{h}_a = \hat{C}_p (T_a - T^*) = (74,8) (90 - 0) = 6.732 \text{ kJ/(kmol)}$
- Entalpía del vapor: $\hat{H}_a = \lambda_A + \hat{h}_a = 42.732 \text{ kJ/kmol}$
- Entalpía del alimento: $\hat{H}_a = \hat{C}_p (T_A - T^*) = (74,8) (20 - 0) = 1.496 \text{ kJ/(kmol)}$

El valor de q se obtiene de la ecuación 20.45:

$$q = \frac{42.732 - 1.496}{36.000} = 1,145$$

como este valor es superior a la unidad, se trata de un líquido subenfriado.

La recta « q » se obtiene de la ecuación 20.48:

$$y = 7,88 x - 2,75.$$

Problema 20.4

Se utiliza una columna de rectificación para separar una mezcla de S_2C y Cl_4C . Se dispone de dos tipos de mezclas con distinto contenido, por lo que se desea alimentar cada una de ellas en distintos platos. Una de las mezclas es equimolecular y es alimentada a razón de 100 kmol/h, mientras que la otra posee un 80% molar en S_2C y se alimenta a razón de 60 kmol/h. Ambas corrientes entran en forma líquida a su temperatura de ebullición. Se desean obtener dos corrientes de residuo, uno de 30 kmol/h con un 30% molar de S_2C y otro de sólo un 2% molar de S_2C . El destilado contiene un 95% molar de S_2C . La columna opera con una relación de reflujo de 2. Puede suponerse que se cumplen las hipótesis de McCabe-Thiele.

Determinar: a) El número de etapas teóricas necesarias. b) ¿En qué piso teórico se introducirá la alimentación del 80% de S_2C ? c) El piso teórico del que se puede extraer la parte de residuo con el 30% de S_2C .

Para el sistema S_2C-Cl_4C , el componente volátil es el sulfuro de carbono. A 760 mm Hg, los datos de equilibrio se dan en la tabla 20.P4.

Tabla 20.P4. Datos de equilibrio del sistema S_2C-Cl_4C

T (°C)	x	y	T (°C)	x	y
76,7	0,000	0,000	59,3	0,391	0,634
74,9	0,030	0,082	55,3	0,532	0,747
73,1	0,062	0,156	52,3	0,663	0,829
70,3	0,111	0,266	50,4	0,757	0,878
68,6	0,144	0,333	48,5	0,860	0,932
63,8	0,259	0,495	46,3	1,000	1,000

El alimento entra en forma líquida, por lo que el valor de $q = 1$, en las dos alimentaciones. La recta « q » será en ambos casos paralela al eje de ordenadas. Ade-

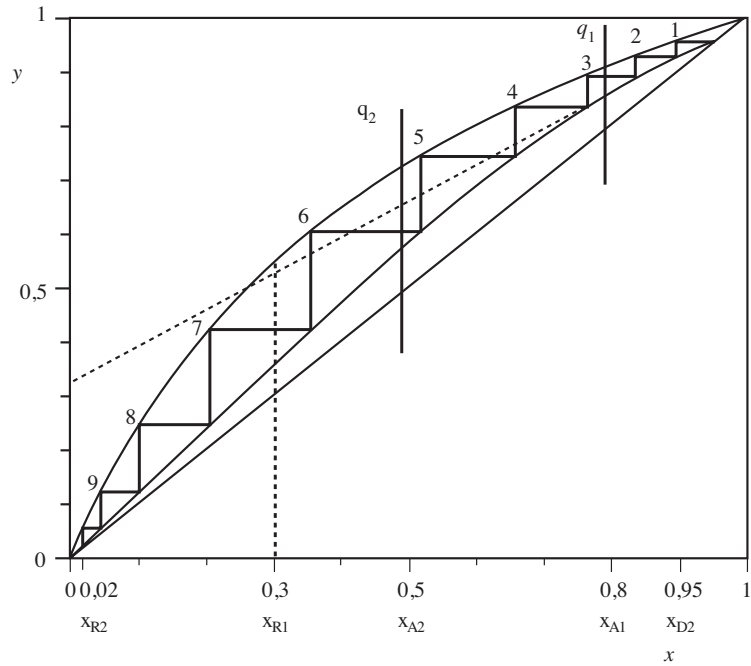
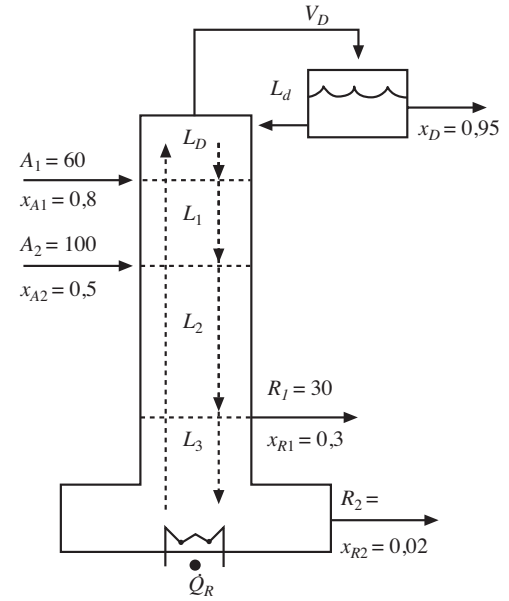


Figura 20.P4.



más, uno de los residuos sale de la caldera, pero el otro se obtiene en un plato intermedio, y en ambos casos se obtienen en forma líquida.

De los balances molares global y de componente:

$$A_1 + A_2 = D + R_1 + R_2$$

$$A_1 x_{A1} + A_2 x_{A2} = D x_D + R_1 x_{R1} + R_2 x_{R2}$$

sustituyendo datos:

$$100 + 60 = D + 30 + R_2$$

$$(100)(0,5) + (60)(0,8) = D(0,95) + (30)(0,3) + R_2(0,02)$$

Al resolver este sistema de ecuaciones se obtiene:

$$D = 92,9 \text{ kmol/h} \quad R_2 = 37,1 \text{ kmol/h}$$

Como el valor de la relación de reflujo es 2 ($L_D/D = 2$), con lo que:

$$L_D = 2D = 185,8 \text{ kmol/h}$$

$$L_1 = L_D + A_1 = 185,8 + 60 = 245,8 \text{ kmol/h}$$

$$L_2 = L_1 + A_2 = 245,8 + 100 = 345,8 \text{ kmol/h}$$

$$L_3 = L_2 - R_1 = 345,8 - 30 = 315,8 \text{ kmol/h}$$

$$V_D = L_D + D = 185,8 + 92,9 = 278,7 \text{ kmol/h}$$

Como todas las alimentaciones y residuos están en forma líquida, la corriente de vapor que asciende por la columna es la misma en todas las zonas: $V_i = V_D$.

Pendientes de las distintas rectas de operación:

$$\text{Primera recta enriquecimiento: } L_D/V_D = 0,666$$

$$\text{Segunda recta enriquecimiento: } L_1/V_D = 0,882$$

$$\text{Primera recta agotamiento: } L_2/V_D = 1,24$$

$$\text{Segunda recta agotamiento: } L_3/V_D = 1,132$$

Las diferentes rectas de operación se construyen del siguiente modo. Desde el punto de la diagonal (x_D, x_D) se construye la primera recta de enriquecimiento con pendiente 0,666. El corte de esta recta con la q_1 da un punto por el que pasa la segunda recta de enriquecimiento, que se construye con pendiente 0,882. Esta segunda recta corta a q_2 en un punto, desde el cual se construye la primera recta de agotamiento con pendiente 1,24. El corte de esta recta con q_3 da un punto, que unido con (x_{R2}, x_{R2}) permite obtener la segunda recta de agotamiento.

El número de pisos teóricos se obtiene al trazar escalones entre la curva de equilibrio y las distintas rectas de operación: $N_{ET} = 10$ (9 pisos + caldera).

En la figura 20.P4 se representa el método gráfico de obtención del número de platos teóricos.

- Alimentación del 80%: A_1 en el piso 3.º
- Alimentación del 50%: A_2 en el piso 6.º
- Residuo del 30%: R_1 en el piso 7.º

Problema 20.5

Una solución acuosa de etanol, que contiene un 40% en peso de componente volátil, se alimenta de forma continua a una columna de rectificación, al objeto de obtener dos corrientes que contengan 88% y 5% en peso de etanol. Además, se desea obtener una tercera corriente que contenga el 30% del alcohol que entra con la alimentación, y cuya composición en etanol sea del 75% en peso. Calcular el número de platos teóricos, así como los platos de alimentación y de extracción lateral, si se utiliza una relación de reflujo igual a 2 y el alimento es líquido a su punto de ebullición.

Las composiciones en porcentaje en peso deben convertirse en fracciones molares. Para ello es necesario conocer las masas moleculares de los componentes, que en este caso son 18 y 46 kg/kmol para el agua y etanol, respectivamente:

- Alimento: $x_A = 0,207$
- Destilado: $x_D = 0,742$
- Residuo: $x_R = 0,020$
- Extracción lateral: $x_E = 0,540$

Se toma como base de cálculo que la columna es alimentada con $A = 100$ kmol/h. El alcohol que sale con la corriente lateral es el 30% del que entra con el alimento:

$$E x_E = 0,3 A x_A$$

$$E (0,54) = (0,3) (100) (0,207) \quad E = 11,5 \text{ kmol/h}$$

Las corrientes de destilado y residuo se obtienen al realizar los balances global y de componente a toda la columna:

$$100 = D + R + 11,5$$

$$(100) (0,207) = D (0,742) + R (0,020) + (11,5) (0,54)$$

obteniéndose: $D = 17,62$ kmol/h $R = 70,88$ kmol/h

El líquido recirculado a la columna como reflujo y el vapor que abandona la columna por su cabeza serán:

$$L_D = r D = (2) (17,62) = 35,24 \text{ kmol/h}$$

$$V_D = L_D + D = D (r + 1) = (17,62) (3) = 52,86 \text{ kmol/h}$$

Tanto el alimento como la extracción lateral son líquidos a su punto de ebullición, por lo que sus rectas «q» son paralelas al eje de ordenadas, y pasan por los puntos de la diagonal x_A y x_E , respectivamente. Además, no afectarán a la corriente de vapor que circula a lo largo de toda la columna:

$$V_n = V_E = V_D = 52,86 \text{ kmol/h}$$

El caudal de la corriente de líquido que circula por la columna entre la extracción lateral y el plato de alimentación es: $L_E = L_D - E = 23,74$ kmol/h.

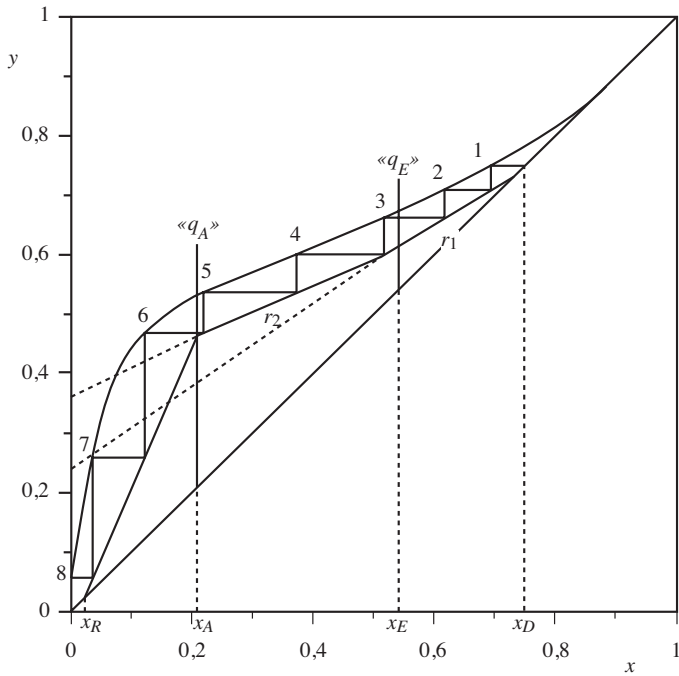
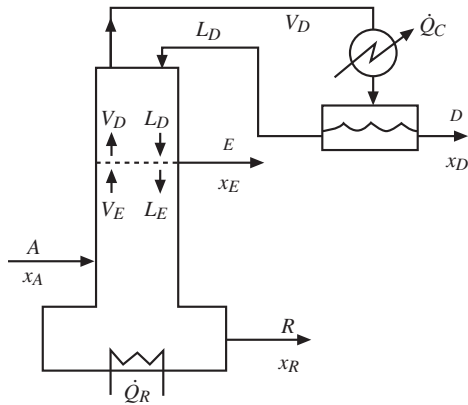


Figura 20.P5.

Las diferentes rectas de operación en los distintos tramos de la columna son:

- Entre la extracción lateral y la cabeza de columna:

$$y = \frac{r}{r+1} x + \frac{x_D}{r+1} \quad y = 0,667 x + 0,247$$

- Entre el plato de alimentación y la extracción lateral:

$$y = \frac{L_E}{V_D} x + \frac{D x_D - E x_E}{V_D} \quad y = 0,449 x + 0,365$$

La recta de agotamiento se construye uniendo el punto de la diagonal x_R con el de corte de la recta anterior con la de la alimentación « q_A » ($x_A = 0,207$).

El número de etapas teóricas se obtiene al trazar los escalones entre las tres rectas de operación y la curva de equilibrio. Operando de este modo (figura 20.P5) se obtiene que el número de etapas teóricas es: $N_{ET} = 8$ (7 platos + caldera).

El plato de alimentación es el 6° por la cabeza, mientras que la extracción lateral se realiza por el plato 3° desde la cabeza.

Problema 20.6

Una columna de rectificación cuyo poder separador es de 6 etapas teóricas, se utiliza en una operación en discontinuo para destilar una mezcla binaria. La composición inicial de la mezcla es de 60% molar en el componente más volátil. La columna opera a composición constante de destilado, poseyendo el destilado un 98% molar. La destilación se interrumpe cuando el 83% del componente volátil cargado se ha obtenido como destilado. Si la volatilidad del componente más volátil con respecto al pesado es 2,46, calcular la razón de reflujo necesaria al principio y al final de la operación.

Los datos de equilibrio se obtienen a partir de la volatilidad relativa:

$$y = \frac{\alpha x}{1 + (\alpha - 1) x}$$

al dar valores a x se obtienen los datos de equilibrio de la mezcla (tabla 20.P6a):

Tabla 20.P6a. Datos de equilibrio de la mezcla binaria

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	0,0	0,215	0,380	0,513	0,621	0,711	0,787	0,852	0,908	0,956	1,0

Al representar y frente a x se obtiene el diagrama de equilibrio de este sistema binario.

Al realizar los balances global y de componente volátil, es posible obtener una expresión que liga la cantidad total de destilado obtenida, en función de la composición del residuo y viceversa:

$$D = R_0 \frac{x_{0R} - x_R}{x_D - x_R} \quad x_R = \frac{R_0 x_{0R} - D x_D}{R_0 - D}$$

Al inicio de la operación la composición del residuo es $x_{R0} = 0,6$. Para obtener la composición al final de la operación se debe tener presente que se recupera el

83% del componente volátil. Si se supone que inicialmente se carga la columna con $R_0 = 100$ kmol, el componente volátil que va al destilado será:

$$D x_D = 0,83 R_0 x_{0R}$$

$$D (0,98) = (0,83) (100) (0,6) \quad D = 49,8 \text{ kmol}$$

por lo que la composición del residuo en este instante será:

$$x_R = \frac{(100) (0,6) - (49,8) (0,98)}{(100) - (49,8)} = 0,207$$

Como la composición de destilado es fija, para mantener el destilado con una composición constante se debe ir variando la razón de reflujo. Se trazarán diferentes rectas de operación con distintas razones de reflujo, y para cada una de ellas se trazarán 6 escalones (6 platos) entre la recta de operación y la curva de equilibrio. Ello permite obtener una composición de residuo para cada caso. Operando de este modo se construye la tabla 20.P6b:

Tabla 20.P6b

$\frac{x_D}{r + 1}$	r	x_R
0,45	1,18	0,725
0,40	1,20	0,665
0,30	2,27	0,545
0,20	3,90	0,46
0,10	8,80	0,31
0,05	18,6	0,26

Se pueden representar los valores de la relación de reflujo frente a los de la composición de residuo (figura 20.P6), y por interpolación y extrapolación obtener los correspondientes valores de la relación de reflujo al inicio y final de la operación:

$$x_{R0} = 0,6 \quad r_i = 1,7$$

$$x_R = 0,207 \quad r_f = 32$$

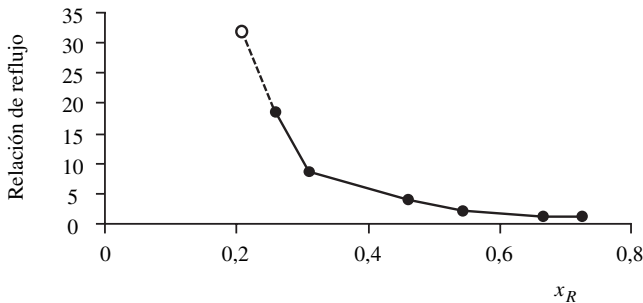


Figura 20.P6.

21.1. Introducción

La absorción es una operación unitaria de transferencia de materia entre fases, utilizada para la separación de uno o más componentes de una mezcla de gases por absorción (disolución) de los mismos en un líquido adecuado. Esta operación, basada en la transferencia de materia en una interfase, está controlada en gran parte por las velocidades de difusión.

La absorción puede ser un fenómeno puramente físico, en la que los gases se disuelven en el líquido disolvente; así, por ejemplo, el dióxido de carbono de una mezcla de gases puede eliminarse haciendo pasar la mezcla de gas a través de agua, en la que el anhídrido carbónico se disuelve, obteniéndose agua carbónica. Sin embargo, existen otros casos en los que además de la disolución del gas o gases en el disolvente, tiene lugar una reacción química que influye sobre la velocidad de absorción, aunque en general ésta no es la etapa controlante. Ejemplos de absorción con reacción química son la eliminación de dióxido sulfuroso mediante absorción del mismo en agua, o bien la absorción de dióxido de carbono en una solución de hidróxido sódico.

La operación contraria, en la que un soluto pasa de la fase líquida a la gaseosa, se la denomina desorción (*stripping*). En la industria alimentaria suelen utilizarse procesos de desorción cuando se desea eliminar los hidrocarburos presentes en aceites que han sido obtenidos por extracción con disolventes.

La absorción, generalmente, se realiza en columnas de platos o de relleno. En el primer caso, la transferencia de materia se realiza en cada plato, llegándose al equilibrio, siempre y cuando se suponga que la eficacia del plato sea total. Para las columnas de relleno, la transferencia de materia se realiza a lo largo de toda la columna, de forma continua. El modo más frecuente de operar es haciendo circular las corrientes de gas y líquido en contracorriente, ya que así se obtiene un mayor gradiente de concentración, lo que facilita que la absorción sea más rápida.

A veces, la absorción puede llevarse a cabo en columnas de pulverización, de borboteo, de paredes mojadas, aunque también se utilizan tanques agitados y otros tipos de equipos. A pesar de la gran variedad de aparatos que se pueden utilizar en los procesos de absorción, en este capítulo se estudiarán con detalle el cálculo de columnas de relleno, realizando unas pequeñas consideraciones sobre las de platos.

21.2. Equilibrio líquido-gas

El principio en el que se fundamentan los procesos de absorción y desorción es la diferencia de concentración que existe entre las fases, del componente que se transfiere, respecto de la de equilibrio. Cuanto más alejado se esté de las condiciones de equilibrio mayor es la transferencia de materia entre las fases.

Se supone una mezcla de gases en la que uno de sus componentes es soluble en un líquido. Para una presión y temperatura determinadas, al poner en contacto la mezcla de gases con dicho líquido, el componente se disuelve en el líquido hasta que se llega a un punto en que no existe transferencia neta del componente. Este punto determina el equilibrio para las condiciones fijadas. Si se varían las condiciones de concentración del componente en el líquido, se obtienen nuevas condiciones de equilibrio. De cualquier forma, la presión parcial del componente P_i en fase gas es función de la concentración del mismo componente en fase líquida C_i (figura 21.1). La curva resultante de representar P_i frente a C_i es la curva de equilibrio a la temperatura fijada. El punto A representa las condiciones de un componente i que se desea recuperar por absorción. Su presión parcial en fase gas es superior a la de equilibrio (P_e), con lo que parte del componente pasa a la fase del disolvente, es decir, es absorbido. En un sistema cerrado, o si se trabaja en columnas con corrientes paralelas, la presión parcial irá disminuyendo, mientras que la concentración del soluto irá aumentando en el disolvente, hasta que se llega a un punto de la curva de equilibrio, en donde cesa la transferencia de materia de la fase gaseosa a la líquida.

Todo punto por encima de la curva de equilibrio representa un sistema en el que se realiza la transferencia de soluto desde la fase gaseosa a la líquida, o lo que

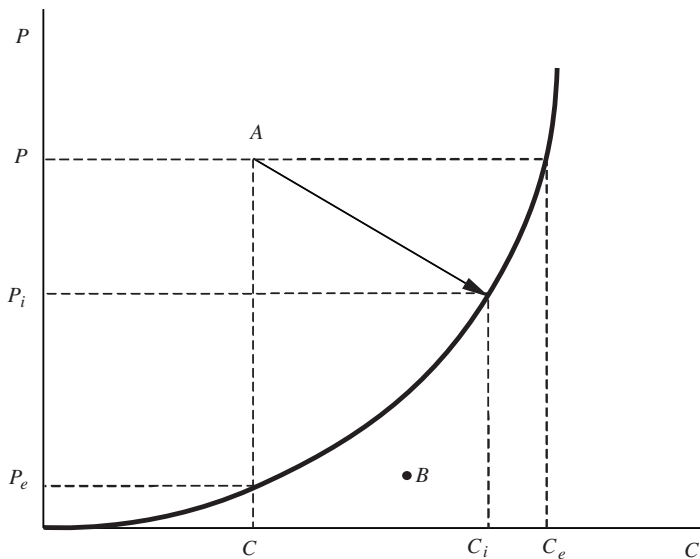


Figura 21.1. Diagrama P - C de equilibrio en absorción.

es lo mismo se produce una absorción. Por contra, cuando las condiciones de un sistema cualquiera vengan representadas por un punto que se halle por debajo de la curva de equilibrio (punto *B*), el sistema evoluciona de tal forma que el componente se transfiere desde el seno de la fase líquida hacia la gaseosa; es decir, se produce un proceso de desorción.

Los datos de equilibrio que se requieren para cálculos de absorción incluyen la solubilidad del soluto gaseoso en el disolvente. Al dar la solubilidad del soluto es necesario dar también la temperatura, la concentración del gas en el disolvente, la presión del soluto en la fase gaseosa, y la presión total. Cuando la presión total es baja no tiene mucha influencia en los datos de equilibrio; sin embargo, para presiones elevadas puede tener un notable efecto sobre la solubilidad del gas.

La curva de equilibrio de cualquier sistema depende de las condiciones de presión y temperatura, además de las condiciones de la naturaleza del sistema mismo. De estas variables, la temperatura es la que ejerce una mayor influencia en la solubilidad de un gas en un líquido. Generalmente, si se aumenta la temperatura, la solubilidad del gas en el líquido disminuye, de acuerdo con la ley de Van't Hoff. Por tanto, para un sistema determinado, la curva de equilibrio será distinta dependiendo de la temperatura, de tal modo que la curva que se obtiene a temperatura superior está por encima de la de menor temperatura.

Si las fases líquida y gaseosa se comportan de forma ideal se cumple la ley de Raoult. En el caso que la solución líquida no se comporte de forma ideal, no se puede aplicar esta ley; sin embargo, para concentraciones bajas de soluto en el líquido (soluciones diluidas) se cumple la ley de Henry:

$$P_i = H C_i \quad [21.1]$$

En muchos casos, la ley de Henry es válida cuando la presión parcial es inferior a una atmósfera. Pero, para presiones superiores, la ley de Henry es sólo aplicable en un intervalo restringido de concentraciones.

La constante de Henry varía mucho con la temperatura, y en general, dicha variación se puede aproximar a una relación del tipo:

$$\log H = A + \frac{B}{T} \quad [21.2]$$

en la que *T* es la temperatura absoluta, mientras que *A* y *B* son constantes.

Como ya se ha indicado, la ley de Henry se aplica en soluciones diluidas, cuya fracción molar en soluto sea inferior a 0,1. Esta ley es muy utilizada en los cálculos de las condiciones de equilibrio en el diseño de columnas de absorción.

En los cálculos de procesos de absorción y desorción, resulta muy útil representar los datos de equilibrio en razones molares, definidas según las ecuaciones:

- Fase gaseosa:
$$Y = \frac{P_i}{P - P_i} \quad [21.3]$$

• Fase líquida:
$$X = \frac{C_i}{C_T - C_i} \quad [21.4]$$

en las que P y P_i son la presión total y de componente i en fase gas, respectivamente; mientras que C_T es la concentración total en fase líquido, también denominada densidad molar, siendo C_i la concentración del componente i en fase líquida.

Si x e y son las fracciones molares del componente en fase líquida y gaseosa, están ligadas con las razones molares de acuerdo con las expresiones:

$$X = \frac{x}{1-x} \quad x = \frac{X}{1+X} \quad [21.5]$$

$$Y = \frac{y}{1-y} \quad y = \frac{Y}{1+Y} \quad [21.6]$$

Para aquellos sistemas ideales, en los que se cumple la ley de Raoult:

$$P_i = x_i P_0 = y_i P$$

la curva de equilibrio, expresada en razones molares viene dada por la ecuación:

$$Y_i = \frac{1}{\frac{P}{P_0} \frac{1+X_i}{X_i} - 1} \quad [21.7]$$

21.3. Mecanismo de la absorción

Se supone una mezcla de gases, en el que uno de sus componentes es absorbido por un líquido, tal como se muestra en la figura 21.2. El líquido desciende sobre la superficie de un sólido, mientras que la mezcla gaseosa circula de modo ascendente. La presión parcial del gas es algo superior a la del líquido con el que está en equilibrio. Si P es la presión parcial del gas, la concentración del líquido en equilibrio es C_e . La transferencia de gas tiene lugar desde la fase gaseosa a presión P hasta el seno del líquido con una concentración C . El perfil de presiones en la fase gaseosa, y de concentraciones en la líquida, es el mostrado en la figura 21.2. A medida que se acerca a la interfase, la presión parcial disminuye hasta P_i , que es la correspondiente a la interfase, siendo C_i la concentración en la interfase para la corriente líquida. La concentración en el seno del líquido disminuye desde C_i hasta C . La concentración C del líquido está en equilibrio con la presión P_e del gas.

Para explicar la transferencia de materia entre fases se han propuesto diferentes modelos, aunque la teoría de la doble película, dada por Whitman en 1923, es la más simple y la que proporciona los conceptos más claros.

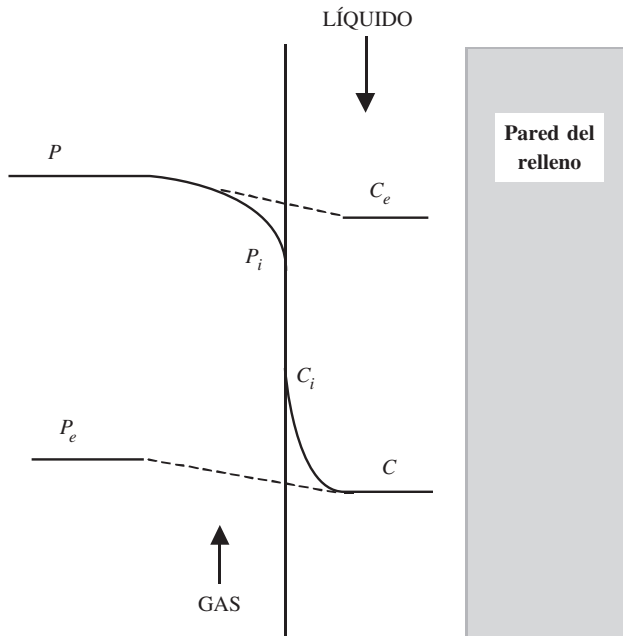


Figura 21.2. Mecanismo de absorción.

21.3.1. Teoría de la doble película

El modelo de la doble película supone que la transferencia de materia en la masa global de cada fase se realiza por corrientes convectivas, no existiendo gradientes de concentración dentro de cada fase, excepto en las proximidades de la interfase. Se supone que en ambos lados de la interfase existe una delgada película estática de fluido (subcapas laminares), a través de la cual la transferencia se realiza únicamente por difusión molecular. La dirección de la transferencia de materia a través de la interfase no depende de la diferencia de concentraciones, sino de la relación de equilibrio. En la interfase las composiciones de gas y del líquido están en equilibrio. En la figura 21.3 se muestra el perfil de concentraciones, según esta teoría.

En cada una de estas capas laminares el gradiente de concentración disminuye, siendo nulo fuera de ellas. En este modelo se considera la transferencia como un proceso estacionario.

21.3.2. Ecuaciones básicas de transferencia de materia

Cuando en una mezcla homogénea de más de un componente existe un gradiente de concentración de un punto a otro, hay una tendencia a la transferencia de materia de modo que las concentraciones se hagan uniformes.

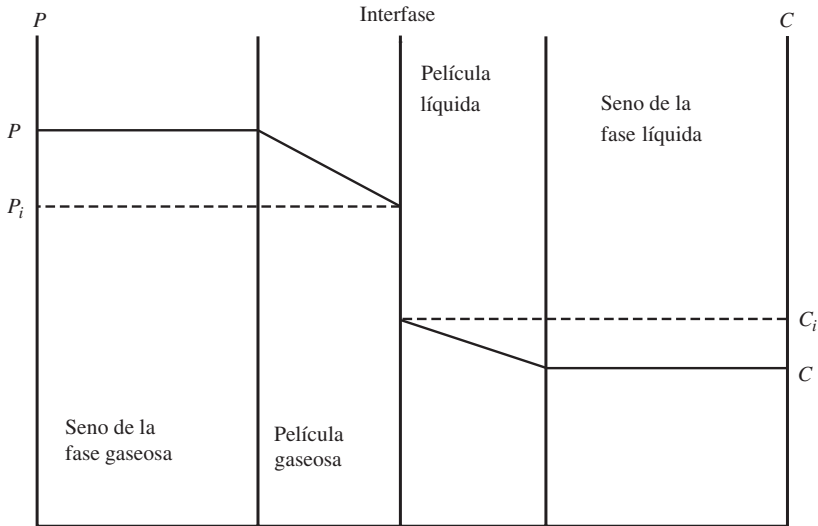


Figura 20.3. Perfil de concentraciones en la doble película.

La velocidad neta de difusión, según la ley de Fick, es proporcional al gradiente de concentración en el punto considerado:

$$N_i = -D \frac{\partial C}{\partial z} \quad [21.8]$$

en la que C es la concentración, z la distancia o posición, D la difusividad y N_i la velocidad de difusión o densidad de flujo.

La velocidad de difusión es grande en los gases y mucho más lenta en los líquidos. Al aplicar la teoría de la difusión es conveniente aplicar formas integradas de la ecuación anterior, ya que la ecuación 21.8 es sólo aplicable al punto considerado.

21.3.2.1. Difusión en fase gaseosa

En el seno de la fase gaseosa, si se supone una mezcla de dos componentes A y B , en la que A se difunde a través de B , estando B estacionario, al integrar la ecuación 21.8, si la difusividad es constante, la velocidad de difusión (N_A) es:

$$N_A = \left(\frac{D_V}{L} \right) (C_G - C_G^i) \quad [21.9]$$

siendo L el espesor de la capa a través de la que difunde el componente A ; D_V la difusividad de A a través de B , C_G la concentración en el seno del gas (para $L = 0$), y C_G^i la concentración en la interfase.

Para gases ideales, la concentración en fase gaseosa está relacionada con la presión parcial de acuerdo a la ecuación de gases perfectos, lo que permite transformar la ecuación anterior, y expresarla del siguiente modo:

$$N_A = \left(\frac{D_V}{R T L} \right) (P - P_i) \quad [21.10]$$

Si se define un coeficiente individual de transferencia de materia en fase gas:

$$k_g = \frac{D_V}{R T L} \quad [21.11]$$

se obtiene que la velocidad de difusión de transferencia de materia (densidad de flujo de materia) a través de la masa gaseosa es:

$$N_A = k_g (P - P_i) \quad [21.12]$$

21.3.2.2. Difusión en fase líquida

La velocidad de difusión en los líquidos es mucho menor que en los gases. Para soluciones diluidas, la ecuación básica que da la densidad de flujo de materia es la expresión:

$$N_A = - \left(\frac{D_L}{L} \right) (C - C_i) \quad [21.13]$$

siendo L el espesor de la película líquida a través de la cual tiene lugar la difusión, D_L la difusividad en la fase líquida, C_i y C las concentraciones en la interfase y en el seno del líquido, respectivamente. Si se define un coeficiente individual de transferencia de materia en fase líquida:

$$k_l = \frac{D_L}{L} \quad [21.14]$$

se obtiene que la densidad de flujo de materia a través de la masa líquida es:

$$N_A = k_l (C_i - C) \quad [21.15]$$

21.3.3. Velocidad de absorción

En un proceso de absorción en estado estacionario, la densidad de flujo de materia a través de la película gaseosa será la misma que la transferencia a través de la película de líquido. Por tanto, la ecuación general para la transferencia de materia será:

$$N_A = k_g (P - P_i) = k_l (C_i - C) \quad [21.16]$$

en la que P es la presión parcial del componente en fase gaseosa, P_i la correspondiente a la interfase, mientras que C es la concentración de dicho componente en el seno del líquido y C_i en la interfase. En la figura 21.4 se representan estas composiciones en un diagrama presión-concentración.

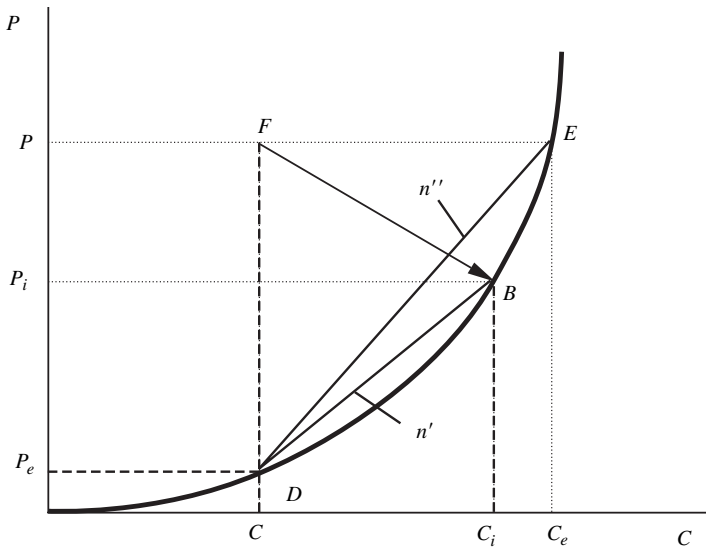


Figura 21.4. Relación para los coeficientes de materia.

Reordenando la ecuación [21.16], la pendiente de la línea de unión, que permite determinar las concentraciones de la interfase conocidas las de las fases gaseosa y líquida, será:

$$\frac{P - P_i}{C - C_i} = - \frac{k_l}{k_g} \quad [21.17]$$

El punto F representa las condiciones en la masa global del gas y del líquido. El punto E representa una concentración C_e en el líquido que está en equilibrio con la presión parcial P en el seno del gas. El punto B representa la concentración C_i en la interfase líquida que está en equilibrio con la presión parcial P_i de la interfase gaseosa. El punto D representa una presión P_e en la fase gaseosa que está en equilibrio con una concentración C en fase líquida.

La fuerza impulsora que provoca la transferencia de materia en la fase gaseosa es: $(P - P_i)$. La fuerza impulsora de transferencia de materia en la fase líquida es: $(C_i - C)$.

Si se conoce el punto F , que da las concentraciones en el seno de las fases gaseosa y líquida (C, P) , trazando una recta de pendiente $-k_l/k_g$ se obtendrá en el corte con la curva de equilibrio el punto B , que da las composiciones de las interfases gas y líquido (C_i, P_i) .

Para poder determinar k_g y k_l se deben conocer los valores de la concentración en la interfase, lo cual es muy difícil de medir, por lo que resulta más adecuado utilizar los coeficientes globales de transferencia de materia en fase gas (K_G) y en fase líquida (K_L). La densidad de flujo de materia en función de estos coeficientes globales se expresará de la siguiente forma:

$$N_A = K_G (P - P_e) = K_L (C_e - C) \quad [21.18]$$

Para obtener las relaciones entre los distintos coeficientes de transferencia se debe observar en la figura 21.4 las pendientes de las rectas que unen el punto $D(C, P_e)$ con los puntos $B(C_i, P_i)$ y $E(C_e, P)$:

- Pendiente recta \overline{DB} :
$$n' = \frac{P_i - P_e}{C_i - C} \quad [21.19]$$

- Pendiente recta \overline{DE} :
$$n'' = \frac{P - P_e}{C_e - C} \quad [21.20]$$

De las ecuaciones (21.16) y (21.18), la densidad de flujo de materia se puede expresar de la forma:

$$N_A = \frac{P - P_i}{\frac{1}{k_g}} = \frac{C_i - C}{\frac{1}{k_l}} = \frac{P - P_e}{K_G} = \frac{C_e - C}{K_L} \quad [21.21]$$

si se tienen presentes los valores de las pendientes n' y n'' , dados en las ecuaciones [21.19] y [21.20], al combinar con esta última ecuación se obtiene:

$$N_A = \frac{P - P_i}{\frac{1}{k_g}} = \frac{P_i - P_e}{\frac{n'}{k_l}} = \frac{P - P_e}{K_G} = \frac{P - P_e}{\frac{n''}{K_L}} \quad [21.22]$$

de donde, al tener en cuenta las propiedades de las fracciones, se obtiene la relación:

$$\frac{1}{k_g} + \frac{n'}{k_l} = \frac{1}{K_G} = \frac{n''}{K_L} \quad [21.23]$$

Cuando se cumple la ley de Henry: $n' = n'' = H$, siendo H la constante de Henry.

El que el gas sea más o menos soluble hace que la curva de equilibrio varíe, y que la resistencia a la transferencia de materia esté localizada en una u otra fase. Así, en el caso de gases muy solubles controla la fase gaseosa, y se considera que la concentración de la interfase líquida coincide con la global del líquido ($C_i = C$) y por tanto $P_i = P_e$, lo que indica que no existe resistencia en la fase líquida (k_l es muy elevada) y se obtiene que $k_g = K_G$. En el caso que el gas sea muy poco soluble en el líquido, la presión P_i coincide con la del seno del gas ($P_i = P$) y por tanto

$C_i = C_e$, lo que indica que no existe resistencia en la fase gaseosa (k_g es muy elevada), obteniéndose que $k_l = K_L$, es decir, la transferencia de materia está controlada por la fase líquida. Si el gas que se absorbe es un gas puro, la presión en la interfase gaseosa coincide con la presión parcial en el seno del gas ($P_i = P$), con lo que se está en una situación similar a la anterior. Por lo que, utilizando un gas puro se puede llegar a determinar los coeficientes k_l y K_g .

21.4. Columnas de relleno

El aparato que es más utilizado en los procesos de absorción de gases, es la columna de relleno. Consta esencialmente de una torre o columna cilíndrica, con salidas superiores e inferiores para el gas y el líquido, y un lecho de partículas sólidas inertes que rellenan la columna, y que reciben el nombre de relleno. Por regla general estas torres de relleno operan en contracorriente. El líquido o solución se introduce por la cabeza de la columna, y mediante un distribuidor se reparte uniformemente, de modo que el relleno quede mojado uniformemente. El gas o mezcla de gases se introduce por la parte inferior, ascendiendo entre los intersticios del relleno, de forma que circula en contracorriente con el líquido. El relleno proporciona una mayor superficie de contacto entre las dos fases, favoreciendo así la absorción del gas por el líquido.

En el diseño de las torres de absorción los pasos que se siguen son:

1. Selección del disolvente.
2. Obtención de datos de equilibrio.
3. Balance de materias.
4. Balance entálpico.
5. Elección del relleno.
6. Cálculo del diámetro de la columna.
7. Cálculo de altura de relleno.
8. Cálculo de pérdidas de carga.

21.4.1. Selección del disolvente

El disolvente ideal será aquel que no sea volátil ni corrosivo, además de no ser viscoso y espumante. Asimismo, debe ser estable y no inflamable, y presentar una solubilidad infinita para el soluto.

Generalmente, es difícil encontrar un disolvente que cumpla todos estos requisitos, por lo que la elección del disolvente vendrá determinada en cada caso por la alternativa más conveniente. Se dará preferencia, sin embargo, a los líquidos que presenten mayor solubilidad por el soluto. En los casos de absorción física se elige, además, el más barato y no corrosivo. Cuando la absorción es con reacción química, el disolvente debe presentar mayor capacidad de absorción. Los datos para poder elegir el disolvente se deben buscar en la bibliografía, generalmente en enciclopedias.

21.4.2. Obtención de datos de equilibrio

El conocimiento exacto y correcto de los datos de equilibrio es muy importante, pues determinan la velocidad de circulación del líquido para una cierta recuperación especificada de soluto.

Los mejores datos para un sistema determinado son los obtenidos experimentalmente. Aunque a veces no se obtienen estos datos, y se debe recurrir a expresiones generalizadas para el sistema que interese. Estos datos de equilibrio se encuentran en muchos casos en la bibliografía, como puede ser en enciclopedias técnicas y Handbooks, en tablas (International Critical Tables), y en algunos casos en revistas científicas, especializadas en el tema.

21.4.3. Balance de materias

Al aplicar los balances de materia en la columna de absorción (figura 21.5) se utilizan razones molares, por lo que se definen G' y L' como los caudales de gas inerte y de disolvente en la columna:

G' = caudal molar de gas inerte (kmol/h)

L' = caudal molar de disolvente (kmol/h)

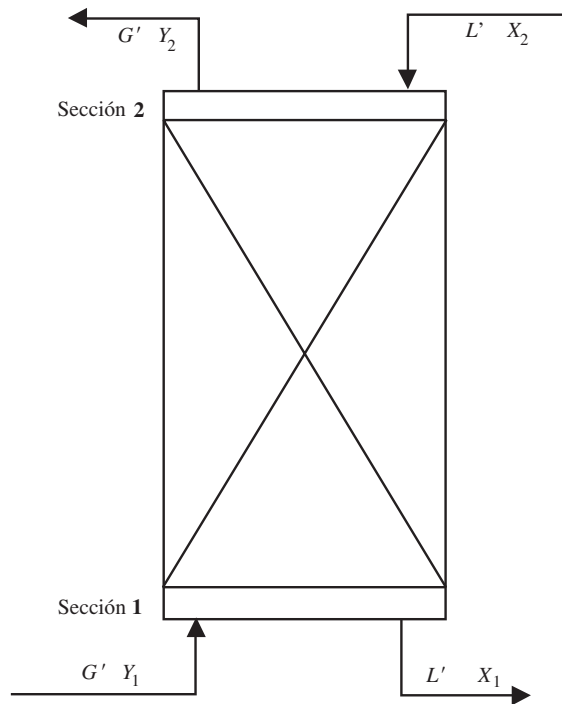


Figura 21.5. Columna de absorción.

Las razones molares se definen:

$$\text{Razón molar} = \frac{\text{Número de moles de soluto}}{\text{Número de moles de inerte}} \quad [21.24]$$

Para la fase gaseosa se utilizará Y para designar la razón molar, mientras que en la fase líquida se utilizará X .

El balance de soluto a lo largo de toda la columna cumple que la cantidad de soluto que pierde el gas es igual a la que gana el líquido.

Balance global de soluto entre la sección (1) y (2):

$$G' (Y_1 - Y_2) = L' (X_1 - X_2) \quad [21.25]$$

de la que se obtiene:

$$Y_1 - Y_2 = \frac{L'}{G'} (X_1 - X_2) \quad [21.26]$$

Esta ecuación es una recta en el diagrama de equilibrio con razones molares, que pasa por los puntos (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) , y tiene la pendiente $\left(\frac{L'}{G'}\right)$. Esta recta que une los puntos (1) y (2) recibe el nombre de **recta de operación** (figura 21.6a).

Por regla general en los procesos de absorción los datos son G' , Y_1 , Y_2 , X_2 , y las incógnitas L' y X_1 . En la absorción la curva de equilibrio se encuentra por debajo de la recta de operación. Sin embargo, en los procesos de desorción la recta de operación es la que se encuentra por debajo de la curva de equilibrio.

Según se ha indicado, con los datos que se dan generalmente, el punto (2) será un dato, y el punto (1) irá variando a lo largo de la horizontal $Y = Y_1$. Según sea el caudal de disolvente L' . Cuando $X_1 = (X_1)_e$ la recta de operación corta a la curva de equilibrio en el punto $[(X_1)_e, Y_1]$, se obtiene una recta de operación en que la razón $\left(\frac{L'}{G'}\right)$ es mínima, cumpliéndose:

$$\left(\frac{L'}{G'}\right)_{\min} = \frac{Y_1 - Y_2}{(X_1)_e - X_2} \quad [21.27]$$

Luego la composición del líquido de salida $(X_1)_e$ estará en equilibrio con la del gas de entrada (Y_1) . Para alcanzar este punto la altura de la torre debe ser infinita. En los casos de no idealidad en las curvas de equilibrio, tal como muestra la figura 21.6b, si se quiere obtener $\left(\frac{L'}{G'}\right)_{\min}$ al unir los puntos (X_2, Y_2) con $[(X_1)_e, Y_1]$ la

recta cortaría a la curva de equilibrio, por lo que no se podría realizar tal operación.

En estos casos la recta de operación de $\left(\frac{L'}{G'}\right)_{\min}$ se traza tangente a la curva de equilibrio.

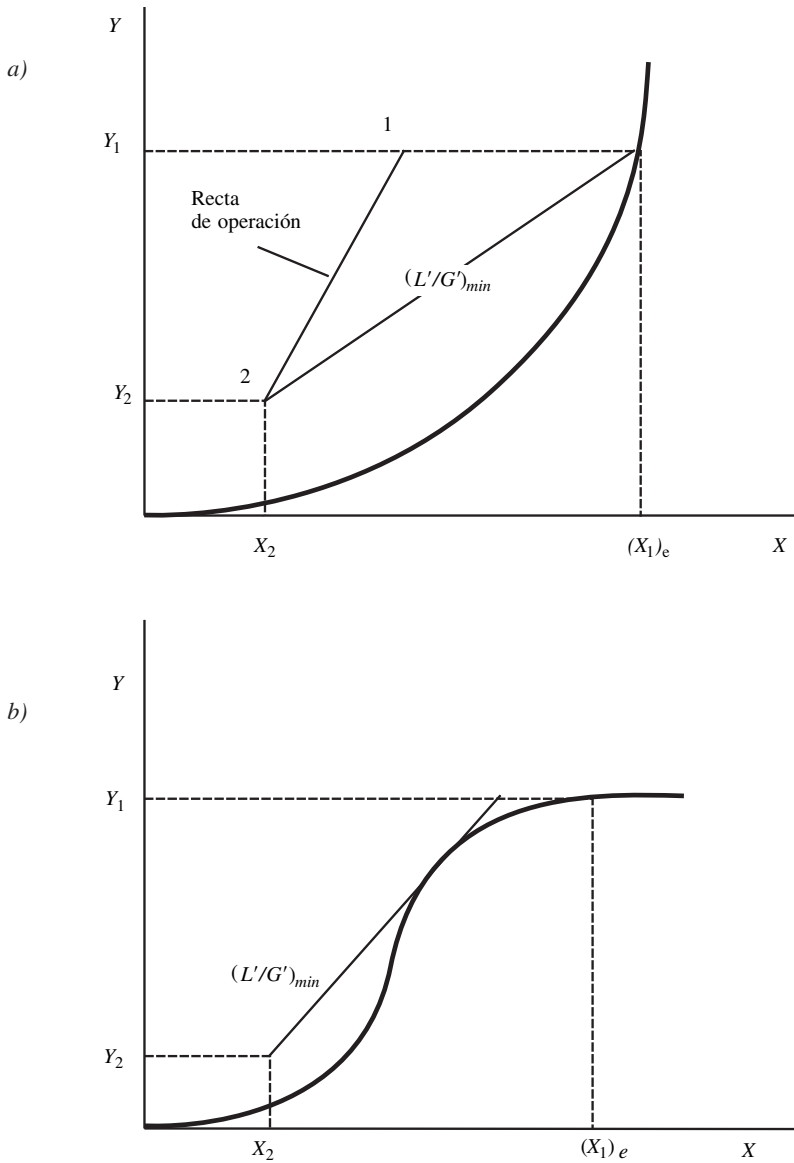


Figura 21.6. Rectas de operación de condición mínima: a) Sistema ideal. b) Sistema no ideal.

Empíricamente, por regla general, los procesos de absorción se realizan con una relación 25% superior a la mínima:

$$\frac{L'}{G'} = 1,25 \left(\frac{L'}{G'} \right)_{\min}$$

21.4.4. Balance entálpico

Generalmente los procesos de absorción se llevan a cabo de forma isotérmica y no es necesario plantear un balance de energía. Sin embargo, en algunos, por ejemplo en la absorción con reacción química, aparece desprendimiento de calor. Esto da lugar a un aumento en la temperatura del líquido. Este aumento de temperatura afectará a la curva de equilibrio.

Para absorción de gases en condiciones no isotermas, a veces se supone que el calor desarrollado es captado por el líquido, y que no afecta a la temperatura del gas. El hacer esta suposición conduce al diseño de una torre con una altura superior a la requerida. El balance entálpico se utiliza para calcular el perfil de temperatura a lo largo de la columna, lo que permite construir la curva de equilibrio, en el diagrama $Y-X$ correspondiente a la operación.

Si se supone una columna adiabática: $\dot{Q}_{perdido} = 0$

$$\dot{Q}_{generado} = \dot{Q}_{disolución} + \dot{Q}_{reacción} = R (\Delta \hat{H}_{disol.} + \Delta \hat{H}_{reac.})$$

La cantidad de soluto transferida es R :

$$R = L' (X_1 - X_2) = G' (Y_1 - Y_2) \quad [21.28]$$

Al aplicar un balance energético entre las secciones (1) y (2), el término de acumulación es nulo si se trabaja en estado estacionario:

$$\{\text{Término de entrada}\} = L_2 \hat{h}_2 + G_1 \hat{H}_1$$

$$\{\text{Término de salida}\} = L_1 \hat{h}_1 + G_2 \hat{H}_2$$

$$\{\text{Término de generación}\} = R (\Delta \hat{H}_{disol.} + \Delta \hat{H}_{reac.})$$

Si \hat{C}_{PL} y \hat{C}_{PG} son las capacidades caloríficas de las fases líquidas y gas, las entalpías en fase líquida serán:

$$\hat{h}_1 = (\hat{C}_{PL})_1 T_1 \quad \text{y} \quad \hat{h}_2 = (\hat{C}_{PL})_2 T_2$$

Con lo que el balance de energía tomará la forma:

$$L_2 (\hat{C}_{PL})_2 T_2 + G_1 \hat{H}_1 + R (\Delta \hat{H}_d + \Delta \hat{H}_r) = L_1 (\hat{C}_{PL})_1 T_1 + G_2 \hat{H}_2 \quad [21.29]$$

por tanto:

$$T_1 = \frac{L_2 (\hat{C}_{PL})_2 T_2}{L_1 (\hat{C}_{PL})_1} + \frac{R (\Delta \hat{H}_d + \Delta \hat{H}_r)}{L_1 (\hat{C}_{PL})_1} + \frac{G_1 \hat{H}_1 - G_2 \hat{H}_2}{L_1 (\hat{C}_{PL})_1} \quad [21.30]$$

Si además de considerar que la columna trabaja adiabáticamente se supone que se verifican las siguientes hipótesis:

- Las capacidades caloríficas $(\hat{C}_{PL})_1$ y $(\hat{C}_{PL})_2$ son iguales y corresponden a la del disolvente:

$$(\hat{C}_{PL})_1 = (\hat{C}_{PL})_2 = \hat{C}_{PL}$$

- Las entalpías de la fase gaseosa se toman como análogas a la del aire húmedo saturado:

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_2 \approx \hat{H}_{\text{aire húmedo (saturado)}}$$

- La temperatura en las secciones (1) y (2) es constante a lo largo de toda la sección: $G_1 \hat{H}_1 \approx G_2 \hat{H}_2$. Su término se suele despreciar.

Con lo que:

$$T_1 = \frac{T_2 L_2}{L_1} + \frac{R(\Delta \hat{H}_d + \Delta \hat{H}_r)}{L_1 \hat{C}_{PL}} \quad [21.31]$$

Los valores de la corriente líquida son aproximadamente iguales en las dos secciones: $L_1 \approx L_2 \rightarrow L$.

Así para la temperatura T_1 se obtiene:

$$T_1 = T_2 + \frac{R(\Delta \hat{H}_d + \Delta \hat{H}_r)}{L \hat{C}_{RL}} \quad [21.32]$$

En una sección cualquiera de la columna i le corresponde una temperatura T_i , cuya expresión es:

$$T_i = T_2 + \frac{R_i(\Delta \hat{H}_d + \Delta \hat{H}_r)}{L \hat{C}_{RL}} \quad [21.33]$$

donde:

$$R_i = L' (X_i - X_2) \quad [21.34]$$

Por lo que la temperatura T_i es función de la composición del líquido en la sección i (X_i) y de la sección (2) (X_2). La ecuación [21.33] relaciona la temperatura con la composición del líquido, por lo que la curva de equilibrio real se debe construir a partir de dicha expresión.

Para construir la curva real de equilibrio se van dando valores a X_i y mediante la ecuación 21.33 se obtiene su correspondiente temperatura T_i , con esta temperatura, se busca en el conjunto de isotermas T el punto de dicha curva que tiene de abscisa X_i , y se obtiene su Y de equilibrio.

21.4.5. Elección del tipo de relleno. Cálculo del diámetro de la columna

La elección del relleno es muy importante, pues su influencia es decisiva sobre la altura y diámetro de la columna. El relleno de una columna producirá un aumento de la superficie de contacto entre la fase gaseosa y líquida, lo que provocará una mayor transferencia de materia entre las dos fases. Las características que debe cumplir un relleno son:

1. Ser químicamente inerte para los fluidos que circulan en la torre.
2. Tener suficiente resistencia mecánica sin un peso excesivo.

3. Permitir un paso adecuado de ambas corrientes sin originar una retención de líquido o una caída de presión excesivas.
4. Proporcionar un buen contacto entre las fases.
5. Tener un coste relativamente bajo.

Hay diferentes tipos de rellenos (figura 21.7, tabla 21.1), pudiendo clasificarse en:

a) Anillos

Existen de diferentes medidas, saltando de una a otra de media en media pulgada. Generalmente son de cerámica o acero. También de plástico, vidrio y otros materiales. Si los anillos son menores de 3'' se colocan al azar. Si son mayores de este tamaño se colocan ordenadamente.

- *Raschig*: Es la forma más sencilla y corriente. Es un trozo de tubería de pequeño espesor, de altura igual al diámetro.
- *Lessing*: Son como los anillos Raschig, pero con un tabique transversal, para aumentar la superficie de contacto. Su tamaño máximo es de 6''.
- *En cruz*: Con dos tabiques en cruz.
- *En espiral*: El tabique intermedio está constituido por una espiral simple, doble o triple.
- *Pall*: Como los anillos Raschig, pero con aperturas laterales.

b) Sillas o monturas

- *Berl*: Con forma de sillas de montar. Generalmente son de plástico o cerámica de 1/2'' a 3''. Caben más por unidad de volumen que de anillos. Presentan el inconveniente de que pueden encajar unas encima de las otras, disminuyendo el área de transferencia.
- *Intalox*: De forma parecida a las anteriores, pero sin posibilidad de superponerse unas con otras.

c) Otros tipos

También se utilizan como rellenos madejas de níquel, rejas de madera o metálicas, piedras troceadas, entre otros. El uso de estos tipos de relleno se halla muy restringido a ciertos procesos.

Cada relleno tiene su dimensión característica d_p . La canalización de la pared es mínima cuando: $d_p < \frac{D}{8}$, siendo D el diámetro de la columna. Cuando d_p es

menor de este valor se evitan las canalizaciones de líquido en la pared de la torre. Para evitar las canalizaciones se deben colocar redistribuidores a lo largo de la columna.

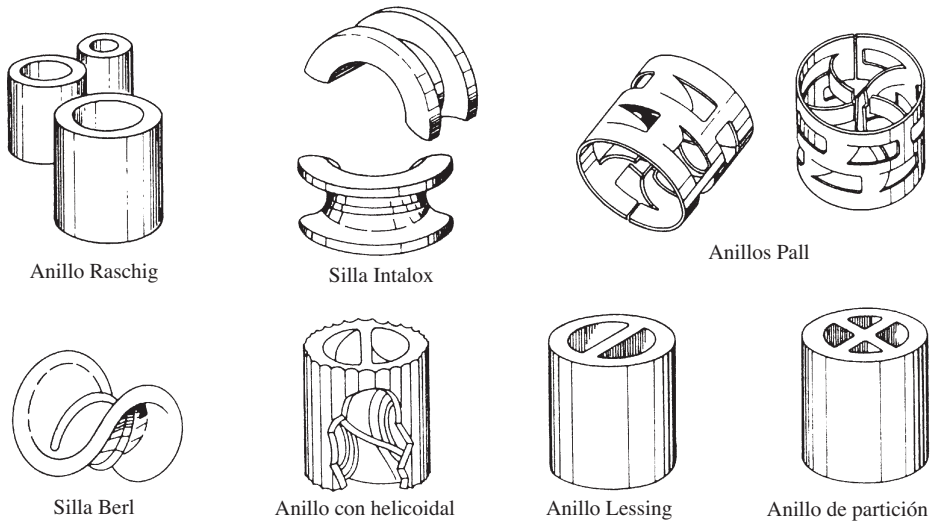


Figura 21.7. Diferentes tipos de relleno (adaptado de Costa *et al.*, 1984).

Tabla 21.1. Propiedades aproximadas de diversos rellenos

Rellenos	Tamaño Nominal (pulgadas)	Número por m ²	Superficie específica a (m ² /m ³)	Porosidad (100 g)	a/ϵ^3 (m ² /m ³)
Anillos Raschig (Cerámica I)	3	1.720	72	94	87
	2	5.420	102	94	123
	1	44.600	206	93	258
	1/2	354.000	416	91	555
Anillos Raschig (Grafito)	3	1.560	62	78	131
	2	5.290	95	74	236
	1	42.200	187	74	464
	1/2	338.000	373	74	925
Anillos Raschig (Cerámica II)	4	733	52	74	129
	2	5.420	95	73	245
	1	43.000	190	71	532
	1/2	335.000	368	71	1.030
	1/4	2.870.000	795	72	2.140
Monturas Berl (Cerámica)	2	8.600	115	77	253
	1	71.700	243	70	708
	1/2	510.000	465	66	1.620
	1/4	4.620.000	1.150	65	4.200

21.4.5.1. Características estáticas de un relleno

El conjunto de partículas que forman un relleno queda caracterizado por medio del área de la superficie específica o superficie unitaria (a), y de la fracción de huecos (ϵ). A continuación se incluyen algunas definiciones:

- *Superficie unitaria o superficie específica del lecho a_s* : Es el área presentada al fluido por todo el relleno, por unidad de volumen del lecho. Sus unidades son de (longitud)⁻¹.

$$a_s = \frac{\text{m}^2 \text{ de superficie}}{\text{m}^3 \text{ de lecho de relleno}}$$

- *Fracción de huecos (ϵ)*: Es la fracción del volumen de lecho no ocupada por el relleno. También se denomina porosidad, y es adimensional. La fracción de volumen ocupada por el material es $1-\epsilon$.

$$\epsilon = \frac{\text{m}^3 \text{ de relleno vacío}}{\text{m}^3 \text{ de relleno}}$$

Para que el material de relleno tienda a ocupar todo el lecho, ϵ debe tender a un valor unitario.

- *Factor de relleno*: Está definido como el cociente entre la superficie específica y la fracción de huecos al cubo:

$$\text{Factor de relleno} = \frac{a_s}{\epsilon^3}$$

- *Densidad aparente*: Es el cociente entre el peso total del relleno y el volumen que ocupa:

$$\rho_a = \frac{\text{Peso relleno}}{\text{Volumen ocupado}}$$

- *Superficie específica de cada partícula (a_p) $\equiv a_{s0}$* : Es el área presentada por cada partícula de relleno al fluido por volumen de partícula.

$$a_s = a_p (1 - \epsilon) = a_{s0} (1 - \epsilon)$$

21.4.5.2. Características dinámicas

Existe un factor muy importante en la circulación de las dos fases a través del relleno, y es la pérdida de presión que experimenta la fase gaseosa a lo largo de la columna. Esta pérdida de presión, además de la velocidad del gas, depende del caudal de la fase líquida, pues hay distinta pérdida de presión según el relleno esté más o menos mojado. Por lo que se define el caudal de mojado o caudal de humectación (L_m o L_h), del siguiente modo:

$$L_m = \frac{\text{Caudal volumétrico}}{\text{Perímetro mojado}} \left(\frac{\frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{\text{m}} \right)$$

siendo el perímetro mojado la relación entre la superficie mojada y la altura mojada:

$$\text{Perímetro mojado} = \frac{\text{Superficie mojada}}{\text{Altura mojada}} = \frac{S z a}{z} = S a$$

siendo: S = sección transversal de la columna (m^2).

z = altura de la columna (m).

a = superficie específica del relleno (m^2/m^3).

Con lo que el caudal de mojado será:

$$L_m = \frac{L_V}{S a} = \frac{w_L}{\rho_L S a} \quad [21.35]$$

siendo L_V el caudal volumétrico del líquido.

Cuando el gas circula a través del lecho, si no está mojado $L_m = 0$, al representar la pérdida de carga $\Delta P/z$ frente al caudal de gas (velocidad de gas V_G) en coordenadas doble-logarítmicas, se obtiene una recta de pendiente 1,8 a 2 (figura 21.8).

Si se introduce líquido en contracorriente con el gas en este caso $L_m \neq 0$. A medida que aumenta la velocidad del gas, la pérdida de presión (ΔP) por longitud de relleno (z) aumenta en forma potencial (paso del punto 1 al 2), cuando se llega a una cierta velocidad del gas hay un gran aumento de la pérdida de carga. Este punto se denomina **punto de carga** (punto 2). Al ir aumentando la velocidad del gas se llega a un valor V_G a partir del cual la pérdida de carga se hace infinita, es decir la pérdida de presión del gas iguala a la carga del líquido, y éste no desciende. Este punto se denomina **punto de anegamiento** (punto 3).

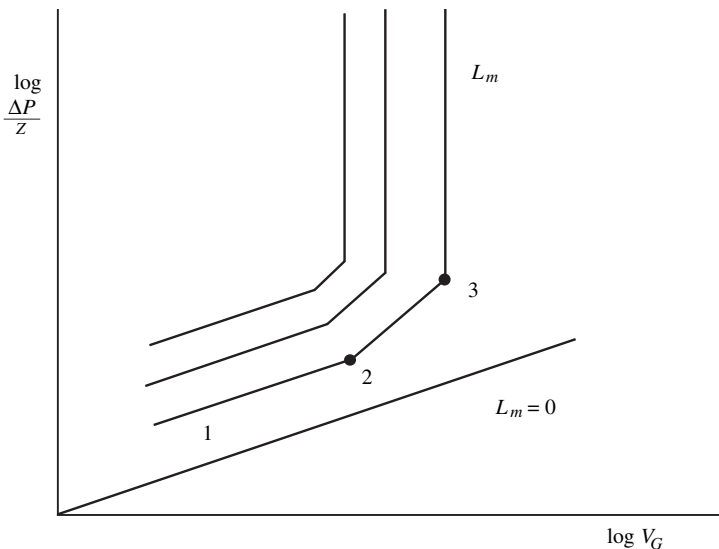


Figura 21.8. Caída de presión del gas en función del caudal de humectación.

El diámetro y altura de la columna vendrán determinadas por los puntos de carga y anegamiento. Interesa trabajar en condiciones que el caudal de mojado sea pequeño ($a_s =$ superficie específica grande), por lo que la velocidad del gas es mayor.

21.4.5.3. Determinación de la velocidad de anegamiento

Se ha comprobado que para un buen funcionamiento debe trabajarse a puntos cercanos a la velocidad de carga, pero sin sobrepasarla. Lo que hace que sea interesante calcular el valor de la velocidad del punto de carga. Sin embargo, el cálculo del punto de carga es difícil, pero no el de anegamiento. Se ha visto experimentalmente que la velocidad en el punto de carga es 2/3 de la de anegamiento:

$$G_{CARGA} \approx 0,6 G_{ANEGAMIENTO} \quad [21.36]$$

en la que la densidad de flujo másica se define como: $G = v_G \rho_G$.

Para el cálculo de la velocidad de anegamiento existen dos métodos, o bien con el gráfico de Lobo, o mediante la ecuación de Sawistowsky.

a) Gráfico de Lobo

El gráfico relaciona la velocidad de anegamiento con las distintas propiedades físicas de las fases y relleno, así como los caudales de gas y líquido, para distintos tipos de relleno (figura 21.9). Se utilizan coordenadas doble-logarítmicas, en las

que en abscisas se representa $\frac{w_L}{w_G} \sqrt{\frac{\rho_G}{\rho_L}}$, mientras que en ordenadas se representa una función de la velocidad de anegamiento $\psi(V_G)$, definida según la expresión:

$$\psi(V_G) = \frac{(G_{ANEG})^2 a}{\rho_L \rho_G \varepsilon^3 g} \left(\frac{\eta_L}{\eta_{agua}} \right)^{0,2} \quad [21.37]$$

en la que las diferentes variables que aparecen son:

- a/ε^3 = factor de relleno (m^2/m^3).
- η_L = viscosidad del líquido (Pa·s).
- η_{agua} = viscosidad del agua a 20 °C (Pa·s).
- ρ_G = densidad del gas (kg/m^3).
- ρ_L = densidad del líquido (kg/m^3).
- G = densidad de flujo másica del gas ($kg/s \cdot m^2$).

b) Ecuación de Sawistowsky

Esta ecuación es empírica y se utiliza en el cálculo de la velocidad de anegamiento.

$$\ln \left[\frac{(G_{ANEG})^2}{g} \frac{a}{\varepsilon^3} \left(\frac{\eta_L}{\eta_{agua}} \right)^{0,2} \frac{1}{\rho_G \rho_L} \right] = -4 \left(\frac{L}{G} \right)^{1/4} \left(\frac{\rho_G}{\rho_L} \right)^{1/2} \quad [21.38]$$

en la que: G = Densidad de flujo másica ($\text{kg/s}\cdot\text{m}^2$).

L = Densidad de flujo másica del líquido ($\text{kg/s}\cdot\text{m}^2$).

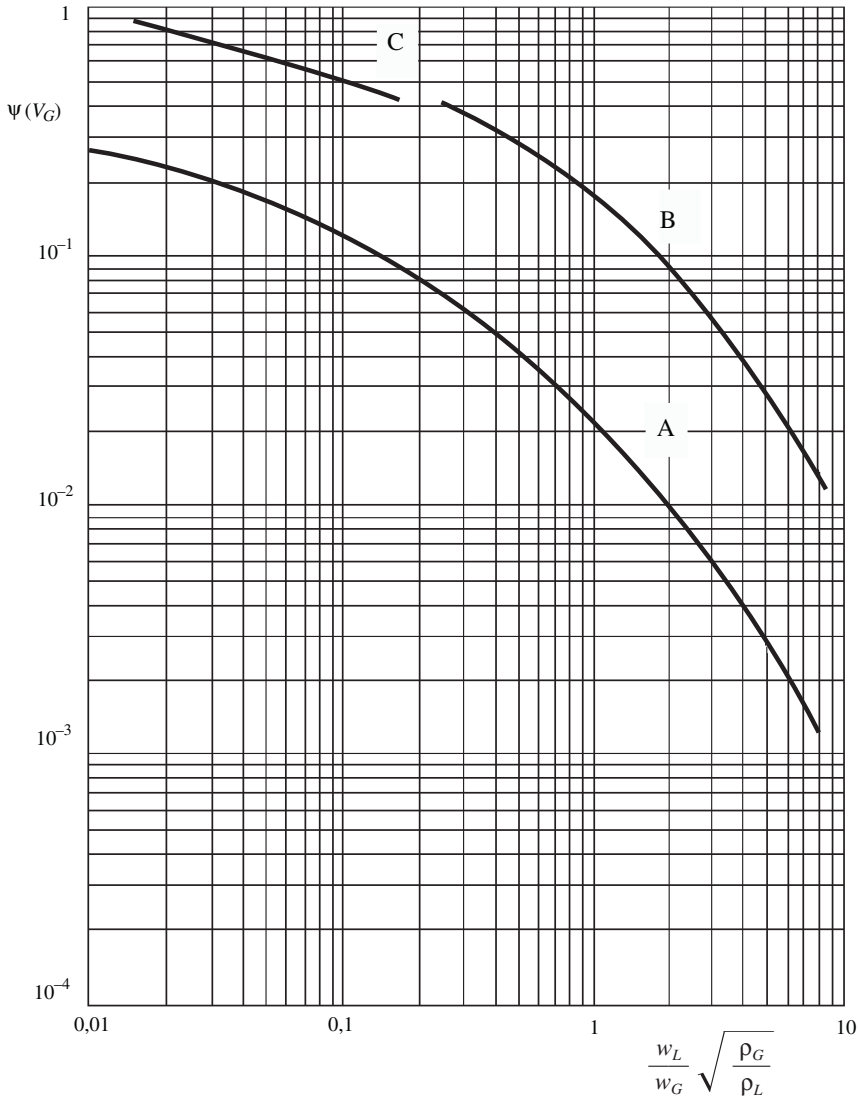


Figura 21.9. Gráfica de anegamiento de Lobo.

$$\Psi(V_G) = \frac{(G_{ANEQ})^2 a}{\rho_L \rho_G \epsilon^3 g} \left(\frac{\eta_L}{\eta_{agua}} \right)^{0.2}$$

A) Sillas y anillos dispuestos al azar. B) Anillos ordenados. C) Rejas de goteo.

21.4.5.4. Determinación del tipo de relleno

El tipo de relleno que debe elegirse es aquél que hace que el caudal de líquido de mojado es el óptimo. Para lo cual se debe utilizar el gráfico de Morris-Jackson (figura 21.10), en el que se representa $\frac{q_G}{q_L} \sqrt{\frac{\rho_G}{\rho_{aire}}}$ en el punto de carga frente al caudal de mojado L_m para diferentes rellenos, siendo q el caudal volumétrico de las corrientes.

Para un mismo valor de la ordenada se elige el relleno de mayor caudal de mojado.

Por regla general, la velocidad del gas en la columna suele ser de aproximadamente de 1 m/s variando de 0,3 m/s a 5 m/s.

De todo lo expuesto en este apartado, para la selección del relleno y cálculo del diámetro de la columna, el modo de operar es el siguiente:

1. Conocidos w_G , w_L , ρ_G y ρ_L mediante el gráfico de Morris-Jackson se elige el relleno con mayor caudal de mojado L_m .

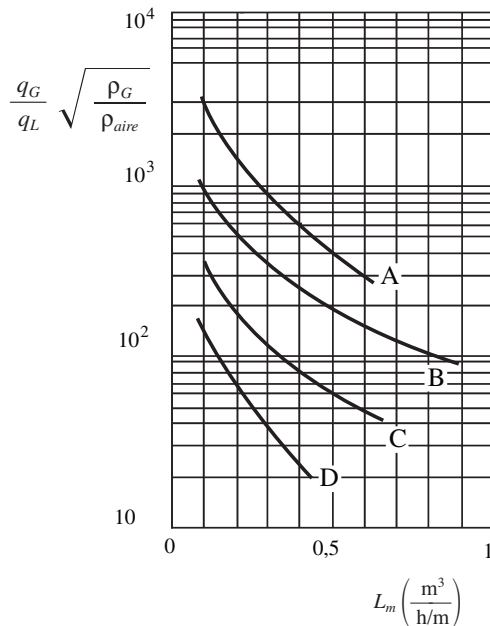


Figura 21.10. Caudales de carga para diferentes tipos de relleno (gráfica de Morris-Jackson).

- A) Rejas de madera aserradas de $2 \times 2 \times 3/8''$
- B) Anillos de gres al azar de $3 \times 3 \times 3/8''$
- C) Anillos de gres al azar de $2 \times 2 \times 1/4''$
Anillos de gres al azar de $2 \times 2 \times 3/16''$
Anillos de gres al azar de $2 \times 2 \times 1/16''$
- D) Anillos de gres al azar de $1 \times 1 \times 1/32''$
Anillos metálicos al azar de $1 \times 1 \times 1/16''$

- Con el gráfico de Lobo o la ecuación de Sawistowsky se obtiene la velocidad de anegamiento.
- Se calcula la velocidad de carga a partir de la de anegamiento:

$$V_{carga} \approx 0,6 V_{ANEG.}$$

- Como se conoce G y $V_{G-carga}$ se calcula la sección transversal de la columna, y a partir de ésta el diámetro.

$$S = \frac{1}{\rho_G} \frac{w_G}{V_{G-carga}} \quad S = \frac{\pi}{4} D^2$$

Una vez seleccionado el tipo de relleno (etapa 1) y obtenido el diámetro de la columna (etapa 4), se hacen las siguientes comprobaciones:

- $D/d_p \geq 8$; en caso contrario se elige otro relleno menor, pero cuyo L_m sea el mayor posible.
- Se repiten las etapas anteriores para calcular $V_{G-carga}$, con la misma sección S se calcula L_m y se compara con la utilizada $L_m < L_{m-gráfico}$.
- La velocidad de la fase gaseosa debe estar comprendida entre 0,3 y 5 m/s.

21.4.6. Cálculo de la altura de la columna

Una vez seleccionado el tipo de disolvente, el tipo de relleno y obtenidos los datos de equilibrio y el diámetro de la columna, el siguiente paso es calcular la altura de relleno.

21.4.6.1. Mezclas concentradas

Para la resolución del modelo matemático que se pueda presentar se supondrá que se cumplen las siguientes hipótesis:

- La columna trabaja en régimen adiabático e isoterma.
- Se transfiere un solo soluto.
- Es una mezcla concentrada, con una concentración superior al 20%.
- La presión total es constante y las pérdidas de carga despreciables.

Al efectuar un balance de materias entre dos secciones transversales separadas por dz (figura 21.11):

$$\begin{aligned} G' (Y + dY) + L' X &= G' Y + L' (X + dX) \\ G' dY &= L' dX \end{aligned} \quad [21.39]$$

Si el balance se realiza entre la sección 1 y entre una altura cualquiera:

$$\begin{aligned} G' Y_1 + L' X &= G' Y + L' X_1 \\ Y - Y_1 &= \frac{L'}{G'} (X - X_1) \end{aligned} \quad [21.40]$$

que es la ecuación de la recta de operación.

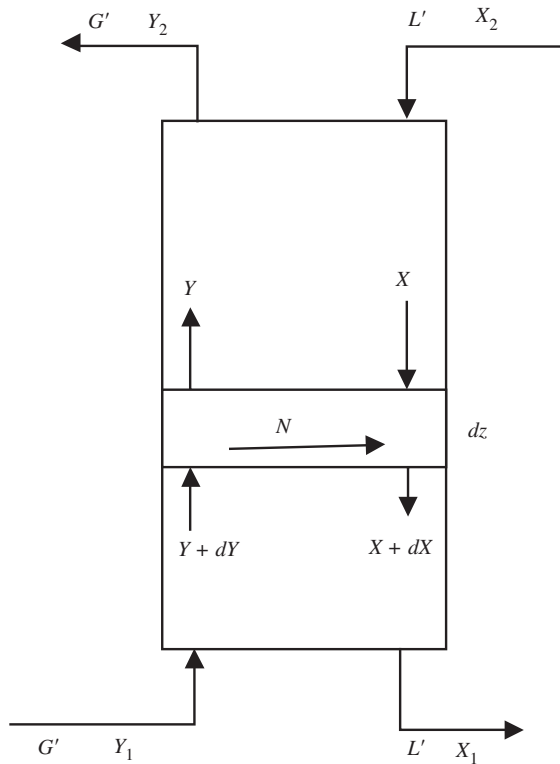


Figura 21.11. Columnas de absorción de relleno.

Si la sección de la columna es S , la cantidad o densidad de flujo transferida en una altura dz será:

$$\text{Caudal de materia transferida} = N S a dz \quad [21.41]$$

Teniendo en cuenta la ecuación 21.39 se obtiene:

$$N S a dz = G' dY = L' dX \quad [21.42]$$

Pero como la densidad de flujo de materia (N) se puede expresar de distintos modos [ecs. 21.16 y 21.18].

$$N = k_g (p - p_1) = k_l (c_i - c)$$

$$N = K_G (p - p_e) = K_L (c_e - c)$$

pero, como se ha visto en el apartado 21.2:

$$p = \frac{Y}{1 + Y} P \rightarrow p_i = \frac{Y_i}{1 + Y_i} P \quad p_e = \frac{Y_e}{1 + Y_e} P$$

$$c = \frac{X}{1+X} \rho_m \rightarrow c_i = \frac{X_i}{1+X_i} P \quad c_e = \frac{X_e}{1+X_e} \rho_m$$

con lo que:

$$G' dY = k_g a S dz \left(\frac{Y}{1+Y} - \frac{Y_i}{1+Y_i} \right) P = K_G a S dz \left(\frac{Y}{1+Y} - \frac{Y_e}{1+Y_e} \right) P \quad [21.43]$$

$$L' dY = k_l a S dz \left(\frac{X_i}{1+X_i} - \frac{X}{1+X} \right) \rho_m = K_L a S dz \left(\frac{X_e}{1+X_e} - \frac{X}{1+X} \right) \rho_m \quad [21.44]$$

Se obtienen cuatro ecuaciones diferenciales de variables separables, y cada una de ellas permite determinar la altura de relleno.

$$z = \frac{G'}{S} \int_{Y_2}^{Y_1} \frac{(1+Y)(1+Y_i)}{k_g a P (Y-Y_i)} dY \quad [21.45]$$

$$z = \frac{G'}{S} \int_{Y_2}^{Y_1} \frac{(1+Y)(1+Y_e)}{K_G a P (Y-Y_e)} dY \quad [21.46]$$

$$z = \frac{L'}{S} \int_{X_2}^{X_1} \frac{(1+X)(1+X_i)}{k_l a \rho_m (X_i-X)} dX \quad [21.47]$$

$$z = \frac{L'}{S} \int_{X_2}^{X_1} \frac{(1+X)(1+X_e)}{K_L a \rho_m (X_e-X)} dX \quad [21.48]$$

Cualquiera de estas ecuaciones permite calcular la altura de relleno, pero, como no presentan solución analítica, deben resolverse numérica o gráficamente.

A los productos $(k_g a)$, $(k_l a)$, $(K_G a)$, $(K_L a)$ se les llama *coeficientes volumétricos de transferencia de materia*.

En el diagrama $Y-X$ la recta de operación es una recta y la línea de equilibrio es una curva. En este diagrama es fácil determinar X_e e Y_e , pero no así las de interfase X_i, Y_i , , pues la línea entre la recta de operación y la línea de equilibrio es una curva. Si se utiliza este diagrama, sólo es posible calcular la altura de relleno a partir de las ecuaciones 21.46 y 21.48. La utilización de las ecuaciones 21.45 y 21.47 precisa, además, la utilización del diagrama $P-C$.

La altura de relleno se puede calcular utilizando exclusivamente el diagrama $P-C$, a partir de las ecuaciones 21.45, 21.46, 21.47 y 21.48 con las variables presión y concentración (p y C). Para lo cual debe realizarse un cambio de variables: p por Y , y C por X .

$$Y = \frac{p}{P-p} \rightarrow dY = \frac{P}{(P-p)^2} dp \quad [21.49]$$

$$Y = \frac{C}{\rho_m - C} \rightarrow dX = \frac{\rho_m}{(\rho_m - C)^2} dC \quad [21.50]$$

Con lo que las ecuaciones 21.45 a 21.48 toman la forma:

$$z = \frac{G'}{S} \int_{p_2}^{P_1} \frac{p}{(k_g a) (P - p)^2 (p - p_i)} dp \quad [21.51]$$

$$z = \frac{G'}{S} \int_{p_2}^{P_1} \frac{p}{(K_G a) (P - p)^2 (p - p_e)} dp \quad [21.52]$$

$$z = \frac{L'}{S} \int_{C_2}^{C_1} \frac{dC}{(k_l a) \rho_m \left(1 - \frac{C}{\rho_m}\right)^2 (C_i - C)} \quad [21.53]$$

$$z = \frac{L'}{S} \int_{C_2}^{C_1} \frac{dC}{(K_L a) \rho_m \left(1 - \frac{C}{\rho_m}\right)^2 (C_e - C)} \quad [21.54]$$

Las ecuaciones 21.51 y 21.53 se calculan directamente a partir del diagrama P - C , ya que la relación es $-\frac{k_l}{k_g}$ fácil de determinar:

$$-\frac{k_l}{k_g} = \frac{p - p_i}{C - C_i}$$

Si se utilizan las ecuaciones 21.52 y 21.54 el cálculo es más laborioso, pues se precisa el cálculo de K_G y K_L , pero se simplifica si se cumple la ley de Henry. Existen algunos casos en los que el cálculo de la altura de relleno se simplifica, tal es el caso en el que controla la fase gaseosa o bien la fase líquida

21.4.6.2. Mezclas diluidas

Se consideran mezclas diluidas aquellas en las que la razón molar, tanto en fase gaseosa como líquida, es menor del 20%, es decir: $Y \leq 0,2$ y $X \leq 0,2$. En este caso se pueden hacer las siguientes suposiciones:

$$1 + Y \approx 1 \quad y = \frac{Y}{1 + Y} \approx Y$$

$$1 + X \approx 1 \quad C = \frac{X}{1 + X} \rho_m \approx X \rho_m$$

Suponiendo que los coeficientes volumétricos individuales ($k_g a$) y ($k_l a$) son prácticamente constantes, así como la presión total P y la densidad molar ρ_m , a

lo largo de toda la columna, las ecuaciones 21.45 y 21.47 se simplifican, obteniéndose:

$$z = \frac{G'}{k_g a P} \int_{Y_2}^{Y_1} \frac{dY}{Y - Y_i} \quad [21.55]$$

$$z = \frac{L'}{k_l a \rho_m} \int_{X_2}^{X_1} \frac{dX}{X_i - X} \quad [21.56]$$

Las ecuaciones 21.46 y 21.48, en principio no se pueden simplificar, pues $(K_g a)$ y $(K_L a)$ no son constantes. Sólo en el caso que se cumpla la ley de Henry, o bien que controle la fase gas $k_g = K_G$ o la fase líquida $k_l = K_L$, dichas ecuaciones se pueden expresar como:

$$z = \frac{G'}{K_G a P} \int_{Y_2}^{Y_1} \frac{dY}{Y - Y_e} \quad [21.57]$$

$$z = \frac{L'}{K_L a \rho_m} \int_{X_2}^{X_1} \frac{dX}{X_e - X} \quad [21.58]$$

Si se observan las ecuaciones 21.55 a 21.58, la altura de relleno se puede expresar como el producto de dos grupos, en el que uno de ellos es un término integral. Este grupo integral carece de unidades, mientras que el otro tiene unidades de longitud. Por lo cual al primer grupo se le llama *altura de la unidad de transferencia* y al segundo, *número de unidades de transferencia*.

$$\text{Altura de relleno} = (AUT) (NUT) = (H) (N)$$

siendo: $N = (NUT) =$ Número de unidades de transferencia.

$H = (AUT) =$ Altura de la unidad de transferencia.

Así, de la ecuación 21.55 se tiene que el número de unidades de transferencia en la fase gaseosa:

$$N_g = (NUT)_g = \int_{Y_2}^{Y_1} \frac{dY}{(Y - Y_i)} \quad [21.59]$$

- Altura de la unidad de transferencia en la fase gaseosa:

$$H_g = (AUT)_g = \frac{G'}{k_g a P} \quad [21.60]$$

De la ecuación 21.56, el número de unidades de transferencia total referido a la fase gaseosa:

$$N_G = (NUT)_{GT} = \int_{Y_2}^{Y_1} \frac{dY}{Y - Y_e} \quad [21.61]$$

- Altura de una unidad de transferencia total referida a la fase gas:

$$H_G = (AUT)_{GT} = \frac{\frac{G'}{S}}{K_G a P} \quad [21.62]$$

De la ecuación 21.57, el número de unidades de transferencia en la fase líquida:

$$N_L = (NUT)_l = \int_{X_2}^{X_1} \frac{dX}{X_i - X} \quad [21.63]$$

- Altura de una unidad de transferencia en fase líquida:

$$H_l = (AUT)_l = \frac{\frac{L'}{S}}{k_l a \rho_m} \quad [21.64]$$

De la ecuación 21.58, el número de unidades de transferencia total referido a la fase líquida:

$$N_L = (NUT)_{LT} = \int_{X_2}^{X_1} \frac{dX}{X_e - X} \quad [21.65]$$

- Altura de una unidad de transferencia total referida a la fase líquida:

$$H_L = (AUT)_{LT} = \frac{\frac{L'}{S}}{K_L a \rho_m} \quad [21.66]$$

Luego para calcular la altura total de relleno se deberá realizar el producto de la altura de una unidad de transferencia por el número de unidades de transferencia correspondiente:

$$\text{Altura de relleno} = H_g N_g = H_l N_l = H_G N_G = H_L N_L \quad [21.67]$$

21.4.6.3. Cálculo del número de unidades de transferencia

Para calcular el número de unidades de transferencia se pueden usar distintos métodos, siendo los utilizados los que a continuación se estudian.

A) Integración gráfica o numérica

El número de unidades de transferencia en fase gaseosa o líquida viene dado por las expresiones:

$$N_g = \int_{Y_2}^{Y_1} \frac{dY}{Y - Y_i} \quad N_l = \int_{X_2}^{X_1} \frac{dX}{X_i - X}$$

Con lo que para poder realizar la integración gráfica o numérica se debe conocer X_i o Y_i según la ecuación que se emplee.

Se representa $\frac{1}{Y - Y_i}$ frente a Y para el primer caso, y $\frac{1}{X_i - X}$ frente a X en el segundo, y por integración gráfica se calcula N_g o N_l .

Para calcular X_i , Y_i se debe utilizar la recta de unión obtenida a partir de:

$$N = k_g (p - p_i) = k_l (C_i - C)$$

$$N = k_g P (Y - Y_i) = k_l \rho_m (X_i - X)$$

Para un punto de la recta de operación $(X, Y)_1$ se calcula su correspondiente en la interfase $(X_i, Y_i)_1$ aplicando la ecuación de la línea de unión:

$$Y - Y_i = - \frac{k_l \rho_m}{k_g P} (X - X_i)$$

ésta es prácticamente recta en el caso de mezclas diluidas. Se repite este proceso sucesivamente y permite realizar la integración gráfica o numérica indicada anteriormente.

B) Método de la fuerza impulsora media

Este método consiste en tomar valores medios de las fuerzas impulsoras, con lo que el número de unidades de transferencia será:

$$N_g = \frac{Y_1 - Y_2}{(Y - Y_i)_{medio}} \quad N_l = \frac{X_1 - X_2}{(X_i - X)_{medio}} \quad [21.68]$$

En el caso que la línea de equilibrio sea recta el valor medio expresado en el denominador es igual a la media logarítmica:

$$N_g = \frac{Y_1 - Y_2}{(Y - Y_i)_{m.l}} \quad N_l = \frac{X_1 - X_2}{(X_i - X)_{m.l}} \quad [21.69]$$

Lo mismo ocurre en el caso del número de unidades de transferencia total:

$$N_G = \frac{Y_1 - Y_2}{(Y - Y_e)_{m.l}} \quad N_L = \frac{X_1 - X_2}{(X_e - X)_{m.l}}$$

En el caso de que $(Y - Y_i)$ o $(X_i - X)$, no varíen mucho en la columna, la media logarítmica puede sustituirse por la media aritmética.

Existen casos en que la línea de equilibrio no es recta en todo el tramo de operación, pero sin embargo, puede dividirse la curva de equilibrio en varios intervalos en los que sí es recta, con lo que puede aplicarse este método en los diferentes tramos y al final sumar el número de unidades de transferencia obtenido en cada tramo, para obtener el número total de unidades de transferencia.

C) Método analítico

En el caso que las mezclas sean diluidas y además se cumpla la ley de Henry, se pueden calcular analíticamente los valores de N_G y N_L .

Se cumple $Y_e = H X$ siendo H la constante de Henry, y como son mezclas diluidas:

$$N_G = \int_{Y_2}^{Y_1} \frac{dY}{Y - Y_e}$$

Del balance de materias, es decir, de la recta de operación:

$$X = \frac{G'}{L'} (Y - Y_2) + X_2$$

con lo que:

$$Y_e = H \left[\frac{G'}{L'} (Y - Y_2) + X_2 \right]$$

Si se define el factor de absorción:

$$A = \frac{L'}{G' H} \quad [21.70]$$

$$N_G = \int_{Y_2}^{Y_1} \frac{dY}{Y - H \left[\frac{G'}{L'} (Y - Y_2) + X_2 \right]} = \frac{\ln \left[\frac{Y_1 - H X_2}{Y_2 - H X_2} \left(1 - \frac{1}{A} \right) + \frac{1}{A} \right]}{1 - \frac{1}{A}} \quad [21.71]$$

En el caso que se quiera obtener el número de unidades de transferencia total referido a la fase líquida, se tiene:

$$N_L = \int_{X_2}^{X_1} \frac{dX}{X_e - X} = \frac{\ln \left[\frac{X_2 - \frac{Y_1}{H}}{X_1 - \frac{Y_1}{H}} (1 - A) + A \right]}{1 - A} \quad [21.72]$$

21.4.6.4. Cálculo de la altura de la unidad de transferencia

Como se ha visto, los grupos que multiplican al término integral de las ecuaciones representan el valor de la altura de la unidad de transferencia.

En la bibliografía existen expresiones que permiten calcular los valores de la altura de la unidad de transferencia en las fases gas y líquida:

$$H_G = \beta \left(\frac{G^{0.41} \eta_g^{0.26} \eta_l^{0.46} \sigma^{0.5}}{L^{0.46} \rho_g^{1.33} \rho_l^{0.5} D_g^{0.67} d_p^{0.55}} \right) \quad [21.73]$$

$$H_l = \beta \left(\frac{\eta_e^{0.88} \sigma^{0.5}}{L^{0.05} \rho_L^{1.33} D_L^{0.5} d_p^{0.55}} \right) \quad [21.74]$$

Estas relaciones han sido dadas por Semmelbauer, y en las que:

$$\beta = 30 \quad \text{para anillos Raschig}$$

$$\beta = 21 \quad \text{para sillas Berl}$$

Estas ecuaciones tienen unos intervalos de validez dependiente de los tipos de relleno (Coulson y Richarson, 1979). Morris y Jakson han dado valores de las alturas de transferencia de materia para diferentes tipos de relleno (tabla 21.2). Por otra parte existen nomogramas que permiten calcular la altura de transferencia para anillos Pall y sillas Intalox (Coulson y Richarson, 1979).

Tabla 21.2. Altura de unidades de transferencia para anillos Raschig

Relleno	Diámetro (mm)	Altura (mm)	Espesor (mm)	Altura de una unidad de transferencia	
				H_g (m)	H_l (m)
A. Raschig ordenados					
Cerámica	100	100	9,5	1,8	0,7
	75	75	9,5	1,1	0,6
	75	75	6,4	1,4	0,6
	50	50	6,4	0,7	0,6
	50	50	4,8	0,8	0,6
A. Raschig al azar					
Cerámica	50	50	4,8	0,5	0,6
	38	38	4,8	0,3	0,6
	25	25	2,5	0,2	0,5
	19	19	2,5	0,15	0,5
	13	13	1,6	0,1	0,5
Metálico	50	50	1,6	0,5	0,6
	25	25	1,6	0,2	0,5
	13	13	0,8	0,1	0,5
	75	75	9,5	0,8	0,7
Carbón	50	50	6,4	0,5	0,6
	50	50	6,4	0,5	0,6
	25	25	4,8	0,2	0,5
	13	13	3,2	0,1	0,5

Si se conocen las alturas de transferencia individuales (H_g, H_l) se obtienen las globales a partir de:

$$H_G = H_g + \frac{n' \rho_m}{\frac{L'}{G'} P} H_l \quad [21.75]$$

$$H_L = \frac{P}{n'' \left(\frac{G'}{L'} \right) \rho_m} H_g + \frac{n'}{n''} H_l \quad [21.76]$$

Si se cumple la ley de Henry $n' = n'' = H$.

21.5. Columnas de platos

Además de las torres de relleno, en algunos casos se utilizan columnas de platos para realizar una absorción determinada. Así, en los casos en que la pérdida de carga hiciese necesario utilizar torres de relleno de diámetro superior a un metro, se emplearán torres de platos. También se utilizan columnas de platos cuando pueda existir alguna deposición de sólidos que obstruya el paso de los fluidos a través del relleno, asimismo, se utilizan este tipo de columnas cuando el flujo del líquido es suficiente para inundar la columna de relleno. Las columnas de platos utilizadas en la absorción de gases son similares a las empleadas en destilación, aunque las eficacias en los procesos de absorción son inferiores a los de destilación, y están comprendidas entre un 20 y un 80%. En los casos que se utilicen fluidos corrosivos es preferible utilizar columnas de relleno. Las columnas de absorción funcionan de forma análoga a las de destilación, aunque en la absorción no hay reflujo. En la figura 21.12 se presenta el esquema de una columna de platos para absorción.

El número total de platos es N . Al realizar un balance de soluto entre el plato n excluido y la cabeza de la columna se obtiene:

$$Y_n = \frac{L'}{G'} X_{n-1} + \left(Y_1 - \frac{L'}{G'} X_0 \right) \quad [21.77]$$

ésta es la ecuación de la recta de operación, de pendiente $\frac{L'}{G'}$, que relaciona la composición del gas que abandona un plato con la del líquido que entra en el mismo. La ordenada en el origen viene dada por las condiciones de cabeza de la columna, siendo su valor $Y_1 - \frac{L'}{G'} X_0$.

Al representar en el diagrama $Y-X$ la recta de operación y la curva de equilibrio, se puede obtener el número de platos teóricos para efectuar una absorción determinada, mediante el trazado de escalones según el método gráfico de McCabe-Thiele.

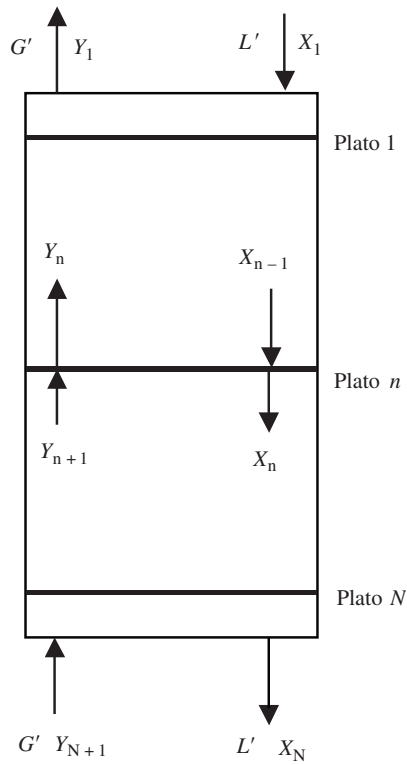


Figura 21.12. Columnas de absorción de platos. Nomenclatura utilizada.

En el caso que la línea de equilibrio sea una recta, el número de platos se puede calcular analíticamente según el método de Kremser.

Al realizar un balance de soluto en el plato n , se tiene:

$$G' Y_{n+1} + L' X_{n-1} = G' Y_n + L' X_n$$

Si en dicho plato se alcanza el equilibrio, como: $Y_e = m X$, se tiene que:

$$Y_n = m X_n$$

y en el plato $n-1$:

$$Y_{n-1} = m X_{n-1}$$

con lo que:

$$G' Y_{n+1} + L' \frac{Y_{n-1}}{m} = G' Y_n + L' \frac{Y_n}{m}$$

por tanto:

$$Y_n = \frac{Y_{n+1} + A Y_{n-1}}{1 + A}$$

donde $A = \frac{L'}{G' m}$ se llama factor de absorción [ec. 21.70].

Como $Y_0 = m X_0$, se puede demostrar que:

$$\frac{Y_{N+1} - Y_1}{Y_{N+1} - m X_0} = \frac{A^{N+1} - A}{A^{N+1} - 1} \quad [21.78]$$

conocida como la ecuación de Kremser.

Para el caso de desorción se obtiene:

$$\frac{X_{N+1} - X_1}{X_{N+1} - X_0} = \frac{S^{N+1} - S}{S^{N+1} - 1} \quad [21.79]$$

en la que $S = \frac{1}{A}$ es el factor de desorción.

Para obtener una absorción grande el número de platos de la columna debe ser elevado o bien el factor de absorción debe ser grande. Parece ser que un valor óptimo del factor de absorción es 1,3. A partir de la ecuación de Kremser se puede calcular el número de platos teóricos para realizar una determinada absorción. Esta ecuación se halla en forma gráfica en la bibliografía (Coulson y Richarson, 1979).

La relación entre el número de platos teóricos y el número de unidades de transferencia, al comparar las columnas de platos y de relleno será:

$$N_G \left(1 - \frac{1}{A}\right) = N_{ET} \ln A \quad [21.80]$$

en la que: N_G = Número de unidades de transferencia (columnas de relleno).

N_{ET} = Número de etapas teóricas (columnas de platos).

Una estimación rápida del número de platos teóricos es la dada por Douglas:

$$N_{ET} + 2 = 6 \log \frac{y_{n+1}}{y_1} \quad [21.81]$$

PROBLEMAS

Problema 21.1

Una corriente de aire está contaminada con una sustancia orgánica que se desea eliminar. Para ello, 800 kg/h de aire son introducidos por la base de una torre de relleno con anillos Raschig dispuestos al azar, por la que circulan en contracorriente 3.000 kg/h de un aceite mineral. Calcular: a) El diámetro de la torre correspondiente a la velocidad de anegamiento. b) El diámetro de la torre cuando la velocidad es 0,5 veces la de anegamiento.

Datos. Propiedades de los fluidos:

- Líquido: Densidad = 900 kg/m³; viscosidad = 40 mPa·s.
- Gas: Densidad = 1,1 kg/m³.

Para el relleno utilizado: $(a/\epsilon^3) = 400 \text{ m}^2/\text{m}^3$.

a) La velocidad de anegamiento se puede calcular a partir de la ecuación de Sawistowsky:

$$\ln \left[\frac{V_{ANEG}^2}{g} \frac{a}{\epsilon^3} \left(\frac{\eta_L}{\eta_{AGUA}} \right)^{0,2} \frac{\rho_G}{\rho_L} \right] = -4 \left(\frac{w_L}{w_G} \right)^{1/4} \left(\frac{\rho_G}{\rho_L} \right)^{1/8}$$

en la que w es el caudal másico, denotando los subíndices G y L , gas y líquido, respectivamente.

Al sustituir datos:

$$\ln \left[\frac{V_{ANEG}^2}{9,8} 400 \left(\frac{40}{1} \right)^{0,2} \left(\frac{1,1}{900} \right) \right] = -4 \left(\frac{3.000}{800} \right)^{1/4} \left(\frac{1,1}{900} \right)^{1/8}$$

puede obtenerse la velocidad de anegamiento: $V_{ANEG} = 0,929 \text{ m/s}$.

El diámetro de la torre puede calcularse si se conoce la sección de paso, y ésta puede obtenerse a partir de la ecuación de continuidad:

$$S = \frac{w_G}{\rho_G v_{ANEG}} = \frac{(800/3.600)}{(1,1)(0,929)} = 0,218 \text{ m}^2$$

El diámetro de la columna será:

$$D = \sqrt{4 S/\pi} = 0,526 \text{ m}$$

b) Con una velocidad $V_G = 0,5 \cdot V_{ANEG} = 0,465 \text{ m/s}$, se opera de modo análogo al apartado anterior, obteniendo un diámetro de columna $D = 0,744 \text{ m}$.

Problema 21.2

Una corriente de aire con una humedad absoluta de 0,011 kg de agua/kg de aire seco se desea secar hasta una humedad de 0,002 kg de agua/kg de aire seco, con el fin de utilizarla en un proceso de secado de semillas. Para realizar esta des-

humidificación, se utiliza una torre de absorción rellena de anillos Raschig de 2 pulgadas, siendo el líquido absorbente una solución de sosa cáustica al 50% en peso. Si el caudal de disolución absorbente que se utiliza es un 25% superior a la mínima, calcular la altura que debería tener la torre para realizar esta operación, sabiendo que la altura de una unidad de transferencia es de 60 cm.

Para este sistema, los datos de equilibrio se dan en la siguiente tabla:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16
$Y \cdot 10^4$	0	4	11	28	67	100	126	142	157	170	177	190	202

Unidades: X en moles $H_2O/mol NaOH$

Y en moles H_2O/mol aire seco

Para las masas moleculares de agua, aire e hidróxido sódico se toman los valores 18, 29 y 40 kg/kmol, respectivamente.

Cálculo de las razones molares en fase gas, para las secciones de entrada y salida:

$$Y_1 = 0,011 \frac{\text{kg } H_2O}{\text{kg aire seco}} \frac{1 \text{ kmol } H_2O}{18 \text{ kg } H_2O} \frac{29 \text{ kg aire}}{1 \text{ kmol aire}} = 0,0177 \frac{\text{kmol } H_2O}{\text{kmol aire seco}}$$

$$Y_2 = 0,002 \frac{\text{kg } H_2O}{\text{kg aire seco}} \frac{1 \text{ kmol } H_2O}{18 \text{ kg } H_2O} \frac{29 \text{ kg aire}}{1 \text{ kmol aire}} = 0,00322 \frac{\text{kmol } H_2O}{\text{kmol aire seco}}$$

Para la corriente líquida que entra a la columna, la razón molar será:

$$X_2 = \frac{50 \text{ kg } H_2O}{50 \text{ kg } NaOH} \frac{1 \text{ kmol } H_2O}{18 \text{ kg } H_2O} \frac{40 \text{ kg } NaOH}{1 \text{ kmol } NaOH} = 2,22 \frac{\text{kmol } H_2O}{\text{kmol } NaOH}$$

El valor de $(L'/G')_{\text{mín}}$ se obtendría de la pendiente de la recta que une el punto de la cabeza de columna (X_2, Y_2) con el punto de la curva de equilibrio de ordenada $Y_1 = 177 \cdot 10^{-4}$. Sin embargo, esta recta cortaría la curva de equilibrio, por lo que sería imposible realizar la operación. En este caso, desde el punto de cabeza de columna (X_2, Y_2) se traza la tangente a la curva de equilibrio, siendo la pendiente de esta recta tangente el valor $(L'/G')_{\text{mín}}$.

Gráficamente (figura 21.P2) se obtiene:

$$(L'/G')_{\text{mín}} = 2,54 \cdot 10^{-3} \text{ kmol } NaOH/\text{kmol aire seco.}$$

Como se trabaja con un caudal de disolución absorbente 25% superior al mínimo, la relación de trabajo será:

$$\frac{L'}{G'} = 1,25 \left(\frac{L'}{G'} \right)_{\text{mín}} = 0,00318 \frac{\text{kmol } NaOH}{\text{kmol aire seco}}$$

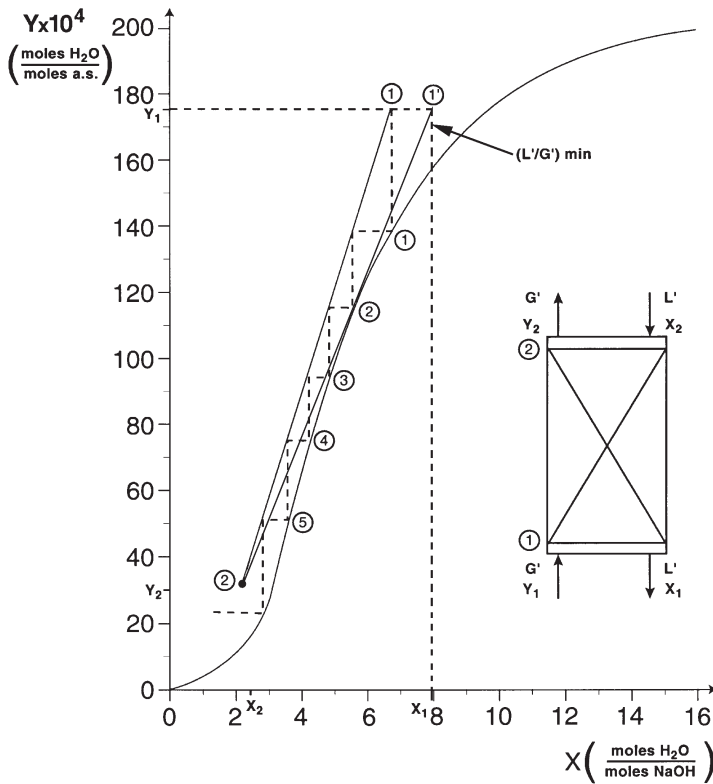


Figura 21.P2.

La razón molar para la corriente líquida que abandona la columna se obtiene de un balance global:

$$G' (Y_1 - Y_2) = L' (X_1 - X_2)$$

de tal modo que al sustituir datos se obtiene: $X_1 = 6,8$ kmol H_2O /kmol $NaOH$.

El número de unidades de transferencia se obtiene al trazar escalones entre la recta de operación y la curva de equilibrio. De modo que se obtiene: $NUT = 5,7$.

La altura de la columna se calcula multiplicando el valor de la altura de la unidad de transferencia por el número de ellas: $z = (60 \text{ cm}) (5,7) = 342 \text{ cm}$.

Problema 21.3

Un aceite de peso molecular 175 kg/kmol contiene un 5% en peso de un hidrocarburo cuyo peso molecular es 58 kg/kmol. Al objeto de eliminar el 99% del hidrocarburo, 50 kg/h de la mezcla aceite-hidrocarburo se alimentan a una columna de relleno por la que circula vapor de agua en contracorriente. La columna trabaja a 70 °C y 5,4 atm, siendo las densidades de flujo de circulación

para el aceite y vapor de agua 120 y 18 kg/(h·m²), respectivamente. Para el tipo de relleno utilizado y en las condiciones de trabajo, la altura de la unidad de transferencia es 80 cm. Si la presión de vapor del hidrocarburo a 70 °C es de 6,7 atm, y se supone que para la mezcla se cumple la ley de Raoult, determinar:

a) La relación de equilibrio entre las dos fases, expresada en razones molares.
 b) Diámetro de la columna. c) La altura de la columna necesaria para realizar la operación indicada.

a) Al combinar las leyes de Dalton y Raoult se obtiene:

$$y = \frac{P_V^0}{P} x$$

en la que x e y son las fracciones molares de las fases líquida y gaseosa, respectivamente. Si se desean obtener los datos de equilibrio en razones molares, la ecuación anterior se debe transformar, expresando las fracciones molares en función de razones molares:

$$y = \frac{Y}{1 + Y} \quad x = \frac{X}{1 + X}$$

de este modo, la relación de equilibrio será:

$$Y = \frac{\left(\frac{P_V^0}{P}\right) X}{1 + \left(1 - \frac{P_V^0}{P}\right) X} = \frac{\left(\frac{6,7}{5,4}\right) X}{1 + \left(1 - \frac{6,7}{5,4}\right) X} = \frac{1,241 X}{1 - 0,241 X}$$

dando valores a X se obtienen los correspondientes de Y , siendo posible de esta forma construir la curva de equilibrio.

b) Se supone que la densidad de flujo de la corriente líquida que da el enunciado del problema es de aceite puro: $L_{ACEITE} = 120$ kg aceite/(h·m²).

Como a la entrada de la mezcla aceite-hidrocarburo existe un 5% de éste, de cada 50 kg/h que se introducen 2,5 kg/h corresponden a hidrocarburo y 47,5 kg/h a aceite puro. Lo que indica que el caudal de aceite puro que circula por la columna es $w_{ACEITE} = 47,5$ kg/h.

La sección de paso será:

$$S = \frac{w}{L} = \frac{47,5 \text{ kg/h}}{120 \frac{\text{kg}}{\text{h}\cdot\text{m}^2}} = 0,396 \text{ m}^2$$

que se corresponde con un diámetro de columna: $D = 0,71 \text{ m} = 71 \text{ cm}$.

c) En la cabeza de columna, la corriente líquida contiene un 5% de hidrocarburo, lo que se corresponde a una fracción molar de:

$$x_2 = 0,137 \text{ kmol hidrocarburo/kmol total}$$

por lo que su razón molar correspondiente es:

$$X_2 = 0,159 \text{ kmol hidrocarburo/kmol aceite}$$

Para la fase gaseosa, la corriente que abandona la columna posee el hidrocarburo que ha sido eliminado de la fase líquida, es decir, el 99% del de la entrada:

$$(0,99) (2,5) = 2,475 \text{ kg hidrocarburo/h} = 0,0427 \text{ kmol hidrocarburo/h}$$

El vapor de agua es el inerte de esta corriente gaseosa:

$$G' = 18 \frac{\text{kg vapor H}_2\text{O}}{\text{h}\cdot\text{m}^2} 0,396 \text{ m}^2 \frac{1 \text{ kmol H}_2\text{O}}{18 \text{ kg H}_2\text{O}} = 0,396 \text{ kmol H}_2\text{O/h}$$

La razón molar de hidrocarburo de la fase gaseosa a la entrada será:

$$Y_2 = \frac{0,0427 \text{ kmol hidrocarburo/h}}{0,396 \text{ kmol H}_2\text{O/h}} = 0,1078 \frac{\text{kmol hidrocarburo}}{\text{kmol H}_2\text{O}}$$

En el fondo de la columna, la corriente líquida que abandona la misma posee un 1% del hidrocarburo de la entrada: $(0,01) (2,5) = 0,025 \text{ kg hidrocarburo/h}$.

En esta corriente la cantidad de aceite continúa siendo $47,5 \text{ kg/h}$. Operando de modo análogo al anterior se obtiene:

$$x_1 = 0,00159 \text{ kmol hidrocarburo/kmol total}$$

$$X_1 = 0,0016 \text{ kmol hidrocarburo/kmol aceite}$$

En esta sección se supone que el vapor de agua es puro: $Y_1 = 0$.

El valor de Y_2 podría haberse calculado mediante un balance global de toda la columna:

$$G (Y_1 - Y_2) = L (X_1 - X_2)$$

El caudal de aceite que circula por la columna es:

$$L = 47,5 \text{ kg aceite/h} = 0,2714 \text{ kmol/h}$$

Al sustituir en el balance de materias:

$$(0,396) (Y_2 - 0) = (0,2714) (0,159 - 0,0016)$$

$$Y_2 = 0,1079 \text{ kmol hidrocarburo/kmol vapor de agua}$$

El número de unidades de transferencia se calcula utilizando el diagrama de equilibrio. Se construye la recta de operación, uniendo los puntos $(X_1, Y_1) - (X_2, Y_2)$. A

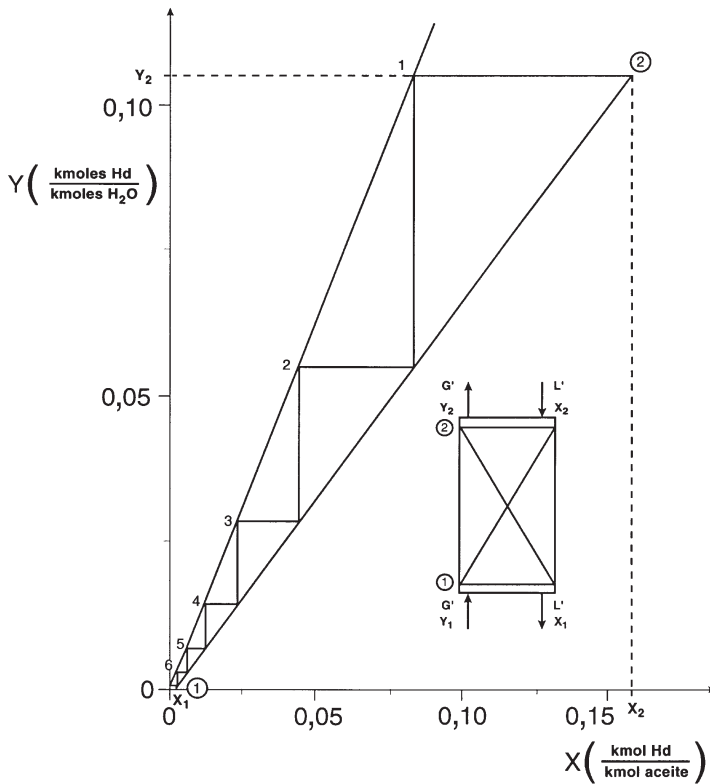


Figura 21.P3.

continuación se trazan los escalones entre la recta de operación y la curva de equilibrio (figura 21.P3), de tal forma que se obtiene $NUT = 6,25$.

La altura de la columna se calcula multiplicando el valor de la altura de la unidad de transferencia por el número de ellas:

$$z = (0,8 \text{ m}) (6,25) = 5 \text{ m}$$

Problema 21.4

Los gases de combustión de una fracción de petróleo se desean utilizar en un proceso de secado. Se ha observado que la mezcla de gases, después de haber eliminado el vapor de agua, contiene un 6% molar de SO_2 y un 94% de aire seco. Al objeto de eliminar el SO_2 se alimentan 453,6 kg/h de la mezcla de gases a una torre de relleno con anillos Raschig de 1 pulgada. La columna trabaja al 50% de la velocidad de anegamiento, utilizando un caudal de agua 2 veces el mínimo requerido para llevar a cabo la operación deseada en una columna de altura infinita. La

columna trabaja en condiciones isotermas a 30 °C y a presión de 1 atm. Si se desea que la corriente de gas que abandona la columna no supere el 0,1% molar de SO₂, determinar el diámetro y altura de la columna.

Datos. Datos de equilibrio a 30 °C:

P_{SO_2} (mm Hg)	0,6	1,7	4,7	8,1	11,8	19,7	36,0	52,0	79
C_{SO_2} $\left(\frac{\text{kg } SO_2}{100 \text{ kg } H_2O}\right)$	0,02	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,50	0,70	1

Los coeficientes individuales de transferencia de materia pueden calcularse a partir de las ecuaciones:

$$(k_y a) = 0,1 G^{0,776} L^{0,2} \text{ kmoles}/(\text{h}\cdot\text{m}^3\cdot\text{fracción molar})$$

$$(k_x a) = 0,65 L^{0,82} \text{ kmoles}/(\text{h}\cdot\text{m}^3\cdot\text{fracción molar})$$

en las que G y L son las densidades de flujo másicas de las corrientes gaseosa y líquida, respectivamente, expresadas en kg/(h·m²).

Propiedades de la corriente líquida: Densidad 944,4 kg/m³; viscosidad 1,02 mPa·s.

A partir de los datos de la tabla se pueden obtener los de equilibrio en fracciones molares o razones molares, para lo que deben realizarse las conversiones pertinentes:

- Fracciones molares: $y = \frac{P_{SO_2}}{760}$ $x = \frac{C/64}{\frac{100}{18} + \frac{C}{64}}$

- Razones molares: $Y = \frac{P_{SO_2}}{760 - P_{SO_2}}$ $X = \frac{C/64}{100/18}$

al realizar estas conversiones se obtienen los datos de equilibrio, que se dan en la tabla 21.P4a de la página siguiente.

Las razones molares en fase gas, para las corrientes de entrada y salida, son:

$$Y_1 = 0,0638 \text{ kmol } SO_2/\text{kmol gas inerte}$$

$$Y_2 = 0,001 \text{ kmol } SO_2/\text{kmol gas inerte}$$

La razón molar en fase líquida que está en equilibrio con Y₁ se obtiene por interpolación en la tabla anterior: X_{e1} = 0,00176 kmol SO₂/kmol H₂O.

El caudal molar total de gases w_G^M y el de inerte G' serán:

$$w_G^M = 453,6 \frac{\text{kg totales}}{\text{h}} \frac{\text{kmol totales}}{[(0,06) (64) + (0,94) (29)] \text{ kg}} = 14,59 \text{ kmol totales/h}$$

$$G' = 14,59 \frac{\text{kmol totales}}{\text{h}} \frac{94 \text{ kmol aire}}{100 \text{ kmol totales}} = 13,71 \text{ kmol aire/h}$$

Tabla 21.P4a. Datos de equilibrio

Fracciones molares		Razones molares	
$y \cdot 10^2$	$x \cdot 10^3$	$Y \cdot 10^2$	$X \cdot 10^3$
$\left(\frac{\text{kmol SO}_2}{\text{kmol total gas}} \right)$	$\left(\frac{\text{kmol SO}_2}{\text{kmol SO}_2 + \text{H}_2\text{O}} \right)$	$\left(\frac{\text{kmol SO}_2}{\text{kmol gas inerte}} \right)$	$\left(\frac{\text{kmol SO}_2}{\text{kmol H}_2\text{O}} \right)$
0,079	0,0565	0,079	0,056
0,224	0,141	0,224	0,141
0,620	0,281	0,622	0,281
1,070	0,422	1,077	0,422
1,566	0,564	1,577	0,563
2,59	0,844	2,661	0,844
4,74	1,41	4,972	1,406
6,84	1,97	7,345	1,969
10,4	2,8	11,601	2,813

Para calcular el caudal mínimo de líquido inerte se debe realizar un balance de materias, en el que la composición del líquido a la salida debe ser la de equilibrio con Y_1 :

$$G (Y_1 - Y_2) = L_{\min} (X_{e1} - X_2)$$

$$13,71 (0,0638 - 0,001) = L_{\min} (0,00176 - 0)$$

de la que se obtiene: $L_{\min} = 489,2$ kmol H₂O/h. Como el caudal de circulación de líquido debe ser el doble del mínimo: $L = 2 L_{\min} = 978,4$ kmol H₂O/h.

Del balance a toda la columna se obtiene el valor de X_1 :

$$13,71 (0,0638 - 0,001) = 978,4 (X_1 - 0)$$

$$X_1 = 0,00088 \text{ kmol SO}_2/\text{kmol H}_2\text{O}$$

La cantidad de SO₂ transferido se incorpora a la corriente de líquido que abandona la columna, y es la diferencia entre el que existía en la corriente gaseosa que entra y abandona la columna:

- SO₂ entrada:

$$4,59 \frac{\text{kmol total}}{\text{h}} \frac{6 \text{ kmol SO}_2}{100 \text{ kmol totales}} \frac{64 \text{ kg SO}_2}{\text{kmol SO}_2} = 56,03 \text{ kg SO}_2/\text{h}$$

- SO₂ salida:

$$3,71 \frac{\text{kmol aire}}{\text{h}} \frac{0,1 \text{ kmol SO}_2}{99,9 \text{ kmol aire}} \frac{64 \text{ kg SO}_2}{\text{kmol SO}_2} = 0,878 \text{ kg SO}_2/\text{h}$$

- SO₂ transferido al agua: $(56,03 - 0,878) = 55,15$ kg SO₂/h.

Es evidente, por tanto, que el caudal de líquido a la entrada y salida variará:

- Entrada: $w_L^2 = 978,4 \text{ kmol H}_2\text{O/h} = 17.611,2 \text{ kg H}_2\text{O/h}$.
- Salida: $w_L^1 = (17.611,2 + 55,15) \text{ kg disolución/h} = 17.666,35 \text{ kg disolución/h}$.

Siendo el caudal medio de circulación: $w_L = 17.638,8 \text{ kg/h}$.

Si se supone que la corriente gaseosa es prácticamente aire, la densidad de esta corriente se calcula mediante la ecuación de gases perfectos:

$$\rho_G = \frac{(29) (1)}{(0,082) (303)} = 1,167 \text{ kg/m}^3$$

Para obtener la densidad de flujo de anegamiento para la corriente líquida se utilizará el gráfico de Lobo (figura 21.9):

$$\bullet \text{ Abscisa: } = \frac{w_L}{w_G} \sqrt{\frac{\rho_G}{\rho_L}} = \frac{(17.666,35)}{(453,6)} \sqrt{\frac{(1,167)}{(1.000)}} = 1,334$$

con este valor, en la gráfica de Lobo (fig. 21.9) se obtiene una ordenada:

$$\frac{G_{ANEG}^2 a}{g \varepsilon^3} \left(\frac{\eta_L}{\eta_{AGUA}} \right)^{0,2} \frac{1}{\rho_G \rho_L} = 0,015$$

- Para anillos Raschig 1'': $\varepsilon = 0,73$
 $a = 190 \text{ m}^{-1}$
 - Viscosidad: Agua 20 °C: $\eta_{AGUA} = 1 \text{ mPa}\cdot\text{s}$
Líquido a 30 °C: $\eta_L = 1,02 \text{ mPa}\cdot\text{s}$
 - Densidades: $\rho_G = 1,167 \text{ kg/m}^3$ $\rho_L = 994,41 \text{ kg/m}^3$
 - $g = 9,8 \text{ m/s}^2 = 1,27 \text{ m/h}^2$

Con estos datos es posible encontrar el valor de la densidad de flujo gaseosa para las condiciones de anegamiento: $G_{ANEG} = 2.123,5 \text{ kg/(h}\cdot\text{m}^2)$.

La densidad de flujo de operación es: $G = 0,5 G_{ANEG} = 1.061,8 \text{ kg/(h}\cdot\text{m}^2)$.

El área de la sección transversal de la columna se calcula para el caso más desfavorable:

$$S = \frac{w_G}{G} = \frac{(453,6)}{(1.061,8)} = 0,427 \text{ m}^2$$

de la que se obtiene un diámetro de columna: $D = 0,737 \text{ m}$.

Para el cálculo de la altura de columna se utilizará la expresión:

$$z = \frac{G'}{(k_g a) P} \int_{Y_2}^{Y_1} \frac{dY}{Y - Y_i} = H_g N_g$$

Para determinar la altura de la unidad de transferencia H_g es necesario expresar k_g en función de k_y . La densidad de flujo materia es:

$$N = k_g (p - p_i) = k_y (y - y_i)$$

en que p son las presiones parciales e y las fracciones molares en fase gaseosa, denotando el subíndice i la interfase. Al aplicar la ley de Dalton es fácil obtener:

$$N = k_g P (y - y_i) = k_y (y - y_i)$$

por lo que: $k_g P = k_y$, siendo P la presión total de trabajo.

Para calcular $(k_y a)$ es necesario determinar previamente la densidad de flujo másica de las corriente líquida y gaseosa:

$$L = \frac{w_L}{S} = \frac{(17.638,8)}{(0,427)} = 41.367 \frac{\text{kg}}{\text{h} \cdot \text{m}^2}$$

con lo que: $(k_y a) = 0,10 (1.061,8)^{0,776} (41.367)^{0,2} = 187,2 \text{ kmol}/(\text{h} \cdot \text{m}^3 \cdot \Delta y)$.

Por tanto, la altura de la unidad de transferencia se calcula mediante la expresión:

$$H_g = \frac{\frac{G'}{S}}{(k_y a)} = \frac{(13,71 \text{ kmol aire/h})/(0,427 \text{ m}^2)}{187,23 \frac{\text{kmol}}{\text{h} \cdot \text{m}^3 \cdot \Delta y}} = 0,172 \text{ m}$$

Para el cálculo del número de unidades de transferencia, el término integral de la ecuación anterior se expresará en función de fracciones molares, de tal forma que:

$$N_g = \int_{y_2}^{y_1} \frac{dY}{Y - Y_i} = \int_{y_2}^{y_1} \frac{(1 - y_i)}{(1 - y)(y - y_i)} dy = \int_{y_2}^{y_1} \phi(y) dy$$

ecuación que se resuelve mediante integración gráfica o numérica.

Se representa gráficamente la curva de equilibrio en fracciones molares. Además, se obtiene la línea de operación en fracciones molares, a partir del balance de materias entre la cabeza de la columna y una sección cualquiera de la misma:

$$G' \left(\frac{y}{1 - y} - \frac{y_2}{1 - y_2} \right) = L' \left(\frac{x}{1 - x} - \frac{x_2}{1 - x_2} \right)$$

en la que: $y_2 = \frac{Y_2}{1 + Y_2} = \frac{0,001}{1 + 0,001} = 9,99 \cdot 10^{-4}$

$$x_2 = 0$$

Luego, la línea de operación en fracciones molares será:

$$3,71 \left(\frac{y}{1 - y} - 0,000999 \right) = 978,4 \frac{x}{1 - x}$$

Para obtener los valores de la composición gaseosa en la interfase y_i , correspondiente a sus respectivas composiciones y , utilizando la figura 21.P4a se opera del siguiente modo: para cada valor de y en la línea de operación se traza una recta «tie» (de unión) hasta la curva de equilibrio, obteniendo el valor de y_i . La recta de unión posee una pendiente $-(k_x/k_y)$.

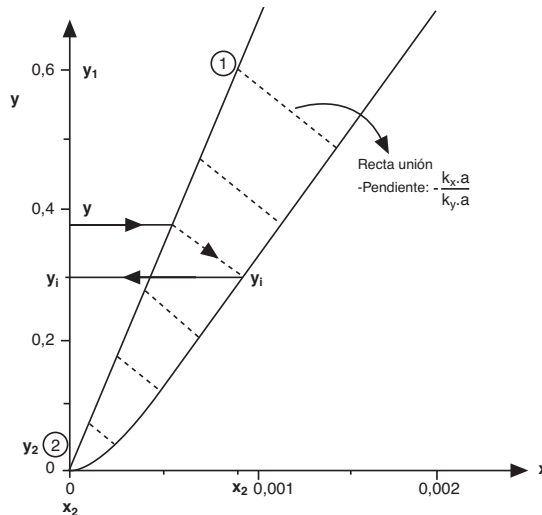


Figura 21.P4a.

El valor de la pendiente de la recta de unión se obtiene a partir de la expresión del enunciado, con los datos obtenidos para G y L :

$$(k_x a) = 0,65 (41.367)^{0,82} = 3.968 \text{ kmol}/(\text{h}\cdot\text{m}^3\cdot\Delta x)$$

$$(k_y a) = 0,10 (1.061,8)^{0,776} (41.367)^{0,2} = 187,2 \text{ kmol}/(\text{h}\cdot\text{m}^3\cdot\Delta y)$$

obteniéndose una pendiente: $-(k_x/k_y) = -(k_x a/k_y a) = -21,9$

Al operar como se ha indicado anteriormente, se puede construir la tabla 21.P4b, que permitirá obtener por integración numérica o gráfica el valor del término integral.

Tabla 21.P4b

y	y_i	$\Phi(y)$
0,001	0,0005	2.001
0,01	0,0067	306
0,02	0,0148	193
0,03	0,0230	144
0,04	0,0315	119
0,05	0,0400	101
0,06	0,0485	88

El número de unidades de transferencia se obtiene al resolver la integral anterior entre los valores y_1 e y_2 , para lo que se representa la función $\phi(y)$ frente a y (figura 21.P4b), obteniendo gráfica o numéricamente el valor del área por debajo de la curva, comprendida entre $y_1 = 0,60$ e $y_2 = 0,01$.

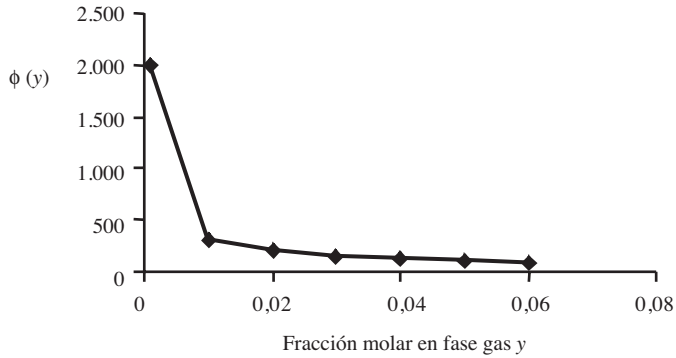


Figura 21.P4b.

De esta integración se obtiene: $N_g = 15$.

La altura de la columna será: $z = (0,172) (15) = 2,57$ m.

Extracción sólido-líquido 22

22.1. Introducción

La extracción sólido-líquido es una operación básica cuya finalidad es la separación de uno o más componentes contenidos en una fase sólida, mediante la utilización de una fase líquida o disolvente. El componente o componentes que se transfieren de la fase sólida a la líquida recibe el nombre de soluto, mientras que el sólido insoluble se denomina inerte.

La extracción sólido-líquido recibe distintos nombres según la finalidad del proceso; así, se le conoce también como lixiviación, lavado, percolación, etc. En la bibliografía anglosajona se encuentra frecuentemente descrita bajo el nombre de «*leaching*» o «*solvent extraction*». La finalidad de esta operación puede ser diversa, pues en algunos casos es necesario eliminar algún componente no deseable de un sólido mediante disolución con un líquido, denominándose lavado a este proceso de extracción. Sin embargo, en otros casos se desea obtener un componente valioso que está contenido en un sólido, disolviéndolo con un líquido, denominándose a esta operación lixiviación. El término percolación se refiere al modo de operar, vertido de un líquido sobre un sólido, más que al objetivo perseguido.

La forma en que el soluto esté contenido en el sólido inerte puede ser diversa. Así, puede ser un sólido disperso en el material insoluble o estar recubriendo su superficie. También puede tratarse de un líquido que esté adherido o retenido en el sólido, o bien estar contenido en su estructura molecular.

Aplicaciones importantes de la extracción sólido-líquido en la industria alimentaria son: extracción de aceites y grasas animales y vegetales, lavado de precipitados, obtención de extractos de materias animales o vegetales, obtención de azúcar, fabricación de té y café instantáneo, entre otras.

Este tipo de operaciones se lleva a cabo en una sola o múltiples etapas. Una etapa es una unidad de equipo en la que se ponen en contacto las fases durante un tiempo determinado, de forma que se realiza la transferencia de materia entre los componentes de las fases y va aproximándose al equilibrio a medida que transcurre el tiempo. Una vez alcanzado el equilibrio se procede a la separación mecánica de las fases. En realidad es difícil que en una etapa se llegue al equilibrio, por lo que para el cálculo de las etapas reales es preciso definir la eficacia. Para una etapa, es el cociente entre el cambio en la composición que se logra realmente y el que debería haber tenido lugar en una situación de equilibrio bajo las condiciones de trabajo.

Las formas de operación utilizadas en los procesos de extracción pueden ser en continuo o en discontinuo. En discontinuo puede utilizarse una etapa simple o bien múltiples etapas con disolvente nuevo en cada etapa o en contracorriente. Una etapa simple consta de un mezclador con agitación, donde se ponen en contacto el sólido y el disolvente durante un cierto tiempo de contacto. A continuación se lleva a un separador, donde se obtienen las fases extracto y refinado, después de un cierto tiempo de reposo. No siempre se utilizan dos equipos, sino que en uno solo se pueden realizar las dos etapas de extracción y separación, denominándose extractor a este tipo de equipo.

22.2. Equilibrio sólido-líquido

Así como ocurre en otras operaciones unitarias, debe considerarse el equilibrio que se tiende a alcanzar durante la operación, y la velocidad con que se llega a él, estudiando los diversos factores que los afectan.

El mecanismo de la extracción de un soluto contenido en una partícula sólida mediante un líquido, se considera que ocurre en tres etapas sucesivas hasta que se alcanza el equilibrio. Estas etapas se estudian a continuación:

1.^a Cambio de fase del soluto

Es el paso del soluto desde la fase sólida al líquido. La disolución del soluto se realiza a través de una interfase sólido-líquido. Aunque para el estudio de esta etapa podría aplicarse la teoría de la capa límite, no ha sido desarrollada en este caso, y es por ello que suele considerarse que este fenómeno de disolución es instantáneo, por lo que no influye en la velocidad global de extracción.

2.^a Difusión del soluto en el disolvente contenido en los poros del sólido

En la mayoría de los casos, el soluto se encuentra en el interior de las partículas sólidas, siendo preciso que el disolvente se ponga en contacto con él, por lo que debe llenar los poros del sólido inerte. La transferencia del soluto desde el interior de la partícula sólida hasta su superficie, se realiza debido al gradiente de concentración existente entre la interfase sólido-líquido y la superficie exterior del sólido. Se considera que el disolvente en el interior de los poros permanece prácticamente estacionario, por lo que la transferencia de soluto desde zonas de mayor concentración al exterior, se realiza únicamente por difusión molecular. La expresión de la velocidad de transferencia de materia en esta etapa vendrá dada por:

$$N_s = -D_L \frac{dC}{dz}$$

donde: N_s = Densidad de flujo de materia en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$.

D_L = Difusividad del soluto a través del disolvente en $\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$.

C = Concentración de la disolución en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

z = Distancia en el interior del poro en m.

Con lo que si se quiere aumentar la transferencia de materia se logrará aumentando la temperatura, ya que ello provoca un aumento de la difusividad. Además, si las partículas se desmenuzan se logra que la longitud de los poros disminuya, lo que trae consigo el que la velocidad de transferencia aumente. Aunque, en algunos casos puede ocurrir que el disolvente rompa la estructura de los sólidos inertes produciéndose partículas finas que pueden llegar a obstruir los poros, dificultando de este modo la penetración del disolvente. En otros casos, como en la extracción de azúcar de remolacha, la disolución tiene lugar a través de las paredes celulares, que permiten el paso del azúcar pero no dejan pasar componentes indeseables; sin embargo, si la trituration fuese lo suficientemente grande como para romper la estructura celular, estos componentes se disolverían llegando a contaminar la solución azucarada.

3.^a *Transferencia del soluto desde la superficie de las partículas hasta el seno de la disolución*

Una vez que el soluto ha alcanzado la superficie de la partícula, se transfiere desde este punto hasta el seno de la disolución gracias a un gradiente de concentración, realizándose esta transferencia de materia por transporte molecular y turbulento, de forma simultánea. En esta etapa la velocidad de transferencia de materia viene dada por la expresión:

$$N_s = \frac{dM}{A dt} = K_L (C_s - C)$$

donde: M = Masa de soluto transferida en kg.

A = Superficie de contacto partícula-disolución en m^2 .

t = Tiempo en s.

C_s = Concentración del soluto en la superficie del sólido en $kg \cdot m^{-3}$.

C = Concentración del soluto en el seno de la disolución en un instante determinado en $kg \cdot m^{-3}$.

K_L = Coeficiente de transferencia de materia en $m \cdot s^{-1}$.

Si se quiere aumentar la transferencia de materia se consigue agitando la disolución, ya que ello favorece el aumento del coeficiente K_L .

Cada una de las etapas descritas posee su propia velocidad de transferencia, siendo la más lenta la que controla el proceso de extracción. Tal como se ha indicado más arriba, en la primera etapa la disolución del sólido se considera instantánea, por lo que no va a influir en el proceso. De las otras dos etapas, es la segunda la que suele controlar la velocidad del proceso, ya que normalmente se desarrolla lentamente.

Para aumentar la velocidad global de transferencia suele actuarse sobre distintos factores: tamaño de partícula, temperatura y agitación del fluido, cuya influencia ya ha sido descrita. Además de éstos, otro factor a tener en cuenta para aumentar la velocidad de transferencia, es el tipo de disolvente, siendo preciso que se utilice un disolvente selectivo, con una viscosidad lo suficientemente baja para que pueda circular con facilidad.

Es evidente que la transferencia de materia se realiza hasta que se llega al equilibrio, siendo preciso definir el concepto de equilibrio. Este se alcanza cuando el soluto se disuelve totalmente, obteniéndose una disolución de concentración uniforme (debe resaltarse que no se trata de un verdadero equilibrio, pues podría ser que el disolvente pudiera contener más soluto). En el caso de que el contenido de soluto en el sólido sea lo suficientemente elevado, se considera que se ha llegado al equilibrio cuando la solución que se halla en contacto con el sólido esté saturada.

Si el sistema ha llegado al equilibrio, al dejarlo en reposo se separarán dos fases:

- *Extracto* o flujo superior: es la disolución separada, formada por soluto y disolvente. También se denomina miscela.
- *Refinado* o flujo inferior: es el residuo formado por los sólidos inertes y la solución retenida en su seno. Si se ha alcanzado el equilibrio esta solución tendrá la misma concentración en soluto que el extracto. Y si la solución está saturada, el sólido inerte puede contener además soluto sin disolver.

A continuación se definen las diferentes variables que se utilizan a lo largo de este capítulo:

E = Caudal másico de extracto (kg/h).

R = Caudal másico de refinado (kg/h).

Y_i = Fracción másica del componente i en el extracto.

X_i = Fracción másica del componente i en el refinado.

$i = S, D$ o I .

Como el inerte es insoluble en el disolvente, en la fase extracto no se encontrará sólido inerte, por lo que $Y_I = 0$.

La composición de una corriente cualquiera se expresará como la fracción másica con dos subíndices, en los que el primero de ellos indica componente y el segundo corriente. Así, por ejemplo, X_{SR} expresa la fracción másica de soluto en la corriente R ; Y_{DE} será la fracción másica de disolvente en la corriente E .

22.2.1. Retención de disolución y disolvente

En la extracción sólido-líquido la composición del extracto es la misma que la del líquido retenido en el sólido. Para la resolución de los diferentes problemas que se presentan en este tipo de operación, es imprescindible conocer la cantidad de líquido retenido por el sólido y su variación con la composición de la disolución, para lo que debe llevarse a cabo cierta experimentación que facilite este conocimiento.

Se define la **retención de disolución** como la cantidad de disolución que queda retenida por unidad de masa de sólido inerte:

$$r = \frac{\text{kg disolución}}{\text{kg inerte}}$$

Del mismo modo puede definirse la **retención de disolvente** como la cantidad de disolvente retenida por unidad de masa de sólido inerte. Para una mejor visualización de los datos de retención, suelen representarse gráficamente utilizando diagramas triangulares o bien diagramas en coordenadas rectangulares libres de sólido inerte.

22.2.2. Diagramas triangular y rectangular

La resolución de las operaciones de extracción sólido-líquido pueden llevarse a cabo mediante balances de materia y energía, teniendo presente el concepto de etapa ideal. Generalmente, los balances energéticos no tienen importancia en estos procesos de extracción, por lo que sólo se utilizan los de materia. Los cálculos pueden realizarse por métodos algebraicos o gráficos. Es por ello, que a continuación se realiza una breve descripción de los diagramas más utilizados en este tipo de operaciones.

22.2.2.1. Diagrama triangular

Este tipo de diagrama es un triángulo rectángulo (figura 22.1), en el que el vértice del ángulo recto representa el componente inerte I , mientras que en los otros dos vértices se hallan representados el disolvente D y el soluto S . La fracción másica de disolvente se representa frente a la fracción másica de soluto, para la fase de refinado. La hipotenusa de este diagrama representa la fase extracto, pues ésta no contiene

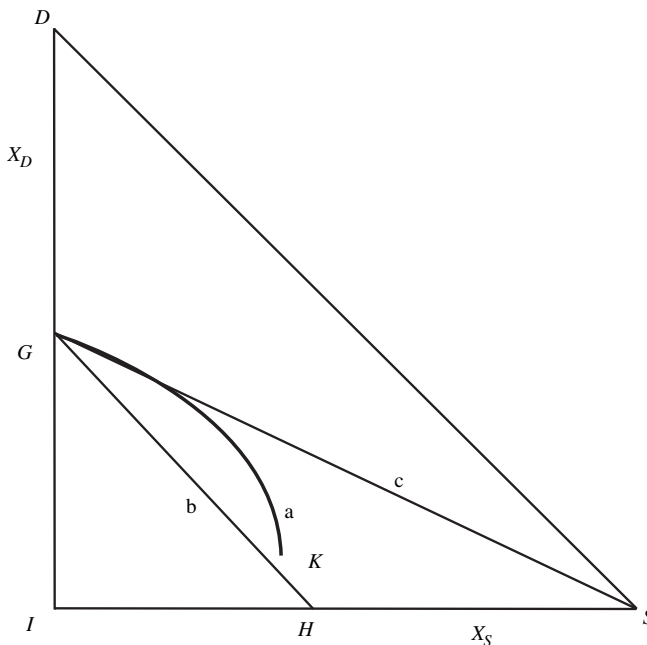


Figura 22.1. Diagrama triangular: a) Curva de retención. b) Retención constante de disolución. c) Retención constante de disolvente.

inerte. Para un punto cualquiera, la fracción másica de soluto se obtiene sobre la escala horizontal, mientras que en la vertical se obtiene la correspondiente al disolvente. La de inerte puede obtenerse por diferencia de la unidad con la suma de estas dos.

Los datos de refinado deben obtenerse mediante experimentación, lo que permite representar la curva de retención (*GK*). Generalmente, los datos obtenidos experimentalmente son:

$$y_s = \text{kg soluto/kg disolución}$$

$$r = \text{kg disolución/kg inerte}$$

a partir de éstos se obtienen las fracciones másicas de soluto y disolvente:

$$X_S = \frac{y_s}{1 + \frac{1}{r}} \frac{\text{kg soluto}}{\text{kg totales}} \quad [22.1]$$

$$X_D = \frac{1 - y_s}{1 + \frac{1}{r}} \frac{\text{kg disolvente}}{\text{kg totales}} \quad [22.2]$$

al representar los valores de X_S frente a los de X_D se obtiene la denominada **curva de retención** (figura 22.1).

En el caso que la cantidad de solución retenida sea constante, la línea de retención es:

$$X_D = \frac{r}{r + 1} - X_S \quad [22.3]$$

ecuación de una recta de ordenada en el origen $r/(r + 1)$ y pendiente -1 ; es decir, una recta paralela a la hipotenusa.

Cuando la cantidad de disolvente retenida por el inerte es constante, la curva de retención es:

$$X_D = \frac{r}{r + 1} (1 - X_S) \quad [22.4]$$

ecuación de una recta que pasa por el punto $(1,0)$, que es precisamente el vértice *S*.

En la extracción sólido-líquido cuando se alcanza el equilibrio, la concentración de la fase extracto (Y_S, Y_D) es la misma que la del líquido retenido por el sólido del refinado. Es por ello que:

$$Y_S = \frac{X_S}{X_S + X_D}$$

$$Y_D = \frac{X_D}{X_S + X_D}$$

de las que se obtiene la relación: $X_S/Y_S = X_D/Y_D$.

O lo que es lo mismo:
$$\frac{X_S - 0}{Y_S - 0} = \frac{X_D - 0}{Y_D - 0}$$

Esta última expresión es la de una recta que pasa por los puntos $(0, 0)$; (X_S, X_D) y (Y_S, Y_D) ; y al ser las composiciones de extracto y refinado las correspondientes al equilibrio, estas rectas son las líneas de reparto denominadas **rectas «tie»** o de unión. Por lo que cualquier recta que pase por el vértice I , el corte con la curva de retención, determina la composición de refinado, mientras que la intersección con la hipotenusa corresponde a la fase extracto.

Para la extracción sólido-líquido, en la que el soluto está en fase sólida, la cantidad de éste que pueda disolverse estará limitada por la saturación de la disolución. Es por ello, que para una temperatura determinada, el diagrama puede dividirse en dos zonas: una de saturación y otra de no-saturación (figura 22.2). Si se considera que la concentración de solución saturada (Y_{SAT}) corresponde al punto A sobre la hipotenusa, la línea IA representa la mezcla sólido inerte y solución saturada. Las soluciones de la zona por encima de esta línea serán no saturadas, mientras que la zona por debajo de la línea se corresponde a soluciones saturadas. Cualquier punto N de la zona no saturada representa una mezcla ternaria, de forma que el extracto separado tendrá una composición Y_1 , que se obtiene con el corte de las líneas IN y la hipotenusa DS . Los puntos de la zona saturada (punto P) darán un extracto de solución saturada (Y_{SAT}), mientras que el so-

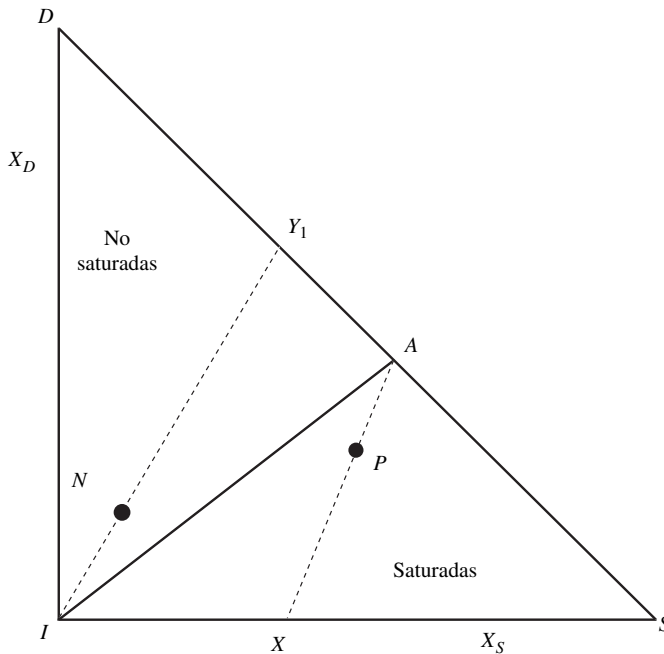


Figura 22.2. Diagrama triangular. Zonas de saturación de los extractos.

luto retenido por el sólido inerte tendrá una concentración X , obtenida por la intersección de las rectas AP e IS .

Si el soluto se encuentra inicialmente en fase líquida, puede ocurrir que sea miscible con el disolvente en cualquier proporción, en cuyo caso todos los puntos de la hipotenusa representan sistemas de una fase, mientras que el interior del triángulo representa soluciones no saturadas. Cuando el soluto no es miscible en todas las proporciones con el disolvente, aparecen tres zonas (figura 22.3), delimitadas por la saturación del soluto en el disolvente (Y_{2SAT}) y por la saturación del soluto (Y_{1SAT}). La zona comprendida entre las dos líneas de saturación suele ser la de trabajo, en las operaciones de extracción sólido-líquido. Las zonas 1 y 3 están constituidas por una fase líquida no saturada y sólido inerte, mientras que la zona 2 está formada por sólido inerte y dos fases líquidas saturadas de composiciones (Y_{1SAT}) e (Y_{2SAT}).

22.2.2.2. Diagrama rectangular

El diagrama se le denomina también diagrama de coordenadas libres de sólido inerte, debido a que las variables están referidas en base libre de inerte.

En ordenadas se representa la fracción de inerte N :

$$N = \frac{X_I}{X_S + X_D} \quad [22.5]$$

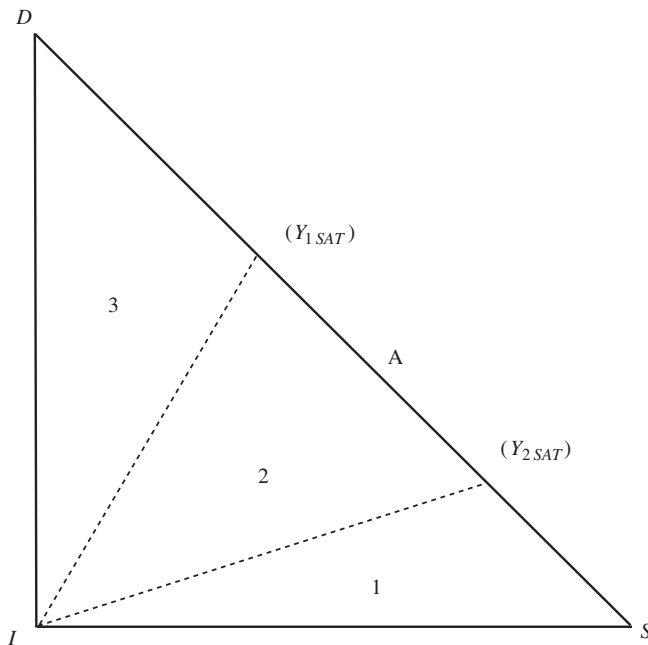


Figura 22.3. Diagrama triangular. Zonas de saturación para soluto parcialmente miscible.

En abscisas se representan las fracciones de refinado (X') y extracto (Y') libres de inerte:

- Para la fase refinado:
$$X' = \frac{X_S}{X_S + X_D} \quad [22.6]$$

- Para la fase extracto:
$$Y' = \frac{Y_S}{Y_S + Y_D} \quad [22.7]$$

En el extracto, al no contener sólido inerte se cumple que $N = 0$, con lo que la línea de la fase extracto coincide con el eje de abscisas (figura 22.4).

La composición de la fase refinado se obtiene sobre la curva de retención (GK). Para el caso de retención de disolución constante, la línea de refinado será una paralela al eje de abscisas (recta GH). En el caso que sea constante la retención de disolvente, la línea de refinado será una recta que pasa por el punto $(1,0)$ (recta GS).

22.3. Métodos de extracción

En la extracción de los solutos contenidos en una fase sólida se puede operar de diferentes formas. En este apartado se estudiarán tres tipos de operación, que son el contacto simple único, contacto simple repetido y contacto múltiple en contracorriente.

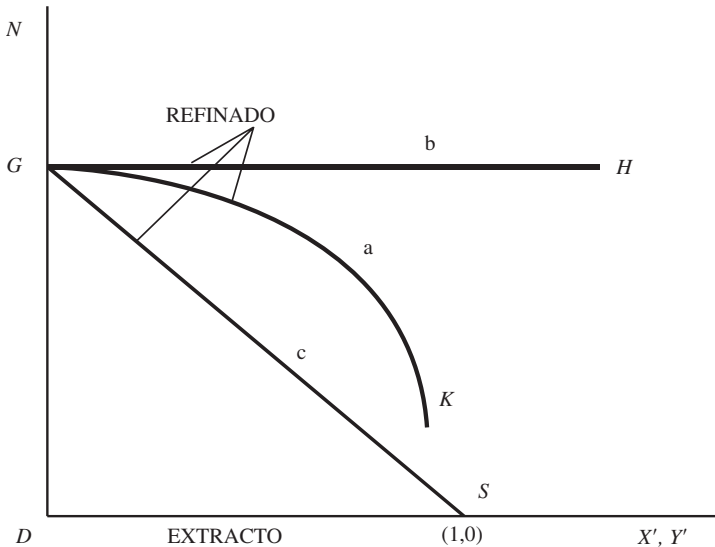


Figura 22.4. Diagrama rectangular: a) Curva de retención. b) Retención constante de disolución. c) Retención constante de disolvente.

22.3.1. Contacto simple único

Este tipo de operación es discontinua o intermitente. Se pone en contacto un alimento (R_A) con todo el disolvente a utilizar (D), para obtener un refinado R_1 , que contiene el sólido inerte y la solución retenida por él, y un extracto E_1 que contiene la solución formada (figura 22.5a).

Se considera que ésta es una etapa ideal, con lo que las corrientes de extracto y refinado están en equilibrio. En este tipo de operaciones, generalmente, los datos son la corriente o cantidad de alimento R_A y su composición X_{SRA} , y la cantidad de disolvente D y su composición Y_{DD} ; debiéndose determinar las cantidades de extracto y refinado, así como sus composiciones.

Para la determinación de estas variables, deben plantearse los balances de materia, resolviendo a continuación el modelo matemático planteado mediante métodos algebraicos o gráficos.

$$\text{Balance global: } R_A + D = R_1 + E_1 = M$$

$$\text{Balance soluto: } R_A X_{SRA} + D Y_{SD} = R_1 X_{SR1} + E_1 Y_{SE1} = M X_{SM}$$

$$\text{Balance disolvente: } R_A X_{DRA} + D Y_{DD} = R_1 X_{DR1} + E_1 Y_{DE1} = M X_{DM}$$

El punto representativo M , denominado **polo**, es ficticio, encontrándose en el diagrama triangular en la intersección de las rectas $R_A D \cap R_1 E_1$, que unen el alimento con el disolvente y el extracto con el refinado, respectivamente (figura 22.5b). Luego, para resolver el problema planteado, deberá situarse el polo M sobre la recta $R_A D$ con unas coordenadas:

$$X_{SM} = \frac{R_A X_{SRA} + D Y_{SD}}{R_A + D} \quad [22.8]$$

$$X_{DM} = \frac{R_A X_{DRA} + D Y_{DD}}{R_A + D} \quad [22.9]$$

Las composiciones de las fases extracto E_1 y refinado R_1 se obtendrán trazando la recta de reparto (recta «*tie*») que pase por el polo M . Es decir, uniendo los puntos I y M podrá obtenerse sobre la hipotenusa el punto E_1 de composición Y_{SE1} e Y_{DE1} ; mientras que sobre la curva de retención se obtiene el punto R_1 de composición X_{SR1} y X_{DR1} . Del balance de materias planteado podrán obtenerse las cantidades R_1 y E_1 .

En las operaciones de extracción interesa conocer el **caudal o cantidad mínima** de disolvente para realizar la extracción del soluto. Esta cantidad ($D_{\text{MÍN}}$) se obtiene cuando el polo M está situado exactamente sobre la curva de retención. Sin embargo, en este caso, al aplicar la regla de la palanca: $E_1 \cdot (E_1 M) = R_1 \cdot (R_1 M)$, si $M = M_{\text{MÍN}}$, se cumple que R_1 coincide con M ; por lo que $(R_1 M) = 0$, y como $(E_1 M)$ es distinto de cero, se debe cumplir que la cantidad $E_1 = 0$. Es decir, no se obtendría extracto. Por ello, interesa trabajar siempre con caudales de disolvente superiores al mínimo.

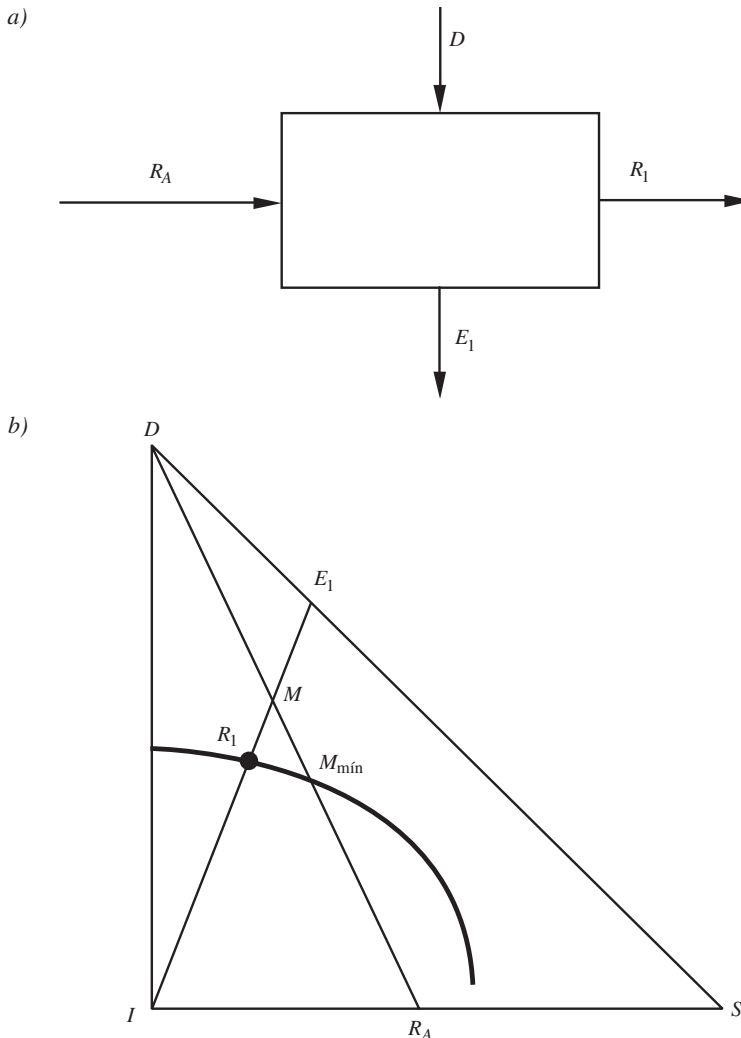


Figura 25.5. Contacto simple: a) Esquema del contacto. b) Operación en el diagrama triangular.

La resolución del problema también puede realizarse utilizando el diagrama rectangular. Previamente se definirá la nomenclatura que se utilizará en este diagrama libre de inerte. Así, se define.

E' = Caudal o cantidad de la fase extracto libre de sólido inerte de la corriente E .

R' = Caudal o cantidad de la fase refinado libre de sólido inerte de la corriente R .

Y'_j = razón de soluto a soluto más disolvente de la corriente j para el extracto.

X'_j = razón de soluto a soluto más disolvente de la corriente j para el refinado.

N_j = razón de inerte a soluto más disolvente para la corriente j .

En este caso los balances de materia a realizar son:

- Balance global: $R'_A + D' = R'_1 + E'_1 = M'$
- Balance soluto: $R'_A X'_{RA} + D' Y'_D = R'_1 X'_{R1} + E'_1 Y'_{E1} = M' X'_M$
- Balance disolvente: $R'_A N_{RA} + D' N_D = R'_1 N_{R1} + E'_1 N_{E1} = M' N_M$

Al igual que en el diagrama triangular, en este caso M' es un polo ficticio que estará situado en la intersección de $R'_A D$ con $R'_1 E'_1$, siendo sus coordenadas:

$$X'_M = \frac{R'_A X'_{RA} + D' Y'_D}{R'_A + D'} \quad [22.10]$$

$$N_M = \frac{R'_A N_{RA} + D' N_D}{R'_A + D'} \quad [22.11]$$

Una vez situado este polo M' , las composiciones de extracto y refinado se obtienen al trazar la recta de reparto (recta vertical) que pasa por M' . Sobre el eje de abscisas se obtiene la composición del extracto; mientras que sobre la curva de retención se obtiene la composición de la fase refinado. Evidentemente, al estar en equilibrio la solución de extracto con la retenida por el sólido inerte, se cumple que $X'_{R1} = Y'_{E1}$.

Una vez obtenidas las composiciones de las fases extracto y refinado, las cantidades correspondientes a estas fases se obtienen a partir de los balances de materia.

En el caso que el disolvente sea puro se cumplirá que $N' = Y'_D = 0$. Es decir, el punto representativo de la corriente disolvente es el origen de coordenadas. Si el disolvente no es puro, dicho punto se encontrará en el interior del diagrama.

Estos métodos gráficos desarrollados sirven para resolver cualquier tipo de problema que se plantee en un contacto sencillo único. Sin embargo, cuando la retención de la disolución o del disolvente es constante, el modelo matemático presenta solución analítica; es por ello, que a continuación se presentan estas soluciones.

Para **retención de disolución constante**, se puede considerar que L es la cantidad total de disolución retenida. La cantidad de extracto E_1 se obtendrá de un balance de soluto más disolvente. Así, la cantidad de soluto más disolvente que entra al sistema será:

- Con el alimento: $R_A (1 - X_{IRA})$.
- Con el disolvente: $D (1 - Y_{ID})$.

Mientras que la cantidad que lo abandona será:

- Con el extracto: E_1 .
- Con el refinado: L .

Por lo que: $R_A (1 - X_{IRA}) + D (1 - Y_{ID}) = E_1 + L$.

lo que permite obtener la cantidad de extracto.

La composición del extracto coincide con la de la solución retenida. Si ésta es Y_{SE1} se podrá obtener a partir de un balance de soluto:

$$R_A X_{SRA} + D Y_{SD} = (L + E_1) Y_{SE1} \quad [22.12]$$

con lo que:

$$Y_{SE1} = \frac{R_A X_{SRA} + D Y_{SD}}{R_A (1 - X_{IRA}) + D (1 - Y_{SD})} \quad [22.13]$$

En el caso particular de que el disolvente sea puro se cumple que $Y_{SD} = Y_{ID} = 0$, y si el alimento no contiene disolvente $X_{SRA} = 1 - X_{IRA}$, con lo que:

$$Y_{SE1} = \frac{R_A X_{SRA}}{R_A X_{SRA} + D} \quad [22.14]$$

En el caso que la **retención de disolvente sea constante**, se define L'' como la cantidad total de disolvente retenido, siendo R''_A , D'' y E''_1 las cantidades de disolvente del alimento, disolvente y extracto, respectivamente. Del balance de materia se obtiene:

$$R''_A + D'' = L'' + E''_1$$

Si se definen las razones de soluto a disolvente en la corriente j de refinado y extracto como X''_j e Y''_j , respectivamente, al realizar un balance de soluto se tiene:

$$R''_A X''_{RA} + D'' Y''_D = (L'' + E''_1) Y''_{E1}$$

con lo que la razón de soluto en el extracto será:

$$Y''_{E1} = \frac{R''_A X''_{RA} + D'' Y''_D}{R''_A + D''} \quad [22.15]$$

En el caso particular de que el disolvente sea puro ($Y''_D = 0$ y $D'' = D$), y si además el alimento no contiene disolvente ($R''_A = 0$), el único soluto que entra al sistema es $R_A X_{SRA}$, por lo que:

$$Y''_{E1} = \frac{R''_A X''_{RA}}{D} \quad [22.16]$$

obteniéndose que la fracción de soluto en el extracto será:

$$Y_{SE1} = \frac{R_A X_{SRA}}{R_A X_{SRA} + D} \quad [22.17]$$

22.3.2. Contacto simple repetido

Este método de operación, también denominado contacto múltiple en corriente directa, consiste en repetir el método empleado para una etapa en etapas sucesivas; de forma que el refinado obtenido en cada etapa sirve de alimento de la etapa si-

guiente. La cantidad global de disolvente a utilizar se subdivide en varias fracciones, utilizando cada una de estas fracciones en cada etapa (figura 22.6a).

En este tipo de operación se cumple: $D_T = \Sigma D_i$

$$E_T = \Sigma E_i$$

resultando que el máximo rendimiento se obtiene cuando la cantidad de disolvente que se introduce en cada etapa es el mismo; es decir, se cumple: $D_i = D_T/n$.

Al igual que en el apartado anterior, si se realizan los balances de materia para la primera etapa, se obtiene:

- Balance global: $R_A + D_1 = R_1 + E_1 = M_1$
- Balance soluto: $R_A X_{SRA} + D_1 Y_{SD} = R_1 X_{SR1} + E_1 Y_{SE1} = M_1 X_{SM}$
- Balance disolvente: $R_A X_{DRA} + D_1 Y_{DD} = R_1 X_{DR1} + E_1 Y_{DE1} = M_1 X_{DM}$

en la que el polo M_1 está situado en la intersección de las rectas $\overline{R_A D_1}$ con $\overline{R_1 E_1}$ (figura 22.6b), siendo el valor de sus coordenadas:

$$X_{SM1} = \frac{R_A X_{SRA} + D_1 Y_{SD}}{R_A + D_1} \quad [22.18]$$

$$X_{DM1} = \frac{R_A X_{DRA} + D_1 Y_{DD}}{R_A + D_1} \quad [22.19]$$

que permiten situar el polo M_1 conocida la posición de R_A y D_1 . La línea de reparto que pasa por M_1 determinará la composición de E_1 sobre la hipotenusa, y la de refinado R_1 sobre la curva de retención.

Operando de forma análoga para una etapa i , los balances de materia correspondientes a esta etapa serán:

- Balance global: $R_{i-1} + D_i = R_i + E_i = M_i$
- Balance soluto: $R_{i-1} X_{SRI-1} + D_i Y_{SDi} = R_i X_{SRI} + E_i Y_{SEi} = M_i X_{SMi}$
- Balance disolvente: $R_{i-1} X_{DRI-1} + D_i Y_{DDi} = R_i X_{DRI} + E_i Y_{DEi} = M_i X_{DMi}$

en las que M_i es el polo de la etapa i , que se encuentra en la intersección de las rectas $(\overline{R_{i-1} D_i})$ con $(\overline{R_i E_i})$, siendo sus coordenadas:

$$X_{SMi} = \frac{R_{i-1} X_{SRI-1} + D_i Y_{SDi}}{R_{i-1} + D_i} \quad [22.20]$$

$$X_{DMi} = \frac{R_{i-1} X_{DRI-1} + D_i Y_{DDi}}{R_{i-1} + D_i} \quad [22.21]$$

que permiten situar el polo M_i . La recta de reparto que pase por este polo determinará las composiciones de extracto E_i y de refinado R_i , a partir del cual podrá obtenerse el polo M_{i+1} , repitiendo la operación de forma sucesiva hasta la última etapa.

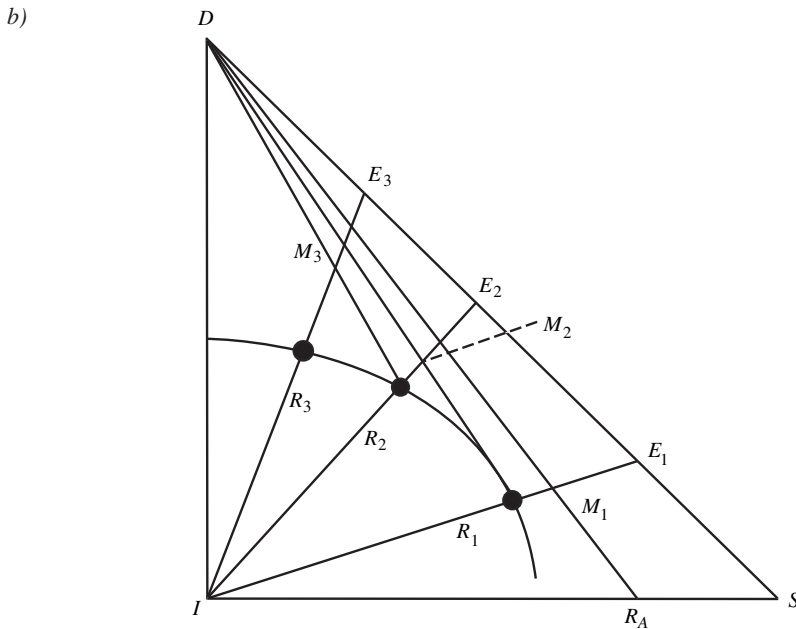
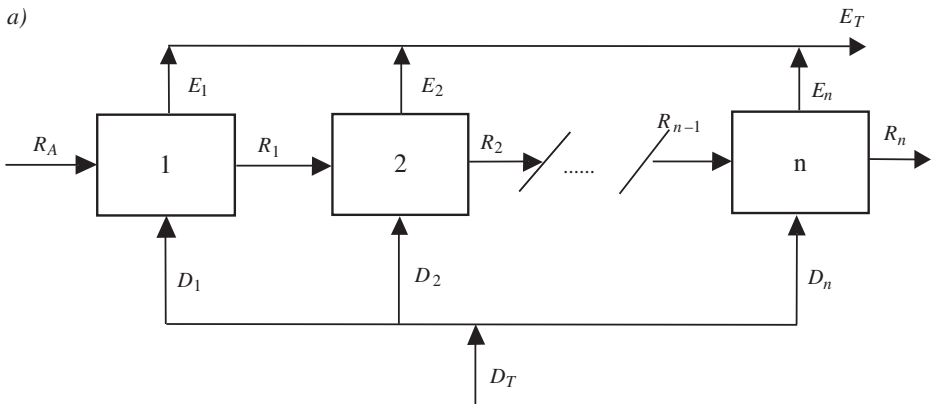


Figura 22.6. Contacto simple repetido.
 a) Esquema del contacto. b) Operación en el diagrama triangular.

En la figura 22.6b se indica el proceso a seguir en un diagrama triangular, utilizando disolvente puro en cada etapa.

En la práctica, los tipos de problemas que suelen presentarse son tres, indicando a continuación el método de resolución de cada caso.

Primer caso. Conocidas la cantidad de la corriente de alimentación R_A y la cantidad total de disolvente a utilizar D_T , así como sus correspondientes composiciones X_{SRA} e Y_{SD} , y el número de etapas n ; se desea determinar la composición X_{SRn} del refinado R_n .

Al ser D_T la cantidad total de disolvente, en cada etapa la cantidad de disolvente a utilizar será: $D_i = D_T/n$. Las composiciones del alimento X_{SRA} y del disolvente Y_{SD} permiten situar los puntos de alimentación R_A y de disolvente D_i , sobre el diagrama triangular. El polo M_1 se determinará sobre la recta $R_A D_1$, a partir de sus coordenadas obtenidas en los balances. Al trazar la recta de reparto que pasa por M_1 , se determinarán los puntos E_1 sobre la hipotenusa y R_1 sobre la curva de retención. Este será el alimento de la segunda etapa. El proceso se repite para las n etapas, obteniéndose en la última los puntos E_n y R_n , que determinan las composiciones de estas corrientes finales; quedando, por tanto, resuelto el problema planteado.

Segundo caso. Debe determinarse el número de etapas n necesarias para realizar una extracción de la que se conocen la cantidad de alimento R_A y su composición X_{SRA} . También se conoce la composición X_{SRn} del refinado final, y la cantidad de disolvente a utilizar en cada etapa D_i , así como su composición Y_{SDi} .

A partir de las composiciones X_{SRA} y Y_{SDi} es posible situar los puntos de alimentación R_A y de disolvente D_i . Se sitúa el polo M_1 sobre la recta $R_A D_i$; y al trazar la recta de reparto que pasa por M_1 se obtendrán E_1 y R_1 . El polo M_2 se determina en la recta $R_1 D_2$, obteniéndose R_2 y E_2 al trazar la recta de reparto que pasa por M_2 . El proceso se repite sucesivamente hasta que al trazar la recta de reparto que pase por el polo M_n se obtenga un refinado cuya composición de soluto sea igual o menor que la fijada para el refinado final X_{SRn} . El número de etapas n será precisamente el número de rectas de reparto trazadas.

Tercer caso. Se desea determinar el número de etapas n conocidas la cantidad de alimento R_A y su composición X_{SRA} , la composición X_{SRn} del refinado final, así como la cantidad total de disolvente a utilizar D_T y su composición Y_{SD} .

La forma de resolver el problema es suponer el número de etapas n , lo que permitirá saber la cantidad de disolvente a utilizar en cada etapa ($D_i = D_T/n$). A continuación se opera como en el segundo caso, obteniéndose el número de etapas de equilibrio. Si este número de etapas coincide con el supuesto, se habrá resuelto el problema. En caso contrario, debe suponerse otro valor de n y repetir el proceso de cálculo, hasta que el número de etapas supuesto coincida con el calculado.

Hasta ahora se han presentado los métodos de cálculo utilizando el diagrama triangular, sin embargo, pudiera haberse empleado el diagrama rectangular de coordenadas libres de inerte. En este diagrama el modo de operar es análogo al supuesto para el diagrama triangular. Los balances de materia para una etapa i serán:

- Balance global: $R'_{i-1} + D'_i = R'_i + E'_i = M'_i$
- Balance soluto: $R'_{i-1} X'_{Ri-1} + D'_i Y'_{Di} = R'_i X'_{Ri} + E'_i Y'_{Ei} = M'_i X'_{Mi}$
- Balance disolvente: $R'_{i-1} N_{Ri-1} + D'_i N_{Di} = R'_i N_{Ri} + E'_i N_{Ei} = M'_i N_{Mi}$

El polo M'_i se halla situado en la intersección de $\overline{R_{i-1} D_i}$ con $\overline{R_i E_i}$, siendo sus coordenadas:

$$X'_{Mi} = \frac{R'_{i-1} X'_{Ri-1} + D'_i Y'_{Di}}{R'_{i-1} + D'_i} \quad [22.22]$$

$$N_{Mi} = \frac{R'_{Ri-1} N'_{Ri-1} + D'_i N_{Di}}{R'_{i-1} + D'_i} \quad [22.23]$$

El modo de operar será situar el polo M_1 sobre la recta $\overline{R_A D_i}$, trazar la recta vertical (recta de reparto) que pasa por este polo y determinar R_1 y E_1 . Situar el polo M_2 sobre la recta $\overline{R_1 D_2}$, determinado R_2 y E_2 al trazar la vertical que pase por M_2 . Este proceso se va repitiendo hasta la última etapa.

En la resolución de los problemas planteados se han expuesto los métodos gráficos de resolución, tanto para el diagrama triangular como rectangular. Sin embargo, en los casos particulares en que la retención de la disolución o del disolvente sean constantes, el modelo matemático planteado con los balances de materia presenta solución analítica.

Si la **retención de la disolución es constante**, se puede considerar que L es el caudal de disolución retenido a lo largo de las distintas etapas. El balance de soluto en la primera etapa es:

$$R_A X_{SRA} + D_1 Y_{SD} = (E_1 + L) Y_{SE1}$$

y, al igual que el caso de contacto simple, el balance de soluto más disolvente para esta primera etapa conduce a la expresión:

$$R_A (1 - X_{IRA}) + D_1 (1 - Y_{ID}) = (L + E_1)$$

por lo que la composición de soluto en el extracto E_1 es:

$$Y_{SE1} = \frac{R_A X_{SRA} + D_1 Y_{SD}}{R_A (1 - X_{IRA}) + D_1 (1 - Y_{ID})} \quad [22.24]$$

ecuación que, evidentemente, coincide con la obtenida para la extracción por contacto simple único.

Generalizando para una etapa i del sistema, los balances de soluto y de soluto más disolvente serán:

- Soluto: $L Y_{SEi-1} + D_i Y_{SDi} = (L + E_i) Y_{SEi}$
- Soluto + disolvente: $L + D_i (1 - Y_{IDi}) = L + E_i$

Este último balance indica que el caudal de extracto E_i es:

$$E_i = D_i (1 - Y_{ID})$$

y como el caudal de disolvente D_i que entra en cada etapa es el mismo, así como su composición, resulta que el caudal de extracto E_i que abandona la etapa i es constante, es decir: $E_i = E = \text{constante}$ para $i = 2, 3, \dots, n$.

Este caudal de extracto es constante para todas las etapas, excepto para la primera. El caudal de extracto de la primera etapa se obtiene a partir de un balance en esta etapa:

$$E_1 = R_A (1 - X_{IR}) + E - L$$

Generalmente, el disolvente no contiene sólido inerte ($Y_{Di} = 0$), por lo que $E = D_i$, obteniéndose que el balance de soluto será:

$$L Y_{SEi-1} + D_i Y_{SDi} = L Y_{SEi} + D_i Y_{SEi}$$

Si se define una constante k como la relación $k = L/D_i$, esta última ecuación puede expresarse como:

$$(k + 1) Y_{SEi} - k Y_{SEi-1} = Y_{SD}$$

Puede observarse que ésta es una ecuación lineal en diferencias finitas de primer orden. La solución de esta ecuación es la suma de una solución particular más una complementaria:

$$Y_{SEi} = (Y_{SEi})_P + (Y_{SEi})_C$$

en la que la solución particular es: $(Y_{SEi})_P = Y_{SD}$.

Para obtener la solución complementaria se opera de forma análoga a la resolución de ecuaciones diferenciales lineales, suponiendo que el segundo miembro de la ecuación inicial es cero. En este caso se obtiene:

$$(Y_{SEi})_C = C \left(\frac{k}{k + 1} \right)^{i-1} \quad [22.25]$$

en la que C es una constante. La solución general será:

$$Y_{SEi} = Y_{SD} + C \left(\frac{k}{k + 1} \right)^{i-1}$$

donde la constante C se obtiene aplicando la condición límite:

$$\text{Para } i = 1 \quad Y_{SE1} = \frac{R_A X_{SRA} + D_i Y_{SD}}{R_A (1 - X_{IRA}) + D_1} \quad [22.26]$$

con lo que la solución final es:

$$Y_{SEi} = Y_{SD} + \frac{R_A (X_{SRA} + X_{IRA} Y_{SD} - Y_{SD})}{R_A (1 - X_{IRA}) + D_1} \left(\frac{k}{k + 1} \right)^{i-1} \quad [22.27]$$

Para el caso que el alimento no contenga disolvente, esta ecuación se reduce a:

$$Y_{SEi} = Y_{SD} + \frac{R_A X_{SRA} (1 - Y_{SD})}{R_A X_{SRA} + D_1} \left(\frac{k}{k + 1} \right)^{i-1}$$

En el caso que el caudal de **disolvente retenido sea constante**, se denomina como L'' a este caudal y R''_A , D''_i y E''_i a las cantidades de disolvente en las corrientes de alimento, disolvente y extracto, respectivamente. Además, X''_j e Y''_j son las

razones de soluto a disolvente en la corriente de refinado y extracto, respectivamente. Al realizar un balance de soluto en la primera etapa se obtiene:

$$Y''_{E1} = \frac{R''_A X''_{RA} + D''_1 Y''_D}{R''_A + D''_1}$$

Si este balance se realiza en una etapa cualquiera i se tiene:

$$L'' Y''_{Ei-1} + D''_i Y''_D = (L'' + E''_i) Y''_{Ei}$$

Definiendo un nuevo parámetro $k'' = L''/D''_i$, esta ecuación se transforma en:

$$(k'' + 1) Y''_{Ei} - k'' Y''_{Ei-1} = Y''_D \quad [22.28]$$

que es una ecuación lineal en diferencias finitas de primer orden. Esta ecuación se resuelve de forma análoga al caso de retención de disolución constante, con la condición límite:

$$\text{Para } i = 1 \quad Y''_{E1} = \frac{R''_A X''_{RA} + D''_1 Y''_D}{R''_A + D''_1}$$

Obteniéndose como solución final la expresión:

$$Y''_{Ei} = Y''_D + \frac{R''_A (X''_{RA} - Y''_D)}{R''_A + D''_i} \left(\frac{k''}{k'' + 1} \right)^{i-1} \quad [22.29]$$

En el caso que el alimento no contenga disolvente se cumple que $R''_A = 0$ y si además X''_{RA} tiende a cero; la ecuación anterior se reduce a la expresión:

$$Y''_{Ei} = Y''_D + \frac{R_A X_{SRA}}{D''_i} \left(\frac{k''}{k'' + 1} \right)^{i-1} \quad [22.30]$$

22.3.3. Contacto múltiple en contracorriente

En este tipo de extracción, la alimentación R_A y el disolvente D entran al sistema de etapas de extracción por lados opuestos, tal como se indica en la figura 22.7. La eficacia de separación en este tipo de operación es mayor que en las otras formas de contacto. En el contacto múltiple en contracorriente, el flujo de refinado se va empobreciendo en soluto desde la primera a la última etapa, mientras que el flujo de extracto se va enriqueciendo en soluto desde la última a la primera etapa.

A continuación se realiza el estudio de esta operación utilizando el diagrama triangular. El balance de materia aplicado a todo el sistema conduce a la ecuación:

$$R_A + E_{n+1} = R_n + E_1 = M \quad [22.31]$$

donde M es un punto del diagrama, representando un caudal de corriente ficticio. Este punto se encuentra en la intersección de las rectas $R_A E_{n+1}$ y $R_n E_1$, pudiéndose obtener el valor de sus coordenadas a partir de los balances de soluto y disolvente:

$$X_{SM} = \frac{R_A X_{SRA} + E_{n+1} Y_{SEn+1}}{R_A + E_{n+1}} \quad [22.32]$$

$$X_{DM} = \frac{R_A X_{DRA} + E_{n+1} Y_{DEN+1}}{R_A + E_{n+1}} \quad [22.33]$$

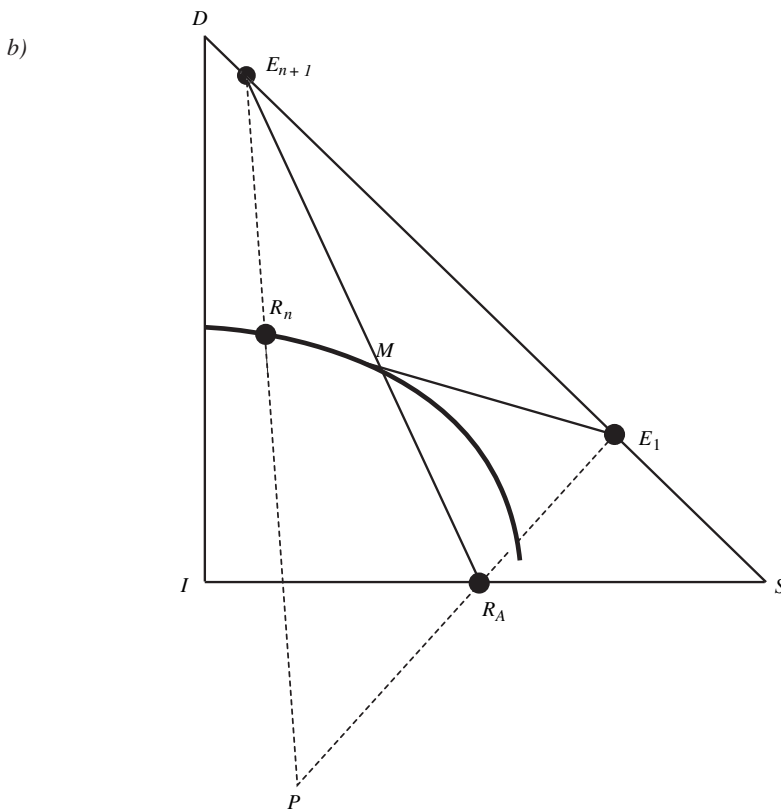
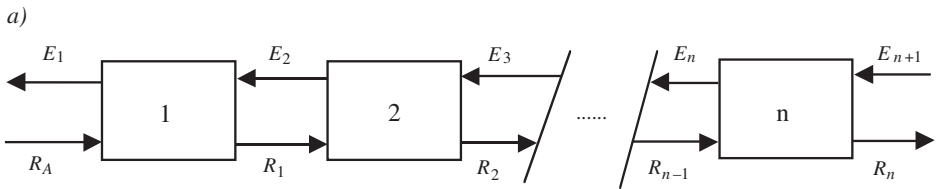


Figura 22.7. Contacto múltiple en contracorriente: a) Flujo de las corrientes. b) Situación del punto M y polo P .

El balance global de materia puede expresarse como:

$$R_A - E_1 = R_n - E_{n+1} = P \quad [22.34]$$

en la que P es un polo que representa el caudal de una corriente ficticia, diferencia de los caudales de refinado y extracto en ambos extremos del sistema. Este polo P se encontrará en la recta que une los puntos R_A y E_1 , además de estar situado sobre la recta que pasa por R_n y E_{n+1} .

Al realizar un balance de materias entre la primera etapa y una intermedia i se tiene:

$$R_A + E_{i+1} = R_i + E_1$$

o lo que es lo mismo:

$$R_A - E_1 = R_i - E_{i+1}$$

observándose que el primer miembro de la igualdad es precisamente el valor del polo P ; por lo que esta última expresión puede generalizarse:

$$R_A - E_1 = R_2 - E_2 = \dots = R_i - E_{i+1} = \dots = R_n - E_{n+1} = P \quad [22.35]$$

es decir, la diferencia entre los caudales de refinado y extracto permanece constante a lo largo del sistema. La posición de este polo P puede ser cualquiera dentro del plano, incluso puede encontrarse en el infinito, como sería el caso en que las rectas $(R_A E_1)$ y $(R_n E_{n+1})$ fuesen paralelas.

A continuación se indica el método de resolución de los distintos tipos de problemas que pueden presentarse en el cálculo del número de etapas de equilibrio.

Primer caso. Se desea calcular el número de etapas n conocidas las composiciones de las corrientes en los dos extremos del sistema; es decir las variables conocidas son X_{SRA} , Y_{SEn+1} , X_{SRn} y Y_{SE1} . El conocimiento de estas composiciones permite situar los puntos R_A , E_{n+1} , R_n y E_1 , en el diagrama triangular. Una vez situados estos puntos se trazan las rectas que pasan por $(R_A E_1)$ y $(R_n E_{n+1})$; siendo el punto de intersección de estas rectas el polo P .

Segundo caso. Se desea determinar el número de etapas n conocidas las composiciones del alimento X_{SRA} , del disolvente Y_{SEn+1} , y del refinado X_{SRn} , así como la razón disolvente a alimento E_{n+1}/R_A . De los datos es posible situar los puntos representativos de la alimentación R_A y del disolvente E_{n+1} . Sobre la recta $(R_A E_{n+1})$ se sitúa el polo M , con los valores de sus coordenadas. Como se conoce la composición del refinado final X_{SRn} es posible situar R_n sobre la curva de retención. La recta que pasa por R_n y el punto M determinarán sobre la hipotenusa, el punto correspondiente al extracto E_1 . El polo P quedará situado en la intersección de las rectas $(R_A E_1)$ y $(R_n E_{n+1})$.

Una vez situado el polo P , la forma de obtener el número de etapas se realizará del siguiente modo: se traza la recta de reparto que pasa por E_1 , que determina R_1 sobre la curva de retención (figura 22.8). A continuación se une R_1 con el polo P y se prolonga la recta hasta que corta a la hipotenusa en el punto E_2 . Se traza la recta

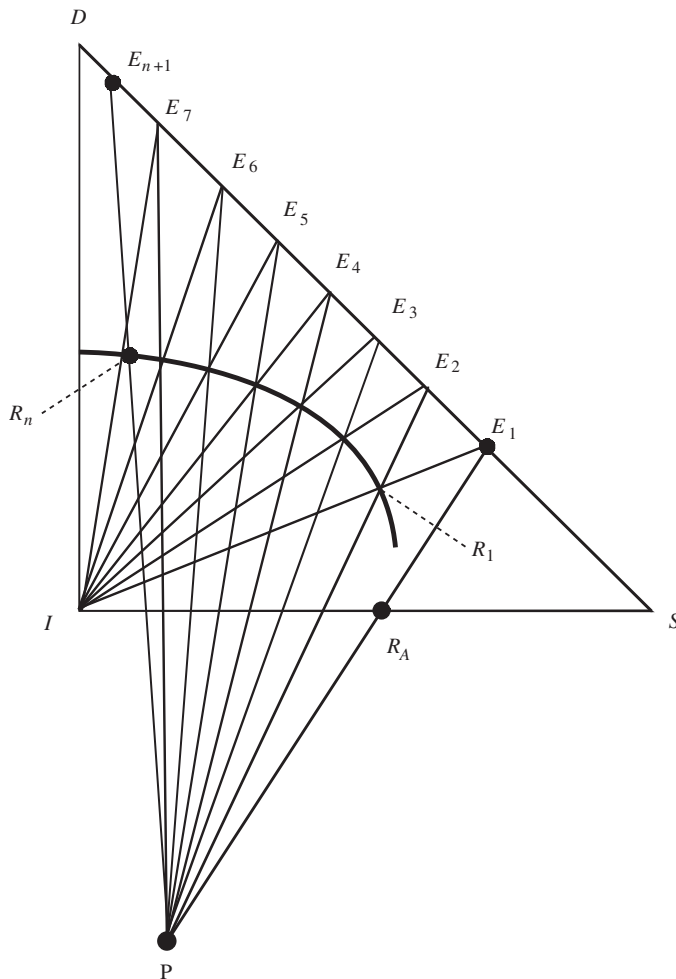


Figura 22.8. Contacto múltiple en contracorriente. Determinación del número de etapas.

de reparto que pasa por E_2 , que determina sobre la curva de retención R_2 . Se repite el proceso sucesivamente hasta que una recta de reparto interseccione sobre la curva de retención en un valor de composición igual o menor que X_{SRn} . El número de etapas necesarias para realizar la extracción deseada estará determinado por el número de rectas de reparto trazadas.

Resulta interesante conocer las condiciones para realizar una separación dada con un **caudal mínimo** de disolvente. Para el cálculo de este caudal mínimo, deben situarse los polos M y P de tal forma que el extracto final E_1 esté en equilibrio con la alimentación, o bien que el refinado final R_n esté en equilibrio con el disolvente E_{n+1} (figura 22.9).

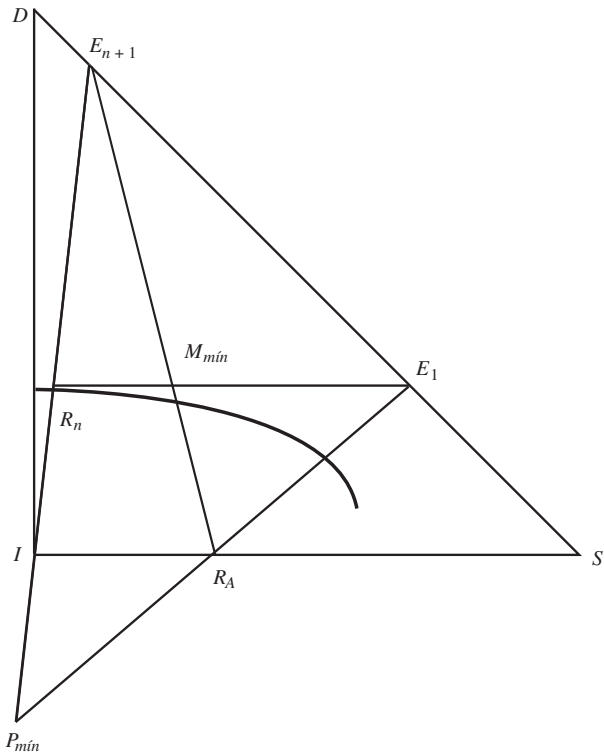
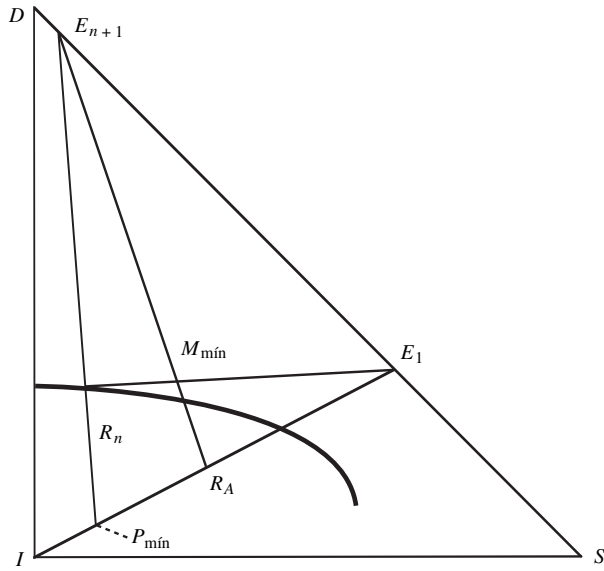


Figura 22.9. Condiciones de disolvente mínimo en la operación múltiple en contracorriente.

En el caso de utilizar el diagrama rectangular, los balances de materia son análogos, obteniéndose las expresiones:

$$R'_A + E'_{n+1} = R'_n + E'_1 = M'$$

$$R'_A - E'_1 = \dots = R'_i - E'_{i+1} = \dots = R'_n - E'_{n+1} = P'$$

Se observa que también aparecen los polos M' y P' . El primero de ellos se encuentra en la intersección de las rectas $R'_A E'_{n+1}$ y $R'_n E'_1$; mientras que el polo P' está situado en la intersección de las rectas $R'_A E'_1$ y $R'_n E'_{n+1}$.

La resolución de los problemas se realiza de forma análoga al diagrama triangular, debiéndose situar los puntos representativos de la alimentación, disolvente y refinado y extracto finales, así como el polo P' . Con la recta de reparto que pasa por E_1 (recta vertical), se determina el punto R_1 sobre la curva de retención. La recta que une P' con R_1 permite obtener E_2 sobre el eje de abscisas. Se continúa el proceso hasta rebasar R_n , siendo el número de etapas el número de rectas de reparto trazadas. El caudal de disolvente mínimo se obtiene haciendo coincidir alguna recta de operación con otra de reparto.

Al igual que en los casos anteriores, de contacto simple y repetido, cuando la retención de disolución y disolvente es constante, el modelo matemático planteado con los balances de materia presenta solución analítica.

Para **retención de disolución constante** se considera que L es el caudal de disolución retenida, que es constante a lo largo de las etapas. El balance de soluto más disolvente, alrededor de todo el sistema de extractores, conduce a la expresión:

$$E_{n+1} + R_A (1 - X_{IRA}) = E_1 + L$$

Al igual que para contacto simple repetido, puede demostrarse que, excluyendo la primera etapa, se cumple:

$$E_i = E = \text{constante} \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, n$$

Si se realiza un balance de soluto para todo el sistema se obtiene:

$$R_A X_{SRA} + E Y_{SEn+1} = L Y_{SEn} + E_1 Y_{SE1}$$

con lo que:

$$Y_{SE1} = \frac{R_A X_{SRA} + E Y_{SEn+1} - L Y_{SEn}}{R_A (1 - X_{IRA}) + E - L}$$

Si el balance se realiza en una etapa cualquiera i del sistema, se tiene:

$$L Y_{SEi+1} + E Y_{SEi-1} = (E + L) Y_{SEi}$$

Definiendo la constante $k = L/E$, esta ecuación se expresará como:

$$Y_{SEi+1} - (1 + k) Y_{SEi} + k Y_{SEi-1} = 0 \quad [22.36]$$

ecuación en diferencias finitas, que puede expresarse como:

$$[(E - 1) (E - k)] Y_{SEi-1} = 0 \quad [22.37]$$

en la que E es el operador (no confundir con el extracto E) que cumple:

$$E Y_{SEi} = Y_{SEi+1}$$

La solución de la ecuación en diferencias presenta la solución:

$$Y_{SEi} = C_1 + C_2 k^{(i-1)}$$

Para obtener el valor de los parámetros C_1 y C_2 se aplican las condiciones límite:

- Para $i = 1$ $C_1 = Y_{SE1} - C_2$
- Para $i = n + 1$ $C_2 = \frac{Y_{SEn+1} - Y_{SE1}}{k^n - 1}$

que al sustituir en la ecuación anterior se obtiene:

$$Y_{SEi} = \frac{1}{1 - k^n} [Y_{SEn+1} - Y_{SE1} k^n + (Y_{SE1} - Y_{SEn+1}) k^{i-1}] \quad [22.38]$$

ecuación válida para $k \neq 1$.

- Para $k = 1$, la ecuación a utilizar es:

$$Y_{SEi} = Y_{SE1} - \frac{Y_{SE1} - Y_{SEn+1}}{n} (i - 1) \quad [22.39]$$

Utilizando estas ecuaciones, para $i = n$, puede calcularse el número de etapas necesarias para realizar la extracción del soluto del alimento de composición X_{SRA} , hasta obtener un refinado R_n que posee una solución retenida de composición Y_{SEn} , y en que dicha solución posee la misma concentración que el extracto E_n .

Cuando la **retención de disolvente es constante**, se define L'' como el caudal de disolvente retenido, y R''_A , E''_{n+1} y E''_1 los caudales de disolvente en la alimentación, disolvente y extracto, respectivamente; mientras que X''_j e Y''_j son las razones de soluto a disolvente en la corriente j de refinado y extracto, respectivamente.

Los balances globales de disolvente y soluto, conducen a las expresiones:

- Disolvente: $R''_A + E''_{n+1} = L'' + E''_1$
- Soluto: $R''_A X''_{RA} + E''_{n+1} Y''_{En+1} = L'' Y''_{En} + E''_1 Y''_{E1}$

Las corrientes de disolvente en los extractos son las mismas para las diferentes etapas, excepto en la primera:

$$E''_i = E'' = \text{constante} \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, n$$

con lo que:

$$Y''_{Ei} = \frac{R''_A X''_{RA} + E'' Y''_{En+1} - L'' Y''_{En}}{R''_A + E'' - L''}$$

Si el balance de soluto se realiza para una etapa i :

$$L'' Y''_{Ei-1} + E'' Y''_{Ei+1} = (L'' + E'') Y''_{Ei}$$

Definiendo una constante $k'' = L''/E''$, se obtiene la expresión:

$$Y''_{Ei+1} - (1 - k'') Y''_{Ei} + k'' Y''_{Ei-1} = 0 \quad [22.40]$$

ecuación lineal en diferencias finitas, análoga a la obtenida para retención de disolución constante. Se resuelve de forma similar, obteniéndose la solución:

- Para $k'' \neq 1$

$$Y''_{Ei} = \frac{1}{1 - (k'')^n} [Y''_{En+1} - Y''_{E1} (k'')^n (Y''_{E1} - Y''_{En+1}) (k'')^{i-1}] \quad [22.41]$$

- Para $k'' = 1$

$$Y''_{Ei} = Y''_{E1} - \frac{Y''_{E1} - Y''_{En+1}}{n} (i - 1) \quad [22.42]$$

A partir de una alimentación X''_{RA} conocida, mediante las ecuaciones obtenidas, es posible calcular el número de etapas, con $i = n$, necesarias para obtener un refinado cuyo líquido retenido posee una composición Y''_{En} .

22.4. Aparatos de extracción sólido-líquido

Los aparatos utilizados en los procesos de extracción sólido-líquido son muy variados, siendo difícil una clasificación clara. Algunos autores los clasifican según el tamaño de partícula sobre la que se va a realizar la extracción de soluto. Otros los clasifican según que el disolvente a utilizar sea o no volátil, o bien si interesa o no su recuperación. Por regla general, en la industria alimentaria, las partículas de material que contiene el soluto no son muy finas, sino que su tamaño suele ser superior a 200 mallas (0,074 mm de luz). Teniendo presente esta consideración, los extractores se clasifican según el método de contacto, englobándose en tres grandes apartados; debiéndose tener presente que en esta clasificación no se hallan incluidos todos los tipos de extractores existentes.

22.4.1. Extractores de contacto simple

Este tipo de extractores consta, esencialmente, de un depósito o recipiente abierto con un falso fondo. Las partículas sólidas se colocan en el depósito sobre el falso fondo, que suele ser un tipo de filtro o rejilla; distribuyéndose el disolvente

sobre la superficie del sólido, de forma que se realiza una percolación de aquél sobre éste. La disolución resultante atraviesa el falso fondo, pudiéndose recoger como extracto. En muchos casos el disolvente se añade en tal cantidad que en realidad la carga se halla sumergida en el disolvente.

Estos extractores se utilizan, generalmente, en pequeñas plantas industriales para la extracción de azúcar de remolacha, aceite de semillas oleaginosas y frutos secos, extracto de café a partir de granos tostados y molidos, solubles de té a partir de hojas deshidratadas, etc.

En muchos casos es preciso utilizar disolventes volátiles, tal como en la extracción de aceite de semillas; o bien es necesario trabajar a presión para lograr una mejor percolación del disolvente sobre las partículas sólidas. Debido a ello, y por consideraciones higiénicas este tipo de extractores son cerrados.

En la figura 22.10 se halla representado un tipo de extractor de contacto simple, en el que puede observarse el modo de funcionamiento descrito anteriormente. Cuando el disolvente utilizado es volátil, debe preverse la incorporación de un recuperador de disolvente, así como los sistemas de reciclaje, con el fin de que la disolución de extracto sea lo suficientemente concentrada.

En esta figura se representa un extractor discontinuo de contacto simple para la extracción de aceite de semillas, que consta de un depósito cilíndrico cerrado, en el que se encuentran dos zonas divididas por una partición inclinada. En la zona superior se cargan las semillas, que son rociadas por el disolvente mediante un distribuidor. El disolvente pasa a través del lecho de semillas, realizándose la extracción de aceite. Este extracto pasa a la cavidad inferior donde se le hace hervir, conjuntamente con el agua que haya podido extraer de las semillas. Los vapores de disolvente más el agua pasan a un condensador, pasando los condensados a un separador con el fin de eliminar el agua y alimentar el disolvente a la cámara de extracción.

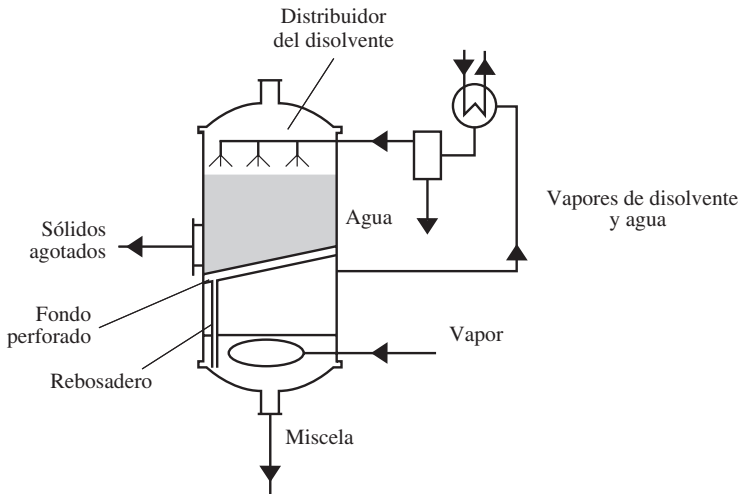


Figura 22.10. *Extractor de contacto simple* (adaptado de Coulson y Richardson, 1979).

22.4.2. Sistemas de múltiples contactos con lecho fijo

Existen casos en los que la velocidad de extracción es muy rápida, y en una sola etapa es posible realizar la extracción deseada. Sin embargo, es más frecuente que esto no ocurra y sea necesario hacer circular el disolvente a través de una serie de tanques que contengan el sólido; de forma que el disolvente fresco se introduce en el tanque cuyo sólido esté más agotado en soluto, fluyendo a través de los distintos tanques abandonando el sistema por el tanque recién cargado. Una serie de tanques de este tipo se denomina batería de extracción.

Cuando el disolvente es volátil o el lecho de sólidos poco permeable, es necesario utilizar depósitos cerrados que operen a presión, para facilitar que el disolvente atraviese el lecho. En estos casos el conjunto de tanques de extracción se denomina batería de difusión Robert. Los procesos en los que se utilizan este tipo de extractores son extracción de café, té, aceite y azúcar de remolacha.

22.4.3. Extractores continuos de lecho móvil

Tal como su nombre indica, en este tipo de extractores el lecho de partículas sólidas es móvil, operando la mayoría de ellos en contracorriente. A continuación se describen algunos de los distintos tipos de extractores de lecho móvil existentes.

Extractor Bollmann. Este extractor, también denominado Hansa-Mühle, consta de un elevador de cangilones que está encerrado en una cámara vertical. Tal como se muestra en la figura 22.11, los cangilones o cestas se cargan con el sólido en la parte superior derecha del extractor, y a medida que van descendiendo se rocían con una disolución de «miscela intermedia». En esta zona del extractor el sólido y la disolución descienden en corrientes paralelas. La miscela que se recoge en el fondo de la parte derecha del extractor se recoge como «miscela final». Una vez rebasada la parte inferior, las cestas con sólido parcialmente agotado suben por la parte izquierda del extractor; a medida que las cestas ascienden se agrega disolvente puro a cada una de ellas, en una parte determinada de la zona alta del extractor. En esta zona, el sólido y el disolvente circulan en contracorriente, de forma que en la parte inferior se obtiene la miscela intermedia, mientras que la cesta con los sólidos ya agotados es descargada en la parte superior. Este tipo de extractores se suele utilizar en los procesos de extracción de aceite de semillas.

Extractor Hildebrandt. Es un extractor de inmersión, ya que en todo momento el sólido se encuentra inmerso en el disolvente. En esencia consta de tres elementos montados en forma de U, tal como muestra la figura 22.12. El sólido se carga por uno de los brazos verticales y se hace avanzar, mediante un transportador de tornillo sin fin, hacia abajo. Una rama horizontal lo transporta hacia el otro brazo vertical, por donde asciende hasta ser descargado por su parte superior. El movimiento del sólido se logra con tornillos sin fin de paletas perforadas. El disolvente se alimenta por el brazo de subida de los sólidos, lográndose con esto que las corrientes líquida y sólida circulen en contracorriente. En el conducto de salida de la disolución extraída, existe un filtro que evita que el sólido salga por esta co-

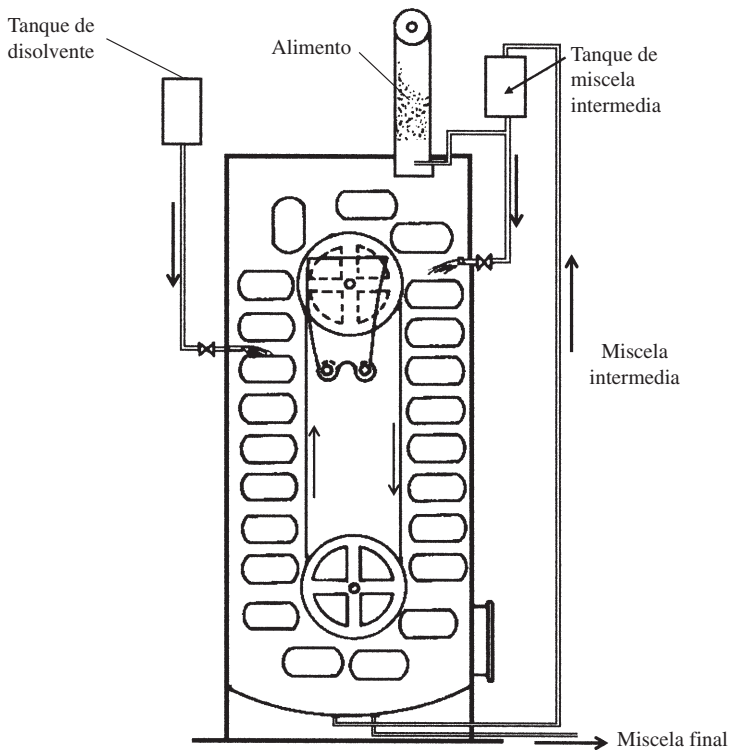


Figura 22.11. *Extractor Bollman* (adaptado de Vian y Ocoñ, 1967).

riente. Estos extractores se utilizan en la extracción de azúcar de remolacha y aceite de copos de soja, si bien en la actualidad su construcción está muy limitada.

Extractor Bonotto. Es un extractor que consta de una columna vertical dividida en compartimentos mediante platos horizontales (figura 22.13). Cada plato tiene una abertura, colocada de forma alterna en cada dos platos consecutivos. Un eje vertical contiene unas paletas o rastrillos que están situados entre platos, que al girar arrastran el sólido que cae de un plato al inferior a través de las aberturas. El sólido se alimenta por la parte superior de la columna, siendo la dirección descendente la que siguen las partículas, mientras que el disolvente entra por la parte inferior, saliendo la miscela por la parte superior. El flujo de sólido y líquido es en contracorriente. Estos extractores se utilizan en la extracción de aceite de semillas y frutos secos. Basados en este principio de extracción en columna por inmersión, y con algunas variantes, existen otros extractores que se conocen con distintos nombres: Allis Chalmer, Oliver, etc.

Extractor Rotocel. Este aparato se basa en la extracción por percolación. Consta de una cámara cilíndrica vertical cerrada, dentro de la cual va girando un tanque también cilíndrico, que está dividido en compartimentos, cuyo fondo es en

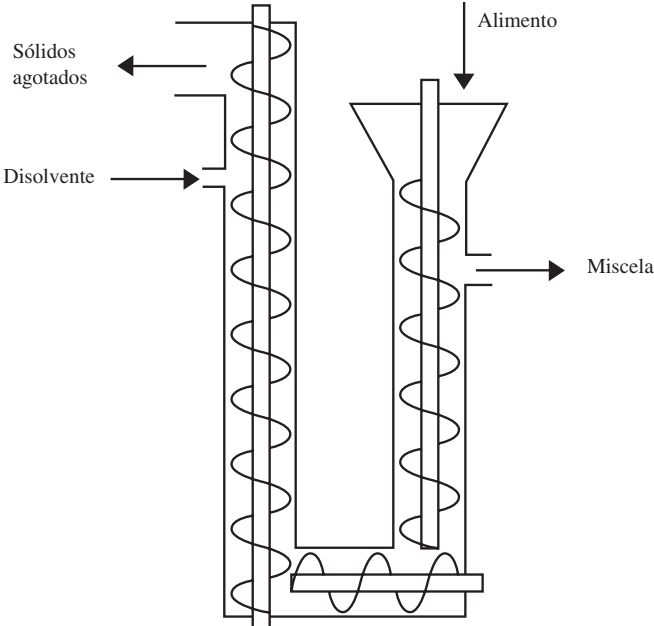


Figura 22.12. Extractor Hildebrandt (adaptado de McCabe *et al.*, 1991).

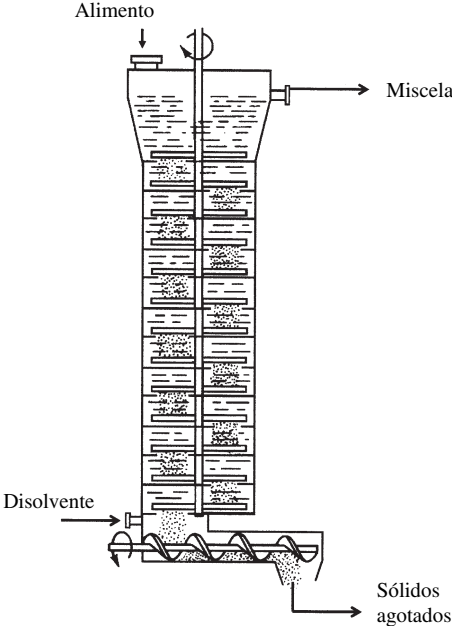


Figura 22.13. Extractor Bonotto (adaptado de Brennan *et al.*, 1980).

forma de cuña y se halla perforado (figura 22.14). Los sólidos son cargados en estos compartimentos en un punto determinado, siendo rociados sucesivamente con miscelas cada vez más diluidas, hasta que en un punto se rocían con disolvente puro. El líquido atraviesa el lecho y se recoge en el fondo, sirviendo la miscela obtenida como disolución extractora del compartimento anterior. Después de ser rociado con el disolvente puro existe una zona de escurrido, y finalmente se descargan los sólidos agotados. Este tipo de extractores se utiliza tanto en la extracción de azúcar como en la de aceite.

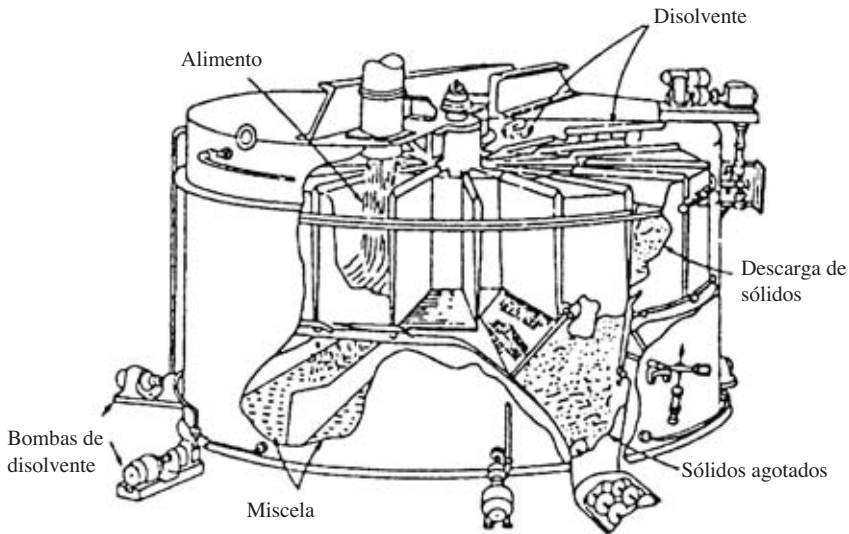


Figura 22.14. *Extractor Rotocel* (adaptado de Vian y Ocón, 1967).

22.4.4. Otros tipos de extractores

Además de los extractores descritos, existen toda una serie que son utilizados en la industria de extracción de aceite, que podrían estar parcialmente incluidos en algunos de los grupos anteriores. Se exponen en este apartado algunos de los más característicos.

Extractor de columna vertical de inmersión. Consta de una columna vertical (figura 22.15), en la que el sólido es alimentado por la parte superior, existiendo en el eje un tornillo sin fin de forma cónica, que facilita un movimiento ascendente y descendente del material sólido. El sólido que llega al fondo de esta columna es llevado a otra segunda mediante un tornillo sin fin. En esta segunda columna el sólido es extraído mediante un elevador de cangilones perforados. El disolvente es alimentado en la parte superior de esta columna, escurriendo a través de las cestas e inundando la primera columna. La zona alta de esta columna tiene forma troncocónica y es más ancha que el resto del cuerpo, lo que facilita que la disolución quede clarificada y pueda extraerse. Los sólidos agotados son eliminados en la parte superior de la segunda columna.

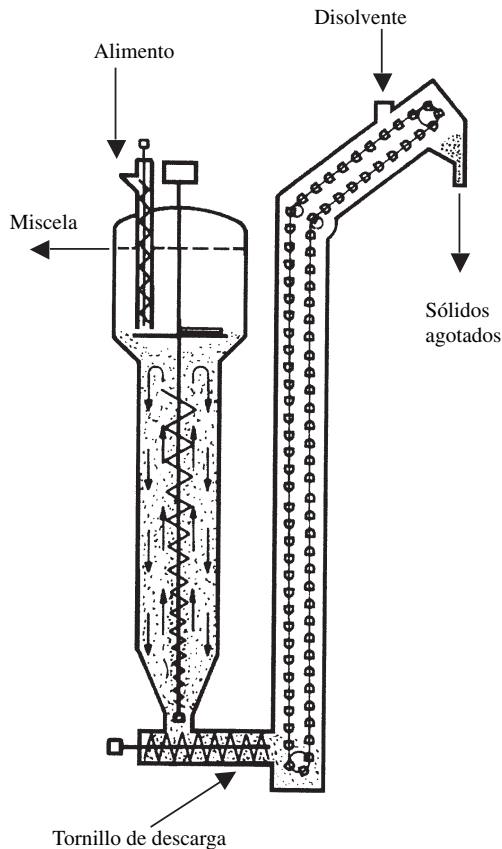


Figura 22.15. *Extractor de columna vertical de inmersión* (adaptado de Bernardini, 1981).

Extractor C.M.B. de percolación. Es un extractor de lecho móvil y percolación. Consiste en una cámara metálica que contiene una cadena de cestas perforadas (figura 22.16). En estas cestas va colocado el sólido y sobre él va rociándose disolución intermedia que proviene del fondo de la cámara. Esta disolución escurre a través del sólido, mientras que las cestas van avanzando. Hacia el final de la cadena se alimenta disolvente fresco, y una vez escurrido a través del sólido, y agotado éste, la cesta se descarga. A continuación esta cesta vacía es llenada con sólido nuevo, empezando otra vez la cadena de extracción. La miscela final se obtiene en el fondo de la cámara, y sobre la sección correspondiente a la zona posterior de la alimentación del sólido. Puede observarse que en este proceso los flujos de sólido y disolvente circulan en contracorriente, gracias a una serie de bombas que llevan la miscela a las diferentes cestas. Este extractor es muy utilizado por su fácil manejo y simplicidad. Análogo a éste, pero en el que el sólido discurre a través de una cinta transportadora, es el extractor De Smet.

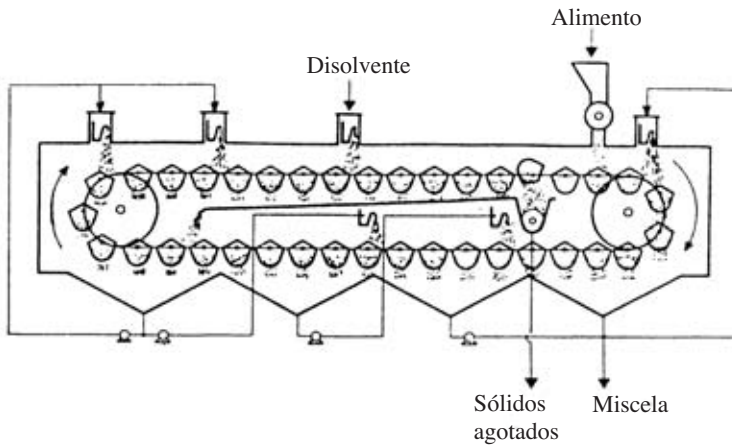


Figura 22.16. *Extractor de percolación* (adaptado de Bernardini, 1981).

Extractor Soxhlet. Es un aparato que suele utilizarse en experimentos de laboratorio, aunque en instalaciones de pequeña capacidad u otros de funcionamiento análogo también se aplica. En la figura 22.17 se representa este extractor, pudiéndose observar que el disolvente extractor se hace hervir en una caldera, y sus vapores condensados son enviados a un recipiente que contiene el sólido con el soluto a extraer. El extracto es enviado de nuevo a la caldera, donde vuelven a producirse vapores de disolvente que se utilizan en nuevas extracciones. De este modo, en la caldera se va acumulando el soluto, mientras que el sólido se va agotando de él.

Además de estos extractores existen otros que funcionan por inmersión o percolación, y se hallan descritos en la bibliografía, tal es el caso de los extractores Anderson, Lurgi, etc. También cabría resaltar un tipo que combina dos extractores en serie, de los cuales el primero trabaja por percolación y el segundo por inmersión.

22.5. Aplicaciones a la industria alimentaria

La extracción sólido-líquido es una operación unitaria que en la industria alimentaria tiene diversas aplicaciones. En este apartado se realizará una breve exposición de algunos de los procesos que utilizan la extracción con disolventes como base fundamental.

Extracción de azúcar de remolacha. Puede obtenerse azúcar a partir de remolacha azucarera, utilizando agua como líquido extractor. Los extractores utilizados son, generalmente, una batería de extracción, o bien extractores Hildebrandt o Bonotto.

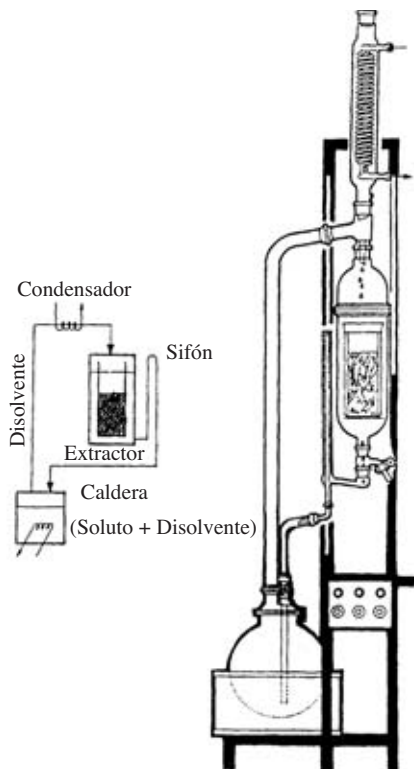


Figura 22.17. Extractor Soxhlet.

Para facilitar la operación de extracción, las remolachas se cortan en largas rebanadas en forma de V, que reciben el nombre de *cosetas*. Estas forman el lecho, quedando inmersas en el agua. Puede ocurrir que el líquido tenga dificultad en pasar a su través, por lo que es conveniente introducir el agua a presión. Debe cuidarse que la estructura celular no quede dañada, ya que en el proceso de extracción se podrían extraer, además del azúcar, otros compuestos no deseados. Asimismo, también deberá controlarse la temperatura de trabajo, pues si es demasiado elevada se pueden llegar a extraer compuestos no azucarados, que resultan indeseables. En general, el extracto final obtenido contiene aproximadamente un 15% de sólidos disueltos. Para la obtención final de azúcar, este extracto debe purificarse por un proceso de sedimentación y filtración, posterior concentración en evaporadores que trabajan a vacío, para luego seguir con la cristalización del azúcar, separando los cristales por centrifugación.

Elaboración de café instantáneo. En la producción de café instantáneo, el proceso de extracción es una de las etapas más importantes. La extracción suele realizarse sobre granos tostados y triturados, utilizando agua como fluido extractor, obteniéndose una solución final que contiene alrededor de 25-30% de sólidos. Esta

solución es llevada a un atomizador, donde se obtienen como producto final granos de café instantáneo. Esta extracción se realiza en aparatos especialmente diseñados para tal fin; siendo extractores que trabajan en contracorriente, en sistemas de contacto múltiple y lecho fijo. El sólido recién cargado se extrae con agua a 100 °C, y a medida que se avanza el proceso se va aumentando la temperatura del agua. Una temperatura elevada favorece la hidrólisis de hidratos de carbono insolubles, que de este modo se solubilizan, aumentándose el contenido de sólidos solubles en la solución final. Sin embargo, una temperatura demasiado elevada puede llegar a hidrolizar sustancias que pueden conferir al extracto aromas y sabores indeseables.

Elaboración de té instantáneo. Una de las etapas iniciales en la obtención de té instantáneo es la extracción con agua caliente. Esta operación se lleva a cabo en extractores de lecho fijo, utilizando agua a 70 °C en las primeras etapas, llegando hasta 90 °C en las últimas. Para facilitar la operación se realiza el vacío en el extractor, llenándose a continuación con hojas deshidratadas y estableciendo de nuevo la presión mediante una corriente de dióxido de carbono. La solución final de extracto contiene una concentración de entre un 2,5 y un 5% de sólidos, que es muy baja; por ello, hasta la obtención final del producto, se realiza una destilación que elimina los productos volátiles. La solución residual, exenta de aromas, se concentra mediante evaporación a vacío, obteniendo una solución que contiene de 25 a 50% en sólidos solubles. A esta solución concentrada se le añade la fracción aromática obtenida en la etapa de destilación, obteniendo a continuación el té instantáneo en una etapa de secado por liofilización o atomización. La etapa inicial de extracción puede realizarse, además de con extractores de lecho fijo, en otros de lecho móvil análogos a los tipo Rotocel, efectuándose la extracción en contracorriente y de forma continua.

Extracción de aceites vegetales. El proceso de extracción con disolvente es muy importante en la obtención de aceites vegetales, pudiéndose utilizar como alternativa o en combinación con la operación de estrujamiento. Después de la etapa de extracción, la corriente de extracto debe filtrarse para eliminar los sólidos en suspensión. El filtrado que contiene aceite, disolvente y el agua que haya podido arrastrar, es llevado a una primera torre de evaporación, con el objeto de eliminar el disolvente, que puede volver a reciclarse. La mezcla de aceite, agua y algo de disolvente residual se lleva a una torre de destilación por arrastre de vapor, en dónde se obtiene aceite ausente de disolvente como residuo, mientras que los vapores son condensados y llevados a un separador, lográndose eliminar el agua y recuperar el disolvente que contenía.

Por otra parte, los sólidos agotados, denominados copos, junto con los provenientes del filtrado del extracto, contienen disolvente retenido, y como en la mayoría de los casos se va a utilizar como harina para alimentación de ganado, es imprescindible eliminar el disolvente que arrastran. La harina es llevada a continuación a un secador donde son eliminadas las últimas trazas de disolvente. Este proceso descrito, o similares, son utilizados en la obtención de aceite a partir de productos vegetales. Estos productos suelen ser semillas oleaginosas o frutos secos, siendo los más usuales aceituna, semillas de algodón, cacahuete, colza, copra,

cáñamo, girasol, lino, palma, ricino, sésamo, cártamo, soja y tung entre otras. También puede obtenerse aceite a partir de germen de maíz, semilla de tomate, orujo de aceituna, granilla o pepita de uva, etc.

Uno de los factores que influyen en las operaciones de extracción es el tipo de disolvente a utilizar. De la gran variedad existente, los más utilizados son: hexano, heptano, ciclohexano, benceno, tricloroetileno y sulfuro de carbono. De todos ellos, el sulfuro de carbono y tricloroetileno son más densos que el agua, con lo que pueden conservarse bajo una capa de agua sin producir vapores, que podrían llegar a ser peligrosos; pues el primero de ellos es muy inflamable y el segundo resulta tóxico. A pesar de que el tricloroetileno posee un poder extractor elevado, su uso es muy restringido, ya que si en la harina agotada estuviese presente, resultaría muy peligroso por su toxicidad, ya que esta harina suele utilizarse como pienso para ganado. En algunos países el tri y dicloroetileno no están autorizados en la industria alimentaria, por sus posibles propiedades cancerígenas. La máxima concentración admisible en el ambiente, para que no existan consecuencias patológicas para las personas, se estima en menos de 100 ppm. El tricloroetileno en contacto con el agua a altas temperaturas se descompone en ácido clorhídrico, que resulta corrosivo para instalaciones de materiales férricos. Por tanto, en las instalaciones que utilicen este disolvente debe llevarse a cabo un adecuado mantenimiento y limpieza periódicas con soluciones alcalinas, para eliminar los posibles restos de ácido. El sulfuro de carbono también presenta problemas de toxicidad de sus vapores; además, al igual que el tricloroetileno, es corrosivo. Por todo ello, y a pesar de que el benceno, heptano y fracciones análogas, presentan un menor poder de extracción, se prefieren a los anteriores; aunque últimamente se ha comprobado que el benceno también presenta graves problemas para la salud. Además de estos disolventes, pueden utilizarse éter de petróleo, acetona, alcohol etílico e isopropílico, entre otros muchos. Así, el éter se utiliza en la extracción de manteca de cacao, mientras que la acetona es utilizada para extraer el gospol de semilla de algodón.

Uno de los subproductos de la industria arrocera es el denominado salvado de arroz, que posee un cierto contenido en materia grasa, que puede obtenerse gracias a un proceso de extracción con disolvente. Debido a que este producto se presenta en forma de partículas pequeñas muy poco permeables a los disolventes, los equipos utilizados en la extracción del aceite deben ser extractores especiales del tipo de inmersión o que trabajen a presión. Además, la instalación debe poseer los filtros adecuados para separar la mezcla de las pequeñas partículas sólidas. Esta misma problemática se presenta con la harina de germen de maíz, debiéndose procesar de forma análoga. Otro subproducto que puede tener importancia, desde el punto de vista de un aprovechamiento posterior, es el residuo contenido en la producción de tomate concentrado. Este residuo contiene, esencialmente, la piel y las semillas del tomate. Del primero se puede llegar a obtener harina para alimentación animal, mientras que de las semillas es posible obtener aceite y harina, mediante un procedimiento de extracción con disolvente. Previo a la etapa de extracción, las semillas reciben un tratamiento de calentamiento, trituración y laminado. Los productos obtenidos con la extracción son aceite bruto y harina agotada. El

primero sirve de materia prima en la elaboración de productos alimenticios, mientras que la harina posee un alto contenido proteico y se usa en la formulación de piensos compuestos.

Un tipo de aceite obtenido por el método de extracción con disolvente es el proveniente de granilla o pepita de uva. La dificultad que puede presentar esta extracción es que el aceite se encuentra fuertemente aprisionado en las células que lo contienen, además de poseer una constitución leñosa. Es por ello que estas pepitas deben tratarse previamente con calentamiento y humidificación y posterior laminado. Una vez obtenidas las partículas laminadas, están listas para la extracción. Para un mejor rendimiento en este proceso se realiza una doble extracción: en una primera fase se utiliza un extractor de percolación, para pasar a continuación a uno de inmersión.

Procesos de extracción en pescados. Además de las anteriormente reseñadas, la extracción con disolventes tiene otras aplicaciones, entre las que cabe resaltar la obtención de aceite a partir de pescado entero o de determinados órganos como el hígado.

No toda la producción de pescado es apta para el consumo directo humano, sino que existen grandes cantidades dedicadas a la producción de conservas y también a la obtención de aceite y harinas. En la obtención de aceite y harinas el pescado recibe toda una serie de tratamientos, entre los que se incluye una etapa de extracción con disolventes. Inicialmente el pescado es sometido a cocción, cuya finalidad es la de coagular las proteínas y esterilizar la materia prima. A continuación se pasa a una etapa de prensado, en la que se obtiene una torta y una disolución, que contiene agua y aceite. Esta disolución es centrifugada, con el objeto de separar el agua del aceite. La torta obtenida en la etapa de prensado es secada, con lo que se produce una harina, que todavía contiene componentes grasos; los cuales pueden ser extraídos con un disolvente. De esta forma se obtiene una harina con un alto contenido proteico y una corriente de aceite-disolvente, de la que es posible separar una nueva fracción de aceite.

El equipo utilizado en la extracción debe ser del tipo inmersión, ya que la torta presenta dificultad para que el disolvente percole a su través. Además, debe disponer del equipo apropiado de filtración, para lograr una buena separación de la miscela y las partículas sólidas.

Son varias las especies marinas a las que se da un tratamiento de este tipo, aunque cabe resaltar las sardinas, anchoas, arenques, etc., de las que se extrae aceite; así como el conocido aceite de hígado de bacalao de alto contenido vitamínico.

Otras aplicaciones. Además de estos procesos aplicados a la obtención de aceites, existen otros muchos, cuya finalidad es conseguir productos acabados muy apreciados. Uno de estos productos es la fracción péctica de los frutos, utilizada en la confección de confituras y mermeladas. En la industria de zumo de frutas, uno de los subproductos es la pulpa agotada. Esta pulpa contiene pectinas, que pueden extraerse con una solución ácida y posterior precipitación con alcohol.

El pimentón es un condimento culinario, muy utilizado como colorante en diferentes productos de alimentación. Mediante extracción con hexano es posible ex-

traer sus pigmentos, obteniendo un colorante llamado oleorresina del pimentón, que se compone básicamente del aceite de las semillas del pimiento y de los colorantes del pimentón. Esta oleorresina presenta grandes ventajas frente al pimentón, ya que posee el mismo poder colorante, pero su volumen es entre un 5 a 10 % del volumen del pimentón, lo que permite una más precisa dosificación y un indudable ahorro en su transporte. La extracción suele realizarse en extractores continuos tipo De Smet, obteniendo una miscela que se concentra en una etapa de evaporación y posterior destilación por arrastre con vapor, hasta obtener un producto con un 99,25% en oleorresina. Este producto contiene mucílagos o gomas, que se eliminan por centrifugación. La oleorresina desgomada se lleva a un secador para eliminar el disolvente, obteniendo un producto final que no contiene más de 10 ppm de hexano.

Con procesos de extracción sólido-líquido también es posible obtener diferentes licores alcohólicos, si se utiliza como disolvente extractor alcohol etílico, y como sólido sustancias tales como naranjas, café, anís, así como una gran cantidad de hierbas medicinales. También se aplican estos procesos de extracción en la elaboración de diferentes colorantes y pigmentos que posteriormente son utilizados en la industria alimentaria.

PROBLEMAS

Problema 22.1

Se desea extraer el aceite contenido en una harina, cuya composición es 10% aceite y el resto materia inerte. Para ello, 500 kg de harina y 3.000 kg de disolvente orgánico se alimentan a un sistema sencillo de una sola etapa. Si la cantidad de disolución retenida por los sólidos es de 0,8 kg/kg de inerte, calcular: a) Las composiciones de extracto y refinado. b) Las cantidades de extracto y refinado. c) El porcentaje de aceite extraído.

La curva de retención se obtiene a partir de la ecuación:

$$X_D = \frac{r}{r+1} - X_S = 0,444 - X_S$$

a) Para resolver el problema es necesario determinar dónde se halla el punto M , para lo que debe realizarse un balance de soluto:

$$X_{SM} = \frac{R_A X_{SRA} + D Y_{SD}}{R_A + D} = \frac{(500)(0,1) + (3.000)(0)}{(500) + (3.000)} = 0,014$$

$$X_{DM} = \frac{R_A X_{DRA} + D Y_{DD}}{R_A + D} = \frac{(500)(0) + (3.000)(1)}{(500) + (3.000)} = 0,857$$

lo que permite situar el punto M en el diagrama triangular. Este punto pertenece a las rectas que pasan por $R_A D$ y $R_1 E_1$. Como el refinado y extracto que abandonan la etapa están en equilibrio, se traza una recta de reparto que pasa por el vértice I y el punto M , se obtendrá el refinado R_1 sobre la recta de retención, y el extracto E_1 sobre la hipotenusa del diagrama triangular:

- Refinado R_1 : $X_S = 0,007$ $X_D = 0,437$
- Extracto E_1 : $Y_S = 0,016$ $Y_D = 0,984$

Como la retención de la disolución por el sólido inerte es constante, la composición del extracto y solución retenida puede calcularse a partir de la expresión:

$$Y_{SE1} = \frac{R_A X_{SRA}}{R_A X_{SRA} + D} = \frac{(500)(0,1)}{(500)(0,1) + (3.000)} = 0,0164$$

b) Las cantidades de extracto y refinado se obtienen al realizar los balances global y de soluto:

$$(500) + (3.000) = R_1 + E_1$$

$$(500)(0,1) + (3.000)(0) = R_1(0,007) + E_1(0,016)$$

obteniendo: $R_1 = 813,2$ kg

$E_1 = 2.686,8$ kg

c) La cantidad de aceite extraído es el que ha pasado a la corriente de refinado:

$$E_1 Y_{SE1} = (2.686,8) (0,016) = 44,1 \text{ kg aceite extraído}$$

Inicialmente en el alimento la cantidad de aceite es: $R_A X_{SRA} = 50 \text{ kg aceite}$.

Por tanto, el porcentaje de aceite extraído, con respecto al que había en el alimento es:

$$\frac{E_1 Y_{SE1}}{R_A X_{SRA}} 100 = \frac{44,1 \text{ kg aceite}}{50 \text{ kg aceite}} \times 100 = 88\%$$

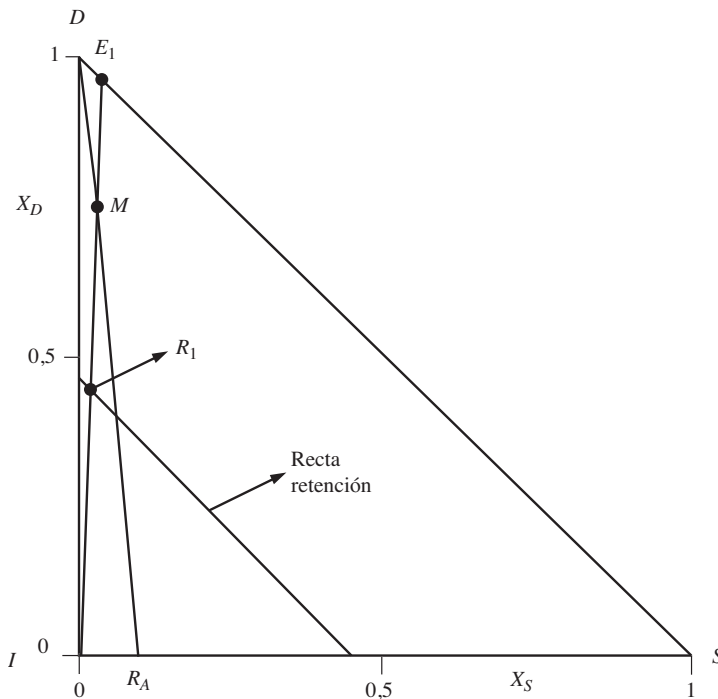


Figura 22.P1.

Problema 22.2

Una harina de pescado que contiene un 38% en peso de aceite es sometida a un proceso de extracción con éter, utilizando un extractor de tres etapas operando en corriente directa. Experimentalmente se ha encontrado que la disolución retenida por el sólido inerte es función de la composición de la disolución, según la expresión:

$$r = 0,6 + 0,3 y_s + 7 y_s^2 \text{ (kg disolución retenida/kg inerte)}$$

en la que y_s es la fracción en peso de soluto en la solución retenida.

Al sistema de extracción se alimentan 1.000 kg/h de la harina de pescado, empleando 750 kg de éter en cada etapa. Calcular: a) La curva de retención. b) La composición global del extracto. c) La composición del refinado que abandona la tercera etapa. d) La cantidad de aceite recuperado.

a) A partir de la ecuación dada en el enunciado, es posible determinar la curva de retención [ecs. 22.1 y 22.2]:

$$X_S = \frac{y_S}{1 + 1/r} \qquad X_D = \frac{1 - y_S}{1 + 1/r}$$

Al dar valores a y_S se obtienen sus respectivos valores de retención r , y con ambos se determinan los datos de la curva de retención, que se dan en la tabla 22.P2:

Tabla 22.P2. Datos de retención

y_S $\left(\frac{\text{kg soluto}}{\text{kg disolución}}\right)$	r $\left(\frac{\text{kg disol. retenida}}{\text{kg inerte}}\right)$	X_S $\left(\frac{\text{kg soluto}}{\text{kg totales}}\right)$	X_D $\left(\frac{\text{kg disolvente}}{\text{kg totales}}\right)$
0	0,6	0	0,375
0,1	0,7	0,041	0,371
0,2	0,94	0,097	0,388
0,3	1,32	0,171	0,398
0,4	1,84	0,259	0,389
0,5	2,50	0,357	0,357
0,6	3,30	0,461	0,307
0,7	4,24	0,566	0,243
0,8	5,32	0,673	0,168
0,9	6,54	0,781	0,087
1,0	7,9	0,888	0

Los datos X_S - X_D se representan en el diagrama triangular, obteniendo la curva de retención.

Según el enunciado del problema:

$$D_1 = D_2 = D_3 = 750 \text{ kg con } Y_{SD} = 0 \qquad Y_{DD} = 1$$

$$R_A = 1.000 \text{ kg con } X_{SRA} = 0,38 \qquad X_{IRA} = 0,62$$

El problema debe resolverse etapa a etapa. Para ello, se opera del siguiente modo: se determina el punto M_i de cada etapa, en la recta que une el alimento con el disolvente, trazando a continuación la recta de reparto que pasa por el vértice I y el punto M_i , obteniendo la composición de refinado R_i en la curva de retención, mientras que la de extracto E_i se obtiene sobre la hipotenusa.

$$\text{Abscisa de los puntos } M_i: X_{SMi} = \frac{R_{i-1} X_{SRI-1} + D_i Y_{SDi}}{R_{i-1} + D_i}$$

Primera etapa:

El punto M_1 tiene de abcisa: $X_{SM1} = 0,217$ y se sitúa en la recta $\overline{R_A D_1}$. Al trazar la recta de reparto que pasa por M_1 se obtienen las composiciones del extracto y refinado que abandonan la primera etapa:

- Refinado R_1 : $X_{SR1} = 0,21$ $X_{DR1} = 0,39$ $X_{IR1} = 0,40$
- Extracto E_1 : $Y_{SE1} = 0,34$ $Y_{DE1} = 0,66$

Las cantidades de extracto y refinado se obtienen a partir de los balances global y de soluto en esta etapa:

$$(1.000) + (750) = R_1 + E_1$$

$$(1.000) (0,38) + (750) (0) = R_1 (0,21) + E_1 (0,34)$$

obteniendo: $E_1 = 96,2$ kg/h $R_1 = 1.653,8$ kg/h

Segunda etapa:

El punto M_2 tiene de abcisa: $X_{SM2} = 0,144$ y se sitúa en la recta $\overline{R_1 D_2}$. Al trazar la recta de reparto que pasa por M_2 se obtienen las composiciones del extracto y refinado que abandonan la segunda etapa:

- Refinado R_2 : $X_{SR2} = 0,10$ $X_{DR2} = 0,38$ $X_{IR2} = 0,52$
- Extracto E_2 : $Y_{SE2} = 0,20$ $Y_{DE2} = 0,80$

Las cantidades de extracto y refinado se obtienen a partir de los balances global y de soluto en esta etapa:

$$(1.653,8) + (750) = R_2 + E_2$$

$$(1.653,8) (0,21) + (750) (0) = R_2 (0,10) + E_2 (0,20)$$

obteniendo: $E_2 = 1.069,2$ kg/h $R_2 = 1.334,6$ kg/h

Tercera etapa:

El punto M_3 tiene de abcisa: $X_{SM3} = 0,064$ y se sitúa en la recta $\overline{R_2 D_3}$. Al trazar la recta de reparto que pasa por M_3 se obtienen las composiciones del extracto y refinado que abandonan la tercera etapa:

- Refinado R_3 : $X_{SR3} = 0,04$ $X_{DR3} = 0,37$ $X_{IR3} = 0,59$
- Extracto E_3 : $Y_{SE3} = 0,10$ $Y_{DE3} = 0,90$

Las cantidades de extracto y refinado se obtienen a partir de los balances global y de soluto en esta etapa:

$$(1.334,6) + (750) = R_3 + E_3$$

$$(1.334,6) (0,10) + (750) (0) = R_3 (0,04) + E_3 (0,10)$$

obteniendo: $E_3 = 834,6$ kg/h $R_3 = 1.250$ kg/h

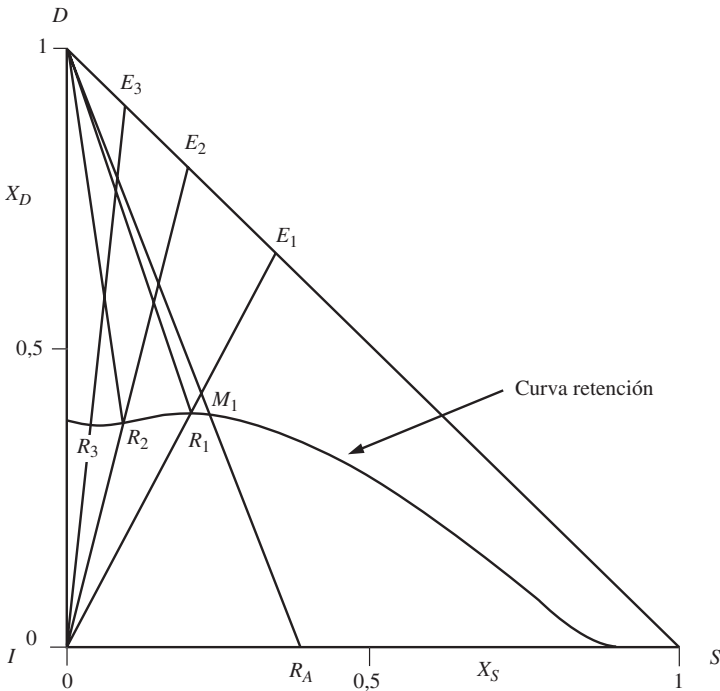


Figura 22.P2.

b) La composición del extracto final será la media ponderada de la de los extractos de cada etapa:

$$Y_{SE} = \frac{E_1 Y_{SE1} + E_2 Y_{SE2} + E_3 Y_{SE3}}{E_1 + E_2 + E_3} = 0,165$$

$$Y_{DE} = 0,835$$

c) La composición del refinado final R_3 :

$$X_{SR3} = 0,04 \quad X_{DR3} = 0,37 \quad X_{IR3} = 0,59$$

d) El aceite recuperado es el que ha pasado al refinado: $E \cdot Y_{SE}$

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = 2.000 \text{ kg/h}$$

Aceite recuperado: $E Y_{SE} = (2.000) (0,165) = 330 \text{ kg aceite/h}$

$$\text{Porcentaje recuperado: } \frac{E Y_{SE}}{R_A X_{SRA}} = 100 = \frac{(330)}{(380)} \times 100 = 86,84\%$$

Problema 22.3

El aceite de bacalao se obtiene por extracción con disolvente orgánico a partir de hígados triturados de este pescado. Una muestra que contiene 0,335 kg de aceite por cada kg de hígado agotado es alimentada a un extractor múltiple que opera en contracorriente, y en el que el disolvente orgánico utilizado es puro. Se desea recuperar el 90% del aceite en la corriente de extracto final, cuya composición es 60% en peso de aceite. Si la retención de disolución es de 2 kg por cada 3,2 kg de sólidos insolubles, calcular el número de etapas ideales requeridas para realizar la extracción deseada.

Como base de cálculo se va a suponer que en el extractor se introducen 100 kg de alimento: $R_A = 100$ kg.

La composición de este alimento es:

$$X_{SRA} = \frac{0,335 \text{ kg soluto}}{(1 + 0,335) \text{ kg totales}} = 0,251$$

$$X_{DRA} = 0 \quad X_{IRA} = 0,749$$

Soluto en el alimento: $R_A X_{SRA} = 25,1$ kg aceite.

Inerte en el alimento: $R_A X_{IRA} = 74,9$ kg inerte.

Según los datos de retención dados en el enunciado:

$$r = \frac{2 \text{ kg disolución}}{3,2 \text{ kg inerte}} = 0,625 \frac{\text{kg disolución}}{\text{kg inerte}}$$

La cantidad de aceite en el refinado final es el 10% del que contenía el alimento:

$$R_n X_{SRn} = 0,1 R_A X_{SRA} = 2,51 \text{ kg de aceite}$$

Los kg de disolución retenidos por el refinado se obtienen a partir de la retención:

$$0,625 \frac{\text{kg disolución}}{\text{kg inerte}} 74,9 \text{ kg inerte} = 46,81 \text{ kg disolución}$$

por lo que la cantidad de disolvente que contiene el refinado final será:

$$(46,81 - 2,51) \text{ kg disolvente} = 44,3 \text{ kg disolvente}$$

La cantidad total del refinado final es la suma del contenido en soluto, disolvente e inerte:

$$R_n = (2,51 + 44,3 + 74,9) = 121,85 \text{ kg}$$

La composición de este refinado será:

$$X_{SRn} = \frac{2,51 \text{ kg soluto}}{121,85 \text{ kg totales}} = 0,021$$

$$X_{DRn} = \frac{44,3 \text{ kg disolvente}}{121,85 \text{ kg totales}} = 0,364$$

$$X_{IRn} = \frac{74,9 \text{ kg inerte}}{121,85 \text{ kg totales}} = 0,615$$

La cantidad de extracto se obtiene al igualar el soluto que existe en esta corriente con el recuperado del alimento:

$$E_1 Y_{SE1} = 0,9 R_A X_{SRA}$$

$$E_1 (0,6) = 0,9 (100) (0,251) \quad E_1 = 37,65 \text{ kg}$$

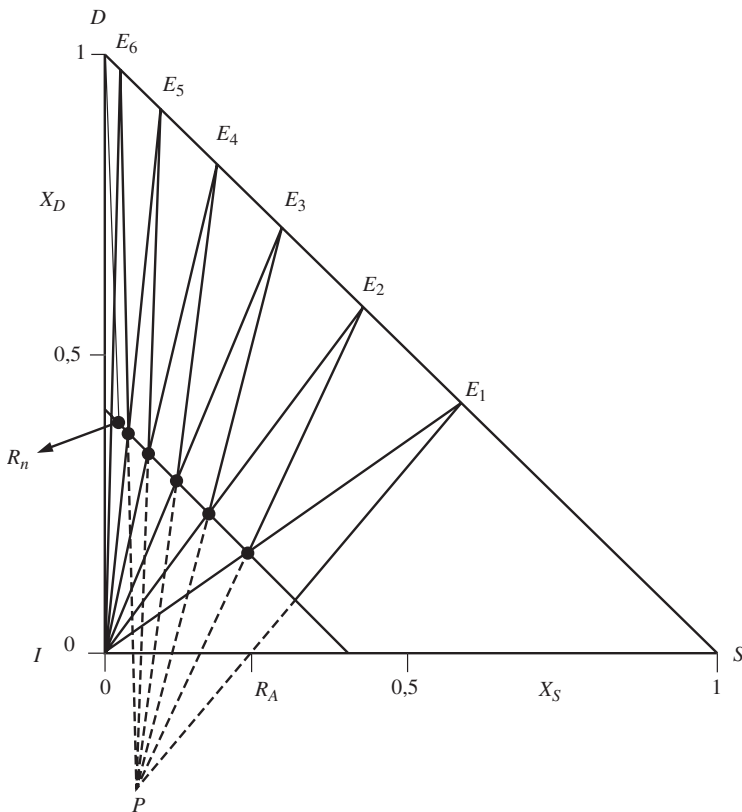


Figura 22.P3.

Del balance global se obtiene la cantidad de disolvente que se debe alimentar al extractor: $E_{n+1} = R_n + E_1 - R_A = 59,5$ kg.

Si se desea calcular el número de etapas necesarias para llevar a cabo esta extracción se debe situar el polo P en el diagrama triangular y construir además la curva de retención.

Curva retención: Como la retención de disolución es constante, en realidad se trata de una recta, cuya ecuación es: $X_D = 0,385 - X_S$.

El polo P se sitúa con sus coordenadas que se obtienen de un balance entre las secciones de entrada y salida del extractor:

$$X_{SP} = \frac{R_A X_{SRA} - E_1 Y_{SE1}}{R_A - E_1} = \frac{(100)(0,251) - (37,6)(0,6)}{100 - 37,65} = 0,04$$

$$X_{DP} = \frac{R_A X_{DRA} - E_1 Y_{DE1}}{R_A - E_1} = \frac{(100)(0) - (37,6)(0,4)}{100 - 37,65} = -0,242$$

con lo que es posible situar el polo P .

Gráficamente, se obtiene que el número de etapas necesarias para realizar la extracción indicada es: $N_{ET} = 6$.

Problema 22.4

En la obtención de café soluble, los sólidos solubles se extraen con agua en una etapa de extracción sólido-líquido. Esta extracción se realiza en un sistema de múltiples etapas, que opera en contracorriente, donde son tratados 3.000 kg/h de café tostado y molido. El café tostado contiene un 24% en peso de sólidos solubles, mientras que su contenido de humedad es despreciable. El 5% de los sólidos solubles contenidos en el alimento aparecen en la corriente de refinado final, mientras que la corriente de extracto contiene un 35% en peso de dichos sólidos.

De experimentos previos en el laboratorio se ha obtenido que la cantidad de solución retenida por los sólidos inertes es de 1,6 kg solución/kg inerte. Calcular: a) La cantidad de agua necesaria para llevar a cabo esta extracción. b) El caudal de solución extraída. c) El número de etapas necesarias si la eficacia global del sistema es del 75%.

a) En el alimento, las cantidades de soluto e inerte son:

- Soluto: $R_A X_{SRA} = (3.000)(0,24) = 720$ kg soluto.
- Inerte: $R_A X_{IRA} = (3.000)(0,76) = 2.280$ kg inerte.

Como el 5% del soluto que contiene el alimento queda en la corriente final de refinado, la cantidad de soluto en esta corriente será:

$$R_n X_{SRn} = 0,05 R_A X_{SRA} = (0,05)(3.000)(0,24) = 36 \text{ kg soluto}$$

Al realizar un balance de soluto a todo el sistema se tiene:

$$(3.000) (0,24) + 0 = (36) + E_1 (0,35)$$

de la que se obtiene la corriente final de extracto: $E_1 = 1.954,3$ kg.

Como el refinado retiene 1,6 kg de disolución/kg de inerte, en el refinado final R_n se tiene:

$$2.280 \text{ kg inerte} \frac{1,6 \text{ kg disolución}}{\text{kg inerte}} = 3.648 \text{ kg disolución retenidos}$$

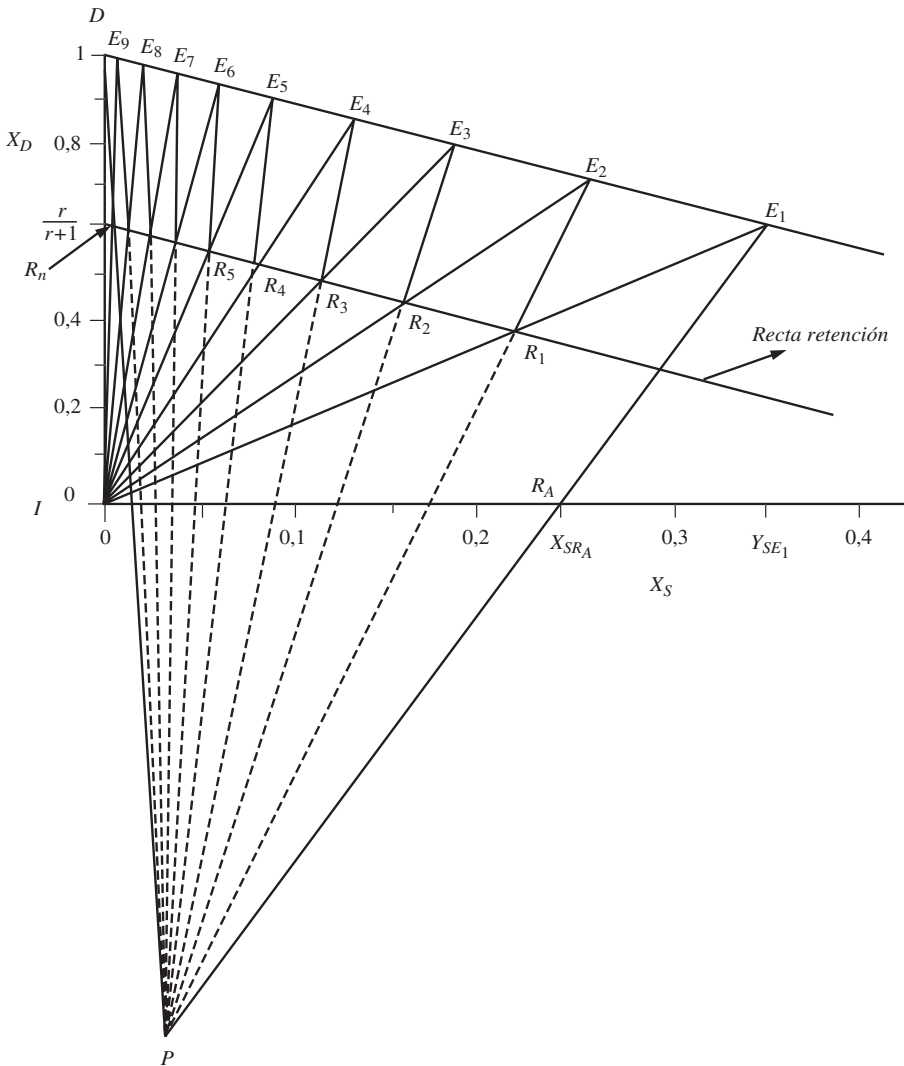


Figura 22.P4.

814 Operaciones Unitarias en la Ingeniería de Alimentos

siendo la cantidad total de refinado final:

$$R_n = 2.280 \text{ kg inerte} + 3.648 \text{ kg disolución} = 5.928 \text{ kg totales}$$

Del balance global:

$$E_{n+1} = (5.928) + (1.954,3) - (3.000) = 4.882,3 \text{ kg agua fresca}$$

La retención de disolución r es constante, por lo que la curva de retención en este caso, es una recta de ecuación:

$$X_D = 0,615 - X_S$$

El polo P se obtiene de los balances en cada sección:

$$X_{SP} = \frac{R_A X_{SRA} - E_1 Y_{SE1}}{R_A - E_1} = \frac{(3.000) (0,24) - (1.954,3) (0,35)}{3.000 - 1.954,3} = 0,034$$

$$X_{DP} = \frac{R_A X_{DRA} - E_1 Y_{DE1}}{R_A - E_1} = \frac{(3.000) (0) - (1.954,3) (0,65)}{3.000 - 1.954,3} = -1,215$$

Estas coordenadas permiten situar el polo P en el diagrama triangular, y con él solucionar el problema de cálculo del número de etapas, obteniendo: $N_{ET} = 9$.

Como la eficacia es del 75%, el número de etapas reales será:

$$N_{ER} = \frac{(9)}{(0,75)} = 12 \text{ etapas}$$

Adsorción. 23

Intercambio iónico

23.1. Introducción

La adsorción y el intercambio iónico son operaciones unitarias de transferencia de materia en las que un soluto contenido en una fase fluida se transfiere hacia una fase sólida, bien por retención en su superficie o por reacción con el sólido.

23.1.1. Adsorción

En los procesos de adsorción, al soluto retenido se le denomina **adsorbato** y el sólido sobre el que se retiene es el **adsorbente** o simplemente **sorbente**. Como adsorbentes se utilizan sólidos que presentan una gran superficie de contacto, y en general, suelen ser porosos. Uno de los más utilizados es el carbón activo, aunque existen polímeros sintéticos que también se utilizan en adsorción y son los denominados tamices moleculares.

Las fuerzas con las que el soluto es retenido pueden ser de tres tipos: eléctricas, de Van der Waals y químicas. Las primeras son debidas a atracciones entre un soluto con cierta carga y puntos del adsorbente con carga contraria. Cuando las fuerzas son de Van der Waals, la adsorción se denomina **física**, y suele ser reversible. Sin embargo, la adsorción puede deberse a una reacción química entre el soluto y el adsorbente, denominándose **quimisorción**. Mientras que en la adsorción física el soluto puede ser retenido en cualquier punto de la superficie del sorbente, en la quimisorción el adsorbente presenta puntos activos sobre los cuales es retenido el adsorbato.

La adsorción se utiliza en muchos casos de purificación de fluidos, que contienen contaminantes que les confieren sabores y olores desagradables. Así, en los zumos de naranja, la limonina es un compuesto que le confiere un sabor amargo, y puede ser eliminada por adsorción sobre polímeros. De igual modo, las melaninas y melanoidinas, formadas por los pardeamientos enzimático y no enzimático, pueden ser eliminadas por adsorción sobre carbón activo.

23.1.2. Intercambio iónico

El intercambio iónico consiste en la sustitución de iones de una disolución por otros contenidos en un sólido. El sólido constituye lo que se denominan resinas de intercambio. En realidad al intercambio iónico se le puede considerar como una

adsorción química, en la que el intercambio de iones se realiza sobre puntos definidos de la resina. El tratamiento matemático en el cálculo de las columnas de intercambio es similar al de adsorción. Dependiendo del tipo de iones que pueden intercambiar, las resinas pueden ser aniónicas o catiónicas. Una de las aplicaciones más importantes del intercambio iónico es la desalinización y acondicionamiento de agua.

23.2. Equilibrio de los procesos

23.2.1. Equilibrio de adsorción

Cuando se ponen en contacto un adsorbente sólido con un fluido que contiene un soluto, el sistema evoluciona de tal forma que el soluto se transfiere hacia la superficie del sólido, quedando retenido en él. Este proceso se da hasta que se llega a un equilibrio dinámico entre las dos fases. En este momento la fase fluida posee una concentración de soluto C , mientras que en la fase sólida la cantidad de soluto por unidad de masa de adsorbente es m . Los valores de C y m en el equilibrio dependen de la temperatura, y la función que da la variación de la cantidad de soluto retenida por el adsorbente (m) con la concentración del mismo en la fase fluida (C), recibe el nombre de **isoterma de adsorción**. Este tipo de isothermas puede tener distintas formas, en la figura 23.1 se representan isothermas típicas, que se pueden presentar en distintos tipos de sistemas soluto-sorbente.

La obtención teórica de la isoterma de adsorción puede basarse en consideraciones cinéticas o termodinámicas, siendo más intuitiva la primera de ellas. Ade-

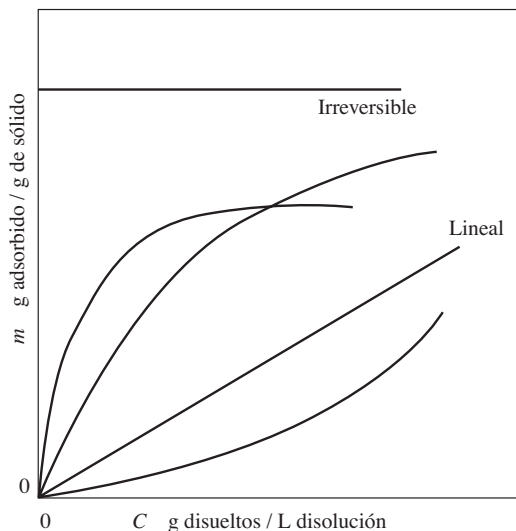
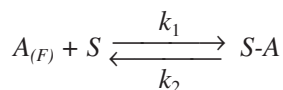


Figura 23.1. Tipos de isothermas de adsorción.

más, depende de si se considera que el soluto es retenido por el adsorbente en una o en varias capas moleculares.

Uno de los casos más sencillos e intuitivos es la adsorción de un único adsorbato en una sola capa molecular. Así, si se supone que el soluto A en fase fluida es adsorbido por el sólido S , según el mecanismo cinético:



la velocidad de adsorción de A vendrá expresada por la ecuación:

$$r_A = k_1 C_A (m_0 - m_A) - k_2 m_A \quad [23.1]$$

siendo: r_A = Velocidad de adsorción de A .

C_A = Concentración de A en la fase fluida.

m_0 = Concentración máxima de A retenido por el adsorbente.

m_A = Concentración de A retenido por el adsorbente.

En el equilibrio de adsorción $r_A = 0$, por lo que:

$$k_1 C_A (m_0 - m_A) = k_2 m_A$$

pudiendo definir la constante de equilibrio de adsorción como:

$$K = \frac{k_1}{k_2} = \frac{m_A}{C_A (m_0 - m_A)} \quad [23.2]$$

de la que se obtiene:

$$\frac{m_A}{m_0} = \frac{K C_A}{1 + K C_A} \quad [23.3]$$

ecuación denominada **isoterma de Langmuir**, y a la que se ajustan bastante bien muchos datos experimentales de diferentes sistemas.

Sin embargo, una de las ecuaciones más utilizadas es la **isoterma de Freundlich**, que es una ecuación empírica de la forma:

$$m_A = K (C_A)^n \quad [23.4]$$

en la que K y n son parámetros cuyos valores son función del tipo de sistema sorbato-sorbente y de la temperatura. La determinación de estos parámetros debe realizarse experimentalmente.

Otra isoterma es la de Brunauer, Emmett y Teller (BET), utilizada para adsorción de un solo soluto en multicapa (Brunauer *et al.*, 1938; Emmet y de Witt, 1941):

$$m_A = \frac{B C_A m_A^1}{(C_A^S - C_A) \left[1 - (B - 1) \frac{C_A}{C_A^S} \right]} \quad [23.5]$$

en la que m_A es la cantidad de soluto adsorbido por unidad de masa de adsorbente para la concentración, C_A , C_A^S es la concentración de saturación del soluto, m_A^1 es la cantidad de soluto adsorbido por unidad de adsorbente que forma una monocapa en la superficie del sólido y B es una constante representativa de la energía de interacción con la superficie.

Para solutos contenidos en una fase gaseosa, la isoterma BET para n capas, se puede expresar según la ecuación:

$$\frac{m_A}{m_0} = \frac{B x}{1-x} \frac{1 - (n+1)x^n + n x^{n+1}}{1 + (B-1)x - B x^{n+1}} \quad [23.6]$$

en la que:
$$x = \frac{P_A}{P_A^0} = \frac{\text{Presión parcial de A}}{\text{Presión de vapor de A puro}}$$

Cuando el número de capas $n = 1$ se obtiene:

$$\frac{m_A}{m_0} = \frac{B x}{1-x} \quad [23.7]$$

que coincide con la isoterma de Langmuir.

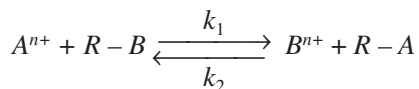
Si el número de capas es elevado, la isoterma BET se transforma en:

$$\frac{m_A}{m_0} = \frac{B x}{(1-x) [1 + (B-1)x]}$$

que para valores bajos de x se transforma en:
$$\frac{m_A}{m_0} = \frac{B x}{1 + (B-1)x}$$

23.2.2. Equilibrio de intercambio iónico

Si se dispone de un fluido que contiene un catión A^{n+} cuya carga es $n+$, y se pone en contacto con una resina que puede intercambiar el catión B^{n+} con la misma carga que A , se puede considerar que se cumple la siguiente reacción de intercambio catiónico:



la velocidad de desaparición del catión A^{n+} será:

$$(-r_A) = k_1 C_A C_{R-B} - k_2 C_B C_{R-A}$$

Cuando se alcanza el equilibrio la velocidad de desaparición de A es nula, por lo que se cumple:

$$K = \frac{k_1}{k_2} = \frac{C_B C_{R-A}}{C_A C_{R-B}}$$

que al sustituir en la ecuación anterior permite expresar la velocidad de desaparición de A en función de la constante de equilibrio K .

Generalmente, la concentración en fase líquida de los iones involucrados en el intercambio iónico suelen expresarse en equivalentes/litro de disolución; mientras que en la fase sólida, la concentración se expresa en equivalentes de iones por unidad de masa de la resina. De esta forma, si C_A^0 es la concentración inicial de A en la solución y C_A la concentración de A en un instante determinado; la concentración C_B de iones de B que se han intercambiado por A , se cumple que $C_B = C_A^0 - C_A$. Para la resina, E_A son los equivalentes de A por unidad de masa de resina seca, y E_M es la **capacidad máxima** de la resina, expresada como equivalentes de A por unidad de masa de resina seca, que puede intercambiar del ión A . La concentración de B en la resina será:

$$E_B = E_M - E_A$$

Por tanto, en el equilibrio se cumple:

$$K = \frac{(C_A^0 - C_A) E_A}{C_A (E_M - E_A)} \quad [23.8]$$

Si se definen las fracciones equivalentes de A en las fases líquida y de resina como:

- Fase líquida $Y = \frac{C_A}{C_A^0}$
- Fase resina $X = \frac{E_A}{E_M}$

La constante de equilibrio se expresa como:

$$K = \frac{(1 - Y) X}{Y (1 - X)} \quad [23.9]$$

esta constante de equilibrio recibe el nombre de **factor de separación**.

23.3. Cinética de los procesos

23.3.1. Cinética de adsorción

En todo proceso de adsorción pueden considerarse tres etapas de transferencia del soluto.

a) Transferencia externa

El soluto en fase fluida, con una concentración C , se transfiere hasta la interfase fluido-sólido, en la que la concentración es C_i . La densidad de flujo de materia viene dada por la ecuación:

$$N = k_F (C - C_i) \quad [23.10]$$

en la que k_F es el coeficiente de transferencia de materia en la fase externa.

b) Difusión en el interior del sólido

Para una partícula sólida esférica de radio r_i , la densidad de flujo de materia en la pared del sólido se expresa por:

$$N = -D_e \frac{C_S}{r} \quad [23.11]$$

siendo C_S la concentración del soluto en el sólido y D_e la difusividad efectiva del soluto.

c) Etapa de adsorción

Para el caso más sencillo, expuesto anteriormente se tiene:

$$r = k_1 C_S (m_0 - m_S) - k_2 m_S$$

que en el equilibrio se tiene:

$$\frac{m_S}{m_0} = \frac{K C_S}{1 + K C_S}$$

Generalmente, la primera de estas etapas es la controlante, con lo que es lógico suponer que en la etapa de adsorción se llega al equilibrio. Por tanto, si controla la etapa de transferencia de materia se cumple $C_i = C_S$, y su valor es constante a lo largo de todo el sólido.

23.3.2. Cinética de intercambio iónico

Al igual que ocurre con los procesos de adsorción física, en el intercambio iónico se pueden considerar diferentes etapas en la transferencia de materia. De esta forma, las etapas a considerar son:

- a) Transferencia de materia externa del ión A , desde el seno de la disolución hasta la superficie de la resina.
- b) Difusión del ión A a través de los poros de la resina, hasta llegar a los puntos de intercambio.

- c) Reacción de intercambio iónico, en la que el ión A es intercambiado por el ión B , de tal forma que A queda ligado a la resina, mientras que B pasa a la fase fluida.
- d) Difusión del ión B a través de los poros de la resina hasta alcanzar la superficie de la misma.
- e) Transferencia de materia externa de B , desde la superficie de la resina hasta el seno de la disolución.

De todas estas etapas, es la más lenta la que controla el proceso de intercambio iónico. Generalmente, las etapas de difusión, o bien las de transferencia externa de materia son las que controlan el proceso global:

$$(-r) = k_A (C_A - C_A^i) = k_B (C_B^i - C_B)$$

en la que el superíndice i indica que las concentraciones son las de la interfase, y se cumple que C_A^i está en equilibrio con C_B^i .

23.4. Operación por etapas

En los procesos de adsorción e intercambio iónico, al igual que en los otros tipos de operaciones unitarias de transferencia de materia, se puede operar en etapas, tanto en continuo como en discontinuo. Las formas más usuales de operación por etapas son en etapa simple, o bien en múltiples etapas, tanto en contacto simple repetido como múltiple en contracorriente.

23.4.1. Contacto simple único

Este es el modo más sencillo de operación. Tal como se indica en la figura 23.2a, a una etapa se introduce una corriente de fluido con el soluto y otra corriente de sólido. El soluto pasa a la corriente sólida, disminuyendo de este modo su concentración en la fase fluida. Las corrientes de fluido y sólido que abandonan la etapa se supone que se encuentran en equilibrio; es decir, se supone una etapa ideal.

Los caudales máxicos de las corrientes fluida y sólida son F y S , respectivamente. Además, C y m son las concentraciones de las corrientes fluida y sólida, respectivamente. Generalmente, los caudales máxicos de las corrientes fluida y sólida apenas varían entre la entrada y la salida, y se consideran constantes. Al realizar un balance de soluto en el sistema, se cumple:

$$F (C_E - C_S) = S (m_S - m_E)$$

en la que el subíndice E denota entrada y S salida. Al reordenar esta expresión se obtiene la ecuación:

$$m_S = -\frac{F}{S} C_S + \left(m_E + \frac{F}{S} C_E \right) \quad [23.12]$$

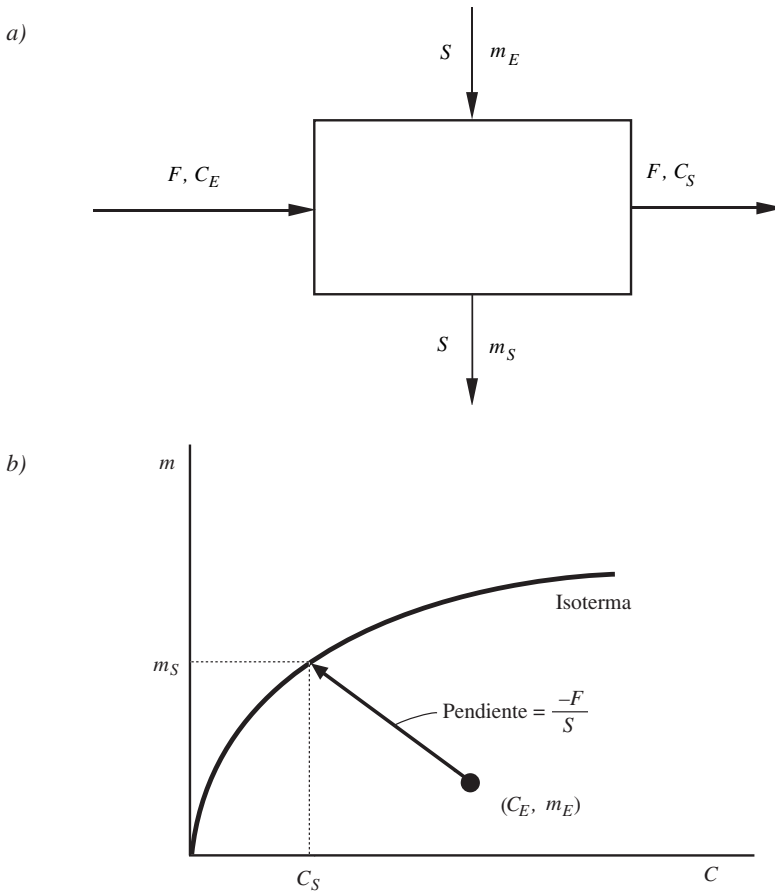


Figura 23.2. Contacto simple único: a) Esquema de la operación. b) Operación en el diagrama de equilibrio.

que en el diagrama $m-C$ es la ecuación de una recta de pendiente $-F/S$. Por lo que, si se conocen las condiciones de las corrientes de entrada, las concentraciones de las corrientes que abandonan la etapa se pueden determinar en el diagrama $m-C$ (figura 23.2b). Para ello, desde el punto representativo de las corrientes de entrada (C_E, m_E) se traza una recta de pendiente $-F/S$, y en el corte con la ecuación de equilibrio (isoterma para la adsorción) se obtienen las concentraciones de las corrientes de salida (C_S, m_S) .

Si la operación se desarrolla en discontinuo es conveniente utilizar cantidades totales y concentraciones:

$$V(C_I - C_F) = S(m_F - m_I) \quad [23.13]$$

en la que V es el volumen total de fluido y S la cantidad total de sólido; mientras que los subíndices I y F denotan concentración inicial y final, respectivamente.

23.4.2. Contacto simple repetido

Como su nombre indica, en este tipo de operación se utilizan diferentes etapas, en las que la fase fluida que abandona una etapa sirve de alimento a la siguiente (figura 23.3a). Se considera que todas las etapas se comportan de forma ideal, con lo cual, las concentraciones de las corrientes fluida y sólida que abandonan una etapa cualquiera lo hacen en equilibrio. Generalmente, el sólido que se alimenta a cada etapa está exento de soluto, con lo que $m_E = 0$; y además, la cantidad de sólido que se utiliza en cada etapa es el mismo ($S_1 = S_2 = \dots = S_N = S$).

Al realizar un balance de soluto en una etapa i cualquiera:

$$F (C_{i-1} - C_i) = S (m_i - m_E)$$

que reordenada se puede expresar como:

$$m_i = -\frac{F}{S} C_i + \left[m_E + \left(\frac{F}{S} \right) C_{i-1} \right] \tag{23.14}$$

Si se desean determinar las concentraciones de las corrientes que salen de cada etapa, se operará del siguiente modo. En el diagrama m - C se fija el punto de las co-

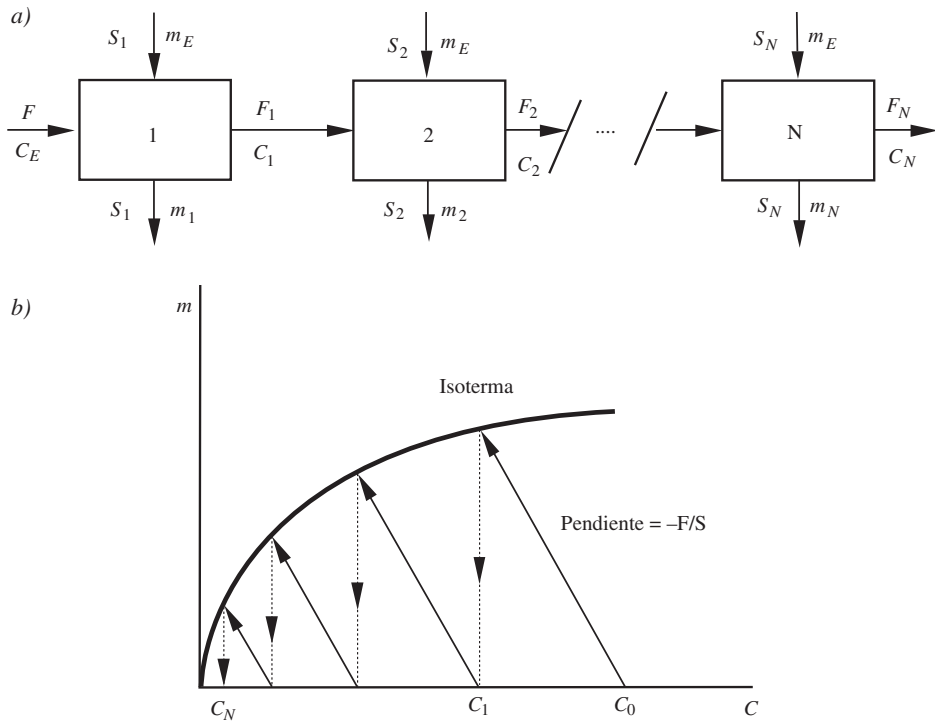


Figura 23.3. Contacto simple repetido: a) Esquema de la operación. b) Operación en el diagrama de equilibrio.

rientes de entrada (m_E, C_0). Desde este punto se traza una recta de pendiente $-F/S$, el corte de esta recta con la curva de equilibrio determina las concentraciones m_1 y C_1 . Desde el punto (C_1, m_E) se traza una recta con la misma pendiente, y el corte sobre la curva de equilibrio determina la composición C_2 y m_2 de las corrientes que abandonan la segunda etapa. El proceso se continúa hasta la etapa N , que permite obtener la concentración de soluto C_N en la fase fluida (figura 23.3b).

En el caso que se conozca la concentración final de la fase fluida y se desee determinar el número de etapas necesarias, el modo de operación es análogo. Se iniciará el proceso gráfico en el punto (C_0, m_E), se irán trazando las rectas de pendiente $-F/S$, como se ha descrito, hasta que se rebasa la concentración final C_N ; en la que el número de rectas de pendiente $-F/S$ trazadas, es justamente el número de etapas N necesarias para rebajar el contenido de soluto de la corriente fluida desde C_0 a C_N .

23.4.3. Contacto múltiple en contracorriente

En este tipo de operación se utilizan N etapas, en las que la corriente fluida sigue un sentido de circulación, mientras que la corriente sólida circula en sentido contrario. La corriente de salida de cada etapa sirve de alimento a la siguiente. La corriente fluida entra al sistema por la primera etapa, mientras que la sólida lo hace por la última (figura 23.4). Al igual que en los casos anteriores, se supone que las etapas son ideales, y que en cada una de ellas se alcanza el equilibrio.

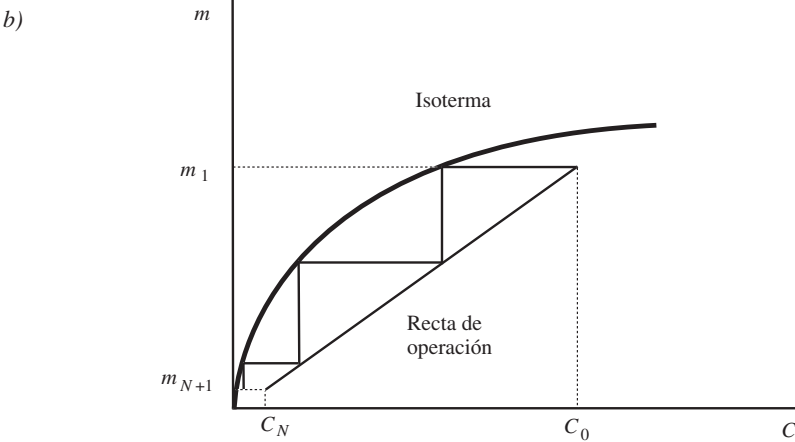
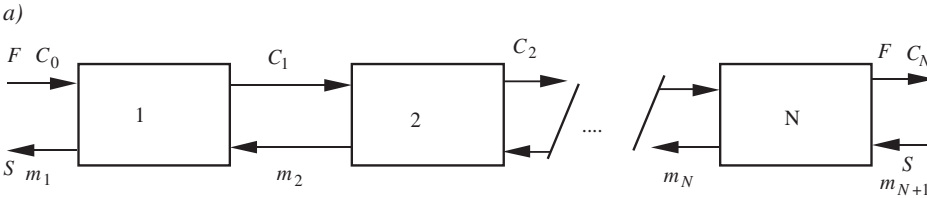


Figura 23.4. Contacto múltiple en contracorriente.

Del balance global a todo el sistema se obtiene la ecuación:

$$F (C_0 - C_N) = S (m_1 - m_{N+1})$$

que en el diagrama m - C es la ecuación de una recta de pendiente F/S , y que pasa por los puntos (C_0, m_1) y (C_N, m_{N+1}) , y se la denomina recta de operación. El número de etapas necesarias para rebajar la concentración de la fase fluida desde C_0 a C_N se obtiene al trazar escalones entre esta recta de operación y la curva de equilibrio (figura 23.4).

El caudal máximo de fluido a tratar, por unidad de sólido, se obtiene al trazar la recta que pasa por el punto (C_N, m_{N+1}) y el punto de la curva de equilibrio de abscisa C_0 . Esta recta posee una pendiente de valor $(F/S)_{MÁX}$ (figura 23.5a). Puede ocurrir que al trazar la recta de pendiente máxima corte a la curva de equilibrio, en cuyo caso, se debe trazar la tangente a la curva, y su pendiente es la que da la relación $(F/S)_{MÁX}$ (figura 23.5b).

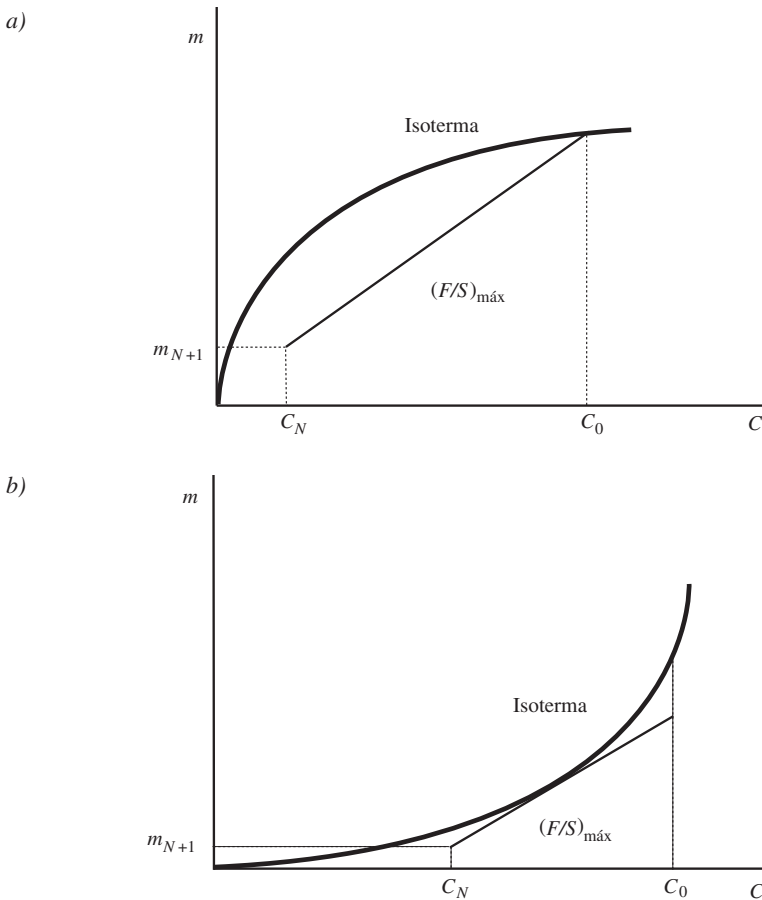


Figura 23.5. Contacto múltiple en contracorriente. Condiciones de caudal máximo de tratamiento: a) Isotherma convexa. b) Isotherma cóncava.

23.5. Columnas de lecho móvil

En ciertos casos la etapa de adsorción o intercambio iónico consta de una columna cilíndrica en la que se alimenta la fase fluida, y se hace circular en contracorriente la fase sólida (figura 23.6). Se supone que el sólido se mueve a lo largo de la columna en flujo de pistón.

Si se realiza un balance de soluto en un diferencial de altura dz se obtiene:

$$v A \varepsilon C = v A \varepsilon (C + dC) + N A dz (1 - \varepsilon) a_s$$

en la que v es la velocidad lineal de circulación del fluido, A la sección transversal de la columna, ε la porosidad del sólido en la columna, a_s es la superficie específica del lecho sólido, mientras que N es la densidad de flujo del soluto que se transfiere, siendo su valor:

$$N = k_F (C - C_i)$$

siendo k_F la constante de transferencia de materia, y C_i la concentración de soluto en la interfase fluido-sólido. El cálculo de C_i puede resultar complicado, y es conveniente expresar esta transferencia en función de la concentración del fluido C_e , que está en equilibrio con la del sólido:

$$N = k_F (C - C_e)$$

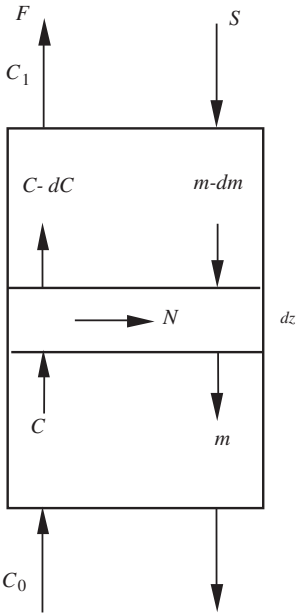


Figura 23.6. Columnas de lecho móvil.

Por tanto, al sustituir esta expresión en la del balance de soluto, se puede obtener la altura de la columna si se integra la ecuación resultante:

$$z = \int_0^z dz = \frac{v \epsilon}{k_F a_S (1 - \epsilon)} \int_{C_1}^{C_0} \frac{dC}{C - C_e} \quad [23.15]$$

Generalmente, esta integral no presenta solución analítica, y debe resolverse numérica o gráficamente.

23.6. Columnas de lecho fijo

Las columnas de lecho fijo son quizás los dispositivos más utilizados en los procesos de adsorción e intercambio iónico. Como su nombre indica, son columnas que contienen el sólido adsorbente o la resina de intercambio, y a su través se hace circular el fluido que contiene el soluto a retener o intercambiar (figura 23.7).

Si se realiza un balance de soluto en un diferencial de altura de columna dz , se observa que el término de entrada es igual al de salida, más la parte acumulada en el líquido retenido en la fracción porosa de dz y la acumulada en el sólido:

$$v A \epsilon C = v A \epsilon (C + dC) + \frac{d}{dt} [\epsilon A dz C + (1 - \epsilon) A dz \rho_p m]$$

en la que v es la velocidad lineal de circulación del fluido, A la sección transversal de la columna, ϵ la porosidad del lecho de sólido, C la concentración de soluto en la fase fluida, m la concentración de soluto en la fase sólida y ρ_p la densidad de las partícula adsorbente o de la resina de intercambio.

Al desarrollar el término de acumulación, y reordenar todos los términos, la ecuación anterior puede expresarse como:

$$v \frac{dC}{dz} - \frac{dC}{dt} = \frac{1 - \epsilon}{\epsilon} \rho_p \frac{dm}{dt} \quad [23.16]$$

Esta es una ecuación básica que permite calcular la altura de la columna, aunque la resolución varía de las condiciones que se dan en la operación. A continuación se darán tres métodos para el cálculo de la altura del lecho de partículas sólidas.

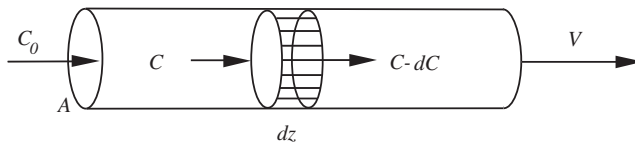


Figura 23.7. Columna de lecho fijo.

23.6.1. Columnas de lecho fijo con equilibrio entre fases

Para la resolución de la ecuación 23.16 se va a suponer que no controla la etapa de transferencia de materia, y que además, existe equilibrio entre las fases fluida y sólida. A partir de esta ecuación puede obtenerse la velocidad con que un punto de concentración constante se mueve a lo largo de la columna:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{v}{\left[1 + \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon} \rho_P \frac{dm}{dC} \right]} \quad [23.17]$$

en la que la relación dm/dC es la pendiente de la curva de equilibrio.

Si se considera que en un tiempo t de operación se ha tratado un volumen V de fluido, que pasa con una velocidad v a través de una columna de sección transversal A , se cumple: $V = A v t$.

Para una concentración constante, la integración de la ecuación 23.17 permite calcular la altura del lecho sólido contenido en la columna:

$$z = \frac{v t}{\left[1 + \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon} \rho_P \frac{dm}{dC} \right]} = \frac{V}{A \left[1 + \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon} \rho_P \frac{dm}{dC} \right]} \quad [23.18]$$

A veces puede interesar conocer la cantidad de sólido que se debe cargar a la columna para realizar la operación, o bien qué cantidad de fluido se puede tratar por kg de sólido contenido en la columna. Si V es la cantidad de fluido a tratar y S la cantidad de sólido en la columna, se cumple que:

$$\frac{V}{S} = \frac{A v t}{z A (1-\varepsilon) \rho_P} = \frac{1}{(1-\varepsilon) \rho_P} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{dm}{dt} \quad [23.19]$$

23.6.2. Método deductivo de Rosen

Este es otro método que permite solucionar problemas de adsorción de solutos por lechos fijos de adsorbente. Se supone que la resistencia a la transferencia de materia se da en el interior del sorbente.

Al realizar un balance de soluto a toda la columna, se supone que todo el soluto que entra se acumula en la superficie del sólido. Los términos de entrada y acumulación de soluto son los siguientes:

- Entrada: $N A z a_S = k_F (C - C_e) A z a_S$

- Acumulación: $\frac{d}{dt} [m A z (1-\varepsilon) \rho_P] = A z \rho_P (1-\varepsilon) \frac{dm}{dt}$

Al igualar los términos de entrada y acumulación, y reordenar la ecuación se obtiene la expresión:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{k_F a_S}{(1 - \varepsilon) \rho_P} (C - C_e) \quad [23.20]$$

en la que C_e es la concentración de la fase fluida en equilibrio con la concentración en la fase sólida m , y se obtiene a partir de la curva de equilibrio.

En el caso que la isoterma sea lineal $m = K_a C$, esta ecuación presenta solución analítica (Rosen, 1952, 1954). De tal forma, que la concentración de la corriente fluida que abandona la columna se calcula mediante la expresión:

$$C = C_0 \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{fer} \left(\frac{\frac{3\tau - 1}{2\lambda}}{2 \sqrt{\frac{1 + 5\Gamma}{5\lambda}}} \right) \right] \right\} \quad [23.21]$$

siendo *fer* la función error de Gauss, mientras que los parámetros τ , λ y Γ son:

- Parámetro de tiempo: $\tau = \frac{8 D_e}{d_p^2} \left(1 - \frac{z}{v} \right) \quad [23.22]$

- Parámetro de longitud: $\lambda = \frac{12 D_e K_a (1 - \varepsilon) z}{\varepsilon v d_p^2 \rho_P} \quad [23.23]$

- Parámetro de resistencia: $\Gamma = \frac{2 D_e K_a}{d_p k_F} \quad [23.24]$

en las que D_e es la difusividad efectiva, K_a la pendiente de la recta de equilibrio, k_F la constante de transferencia de materia, d_p el diámetro de las partículas del lecho, v la velocidad lineal de circulación del fluido y z la altura de la columna.

23.6.3. Método de la zona de cambio

Se define la zona de cambio como la parte del lecho de sólido donde se produce la transferencia de materia. Cuando una corriente fluida contiene un soluto con una concentración C_0 , y se introduce en una columna con un lecho adsorbente o resina de intercambio, el soluto pasa a la fase sólida, y la corriente fluida abandona la columna exenta de este soluto. Las primeras capas de sólido son las que se colmatarán más pronto, creándose en la columna un perfil de concentración de la fase fluida, tal como se muestra en la figura 23.8. Se puede observar que cuando la primera capa de adsorbente está colmatada, existe una capa a cierta altura z_C que todavía no ha retenido o intercambiado soluto, y el fluido está

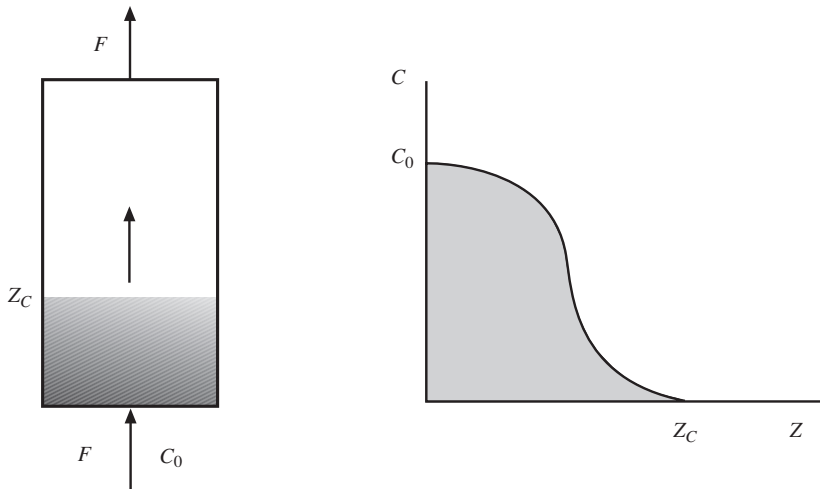


Figura 23.8. Zona de cambio y perfil de concentración de la corriente fluida en esta zona.

exento de soluto. Justamente la altura z_C es la denominada **altura de la zona de cambio**. El tiempo que tarda en formarse esta zona de cambio es el tiempo de formación t_F .

Una vez formada esta zona con el perfil de concentraciones, el frente de concentraciones va recorriendo toda la columna hasta que alcanza la salida, que es justamente cuando ha recorrido toda la altura z_T de la columna. Se define el **punto de ruptura** al instante en que en la corriente de fluido que abandona la columna empieza a salir soluto, aunque en la práctica se considera que este punto se alcanza cuando la concentración de la corriente fluida es el 5% de la corriente de entrada. En el instante que se alcanza el punto de ruptura, el volumen de efluente tratado es V_R , mientras que el tiempo transcurrido es el de ruptura t_R . Cuando la corriente fluida que abandona la columna posee la misma concentración que la de entrada, el sólido se ha colmatado por completo, y se dice que se ha llegado al **punto de saturación**, aunque en la práctica se considera que se ha llegado a este punto, cuando la concentración de la corriente fluida a la salida de la columna posee una concentración que es el 95% de la de entrada. En el punto de saturación se ha tratado un volumen de efluente V_T , en un tiempo total t_T .

Al representar la concentración de soluto de la corriente fluida frente al volumen de fluido tratado se obtiene la figura 23.9, de la que es fácil deducir que el volumen que ha sido tratado para formar la zona de cambio, es la diferencia entre el volumen tratado para llegar al punto de saturación y el necesario para llegar al punto de ruptura: $V_C = V_T - V_R$

También pueden obtenerse las cantidades de soluto retenido o intercambiado por el sólido en distintos puntos de operación. Se define M_C a la cantidad de soluto retenido o intercambiado por el lecho sólido para formar la zona de cambio; mientras que M_R es el soluto retenido o intercambiado por el sólido hasta el punto de

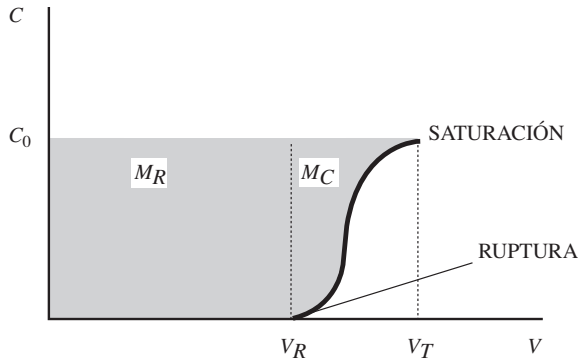


Figura 23.9. Volumen de fluido tratado en las condiciones de ruptura y saturación.

ruptura: $M_R = V_R C_0$, en la que C_0 es la concentración de soluto en la corriente fluida a la entrada de la columna. Conviene resaltar que en los procesos de adsorción estas cantidades se expresan en gramos o moles de soluto, mientras que en intercambio iónico se dan en equivalentes de soluto.

Anteriormente se ha definido el tiempo t_F como el tiempo necesario para formar la zona de cambio; también son necesarias definiciones de nuevos parámetros. Así, se define el tiempo necesario para que la zona de cambio recorra su propia altura z_C , como la relación entre el volumen de fluido para formar la zona de cambio y el caudal volumétrico de circulación de la corriente fluida:

$$t_C = \frac{V_C}{q} = \frac{V_C}{v A} \quad [23.25]$$

siendo v la velocidad lineal y A la sección transversal de la columna.

Asimismo, el tiempo total para que se llegue al punto de saturación será la relación entre el volumen total tratado y el caudal volumétrico:

$$t_T = \frac{V_T}{q} = \frac{V_T}{v A} \quad [23.26]$$

La velocidad con que se desplaza la zona de cambio es:

$$v = \frac{z_T}{t_T - t_F} \quad [23.27]$$

De todas estas definiciones es fácil deducir la relación entre la altura total del lecho y la altura de la zona de cambio:

$$z_C = t_C v = t_C \frac{z_T}{t_T - t_F} \quad [23.28]$$

Mientras que la relación entre el tiempo total y el necesario para que la zona de cambio recorra su propia altura, se obtiene al combinar las ecuaciones anteriores:

$$t_T = t_C \frac{V_T}{V_C} \quad [23.29]$$

La cantidad de solutos retenidos o intercambiados desde el punto de ruptura hasta el punto de saturación, se obtiene mediante integración de la variación de la concentración en este intervalo:

$$M_C = \int_{V_R}^{V_T} (C_0 - C) dV \quad [23.30]$$

Es fácil observar que la cantidad máxima de soluto que se podría retener o intercambiar en esta zona es:

$$M_{C)MÁX} = C_0 (V_T - V_R) = C_0 V_C$$

Se define un nuevo parámetro i como fracción de la zona de cambio con capacidad de retención o de intercambio:

$$i = \frac{M_C}{M_{C)MÁX}} = \frac{\int_{V_R}^{V_T} (C_0 - C) dV}{V_C C_0} = 1 - \frac{\int_{V_R}^{V_T} C dV}{V_C C_0} \quad (23.31)$$

Los tiempos de formación de la zona de cambio y el tiempo necesario para que la zona de cambio recorra su propia altura se pueden relacionar según la ecuación:

$$t_F = (1 - i) t_C \quad [23.32]$$

Según el valor de este parámetro i , el perfil de concentración de la zona de cambio es distinto (figura 23.10). En el caso concreto que $i = 0,5$ se dice que la curva de ruptura es simétrica, cumpliéndose que: $t_F = 0,5 t_C$.

23.6.3.1. Cálculo de la altura de la zona de cambio en una columna de adsorción

El cálculo de la altura de la zona de cambio se realiza suponiendo que dicha zona es similar a una unidad en contracorriente de altura infinita, que trabaja bajo

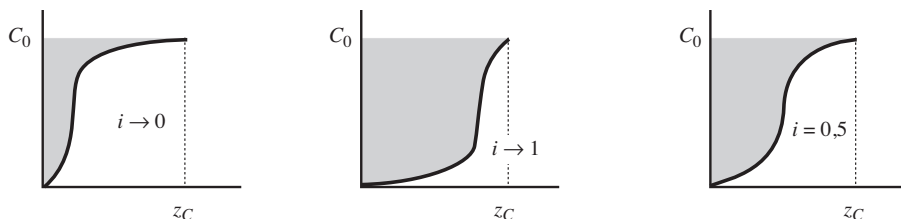


Figura 23.10. Perfil de concentración de la zona de cambio en función del valor de i .

condiciones estacionarias. Por tanto, se considera que en esta zona se dan las condiciones representadas en la figura 23.11, en la que una corriente fluida F con una concentración en soluto $C_2 (= C_0)$ es alimentada por la cabeza de una columna, mientras que por el fondo de la columna se alimenta una corriente S del sólido adsorbente con una concentración m_1 . El fluido que abandona la columna posee una concentración de soluto C_1 , mientras que la corriente sólida poseerá un contenido en soluto m_2 .

Como la columna es de altura infinita, en la sección 2 se van a dar las condiciones de saturación, mientras que en la sección 1, las condiciones son las de ruptura. Por tanto, se cumple: $C_1 = 0$ y $m_2 = m_{MÁX}$. En la que $m_{MÁX}$ es la máxima concentración de soluto que el sólido puede adsorber.

Al realizar un balance de soluto entre la base de la columna y una sección cualquiera de la misma se obtiene:

$$F (C - C_1) = S (m - m_1) \tag{23.33}$$

Pero $C_1 = 0$, y si además, el sólido adsorbente cuando entra a la columna está exento de soluto $m_1 = 0$. Por lo que:

$$F C = S m$$

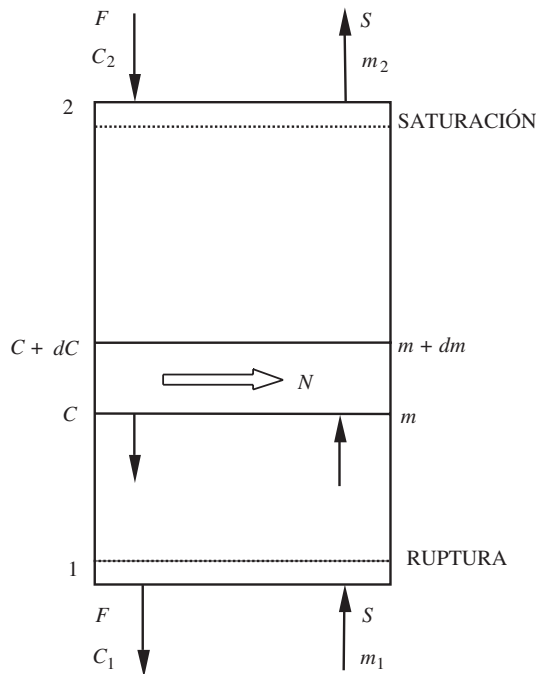


Figura 23.11. Condiciones de la zona de cambio.

Si el balance de soluto se realiza en un dz de columna, se obtiene:

$$F dC = k_F (C - C_e) a_S A dz$$

ecuación que permite calcular la altura de la zona de cambio. Si se integra con las condiciones límite marcadas en la figura 23.11:

$$z_C = \frac{F/A}{k_F a_S} \int_{C_1}^{C_2} \frac{dC}{C - C_e} \quad [23.34]$$

ecuación que se resuelve, generalmente, por integración gráfica o numérica.

En el caso concreto que la isoterma de equilibrio sea lineal ($m = K_a C$), la concentración de equilibrio C_e será:

$$C_e = \frac{m}{K_a} = \frac{F C}{S K_a}$$

con lo que al sustituir en la ecuación 23.34 se obtiene una expresión de fácil integración, en la que la altura de la zona de cambio será:

$$z_C = \frac{F/A}{K' k_F \cdot a_S} \ln \left(\frac{C_2}{C_1} \right) \quad [23.35]$$

siendo C_1 y C_2 las concentraciones de la fase fluida en los puntos de ruptura y saturación, respectivamente; mientras que K' es el parámetro:

$$K' = 1 - \frac{F}{S K_a}$$

Si se considera que en los puntos de ruptura y saturación se cumple que:

$$C_1 = 0,05 \cdot C_0 \text{ y } C_2 = 0,95 \cdot C_0,$$

la última ecuación se transforma en:

$$z_C = \frac{F/A}{K' k_F \cdot a_S} \ln (19) \quad [23.36]$$

23.6.3.2. Cálculo de la altura de la zona de cambio en una columna de intercambio iónico

La forma de operar es análoga al caso de la columna de adsorción. Del balance de soluto entre la base de la columna y una sección cualquiera se obtiene:

$$F (C - C_1) = S (m - m_1) \quad [23.33]$$

Pero si se definen las fracciones equivalentes en la fase fluida (Y) y de la resina (X) como las relaciones:

$$Y = \frac{C}{C_0}$$

$$X = \frac{m}{m_{MÁX}}$$

expresándose la concentración C de la fase fluida en equivalentes de soluto por litro, y la concentración en la resina m como equivalentes de soluto por kilogramo de resina; y además $m_{MÁX}$ es la capacidad máxima de retención de la resina. La ecuación del balance de soluto queda:

$$F C_0 (Y - Y_1) = S m_{MÁX} (X - X_1) \quad [23.37]$$

que constituye la denominada recta de operación en el diagrama de equilibrio.

Si el balance se realiza entre la base y la cabeza de columna, esta ecuación se transforma en:

$$F C_0 (Y_2 - Y_1) = S m_{MÁX} (X_2 - X_1) \quad [23.38]$$

Como las secciones 1 y 2 de la columna se corresponden a los puntos de ruptura y saturación, respectivamente, se debe cumplir:

- Punto de ruptura: $X_1 = 0 \quad Y_1 = 0$
- Punto de saturación: $X_2 = 1 \quad Y_2 = 1$

Con esto, al combinar las ecuaciones 23.37 y 23.38 se obtiene que la recta de operación [ecuación 23.33] es la recta de pendiente 1 y ordenada en el origen cero; es decir: $Y = X$.

Al realizar el balance de soluto en un dz de columna, se obtiene:

$$F C_0 Y = k_F C_0 (Y - Y_e) a_S A dz$$

ecuación que permite calcular la altura de la zona de cambio:

$$z_C = \frac{F/A}{k_F a_S} \int_{Y_1}^{Y_2} \frac{dY}{Y - Y_e} \quad [23.39]$$

En este caso, esta ecuación presenta solución analítica, ya que de la recta de operación ($Y = X$), y de la definición de factor de separación (Ec. 23.9) se obtiene una relación entre Y_e e Y :

$$Y_e = \frac{Y}{K(1 - Y) + Y} \quad [23.40]$$

que al sustituir en la ecuación anterior, permite obtener la altura de la zona de cambio:

$$z_C = \frac{F/A}{k_F a_S (K - 1)} \left[K \ln \left(\frac{Y_2}{Y_1} \right) - \ln \left(\frac{1 - Y_2}{1 - Y_1} \right) \right] \quad [23.41]$$

como en la zona de cambio se cumple que las fracciones equivalentes de la fase fluida Y_1 e Y_2 se corresponden a los puntos de ruptura y saturación ($Y_1 = 0,05$ e $Y_2 = 0,95$), se obtiene que la altura de la zona de cambio se puede calcular utilizando la siguiente ecuación:

$$z_C = \frac{(F/A)(K+1)}{k_F a_S (K-1)} \ln(19) \quad [23.42]$$

Además de este método, la altura de la zona de cambio también puede calcularse utilizando la ecuación de Wilke:

$$z_C = b v^{0,51} \quad [23.43]$$

en la que v es la velocidad lineal, expresada en cm/s, y b es un parámetro que depende del tipo de transferencia. En el caso de que se trate de un intercambio de iones Ca^{2+} y Mg^{2+} por iones Na^+ el valor de esta constante es 37,4.

También puede calcularse la altura de la zona de cambio mediante experimentación. Para ello, se realizan distintos experimentos con diferentes alturas de lecho z_T , y se determina el volumen de fluido V_T necesario para colmatar la columna; a continuación se representa la altura z_T frente a V_T . Se ajustan los datos a una línea recta, y el valor de la ordenada en el origen es precisamente la altura z_C de la zona de cambio.

PROBLEMAS

Problema 23.1

Una de las causas de deterioro de los zumos clarificados de frutas es el provocado por el pardeamiento no enzimático. Este es debido a la formación de melanoidinas, que pueden ser eliminadas del zumo por adsorción sobre carbón activo. El grado de pardeamiento no enzimático de un zumo puede evaluarse midiendo su absorbancia a una longitud de onda de 420 nm (A_{420}). En una serie experimental en el laboratorio se mezclan diferentes cantidades de carbón activo de 1 mm de diámetro medio de partícula, con cargas de zumo de 10 °Brix, cuya A_{420} es de 0,646, hasta alcanzar el equilibrio. Los datos obtenidos se dan en la siguiente tabla:

A_{420}	0,646	0,532	0,491	0,385	0,288	0,180
b	0	0,01	0,02	0,06	0,12	0,26

en la que A_{420} se expresa como absorbancia/kg disolución, mientras que b son los kg carbón/kg disolución. Determinar: a) Datos de la isoterma de equilibrio en forma de tabla. b) El número de etapas necesarias, operando en contacto simple repetido, si se desea rebajar la A_{420} del zumo hasta un valor de 0,200, utilizando en cada etapa 0,025 kg de carbón por cada kg de zumo de 10 °Brix. c) El caudal de carbón necesario que debe alimentarse a una columna que opera con lecho móvil en contracorriente con un caudal de zumo de 1.000 kg/h, si se opera con un caudal de carbón doble del mínimo, y desea obtenerse un zumo cuya A_{420} no supere el valor de 0,2.

a) Los datos de equilibrio se obtienen del enunciado, en el que la concentración de melanoidinas en la fase líquida la da la absorbancia A_{420} . Una medida de las melanoidinas adsorbidas por el carbón la da la diferencia entre la absorbancia inicial del zumo y la que posee en un determinado instante. Por lo que la concentración de melanoidinas en las fases líquida y sólida serán:

- Fase líquida: $C = A \left(\frac{\text{Absorbancia}}{\text{kg zumo}} \right)$
- Fase sólida: $m = \frac{A_0 - A}{b} \left(\frac{\text{Melanoidina adsorbida}}{\text{kg carbón}} \right)$

Con lo que los datos de la isoterma de equilibrio son:

$C \left(\frac{\text{Absorbancia}}{\text{kg zumo}} \right)$	0,532	0,491	0,385	0,288	0,180
$m \left(\frac{\text{Melanoidina adsorbida}}{\text{kg carbón}} \right)$	11,4	7,75	4,35	2,98	1,79

b) Al realizar un balance de soluto en la primera etapa, en la que se supone que la corriente de carbón que entra no posee soluto, se obtiene:

$$m_1 = -\frac{L}{S} C_1 + \frac{L}{S} C_0$$

lo que indica que en el diagrama de equilibrio, si desde el punto de abscisa C_0 se construye una recta de pendiente $-(L/S)$ se obtendrá en la curva de equilibrio los valores de C_1 y m_1 .

A partir de los datos del enunciado, la pendiente de esta recta se obtiene fácilmente:

$$-(L/S) = -1/0,025 = -40 \text{ kg zumo/kg carbón}$$

Una vez obtenido C_1 , a partir de esta abscisa se construye una recta de la misma pendiente que la anterior, lo que permite obtener sobre la curva de equilibrio los valores de C_2 y m_2 . Se repite el proceso hasta que se rebase el valor $C_n = 0,2$. En la tabla 23.P1 se recogen los valores que se obtienen para las corrientes de salida de cada etapa.

Tabla 23.P1. Concentraciones en las etapas

Etapa	$C \left(\frac{\text{Absorbancia}}{\text{kg zumo}} \right)$	$m \left(\frac{\text{Melanoidina adsorbida}}{\text{kg carbón}} \right)$
1	0,470	7,1
2	0,365	4,0
3	0,285	2,9
4	0,225	2,2
5	0,180	1,8

Como $C_n = 0,2$ serán necesarias 5 etapas

c) Para la columna que trabaja con lecho móvil, al realizar un balance de soluto entre la cabeza de columna y una sección cualquiera se tiene:

$$m = m_2 + \frac{L}{S} (C - C_2)$$

Se supone que el carbón que entra a la columna está exento de soluto ($m_2 = 0$) y que la concentración de la corriente líquida que abandona la columna es $C_2 = 0,2$. Por tanto, al sustituir datos, la recta de operación que se obtiene es:

$$m = \frac{L}{S} (C - 0,2)$$

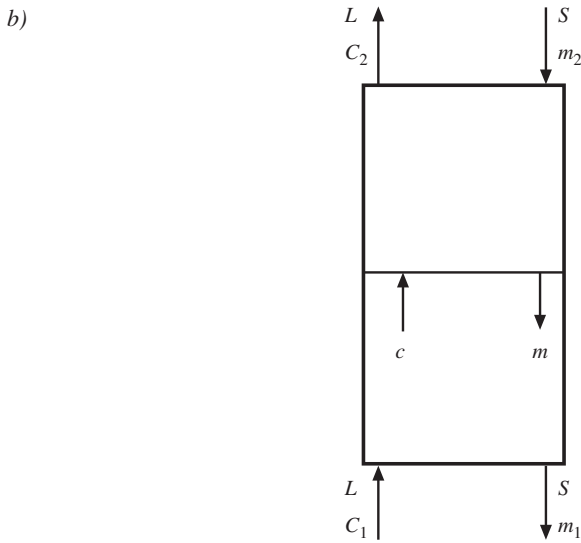
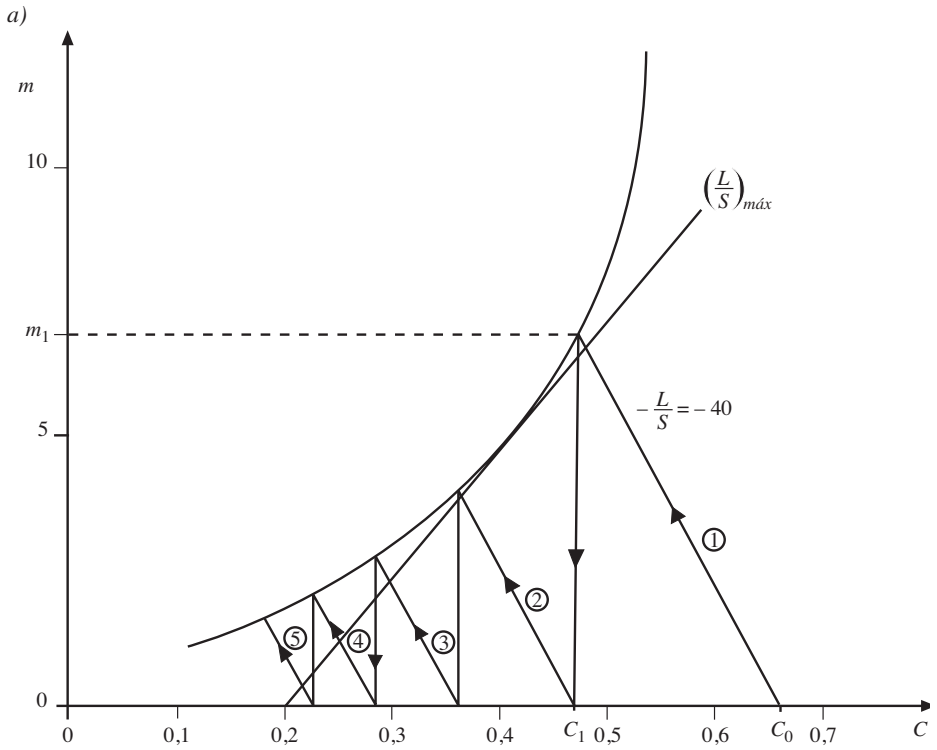


Figura 23.P1. a) Contacto simple repetido. Solución gráfica. b) Columna de lecho móvil.

La pendiente máxima de esta recta se obtiene para $C = C_1$ en la curva de equilibrio. Sin embargo, no es posible ya que la recta que une el punto 2 con el punto de la isoterma de equilibrio para $C = C_1$ cortaría la curva. El valor de $(L/S)_{MÁX}$ se obtiene trazando desde el punto $C = 0,2$ una recta tangente a la curva de equilibrio, de tal forma que el valor de la misma será:

$$\left(\frac{L}{S}\right)_{MÁX} = 25,11 \frac{\text{kg zumo}}{\text{kg carbón}}$$

Como la corriente de zumo que circula por la columna es $L = 1.000$ kg de zumo, la cantidad mínima de carbón es $S_{MÍN} = 39,82$ kg carbón. Como la cantidad de carbón necesaria es el doble de la mínima:

$$S = 2 S_{MÍN} = 79,64 \text{ kg carbón}$$

Problema 23.2

Una industria que procesa naranjas de la variedad Navel obtiene un zumo que contiene 110 ppm de limonina, que le confiere un sabor amargo. Con el fin de eliminar el sabor amargo del zumo, una corriente de 100 kg/h de zumo se alimenta a una columna cilíndrica de 0,15 m² de sección, que contiene un tamiz molecular sintético que adsorbe limonina. El sólido adsorbente posee una densidad de 950 kg/m³ de relleno, presentando un coeficiente volumétrico de transferencia de $1,5 \cdot 10^2 \text{ h}^{-1}$, siendo su capacidad máxima de retención de 10 mg de limonina por cada kg de adsorbente. Para la densidad del zumo puede tomarse el valor de 1.000 kg/m³. En el intervalo de concentraciones que trabaja la columna, la isoterma de adsorción es lineal, expresándose por la ecuación: $m = 0,12 C$, en la que C es el contenido de limonina en el zumo en mg/kg, mientras que m es la concentración en la fase sólida expresada en mg/kg adsorbente. Se puede suponer que la curva de ruptura es simétrica. Calcular: a) Altura de la zona de cambio. b) Si se tardan 25 minutos para que en la corriente del zumo que abandona la columna empiece a salir limonina, calcular la altura que debe alcanzar el lecho adsorbente.

a) La zona de cambio se comporta como una columna que trabaja en lecho móvil de altura infinita, por lo que en la cabeza se dan las condiciones de saturación, mientras que en la base son las de ruptura: $m_1 = 0$ y $C_1 = 0$.

Del balance global de soluto se obtiene: $S = L C_2/m_2$.

Si el balance se realiza entre la sección 1 y una cualquiera: $S = L C/m$.

Como la isoterma de adsorción es lineal: $m = K C_e$, al combinar con estas últimas ecuaciones, es posible obtener una relación entre la concentración de equilibrio y la composición en el zumo:

$$C_e = \frac{m_2}{K C_2} C$$

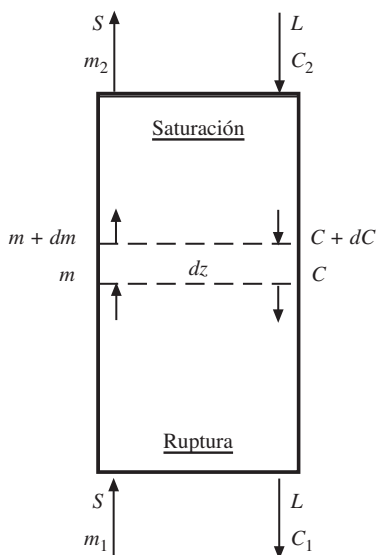


Figura 23.P2.

La altura de la zona de cambio se obtiene de la expresión:

$$z_C = \frac{L/A}{K_L a_S} \int_{C_1}^{C_2} \frac{dC}{C - C_e} = \frac{L/A}{K_L a_S} \frac{K C_2}{(K C_2 - m_2)} \ln \left(\frac{C_2}{C_1} \right)$$

de los datos del enunciado:

$C_0 = 110$ mg limonina/kg zumo.

$C_1 = 0,05 C_0 = 5,5$ mg limonina/kg zumo.

$C_2 = 0,95 C_0 = 104,5$ mg limonina/kg zumo.

$m_2 = m_0 = 10$ mg limonina/kg adsorbente.

con lo que:

$$z_C = \frac{100}{(1.000) (0,15) (150)} \frac{(0,12) (104,5)}{(0,12) (104,5) - (10)} \ln \left(\frac{0,95}{0,05} \right)$$

$$z_C = 0,0646 \text{ m}$$

b) El volumen de adsorbente de la zona de cambio será: $V_{AC} = z_C A = 0,00969 \text{ m}^3$.

La cantidad de limonina que entra a la columna con la corriente de zumo es:

$$w C_0 = (100) (110) = 1.100 \text{ mg limonina/h}$$

El punto de ruptura se alcanza cuando en la corriente que abandona la columna empieza a salir limonina, y esto ocurre a los 25 minutos ($t_R = 25$ min). La cantidad de limonina que ha entrado en estos 25 minutos ha quedado retenida en el adsor-

bente de la columna. Si V_{AT} es el volumen que ocupa el adsorbente en toda la columna, el volumen de adsorbente que se halla saturado será $(V_{AT} - V_{AC})$. Por tanto, en el punto de ruptura se cumple:

$$w C_0 t_R = (V_{AT} - V_{AC}) \rho_a m_0 + V_{AC} \rho_a m_0 i$$

que al sustituir datos:

$$(100)(110)(25/60) = (V_{AT} - 0,00969)(950)(10) + (0,00969)(950)(10)(0,5)$$

de la que se obtiene el volumen que el adsorbente ocupa en la columna:

$$V_{AT} = 0,468 \text{ m}^3$$

$$\text{La altura que posee el adsorbente será: } z_T = \frac{V_{AT}}{A} = 3,12 \text{ m.}$$

Problema 23.3

En una etapa de cierto proceso alimentario se tratan 8.000 kg/h de agua, cuyo contenido en sales de magnesio es de 40 meq/l, en una columna cilíndrica de intercambio iónico. La capacidad de intercambio que posee la resina es de 15 eq/kg, presentando un factor de separación de 50, y una densidad aparente de 550 kg/m³. La columna posee un diámetro de 30 cm y contiene 110 kg de resina. De experimentos previos se ha obtenido que el coeficiente de transferencia de materia es: $K_L a = 2,5 \cdot 10^6$ litros/(h·m³). Si la columna opera en lecho fijo, y la curva de ruptura es simétrica; determinar: a) Altura de la zona de cambio. b) Los tiempos de ruptura y saturación. c) El contenido en sales de magnesio al cabo de 75 minutos de operación.

Si se supone que la densidad de la corriente líquida es 1.000 kg/m³, el caudal volumétrico es $q = 8 \text{ m}^3/\text{h}$.

El coeficiente de transferencia de materia se expresa en unidades adecuadas para facilitar cálculos posteriores:

$$K_L a_S = 2,5 \cdot 10^6 \text{ litros}/(\text{h} \cdot \text{m}^3) = 2.500 \text{ h}^{-1}$$

a) La altura de la zona de cambio se calcula mediante la ecuación 23.42:

$$z_C = \frac{q/A}{K_L a_S} \frac{K + 1}{K - 1} \ln 19$$

de la que es posible obtener el volumen de la zona de cambio:

$$V_{AC} = z_C A = \frac{(8)}{(2.500)} \left(\frac{50 + 1}{50 - 1} \right) \ln 19 = 0,0098 \text{ m}^3$$

que se corresponde a una altura de la zona de cambio: $z_C = 0,139 \text{ m}$.

El volumen que ocupa la resina es el total de la columna:

$$V_{AT} = V_{RESINA} = \frac{25 \text{ kg}}{550 \text{ kg/m}^3} = 0,04546 \text{ m}^3$$

con una altura total de columna: $z_T = 0,643 \text{ m}$.

b) El tiempo de ruptura se produce cuando empiezan a salir sales por la corriente líquida que abandona la columna. El volumen de saturación, como su nombre indica, no podrá intercambiar más iones. Además, la zona de cambio poseerá la mitad de su capacidad de intercambio.

$$\text{Volumen de saturación: } V_{AS} = V_{AT} - V_{AC} = 0,03565 \text{ m}^3$$

La cantidad de iones que han entrado en el tiempo de ruptura han quedado retenidos en el volumen de resina saturada y en la zona de cambio, cumpliéndose:

$$w C_0 t_R = V_{AS} \rho_a E_M + V_{AC} \rho_a E_M i$$

$$(320 \text{ eq}\cdot\text{Mg}^{2+}/\text{h}) t_R = (0,03565) (550) (15) \text{ eq}\cdot\text{Mg}^{2+} + (0,00981) (550) (15) (0,5) \text{ eq}\cdot\text{Mg}^{2+}$$

obteniéndose un tiempo de ruptura de: $t_R = 1,046 \text{ h} = 63 \text{ minutos}$.

En el tiempo de saturación, la resina de la columna se habrá saturado, y además habrá pasado la zona de cambio:

$$w C_0 t_S = V_{RESINA} \rho_a E_M + V_{AC} \rho_a E_M i$$

$$(320 \text{ eq}\cdot\text{Mg}^{2+}/\text{h}) t_S = (0,04546) (550) (15) \text{ eq}\cdot\text{Mg}^{2+} + (0,00981) (550) (15) (0,5) \text{ eq}\cdot\text{Mg}^{2+}$$

obteniéndose un tiempo de saturación de: $t_S = 1,298 \text{ h} = 78 \text{ minutos}$

c) La concentración de la corriente de agua que abandona la columna al cabo de 75 minutos, se obtiene por interpolación lineal entre los tiempos de ruptura y saturación:

$$C = C_0 \left(1 - \frac{t_S - t}{t_S - t_R} \right) = 32 \text{ meq/litro}$$

Bibliografía

- Adams, N. y Lodge, A.S. (1964). *Phil. Trans Roy. Soc.*, London, A, 256, 149.
- Aguado, M.A. y Ibarz, A. (1988). «Variación de la densidad de un zumo de manzana con la temperatura y concentración». *Alimentación, Equipos y Tecnología*, 2/88:209-216.
- Alfa-Laval. *Heat Exchanger Guide*, Alfa-Laval AB-2nd, Sweden.
- Alvarado, J.D. y Romero, C.H. (1989). *Latin American Applied Research*, 19:15-21.
- Andrianov, Y.P.; Toerdokhle, G.V. y Makarova, E.P. (1968). *Moloch. Prom.*, 29 (8):25-28.
- Aronson, M.H. y Nelson, R.C. (1964). *Viscosity measurements and control*. Instrument Publishing Company, Inc., Pittsburgh, Pennsylvania.
- Badger y Banchemo (1970). *Introducción a la Ingeniería Química*. McGraw-Hill, D. F. México.
- Ball, C.O. (1923). *Bull. Natl. Res. Council*, 7(1), 37:7.
- Baquero, J. y Llorente, V. (1985). *Equipos para la Industria Química y Alimentaria*. Ed. Alhambra, Madrid.
- Barbosa-Cánovas, G.V. y Peleg, M. (1982). «Propiedades de flujo de alimentos líquidos y semi-líquidos». *Rev. Technol. Aliment. de México*, 17(2):4.
- Barbosa-Cánovas, G.V. y Vega-Mercado.H. (1996). *Dehydration of Food*. Chapman and Hall. New York.
- Barbosa-Cánovas, G.V. y Peleg, M. (1983). «Flow parameters of selected commercial semi-liquid food products». *J. Texture Studies*, 14:213.
- Barbosa-Cánovas, G.; Ibarz, A. y Peleg, M. (1993). «Reología de alimentos fluidos. Revisión». *Alimentaria*, 241:39-89.
- Bennet, C.O. y Meyers, J.E. (1979). *Transferencia de Cantidad de Movimiento, Calor y Materia*. Ed. Reverté, Barcelona.
- Bernardini, E. (1981). *Tecnología de Aceites y Grasas*, Ed. Alhambra, Madrid.
- Bertsch, A.J.; Bimbenet, J.J. y Cerf, O. (1982). *Le Lait*, 62:(615-616), 251-264.
- Bhattacharya, K.R. y Sowbhagya, C.M.(1978). «On viscograms and viscography». *J. Texture Studies*, 9:341.
- Billmeyer, F.W. (1971). *Textbook of Polymer Science*. Wiley- Interscience, New York.
- Bingham, E.C. (1922). *Fluidity and Plasticity*. McGraw-Hill Book Co., New York.
- Bird R. B., Stewart W. E. y Lightfoot E. N. (1960). *Transport Phenomena*. Wiley and Sons. New York.
- Bird, R.B., Armstrong, R.C. y Hassager, O. (1977). *Dynamics of Polymeric Liquids-Fluid Mechanics*, vol. 1. John Wiley & Sons, New York.
- Bondi, A. (1956). «Theories of viscosity». En *Rheology*, vol. 1. Ed. F.R. Eirich, p. 132. Academic Press, New York.
- Brennan, J.G.; Butters, J.R.; Cowell, N.D. y Lilly, A.E.V. (1980). *Las Operaciones de la Ingeniería de los Alimentos*. Ed. Acribia., Zaragoza.

- Brown, A.I. y Marco, S.M. (1970). *Transmisión de Calor*, Cecsa, México
- Bruin, S. y Luyben, K. Ch.A.M. (1980). «Drying of food materials». En *Advances in Drying* (A.S. Mujumdar, Ed.), vol. 1, Hemisphere Publishing, New York.
- Brunauer, S.; Emmet, P.H. y Teller, E. (1938). «Adsorption of gases in multicomponent layers», *J. Am. Chem. Soc.*, 60:309.
- Brunner, E. (1949). *J. Chem. Phys.*, 17:346.
- Buonopane, R.A.; Troupe, R.A. y Morgan, J.C. (1963). *Chem. Eng. Progr.*, 59(7):57-61.
- Campanella, O. H. y Peleg, M. (1987a). «Squeezing flow viscosimetry of peanut butter». *J. Food Sci.*, 52(1):180.
- Campanella, O.H. y Peleg, M. (1987b). «Determination of the yield stress of semi-liquid foods from squeezing flow data». *J. Food Sci.*, 52(1):214-215 y 217.
- Carleton, A.J.; Cheng, D.C. y Whittaker, W. (1974). *Inst. Petrol. Tech.*, Pap., No. 9.
- Casson, N. (1959). «A flow equation for pigment-oil suspensions of the printing ink type». En *Rheology of Disperse Systems* (C.C. Hill, Ed.), p. 82. Pergamon Press, New York.
- Castaldo, D.; Palmieri, L.; Lo Voi, A. y Costabile, P. (1990). «Flow properties of Babaco (*Carica Pentagona*) purees and concentrates». *J. Texture Stud.*, 21:253-264.
- Cathala, J. (1951). *Chem. Eng. Sci.*, 1:1.
- Chandarana, D.I., Gavin, A. III y Wheaton, F.W. (1990). «Particle/fluid interface heat transfer under UHT conditions at low particle/fluid relative velocities». *J. Food Process Eng.*, 13(3):191.
- Charm, S.E. (1960). «Viscometry of non-Newtonian food materials». *Food Research*, 25:351.
- Charm, S.E. (1963). «The direct determination of shear stress-shear rate behavior of foods in the presence of yield stress». *J. Food Sci.*, 28:107-113.
- Charm, S.E. (1963). «Effect of yield stress on the power law constants of fluid materials determined in low shear rate viscometer». *Ing. Eng.Chem. (Proc., Design Dev.)*, 2:62.
- Charm S. E. (1971). *Fundamentals of Food Engineering*. The AVI Pub. Co. Inc. Connecticut.
- Chen, C. (1985). «Thermodynamic analysis of freezing and thawing of foods enthalpy and apparent specific heat». *J. Food Sci.*, 50:1158-1162.
- Chen, C.S. y Johnson, W.H. (1969). «Kinetics of moisture movement in hygroscopic materials. I. Theoretical consideration of drying phenomena». *Trans. ASAE.*, 12:109-113.
- Cheng, D.C. (1986). «Yield stress: a time dependent property and how to measure it». *Rheol. Acta*, 25:542.
- Cheng, D.C. y Evans, F. (1965). «Phenomenological characterization of rheological behavior of inelastic reversible thixotropic and antithixotropic fluids». *Brit. J. Appl. Phys.* 16:1599.
- Cheryan, M. (1986). *Ultrafiltration Handbook*. Technomic Publishing Co., Lancaster, PA.
- Cheryan, M. (1992). «Concentration of liquid foods by reverse osmosis». En *Handbook of Food Engineering* (D.R. Heldman y D.B. Lund, Eds.), Marcel Dekker, Inc., New York.
- Chirife, J. (1983). «Fundamentals of the drying mechanism during air dehydration of foods». En *Advances in Drying*, (A.S. Mujumdar, Ed.), vol. 2, Hemisphere Publishing, New York.
- Choi, Y. y Okos, M.R. (1986). «Thermal Properties of Liquid Foods: Review». *Physical and Chemical Properties of Foods*. (M.R. Okos, Ed.), Minnesota.
- Choi, Y. y Okos, M.R. (1986). «Effects of temperature and composition on the thermal properties of foods». En *Food Engineering and Process Applications*, vol. 1, *Transport Phenomenon*, (L. Maguer y P. Jelen, Eds.). Elsevier, Nueva York, pp. 93-101.
- Clark, D.F. (1974). *The Chem. Eng.*, vol. 285, May, pp. 275-279.
- Cleland, A.C. y Earle, R.L. (1976). «A new method for prediction of surface heat transfer coefficients in freezing». *Bull. I.I.R.*, Annexe-1, p. 361.

- Cleland, A.C. y Earle, R.L. (1979). «A comparison of methods for predicting the freezing times of cylindrical and spherical foodstuffs». *J. Food Science*, 44:964.
- Cleland, A.C. y Earle, R.L. (1982). «Freezing time prediction of foods: a simplified procedure». *Inst. J. Refrig.*, 5:134-140.
- Cleland, D.J.; Cleland, A.C. y Earle, R.L. (1987a). «Prediction of freezing and thawing times for multi-dimensional shapes by simple methods. Part I: Regular shapes». *Inst. J. Refrig.*, 10:156-164.
- Cleland, D.J.; Cleland, A.C. y Earle, R.L. (1987b). «Prediction of freezing and thawing times for multi-dimensional shapes by simple methods. Part II: Irregular shapes». *Inst. J. Refrig.*, 10:234-240.
- Cleland, A.C. (1992). «Dynamic modelling of heat transfer for improvement in process design-case studies involving refrigeration». En *Advances in Food Engineering*. (R.P. Singh y M.A. Wirakartakusumah, Ed.), CRC Press, Boca Ratón, FL.
- Committee on Dynamic Objectives for Chemical Engineering (c.D.O.Ch.E.) (1961). *Chem. Eng. Progr.*, 57:69.
- Constenla, D.T.; Lozano, J.E. y Crapiste, G.H. (1989). *J. Food Science*, 54(3):663-668.
- Cooper, A. (1974). *The Chem. Eng.*, 285:280-285.
- Cornford, S.J.; Parkinson, T.L. y Robb, J. (1969). «Rheological characteristics of processed whole egg». *J. Food Technol.*, 4:353.
- Costa, J.; Cervera, S.; Cunill, F.; Esplugas, S.; Mans, C. y Mata, J. (1984). *Curso de Química Técnica*. Ed. Reverté, Barcelona.
- Costa, E.; Calleja, G.; Ovejero, G.; Lucas, A. de; Aguado, J. y Uguina, M.A. (1986). *Ingeniería Química. 4. Transmisión de Calor*, Ed. Alhambra, Madrid.
- Costa, E.; Calleja, G.; Ovejero, G.; Lucas, A. de; Aguado, J. y Uguina, M.A. (1986). *Ingeniería Química. 1. Coceptos Generales*, Ed. Alhambra, Madrid.
- Costell, E. y Duran, L. (1979). *Esterilización de conservas. Fundamentos teóricos y cálculo del tiempo de esterilización*. Instituto de Agroquímica y Tecnología de Alimentos (CSIC). Información técnica general n.º 66.
- Coulson, J.M. y Richardson, J.F. (1979-1981). *Ingeniería Química*. Vols. I a VI. Ed. Reverté.
- Cowan, C.T. (1975). *Chem. Eng.*, July, p. 102.
- Crandall, P.G.; Chen, C.S. y Carter, R.D. (1982). «Models for predicting viscosity of orange juice concentrate». *Food Technol.*, May, pp. 245-252.
- Crapiste, G.H. y Lozano, J.E. (1988). «Effect of concentration and pressure on the boiling point rise of apple juice and related sugar solutions». *J. Food Sci.*, 53(3):865-868.
- Davis, R.B.; De Weese, D. y Gould, W.A. (1954). «Consistency measurement of tomato puree». *Food Technol.*, 8:330.
- Dickerson, R.W. (1969). «Thermal properties of foods». En *The Freezing Preservation of Foods*, (D.K. Tressler, W.B. Van Arsdel y M.J. Copley, Eds.). Vol. 2, 4.ª ed., AVI, Westport, CT.
- Dickey, D.S. y Fenic, J.G. (1976). Dimensional analysis for fluid agitation systems. *Chem. Eng.*, 5:139-145
- Dickie, A. y Kokini, J.L. (1981). *Transient viscoelastic flow of fluid and semi-solid food materials*. Presented at the 52nd Annual Meeting of the Society of Rheology-Williamsburg, VA.
- Dodge, D.W. y Metzner, A.B. (1959). «Turbulent flow of non-Newtonian systems». *AIChEJ*, 5(2):189-204.
- Earle, R.L. (1983). *Ingeniería de los Alimentos*. 2.ª ed., Ed. Acribia, Zaragoza, España.
- Edwards, M.F.; Changala, A.A. y Parrot, D.L. (1974). *The Chem. Eng.*, 285:286-288 y 293.
- Elliot, J.H. y Ganz, A.J. (1977). «Salad dressings-preliminary rheological characterization». *J. Texture Studies*, 8:359-371.

- Elliot, J.H. y Green, C.E. (1972). «Modification of food characterization with cellulose hydrocolloids - II The modified Bingham body». *J. Texture Studies*, 3.
- Emmet, P.H. y Witt, T. de (1941). «Determination of surface areas». *Ind. Eng. Chem. (Anal.)*, 13:28.
- Eolkin, D. (1957). «The plastometer –a new development in continuous recording and controlling consistometers». *Food Technol.*, 11:253.
- Eyring, H. (1936). *J. Chem. Phys.*, 4:283.
- Fernández-Martín, F. (1972). «Influence of temperature and composition on some physical properties of milk concentrates. I. Viscosity». *J. Dairy Res.*, 39:75.
- Fernández-Martín, F. (1972). *J.Dairy Res.*, 39(1):65-73.
- Fernández-Martín, F. (1982). *Alimentación, Equipos y Tecnología*, 2/82:55-63.
- Fernández-Martín, F. y Montes, F. (1972). *Milchwiss.*, 27(12):772-776.
- Fernández-Martín, F. y Montes, F. (1977). *J.Dairy Res.*, 44(1):103-109.
- Figoni, P.I. y Shoemaker, C.F. (1983). *J. Texture Studies*, 14(4):431-442.
- Fizzman, S.M.; Costell, E.; Serra, P. and Durán, L. (1986). «Relajación de sistemas viscoelásticos. Comparación de métodos de análisis de las curvas experimentales». *Rev. Agroquím. Tecnol. Aliment.*, 26(1):63-71.
- Fortes, M. y Okos, M.R. (1980). «Drying theories». En *Advances in Drying*, (A. S. Mujumdar, Ed.), Vol. 1, Hemisphere Publishing, New York.
- Foust, A.S.; Wenzel, L.A.; Clump, C.W.; Maus, L. y Andersen, L.B. (1980). *Principles of Unit Operations*. John Wiley & Sons, New York.
- Frederickson, A.G. (1970). *Amer. Inst. Chem. Eng. J.*, 16:436.
- García E.J. y Steffe J.F. (1986). «Optimum economic pipe diameter for pumping Herschel-Bulkey fluids in pipe flow». *Journal of Food Process Eng.*, 8:117-136.
- García, E.J. y Steffe, J.F. (1987). «Comparison of friction factor equations for non-Newtonian fluids in pipe flow». *J. Food Process Eng.*, 9:93-120.
- Geankoplis, C.J. (1978). *Transport Processes and Unit Operations*. Allyn and Bacon, Boston, MA.
- Geankoplis, C.J. (1983). «Drying of process materials». En *Transport Processes and Unit Operations*, 2nd ed. Allyn and Bacon, Boston, MA.
- Greensmith, H.W. y Rivlin, R.S. (1953). *Phil. Trans. Roy. Soc. London A*, 245, 399.
- Gregorig, R. (1968). *Cambiadores de Calor*. Ed Urmo, Bilbao.
- Gromov, M.A. (1974). *Moloch. Prom.*, 35(2):25-27.
- Gromov, M.A. (1979). *Moloch. Prom.*, 40(4):37-39.
- Hahn, S.J.; Ree, T. y Eyring, H. (1959). «Flow mechanism of thixotropic substances». *Ind. Eng. Chem.*, 51:856.
- Hanks, R.W. y Ricks, B.L. (1974). «Laminar-turbulent transition in flow of pseudoplastic fluids with yield stresses». *J. Hydronautics*, 8(4):163.
- Harper, J.C. *Elements of Food Engineering*. (1976). The AVI Publishing Company, Inc., CT.
- Harper, J.C. y El Sahrighi, A.F. (1965). «Viscometric behavior of tomato concentrates». *J. Food Sci.*, 30:470.
- Harper, J.C. y Leberman, K.W. (1962). «Rheological behavior of pear purees». *Proceedings of the first International Congress of Food Science and Technology*, vol. I, 719, Gordon y Breach Science Publishers, Newark, NJ.
- Harris, J. (1967). *Rheol. Acta*, 6:6.
- Heldman, D.R. (1975). *Food Process Engineering*. The AVI Publishing Company, Inc., CT.
- Heldman, D.R. (1992). «Food Freezing». En *Handbook of Food Engineering*. (D.R. Heldman y D.B.Lund, Ed.), Marcel Dekker, New York.

- Heldman, D.R. y Lund, D.B. (1992). *Handbook of Food Engineering*. Ed. Marcel Dekker; New York.
- Heldman, D.R. y Singh, R.P. (1981). *Food Process Engineering*. Ed. AVI Publish. Co., Westport; CT.
- Herranz, J. (1979). *Procesos de Transmisión de Calor*, Ed. Castillo, Madrid.
- Higgs, S.J. y Norrington, R.J. (1971). «Rheological properties of selected foodstuffs». *Proc. Biochem.*, 6(5):52.
- Holdsworth, S.D. (1971). «Applicability of rheological models to the interpretation of flow and processing behaviour of fluid food products». *J. Texture Stud.*, 2:393.
- Huggins, M.L. (1942). «The viscosity of dilute solutions of long-chain molecules. IV. Dependence on concentration». *J. Am. Chem. Soc.*, 64:2716.
- Ibarz, A. (1986). *Extracción Sólido-Líquido*. ETSEAL, Universitat Politècnica de Catalunya.
- Ibarz, A. (1986). «Intercambiadores de calor de placas». *Alimentación, Equipos y Tecnología*, 3/86:119-129.
- Ibarz, A. (1987). «Un método de diseño de intercambiadores de calor de placas». *Alimentación, Equipos y Tecnología*, 2/87:187-193.
- Ibarz, A.; Vicente, M. y Graell, J. (1987). «Rheological Behaviour of Apple Juice and Pear Juice and Their Concentrates». *J. Food Eng.*, 6:257-267.
- Ibarz, A. y Pagán, J. (1987). «Rheology of Raspberry Juices». *J. Food Eng.*, 6:269-289.
- Ibarz, A. y Sintés, J. (1989). «Rheology of Egg Yolk». *J. Texture Studies*, 20:161-167.
- Ibarz, A. y Miguelsanz, R. (1989). *J. Food Engineering*, 10:319-323.
- Ibarz, A.; Pagán, J.; Gutiérrez, J. y Vicente, M. (1989). Rheological Properties of Clarified Pear Juice Concentrates. *J. Food Eng.*, 10:57-63.
- Ibarz, A.; Giner, J.; Pagán, J. y Gimeno, V. (1991). «Influencia de la temperatura en la reología de zumos de kiwi». *III Congreso Mundial de Tecnología de Alimentos*. Barcelona.
- Ibarz, A.; González, C.; Esplugas, S. y Vicente, M. (1992a). «Rheology of Clarified Fruit Juices. I: Peach Juices». *J. Food Eng.*, 15:49-61.
- Ibarz, A.; Pagán, J. y Miguelsanz, R. (1992b). «Rheology of Clarified Fruit Juices. II: Blackcurrant Juices». *J. Food Eng.*, 15:63-73.
- Ilangantileke, S.G.; Ruba Jr, A.B. y Joglekar, H.A. (1991). «Boiling point rise of concentrated Thai tangerine juices». *J. Food Eng.*, 15:235-243.
- Jackson, B.W. y Tropupe, R.A. (1964). *Chem. Eng. Prg.*, 60(7):62-65.
- Jacob, M. (1957). *Heat Transfer*. Wiley, New York.
- Jenson, V.G. y Jeffreys, G.V. (1969). *Métodos Matemáticos en Ingeniería Química*. Ed. Alhambra, Madrid.
- Joye, D.D. y Poehlein, G.W. (1971). *Trans. Soc. Rheol.*, 15:51.
- Karel, M.; Fennema, O.R. y Lund, D.B. (1975). «Preservation of food by storage at chilling temperatures». En *Principles of Food Science. Part II. Physical Principles of Food Preservation* (O.R. Fennema, Ed.), Marcel Dekker, New York.
- Karel, M.; Fennema, O.R. y Lund, D.B. (1975). «Protective packaging of foods». En *Principles of Food Science. Part II. Physical Principles of Food Preservation* (O.R. Fennema, Ed.), Marcel Dekker, New York.
- Kemblowski, Z. y Petera, J. (1980). «A generalized rheological model of thixotropic materials». *Rheological Acta*, 19:529.
- Kern, D.Q. (1965). *Procesos de Transferencia de Calor*. Cecsa, México.
- Kimball, D.A. (1986). *J. Food Sci.*, 51(2):529-530.
- King, C.J. (1980). *Procesos de Separación*. Ed. Reverté, Barcelona.
- Kokini, J.L. y Plutchok, G.J. (1987). «Viscoelastic Properties of Semisolid Foods and their Biopolymeric Components». *Food Tech.*, 41(3):89.

- Kokini, J.L. (1992). «Rheological Properties of Foods». En *Handbook of Food Engineering*, (D.R. Heldman y D.B. Lund, Ed.), p. 1. Marcel Dekker, Inc., New York.
- Kopelman, I.J. (1966). *Transient heat transfer and thermal properties in food systems*. Ph. D. Thesis, Michigan State University.
- Kraemer, E.O. (1938). «Molecular weights of cellulose and cellulose derivatives». *Ind. Eng. Chem.*, 30, 1200.
- Kramer, A. y Twigg, B.A. (1970). *Quality Control for the Food Industry*. Vol. 1, AVI Publishing Co., Wesport, CT.
- Kreith, F. y Black, W.Z. (1983). *La Transmisión del Calor. Principios Fundamentales*. Ed. Alhambra, Madrid.
- Lana, E.P. y Tischer, R.A. (1951). «Evaluation of methods for determining quality of pumpkins for canning». *Proc. Am. Soc. Hort. Sci.*, 38:274.
- Lee, K.H. y Brodkey, R.S. (1971). *Trans. Soc. Rheol.*, 15:627.
- Letort, M. (1961). «La Génie Chimique». *Génie Chim.*, 15:627.
- Levenspiel, O. (1986). *El Omnilibro de los Reactores Químicos*. Ed. Reverté, Barcelona.
- Levenspiel, O. (1993). *Flujo de Fluidos. Intercambio de Calor*. Ed. Reverté., Barcelona
- Levy, F. (1979). «Enthalpy and specific heat of meat and fish in the freezing range». *J. Food Technol.*, 14:549-560.
- Lin, O.C.C. (1975). *J. Appl. Pol. Sci.*, 19:199.
- Longree, K.; Beaver, S.; Buck, P. y Nowrey, J.E. (1966). «Viscous behavior of custard systems». *J. Agr. Food Chem.*, 14:653.
- Lombardi, G. y Moresi, M. (1987). «Sviluppo di un modello di simulazione per la concentrazione di soluzione zuccherine mediante osmosi inversa». *Industrie Alimentari*, 3:205.
- Lund, D. (1975). «Heat Transfer in foods.» En *Principles of Food Science. Part 2: Physical Principles of Food Preservation*. (O. Fennema, Ed.), pp. 11-30, Marecl Dekker, New York.
- Lutz, J.M. y Hardenburg, R.E. (1968). *Agr. Handbook*, No 66, U.S. Department of Agriculture, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C.
- Mafart, P. (1994). *Ingeniería Industrial Alimentaria*. Ed. Acribia, Zaragoza.
- Manohar, B.; Ramakrishna, P. y Udayasankar, K. (1991). «Some physical properties of tamarind (*Tamarindus indica L.*) juice concentrates». *J. Food Eng.*, 13:241-258.
- Marriott, J. (1971). *Chem. Eng.*, 5:127-134.
- Marshall, W.R. (1954). «Atomization and spray drying». *Chemical Eng. Process Monogr. Ser.*, 50(2). New York.
- Martens, T. (1980). *Mathematical model of heat processing in flat containers*. Tesis Doctoral, Universidad Católica, Leuven, Bélgica.
- Mason, J.M. y Wiley, R.C. (1958). *Quick quality test for lima beans*. Maryland Processor's Dept., 4, 1. Univ. Maryland, College Park, MD.
- Mason, P.L.; Puoti, M.P.; Bistany, K.L. y Kokini, J.L. (1982). «A new empirical model to simulate transient shear stress growth in semi-solid foods». *J. Food Proc. Eng.*, 6(4):219.
- Masters, K. (1991). *Spray Drying Handbook*, 5th ed. Longman Group Limited, UK.
- McAdams, W.H. (1964). *Transmisión de Calor*. Ed. Castillo, Madrid.
- McCabe, W.L. y Smith, J.C. (1968). *Operaciones Básicas de Ingeniería Química*. Ed. Reverté, Barcelona.
- McCabe, W.L.; Smith, J.C. y Harriott P. (1985). *Unit Operations of Chemical Engineering*. McGraw-Hill Book Company. Singapore.
- McCabe W. L.; Smith J. C. y Harriott P. (1991). *Operaciones Unitarias en Ingeniería Química*. McGraw-Hill/Interamericana de España, S.A. Madrid.

- McKennell, R. (1960). «The influence of viscometer design on non-Newtonian measurements». *Anal. Chem.*, 31(11):1458.
- Miranda, L. (1975). *Ingeniería Química*, Agosto, pp. 81-90.
- Mizrahi, S. y Berk, Z. (1972). «Flow behavior of concentrated orange juice: mathematical treatment». *J. Texture Stud.*, 3:69.
- Moore, F. (1959). «The rheology of ceramic slips and bodies». *Trans. Proc. Ceram. Soc.*, 58:470.
- Moresi, M. y Spinosi, M. (1984). *J. Food Technol.*, 19:519-533.
- Morris, E.R. y Ross-Murphy, S.B. (1981). «Chain flexibility of polysaccharides and glycoproteins from viscosity measurements». En *Techniques in Carbohydrate Metabolism*. Elsevier, North Holland Scientific Publishers, Ltd., Amsterdam.
- Morris, E.R. y Jackson, J. (1953). *Absorption Towers*. Butterworths Ed., London.
- Muller, H.G. (1973). *An Introduction to Food Rheology*. Crane, Russak & Company, Inc., New York.
- Munro, J.A. (1943). «The viscosity and thixotropy of honey». *J. Econ. Entomol.*, 36:769.
- Mylins, E. y Reher, E.O. (1972). *Plaste und Kautschuk*, 19:240.
- Nagaoka, J.; Takigi, S. y Hotani, S. (1955). «Experiments on the freezing of fish in air-blast freezer». *Proc. 9th Int. Congr. Refrig.*, Paris, 4:105.
- Ocón, J. y Tojo, G. (1968). *Problemas de Ingeniería Química*. Ed. Aguilar, Madrid
- Ohlsson, T. (1994). «Progress in pasteurization and sterilization». En *Developments in Food Engineering* (T. Yano, R. Matsuno y K. Nakamura, Eds.), Chapman and Hall, London.
- Oka, S. (1960). «The principles of rheometry». En *Rheology*, vol. 3, (F.R. Eirich, Ed.), p. 18. Academic Press, New York.
- Okos, M.R.; Narsimhan, G.; Singh, R.K., y Weitnauer, A.C. (1992). «Food dehydration». En *Handbook of Food Engineering* (D. R. Heldman y D. B. Lund, Eds.). Marcel Dekker, New York.
- Osorio, F.A. y Steffe, J.F. (1984). «Kinetic energy calculations for non-Newtonian fluids in circular tubes». *J. Food Sci.*, 49:1295-1296, 1315.
- Osorio, F.A. (1985). *Back extrusion of power law; Bingham plastic and Herschel-Bulkley fluids*. M.S. Thesis. Michigan State Univ., East Lansing, MI.
- Osorio, F.A. y Steffe, J.F. (1985). «Back extrusion of Herschel-Bulkley fluids –Example problem». Paper No. 85-6004. *Am. Soc. Agric. Eng.*, St. Joseph, Mich.
- Osorio, F.A. y Steffe, J.F. (1987). «Back extrusion of power law fluids.» *J. Texture Stud.*, 18:43-63.
- Paulov, K.F.; Ramakov, P.G. y Noskov, A.A. (1981). «Problems and Examples, for a course in Basic Operations and Equipment in Chemical Technology». Mir, Moscow (citado por O. Levenspiel (1993). *Flujo de Fluidos. Intercambio de Calor*. Ed. Reverté, Barcelona).
- Perry, R.H. y Chilton, C.H. (1973). *Chemical Engineer's Handbook*. McGraw-Hill, New York.
- Peter, S. (1964). *Rheol. Acta*, 3:178.
- Petrellis, N.C. y Flumerfelt, R.W. (1973). «Rheological behavior of shear degradable oils: kinetic and equilibrium properties». *Can. J. Chem. Eng.*, 51:291.
- Plank, R. (1980). *El Empleo del Frío en la Industria de la Alimentación*. Ed. Reverté, Barcelona.
- Prentice, J.H. (1968). «Measurements of some flow properties of market cream». En *Rheology and Texture Foodstuffs*. SCI Monograph, No. 27, p. 265. Society of Chemical Industry, London.
- Pryce-Jones, J. (1953). «The rheology of honey». En *Foodstuffs: Their Plasticity, Fluidity and Consistency* (G.W. Scott Blair, Ed.), p. 148. North Holland, Amsterdam.
- Raju, K.S.N. y Chand, J. (1980). *Chem. Eng.*, 11:133-144.
- Rambke, K. y Konrad, H. (1970). *Die Nahrung*, 14(2):137-143.
- Ranz, W.E. y Marshall, Jr., W.R. (1952a). «Evaporation from drops», part I. *Chem. Eng. Prog.*, 48(3):141-146.

- Ranz, W.E. y Marshall, Jr., W.R. (1952b). «Evaporation from drops», part II. *Chem. Eng. Prog.*, 48(4):173-180.
- Rao, M.A.; Otoyá Palomino, L.N. y Bernhardt, L.W. (1974). *Flow properties of tropical fruit purees*, 39:160.
- Rao, M.A. (1977). «Rheology of liquid foods. A Review». *J. Texture Stud.*, 8:135.
- Rao, M.A. (1980). *Flow properties of fluid foods and their measurements*. Paper presented at the 89th National Meeting of AIChE, August 17-20, Portland, Oregon.
- Rao, M.A. (1987). «Predicting the flow properties of food suspensions of plant origin». *Food Tech.*, 41(3):85.
- Rao M.A. (1992). «Transport and Storage of Food Products». En *Handbook of Food Engineering* (D.R. Heldman y D. B.Lund, Eds.). Marcel Dekker, Inc., New York.
- Rao, V.N.N.; Hamann, D.D. y Humphries, E.G. (1975). *J. Texture Stud.*, 6:197.
- Rao, M.A.; Cooley, H.J. y Vitali, A.A. (1984). «Flow properties of concentrated juices at low temperatures». *Food Technol.*, 38(3):113-119.
- Rao, M.A. (1986). «Rheological properties of fluid foods». En *Engineering Properties of Foods* (M.A. Rao y S.S.H. Rizvi, Eds.). Marcel Dekker, Inc. New York, pp. 1-48.
- Reidy, G.A. (1968). *Thermal properties of foods and methods of their determination*. M.S. Tesis, Food Science Dept., Michigan State University.
- Reiner, M. (1971). *Advanced Rheology*, H.K. Lewis Ed., London.
- Rha, C.K. (1975). «Theories and principles of viscosity». En *Theory Determination and Control of Physical Properties of Food Materials*, vol. 1, (C.K. Rha, Ed.), p. 7. D.-Reidel Publishing Company, Dordrecht.
- Rha, C.K. (1978). «Rheology of fluid foods». *Food Tech.*, 32:77.
- Riedel, L. (1949). *Chem. Ing. Tech.*, 21:340.
- Riedel, V.L. (1956). «Calorimetric studies of the freezing of fresh meat». *Kaltetechnik*, 8(12):374-377.
- Riedel, V.L. (1957a). «Calorimetric studies of the meat freezing process». *Kaltetechnik*, 9:38-40.
- Riedel, V.L. (1957b). «Calorimetric studies of the freezing of egg white and egg yolk». *Kaltetechnik*, 9(11):342-345.
- Ritter, R.A. y Govier, G.W. (1970). «The development and evaluation of a theory of thixotropic behavior». *Can. J.Chem. Eng.*, 48:505.
- Rodrigo, M.; Lorenzo, P. y Safon, J. (1980). «Optimización de las técnicas de esterilización por calor. I. Planteamientos generales». *Rev. Agroquím. Tecnol. Aliment.*, 20(2):149-158.
- Rodrigo, M.; Lorenzo, P. y Safon, J. (1980). «Optimización de las técnicas de esterilización por calor. II. Concepto actualizado de la esterilización por calor y efectos de la misma sobre los alimentos. Cinética y parámetros». *Rev. Agroquím. Tecnol. Aliment.*, 20(4):425-443.
- Rosen, J.B. (1952). «Kinetics of a fixed bed system for solid diffusion into spherical particles». *J. Eng. Chem.*, 20:387.
- Rosen, J.B. (1954). «General numerical solutions for solid diffusion in fixed beds». *Ind. Eng. Chem.*, 46:1590.
- Rutgus, R. (1958). «Consistency of starch milk». *J. Sci. Food Agr.*, 9:61.
- Sáenz, C. y Costell, E. (1986). «Comportamiento reológico de productos de limón. Influencia de la temperatura y de la concentración». *Rev. Agroquím. Tecnol. Aliment.*, 26(4):581-588.
- Saravacos, G.D. (1968). «Tube viscometry of fruit purees and juices». *Food Tech.*, 22:585.
- Saravacos, G.D. (1970). «Effect of temperature on viscosity of fruit juices and purees». *J. Food Sci.*, 35:122.
- Saravacos, G.D. y Moyer, J.C. (1967). «Heating rates of fruit products in an agitated kettle». *Food Tech.*, 21:372.

- Sawistowski, H. y Smith, W. (1967). *Métodos de Cálculo en los Procesos de Transferencia de Materia*. Ed. Alhambra, Madrid.
- Schwartzberg, H. (1982). *Freeze Drying –Lecture Notes*. Food Engineering Department, University of Massachusetts, Amherst, MA.
- Schlichting, H. (1960). *Boundary Layer Theory*. 4th ed., McGraw Hill, New York.
- Schowalter, W.R. (1978). *Mechanics of Non-Newtonian Fluids*. Pergamon Press, New York.
- Scott-Blair, G.W. (1958). «Rheology in food research». En *Advances in Food Research*, vol. VIII, Academic Press, Inc., New York.
- Shaw, F. V. (1994). «Fresh options in drying». *Chem. Eng.*, 101(7):76-84.
- Sherman, P. (1966). *J. Food Sci.*, 31:707.
- Sherman, P. (1970). *Industrial Rheology*. Academic Press, New York.
- Shoemaker, C.F.; Lewis, J.I. y Tamura, M.S. (1987). «Instrumentation for Rheological Measurements of Food». *Food Tech.*, 41(3):80.
- Siebel, J.E. (1982). *Ice Refrig.*, 2:256-257.
- Singh, R.P. (1982). *Food Technol.*, 36(2):87-91.
- Singh, R.P. (1992). «Heating and Cooling Processes for Foods». En *Handbook of Food Engineering* (D.R. Heldman y D.B. Lund, Eds.). Marcel Dekker, Inc., Nueva York, pp. 247-276.
- Singh R.P. y Heldman D.R. (1993). *Introduction to Food Engineering*. Academic Press. California.
- Singh, R.P. y Lund, D.B. (1984). *Introduction to Food Engineering*. Ed. Academic Press.
- Singh, R.K. y Nelson, P.E. (1992). *Advances in Aseptic Processing Technologies*. Elsevier, London.
- Skelland, A.P.H. (1967). *Non-Newtonian Flow and Heat Transfe*». J. Wiley & Sons, Inc., New York.
- Smith J.M. y Van Ness H.C. (1975). *Introduction to Chemical Engineering Thermodynamics*. McGraw-Hill, New York.
- Steffe J.F. (1992a). *Rheological Methods in Food Process Engineering*. Freeman Press. Michigan.
- Steffe, J.F. (1992b). «Yield stress: Phenomena and measurement». En *Advances in Food Engineering* (R.P. Singh y M.A. Wirakertakusumah, Ed.), p. 363. CRC Press, Inc., Boca Ratón, FL.
- Steffe, J.F. y Morgan, R.G. (1986). «Pipeline design and pump selection for non-Newtonian fluid foods». *Food Technol.*, 40(12):78-85.
- Steffe, J.F. y Osorio, F.A. (1987). «Back extrusion of non-Newtonian fluids». *Food Technol.*, 41(3):72.
- Steffe, J.F.; Mohamed, I.O. y Ford, E.W. (1984). «Pressure drop across valves and fittings for pseudoplastic fluids in laminar flow». *Trans. ASAE*, 27:616-619.
- Stoecker, W.F. y Jones, J.W. (1982). *Refrigeration and Air Conditioning*. McGraw-Hill Book Company, New York.
- Stumbo, C.R. (1973). *Thermobacteriology in Food Processing*, 2nd Ed., Academic Press, New York.
- Stumbo, C.R. y Longley, R.E. (1966). *Food Technol.*, 20:109.
- Stumbo, C.R.; Purohit, K.S.; Ramakrishna, T.V.; Evans, D.A. y Francis, F.J. (1983). *Handbook of Lethality Guides for Low-Acid Canned Foods*, vol. I: *Conduction-Heating*. CRC Press, FL, USA.
- Succar, J. y Hayakawa, K. (1983). «Empirical formulae for predicting thermal physical properties of foods at freezing and defrosting temperatures». *Lebensm. Wiss. Technol.*, 16:326-331.
- Sweat, V.E. (1974). *J. Food Sci.*, 39(6):1080.

- Teixeira, A.A. y Shoemaker, C.F. (1989). *Computerized Food Processing Operations*. Van Nostrand Reinhold, New York.
- Tiu, C. y Boger, D.V. (1974). «Complete rheological characterization of time-dependent food products». *J. Texture Stud.*, 5:329.
- Toledo, R.T. (1980). *Fundamentals of Food Process Engineering*. Ed. AVI Publish., Westport, CT.
- Toledo, R. T. (1993). *Fundamentals of Food Process Engineering*. Chapman and Hall. New York.
- Toledo, R.T. y Chang, S-Y. (1990). «Advantages of aseptic processing of fruits and vegetables». *Food Technol.*, 44(2):75.
- Troupe, R.; Morgan, J.C. y Prifti, J. (1960). *Chem. Eng. Prog.*, 56(1):124-128.
- Tung, M.A.; Richards, J.F.; Morrison, B.C. y Watson, E.L. (1970). «Rheology of fresh, aged and gamma-irradiated egg white». *J. Food Sci.*, 35:872.
- U.S. Dept. Agriculture. (1953). *U. S. Standards for grades of tomato catsup*. Agr. Marketing Service, Washington, D.C.
- Usher, J.D. (1970). *Chem. Eng.*, 23:90-94.
- Van Arsdel, N.B. y Copley, M.J. (1963). *Food Dehydration*. AVI Publishing, Westport, CT.
- Van Wazer, J.R.; Lyons, J.W.; Kim, K.Y. y Colwell, R.D. (1963). *Viscosity and flow measurements. A Laboratory Handbook of Rheology*. Interscience Publishers, New York.
- Vian, A. y Ocon, J. (1967). *Elementos de Ingeniería Química*. Ed. Aguilar, Madrid
- Vitali, A.; Roig, S.M. y Rao, M.A. (1974). «Viscosity behavior of concentrated passion fruit juice». *Confructa*, 19:201-206.
- Vitali, A.A. y Rao, M.A. (1984a). «Flow properties of low-pulp concentrated orange juice: effect of temperature and concentration». *J. Food Sci.*, 49:882-888.
- Vitali, A.A. y Rao, M.A. (1984b). «Flow Properties of low-pulp concentrated orange juice: serum viscosity and effect of pulp content». *J. Food Sci.*, 49(3):876-881.
- Walters, K. (1975). *Rheometry*. Wiley, New York.
- Watson, E.L. (1968). «Rheological behavior of apricot purees and concentrates». *Can. Agr. Eng.*, 10:1.
- Weber, W.J. (1979). *Control de la Calidad del Agua. Procesos Fisicoquímicos*. Ed. Reverté, Barcelona.
- Weltmann, R.N. (1943). «Breakdown of thixotropic structure as function of time». *J. Appl. Phys.*, 14:343.
- Welty J.R.; Wicks Ch. E., y Wilson R.E. (1976). *Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transport*. John Wiley & Sons, New York.
- Wilkinson, W.L. (1974). *The Chem. Eng.*, 285:289-293.
- White, G.W. (1970). «Rheology in food research». *Chem. Eng.*, 285:289.
- Windsor, M. y Barlows, S. (1984). *Introducción a los Subproductos de Pesquería*. Ed. Acribia, Zaragoza.
- Zimm, B.H. y Grothers, D.M. (1962). «Simplified rotating cylinder viscometer for DNA». *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 48:905.
- Zitny, R.; Rieger, F.; Houska, M. y Sestak, J. (1978). *Paper presented at 6th Intern. CHISA Congress, Prague*.

Apéndice

Tabla A.1a. Propiedades de vapor saturado de agua

T (°C)	Presión de vapor (kPa)	Volumen específico (m ³ /kg)		Entalpía (kJ/kg)		Entropía (kJ/kg·K)	
		Líquido	Vapor	Líquido	Vapor	Líquido	Vapor
0,01	0,611	0,0010002	206,14	0,00	2501,4	0,0000	9,1562
3	0,758	0,0010001	168,132	12,57	2506,9	0,0457	9,0773
6	0,935	0,0010001	137,734	25,20	2512,4	0,0912	9,0003
9	1,148	0,0010003	113,386	37,80	2517,9	0,1362	8,9253
12	1,402	0,0010005	93,784	50,41	2523,4	0,1806	8,8524
15	1,705	0,0010009	77,926	62,99	2528,9	0,2245	8,7814
18	2,064	0,0010014	65,038	75,58	2534,4	0,2679	8,7123
21	2,487	0,0010020	54,514	88,14	2539,9	0,3109	8,6450
24	2,985	0,0010027	45,883	100,70	2545,4	0,3534	8,5794
27	3,567	0,0010035	38,774	113,25	2550,8	0,3954	8,5156
30	4,246	0,0010043	32,894	125,79	2556,3	0,4369	8,4533
33	5,034	0,0010053	28,011	138,33	2561,7	0,4781	8,3927
36	5,947	0,0010063	23,940	150,86	2567,1	0,5188	8,3336
40	7,384	0,0010078	19,523	167,57	2574,3	0,5725	8,2570
45	9,593	0,0010099	15,258	188,45	2583,2	0,6387	8,1648
50	12,349	0,0010121	12,032	209,33	2592,1	0,7038	8,0763
55	15,758	0,0010146	9,568	230,23	2600,9	0,7679	7,9913
60	19,940	0,0010172	7,671	251,13	2609,6	0,8312	7,9096
65	25,03	0,0010199	6,197	272,06	2618,3	0,8935	7,8310
70	31,19	0,0010228	5,042	292,98	2626,8	0,9549	7,7553
75	38,58	0,0010259	4,131	313,93	2635,3	1,0155	7,6824
80	47,39	0,0010291	3,407	334,91	2643,7	1,0753	7,6122
85	57,83	0,0010325	2,828	355,90	2651,9	1,1343	7,5445
90	70,14	0,0010360	2,361	376,92	2660,1	1,1925	7,4791
95	84,55	0,0010397	1,982	397,96	2668,1	1,2500	7,4159
100	101,35	0,0010435	1,673	419,04	2676,1	1,3069	7,3549
105	120,82	0,0010475	1,419	440,15	2683,8	1,3630	7,2958
110	143,27	0,0010516	1,210	461,30	2691,5	1,4185	7,2387
115	169,06	0,0010559	1,037	482,48	2699,0	1,4734	7,1833
120	198,53	0,0010603	0,892	503,71	2706,3	1,5276	7,1296
125	232,1	0,0010649	0,771	524,99	2713,5	1,5813	7,0775
130	270,1	0,0010697	0,669	546,31	2720,5	1,6344	7,0269
135	313,0	0,0010746	0,582	567,69	2727,3	1,6870	6,9777
140	316,3	0,0010797	0,509	589,13	2733,9	1,7391	6,9299
145	415,4	0,0010850	0,446	610,63	2740,3	1,7907	6,8833
150	475,8	0,0010905	0,393	632,20	2746,5	1,8418	6,8379
155	543,1	0,0010961	0,347	653,84	2752,4	1,8925	6,7935
160	617,8	0,0011020	0,307	675,55	2758,1	1,9427	6,7502
165	700,5	0,0011080	0,273	697,34	2763,5	1,9925	6,7078
170	791,7	0,0011143	0,243	719,21	2768,7	2,0419	6,6663
175	892,0	0,0011207	0,217	741,17	2773,6	2,0909	6,6256
180	1.002,1	0,0011274	0,194	763,22	2778,2	2,1396	6,5857
190	1.254,4	0,0011414	0,157	807,62	2786,4	2,2359	6,5079
200	1.553,8	0,0011565	0,127	852,45	2793,2	2,3309	6,4323
225	2.548	0,0011992	0,078	966,78	2803,3	2,5639	6,2503
250	3.973	0,0012512	0,050	1.085,36	2801,5	2,7927	6,0730
275	5.942	0,0013168	0,033	1.210,07	2785,0	3,0208	5,8938
300	8.581	0,0010436	0,022	1.344,0	2749,0	3,2534	5,7045

Tabla A.1b. Propiedades de vapor saturado de agua
Entrada por temperatura

T (°C)	Presión saturación p (kg/cm ²)	Volumen específico		Entalpía		Entropía	
		Líquido \hat{v} (dm ³ /kg)	Vapor \hat{V} (m ³ /kg)	Líquido \hat{h} (kJ/kg)	Vapor \hat{H} (kJ/kg)	Líquido \hat{s} (kJ/kg·K)	Vapor \hat{S} (kJ/kg·K)
0	0,006228	1,0002	206,3	0,00	2.499,28	0,000	9,150
5	0,008890	1,0000	147,2	21,05	2.508,49	0,076	9,019
10	0,012513	1,0004	106,4	42,02	2.517,70	0,151	8,894
15	0,017376	1,0010	77,99	62,94	2.526,90	0,224	8,776
20	0,02383	1,0018	57,84	83,83	2.536,11	0,296	8,662
25	0,03229	1,0030	43,41	104,71	2.545,32	0,367	8,552
30	0,04325	1,0044	32,93	125,55	2.554,52	0,436	8,448
35	0,05733	1,0061	25,25	146,43	2.563,31	0,504	8,348
40	0,07520	1,0079	19,55	167,32	2.572,52	0,572	8,252
45	0,09771	1,0099	15,28	188,16	2.581,31	0,638	8,160
50	0,12578	1,0121	12,05	209,04	2.590,52	0,703	8,072
55	0,16051	1,0145	9,584	229,92	2.598,89	0,767	7,987
60	0,2031	1,0171	7,682	250,85	2.608,09	0,830	7,906
65	0,2555	1,0199	6,206	271,73	2.616,46	0,893	7,827
70	0,3177	1,0228	5,049	292,66	2.625,25	0,954	7,751
75	0,3931	1,0258	4,136	313,62	2.633,62	1,015	7,679
80	0,4829	1,0290	3,410	334,59	2.641,99	1,074	7,607
85	0,5894	1,0323	2,830	355,56	2.649,94	1,133	7,539
90	0,7149	1,0359	2,361	376,57	2.657,89	1,192	7,474
95	0,8619	1,0396	1,981	397,62	2.665,85	1,249	7,411
100	1,03323	1,0435	1,673	418,67	2.673,80	1,306	7,349
105	1,2318	1,0474	1,419	439,76	2.681,33	1,362	7,290
110	1,4609	1,0515	1,210	460,85	2.688,86	1,417	7,233
115	1,7239	1,0558	1,036	482,03	2.696,40	1,473	7,177
120	2,0245	1,0603	0,8914	503,46	2.703,51	1,526	7,122
125	2,3666	1,0650	0,7701	524,38	2.710,62	1,580	7,071
130	2,7544	1,0697	0,6680	545,72	2.717,32	1,633	7,019
135	3,192	1,0746	0,5817	567,07	2.723,60	1,685	6,969
140	3,685	1,0798	0,5084	588,41	2.730,71	1,737	6,922
145	4,237	1,0850	0,4459	610,17	2.736,99	1,788	6,875
150	4,854	1,0906	0,3924	631,52	2.743,27	1,839	6,830
155	5,540	1,0963	0,3464	653,28	2.749,13	1,890	6,786
160	6,302	1,1021	0,3068	675,04	2.754,99	1,941	6,743
165	7,146	1,1082	0,2724	696,80	2.760,43	1,990	6,701
170	8,076	1,1144	0,2426	718,56	2.765,87	2,040	6,660
175	9,101	1,1210	0,2166	740,33	2.770,89	2,089	6,620
180	10,225	1,1275	0,1939	762,51	2.775,49	2,137	6,579
185	11,456	1,1345	0,1739	784,69	2.780,10	2,185	6,541
190	12,800	1,1415	0,1564	806,87	2.784,28	2,233	6,503
195	14,265	1,1490	0,1410	829,05	2.788,05	2,280	6,465
200	15,857	1,1565	0,1273	851,65	2.791,40	2,328	6,427
205	17,585	1,1645	0,1151	874,25	2.794,32	2,375	6,390
210	19,456	1,1726	0,1043	896,85	2.796,84	2,422	6,355
215	21,477	1,1812	0,09472	919,86	2.798,93	2,469	6,319

Tabla A.1b. Propiedades de vapor saturado de agua (*continuación*)
Entrada por temperatura

T (°C)	Presión saturación p (kg/cm ²)	Volumen específico		Entalpía		Entropía	
		Líquido \hat{v} (dm ³ /kg)	Vapor \hat{V} (m ³ /kg)	Líquido \hat{h} (kJ/kg)	Vapor \hat{H} (kJ/kg)	Líquido \hat{s} (kJ/kg·K)	Vapor \hat{S} (kJ/kg·K)
220	23,659	1,1900	0,08614	942,88	2.801,02	2,515	6,283
225	26,007	1,1991	0,07845	965,90	2.801,86	2,561	6,247
230	28,531	1,2088	0,07153	989,33	2.802,69	2,607	6,211
235	31,239	1,2186	0,06530	1.013,19	2.802,69	2,653	6,175
240	34,140	1,2291	0,05970	1.036,62	2.802,28	2,698	6,139
245	37,244	1,2400	0,05465	1.060,90	2.801,44	2,745	6,103
250	40,56	1,2512	0,05006	1.084,75	2.799,77	2,790	6,068
255	44,10	1,2629	0,04591	1.109,03	2.797,25	2,836	6,032
260	47,87	1,2755	0,04213	1.134,14	2.794,74	2,882	5,996
265	51,88	1,2888	0,03870	1.159,25	2.790,98	2,927	5,959
270	56,14	1,3023	0,03557	1.184,36	2.786,79	2,973	5,923
275	60,66	1,3169	0,03272	1.210,30	2.782,19	3,018	5,887
280	65,46	1,3321	0,03010	1.235,83	2.776,75	3,064	5,850
285	70,54	1,3484	0,02771	1.262,20	2.770,05	3,110	5,812
290	75,92	1,3655	0,02552	1.288,98	2.762,94	3,156	5,774
295	81,60	1,3837	0,02350	1.315,76	2.754,99	3,165	5,736
300	87,61	1,4036	0,02163	1.343,39	2.745,78	3,250	5,697
305	93,95	1,425	0,01991	1.371,42	2.735,32	3,298	5,656
310	100,64	1,448	0,01830	1.400,30	2.723,60	3,345	5,614
315	107,69	1,472	0,01682	1.430,01	2.711,04	3,394	5,571
320	115,13	1,499	0,01544	1.460,57	2.695,98	3,444	5,527
325	122,95	1,529	0,01415	1.491,95	2.680,07	3,495	5,481
330	131,18	1,562	0,01295	1.524,18	2.661,66	3,547	5,433
335	139,85	1,598	0,01183	1.558,08	2.641,15	3,601	5,382
340	148,96	1,641	0,01076	1.593,23	2.618,14	3,655	5,327
345	158,54	1,692	0,009759	1.630,48	2.591,77	3,713	5,686
350	168,63	1,747	0,008803	1.669,40	2.560,80	3,773	5,203
355	179,24	1,814	0,007875	1.713,76	2.524,39	3,839	5,132
360	190,42	1,907	0,006963	1.761,47	2.480,87	3,914	5,052
365	202,21	2,03	0,00606	1.817,13	2.425,63	3,998	4,952
370	214,68	2,23	0,00500	1.892,88	2.340,67	4,119	4,815
371	217,3	2,30	0,00476	1.912,55	2.318,49	4,152	4,779
372	219,9	2,38	0,00450	1.937,66	2.289,20	4,193	4,737
373	222,5	2,50	0,00418	1.971,14	2.255,72	4,231	4,670
374	225,2	2,79	0,00365	2.042,28	2.188,76	4,352	4,520
374,1	225,4	3,07	0,00314	2.100,87	2.100,87	4,428	4,428

Tabla A.1c. Propiedades de vapor saturado de agua
Entrada por presión

Presión saturación p (kg/cm ²)	T (°C)	Volumen específico Vapor \hat{V} (m ³ /kg)	Entalpía		Entropía	
			Líquido h (kJ/kg)	Vapor H (kJ/kg)	Líquido s (kJ/kg·K)	Vapor S (kJ/kg·K)
0,01	6,7	131,70	28,2	2.511,4	0,102	8,976
0,015	12,74	89,64	53,5	2.522,7	0,191	8,829
0,02	17,2	68,27	72,1	2.531,1	0,256	8,724
0,025	20,78	55,28	87,0	2.537,8	0,308	8,644
0,03	23,77	46,53	99,6	2.543,2	0,350	8,579
0,04	28,64	35,46	119,9	2.552,0	0,418	8,476
0,05	32,55	28,73	136,2	2.559,1	0,471	8,397
0,06	35,82	24,19	149,9	2.565,0	0,516	8,331
0,08	41,16	18,45	172,2	2.574,6	0,587	8,229
0,1	45,45	14,95	190,0	2.582,1	0,644	8,152
0,12	49,06	12,6	205,1	2.588,4	0,691	8,088
0,15	53,6	10,21	224,1	2.596,8	0,749	8,010
0,2	59,67	7,795	249,5	2.607,7	0,826	7,911
0,25	64,56	6,322	269,9	2.616,0	0,887	7,833
0,3	68,68	5,328	287,1	2.623,2	0,938	7,770
0,35	72,24	4,614	302,0	2.629,0	0,981	7,715
0,4	75,42	4,069	315,4	2.634,5	1,020	7,673
0,5	80,86	3,301	338,2	2.643,2	1,085	7,596
0,6	85,45	2,783	357,4	2.650,8	1,139	7,533
0,7	89,45	2,409	374,3	2.657,1	1,185	4,969
0,8	92,99	2,125	389,2	2.662,5	1,226	7,435
0,9	96,18	1,904	402,6	2.667,5	1,263	7,396
1	99,09	1,725	414,8	2.672,1	1,296	7,360
1,1	101,76	1,578	426,1	2.675,9	1,326	7,328
1,2	104,25	1,455	436,6	2.637,8	1,354	7,299
1,3	106,56	1,35	446,4	2.683,4	1,380	7,271
1,4	108,74	1,259	455,5	2.686,8	1,404	7,246
1,5	110,79	1,18	464,2	2.690,1	1,426	7,223
1,6	112,73	1,111	472,4	2.693,0	1,448	7,202
1,8	116,33	0,9952	487,7	2.698,1	1,487	7,163
2	119,62	0,9016	501,7	2.702,7	1,523	7,127
2,2	122,65	0,8246	514,3	2.706,9	1,555	7,094
2,4	125,46	0,7601	526,5	2.711,0	1,584	7,066
2,6	128,08	0,7052	537,8	2.714,8	1,612	7,039
2,8	130,55	0,6578	548,2	2.718,2	1,638	7,014
3	132,88	0,6166	558,3	2.721,5	1,663	6,990
3,2	135,08	0,5804	567,5	2.724,0	1,686	6,968
3,4	137,18	0,5483	576,7	2.726,9	1,708	6,948
3,6	139,16	0,5196	585,1	2.729,5	1,728	6,929
3,8	141,09	0,4939	593,4	2.732,0	1,748	6,911

Tabla A.1c. Propiedades de vapor saturado de agua (continuación)

Entrada por presión

Presión saturación p (kg/cm ²)	T (°C)	Volumen específico Vapor \hat{V} (m ³ /kg)	Entalpía		Entropía	
			Líquido h (kJ/kg)	Vapor H (kJ/kg)	Líquido s (kJ/kg·K)	Vapor S (kJ/kg·K)
4	142,92	0,4706	601,0	2.734,5	1,766	6,894
4,5	147,2	0,4213	619,4	2.739,9	1,810	6,855
5	151,11	0,3816	636,5	2.744,5	1,851	6,820
5,5	154,71	0,3489	652,0	2.749,1	1,887	6,778
6	158,08	0,3213	666,7	2.752,9	1,921	6,759
6,5	161,15	0,298	680,5	2.756,7	1,953	6,733
7	164,17	0,2778	693,0	2.759,6	1,982	6,708
7,5	166,96	0,2602	705,2	2.762,9	2,010	6,685
8	169,61	0,2448	716,9	2.765,4	2,036	6,663
8,5	172,11	0,2311	727,8	2.768,0	2,060	6,643
9	174,53	0,2189	738,2	2.770,5	2,084	6,624
9,5	176,82	0,208	748,7	2.772,6	2,106	6,605
10	179,04	0,1981	758,3	2.774,7	2,128	6,587
11	183,2	0,1808	776,7	2.778,4	2,168	6,554
12	187,08	0,1664	793,9	2.781,8	2,209	6,525
13	190,71	0,1541	809,8	2.784,7	2,240	6,498
14	194,13	0,1435	824,9	2.787,2	2,272	6,472
15	197,36	0,1343	839,5	2.789,7	2,303	6,447
16	200,43	0,1262	853,3	2.791,8	2,332	6,424
17	203,35	0,119	866,7	2.793,5	2,360	6,403
18	206,14	0,1126	879,3	2.795,2	2,386	6,383
19	208,81	0,1068	891,4	2.796,4	2,411	6,363
20	211,38	0,1016	903,1	2.797,7	2,436	6,344
22	216,23	0,09251	925,7	2.799,3	2,481	6,310
24	220,75	0,08492	946,2	2.801,0	2,522	6,303
26	224,99	0,07846	965,9	2.801,9	2,561	6,247
28	228,98	0,07288	984,3	2.802,3	2,597	6,218
30	232,76	0,06802	1.002,3	2.802,7	2,632	6,191
32	236,35	0,06375	1.019,5	2.802,7	2,665	6,165
34	239,77	0,05995	1.035,8	2.802,3	2,696	6,141
36	243,04	0,05658	1.051,3	2.801,9	2,727	6,117
38	246,17	0,05353	1.066,3	2.801,0	2,755	6,095
40	249,18	0,05078	1.080,6	2.799,8	2,783	6,074
42	252,07	0,04828	1.094,8	2.798,9	2,809	6,053
44	254,87	0,04601	1.108,6	2.797,3	2,835	6,033
46	257,56	0,04393	1.121,6	2.795,6	2,859	6,013
48	260,17	0,04201	1.135,0	2.794,3	2,883	5,995
50	262,7	0,04024	1.147,5	2.792,7	2,906	5,976
55	268,69	0,03636	1.177,7	2.788,0	2,961	5,933
60	274,29	0,0331	1.207,0	2.783,0	3,012	5,892

Tabla A.1c. Propiedades de vapor saturado de agua (*continuación*)
Entrada por presión

Presión saturación p (kg/cm ²)	T (°C)	Volumen específico Vapor \hat{V} (m ³ /kg)	Entalpía		Entropía	
			Líquido \hat{h} (kJ/kg)	Vapor \hat{H} (kJ/kg)	Líquido \hat{s} (kJ/kg·K)	Vapor \hat{S} (kJ/kg·K)
65	279,54	0,03033	1.233,7	2.777,2	3,060	5,853
70	284,48	0,02795	1.259,3	2.770,9	3,105	5,816
75	289,17	0,02587	1.284,8	2.764,2	3,149	5,781
80	293,62	0,02404	1.308,2	2.757,5	3,190	5,746
85	297,86	0,02241	1.331,7	2.749,5	3,230	5,714
90	301,92	0,02096	1.354,3	2.741,6	3,268	5,682
95	305,8	0,01964	1.376,0	2.733,6	3,305	5,650
100	309,53	0,01845	1.397,8	2.724,9	3,341	5,618
110	316,58	0,01637	1.439,6	2.706,4	3,410	5,557
120	323,15	0,01462	1.481,1	2.686,4	3,476	5,498
130	329,3	0,01312	1.519,2	2.664,2	3,540	5,440
140	335,09	0,01181	1.558,5	2.640,7	3,602	5,381
150	340,56	0,01065	1.597,4	2.615,2	3,661	5,320
160	345,74	0,009616	1.633,4	2.587,6	3,721	5,258
180	355,35	0,007809	1.716,7	2.521,5	3,844	5,127
200	364,08	0,0062	1.805,8	2.436,9	3,982	4,973
224	373,6	0,00394	2.000,4	2.226,4	4,277	4,608
225,4	374,1	0,00314	2.113,4	2.113,4	4,428	4,428

Tabla A.2. Propiedades físicas del agua a la presión de saturación

Temp. (°C)	Densidad (kg/m ³)	$\beta \cdot 10^{-4}$ (K ⁻¹)	\hat{C}_p (kJ/kg·K)	k (W/m·K)	$\alpha \cdot 10^{-6}$ (m ² /s)	$\eta \cdot 10^{-6}$ (Pa·s)	$\nu \cdot 10^{-6}$ (m ² /s)
0	999,9	-0,7	4,226	0,558	0,131	1.793,64	1,79
5	1.000,0		4,206	0,568	0,135	1.534,74	1,54
10	999,7	0,95	4,195	0,577	0,137	1.296,44	1,30
15	999,1		4,187	0,587	0,141	1.135,61	1,15
20	998,2	2,1	4,182	0,597	0,143	993,41	1,01
25	997,1		4,178	0,606	0,146	880,64	0,88
30	995,7	3,0	4,176	0,615	0,149	792,38	0,81
35	994,1		4,175	0,624	0,150	719,81	0,73
40	992,2	3,9	4,175	0,633	0,151	658,03	0,66
45	990,2		4,176	0,640	0,155	605,07	0,61
50	988,1	4,6	4,178	0,647	0,157	555,06	0,56
55	985,7		4,179	0,652	0,158	509,95	0,52
60	983,2	5,3	4,181	0,658	0,159	471,65	0,48
65	980,6		4,184	0,663	0,161	435,42	0,44
70	977,8	5,8	4,187	0,668	0,163	404,03	0,42
75	974,9		4,190	0,671	0,164	376,58	0,37
80	971,8	6,3	4,194	0,673	0,165	352,06	0,36
85	968,7		4,198	0,676	0,166	328,52	0,34
90	965,3	7,0	4,202	0,678	0,167	308,91	0,33
95	961,9		4,206	0,680	0,168	292,24	0,31
100	958,4	7,5	4,211	0,682	0,169	277,53	0,29
110	951,0	8,0	4,224	0,684	0,170	254,97	0,27
120	943,5	8,5	4,232	0,685	0,171	235,36	0,24
130	934,8	9,1	4,250	0,686	0,172	211,82	0,23
140	926,3	9,7	4,257	0,684	0,172	201,04	0,21
150	916,9	10,3	4,270	0,684	0,173	185,35	0,20
160	907,6	10,8	4,285	0,680	0,173	171,62	0,19
170	897,3	11,5	4,396	0,679	0,172	162,29	0,18
180	886,6	12,1	4,396	0,673	0,172	152,00	0,17
190	876,0	12,8	4,480	0,670	0,171	145,14	0,17
200	862,8	13,5	4,501	0,665	0,170	139,25	0,16
210	852,8	14,3	4,560	0,655	0,168	131,41	0,15
220	837,0	15,2	4,605	0,652	0,167	124,54	0,15
230	827,3	16,2	4,690	0,637	0,164	119,64	0,15
240	809,0	17,2	4,731	0,634	0,162	113,76	0,14
250	799,2	18,6	4,857	0,618	0,160	109,83	0,14

β es el coeficiente de expansión térmica volumétrica, \hat{C}_p es el calor específico, **k** la conductividad térmica, α la difusividad térmica, η la viscosidad absoluta y ν la viscosidad cinemática.

Tabla A.3. Propiedades de líquido y vapor saturado para amoníaco

t (°C)	p (kPa)	Entalpía (kJ/kg)		Entropía (kJ/kg·K)		Volumen específico (l/kg)	
		Líquido \hat{h}	Vapor \hat{H}	Líquido \hat{s}	Vapor \hat{S}	Líquido \hat{v}	Vapor \hat{V}
-60	21,99	-69,5330	1.373,19	-0,10909	6,6592	1,4010	4.685,080
-55	30,29	-47,5062	1.382,01	-0,00717	6,5454	1,4126	3.474,220
-50	41,03	-25,4342	1.390,64	0,09264	6,4382	1,4245	2.616,510
-45	54,74	-3,3020	1.399,07	0,19049	6,3369	1,4367	1.998,910
-40	72,01	18,9024	1.407,26	0,28651	6,2410	1,4493	1.547,360
-35	93,49	41,1883	1.415,20	0,38082	6,1501	1,4623	1.212,490
-30	119,90	63,5629	1.422,86	0,47351	6,0636	1,4757	960,867
-28	132,02	72,5387	1.425,84	0,51015	6,0302	1,4811	878,100
-26	145,11	81,5300	1.428,76	0,54655	5,9974	1,4867	803,761
-24	159,22	90,5370	1.431,64	0,58272	5,9652	1,4923	736,868
-22	174,41	99,5600	1.434,46	0,61865	5,9336	1,4980	676,570
-20	190,74	108,599	1.437,23	0,65436	5,9025	1,5037	622,122
-18	208,26	117,656	1.439,94	0,68984	5,8720	1,5096	572,875
-16	227,04	126,729	1.442,60	0,72511	5,8420	1,5155	528,257
-14	247,14	135,820	1.445,20	0,76016	5,8125	1,5215	487,769
-12	268,63	144,929	1.447,74	0,79501	5,7835	1,5276	450,971
-10	291,57	154,056	1.450,22	0,82965	5,7550	1,5338	417,477
-9	303,60	158,628	1.451,44	0,84690	5,7409	1,5369	401,860
-8	316,02	163,204	1.452,64	0,86410	5,7269	1,5400	386,944
-7	328,84	167,785	1.453,83	0,88125	5,7131	1,5432	372,692
-6	342,07	172,371	1.455,00	0,89835	5,6993	1,5464	359,071
-5	355,71	176,962	1.456,15	0,91541	5,6856	1,5496	346,046
-4	369,77	181,559	1.457,29	0,93242	5,6721	1,5528	333,589
-3	384,26	186,161	1.458,42	0,94938	5,6586	1,5561	321,670
-2	399,20	190,768	1.459,53	0,96630	5,6453	1,5594	310,263
-1	414,58	195,381	1.460,62	0,98317	5,6320	1,5627	299,340
0	430,43	200,000	1.461,70	1,00000	5,6189	1,5660	288,880
1	446,74	204,625	1.462,76	1,01679	5,6058	1,5694	278,858
2	463,53	209,256	1.463,80	1,03354	5,5929	1,5727	269,253
3	480,81	213,892	1.464,83	1,05024	5,5800	1,5762	260,046
4	498,59	218,535	1.465,84	1,06691	5,5672	1,5796	251,216
5	516,87	223,185	1.466,84	1,08353	5,5545	1,5831	242,745
6	535,67	227,841	1.467,82	1,10012	5,5419	1,5866	234,618
7	555,00	232,503	1.468,78	1,11667	5,5294	1,5901	226,817
8	574,87	237,172	1.469,72	1,13317	5,5170	1,5936	219,326
9	595,28	241,848	1.470,64	1,14964	5,5046	1,5972	212,132
10	616,25	246,531	1.471,57	1,16607	5,4924	1,6008	205,221
11	637,78	251,221	1.472,46	1,18246	5,4802	1,6045	198,580
12	659,89	255,918	1.473,34	1,19882	5,4681	1,6081	192,196
13	682,59	260,622	1.474,20	1,21515	5,4561	1,6118	186,058
14	705,88	265,334	1.475,05	1,23144	5,4441	1,6156	180,154
15	729,79	270,053	1.475,88	1,24769	5,4322	1,6193	174,475
16	754,31	274,779	1.476,69	1,26391	5,4204	1,6231	169,009
17	779,46	279,513	1.477,48	1,28010	5,4087	1,6269	163,748
18	805,25	284,255	1.478,25	1,29626	5,3971	1,6308	158,683
19	831,69	289,005	1.479,01	1,31238	5,3855	1,6347	153,804

Tabla A.3. Propiedades de líquido y vapor saturado para amoníaco (continuación)

t (°C)	p (kPa)	Entalpía (kJ/kg)		Entropía (kJ/kg·K)		Volumen específico (l/kg)	
		Líquido \hat{h}	Vapor \hat{H}	Líquido \hat{s}	Vapor \hat{S}	Líquido \hat{v}	Vapor \hat{V}
20	858,79	293,762	1.479,75	1,32847	5,3740	1,6386	149,106
21	886,57	298,527	1.480,48	1,34452	5,3626	1,6426	144,578
22	915,03	303,300	1.481,18	1,36055	5,3512	1,6466	140,214
23	944,18	308,081	1.481,87	1,37654	5,3399	1,6507	136,006
24	974,03	312,870	1.482,53	1,39250	5,3286	1,6547	131,950
25	1004,60	317,667	1.483,18	1,40843	5,3175	1,6588	128,037
26	1035,90	322,471	1.483,81	1,42433	5,3063	1,6630	124,261
27	1068,00	327,284	1.484,42	1,44020	5,2953	1,6672	120,619
28	1100,70	332,104	1.485,01	1,45604	5,2843	1,6714	117,103
29	1134,30	336,933	1.485,59	1,47185	5,2733	1,6757	113,708
30	1168,60	341,769	1.486,14	1,48762	5,2624	1,6800	110,430
31	1203,70	346,614	1.486,67	1,50337	5,2516	1,6844	107,263
32	1239,60	351,466	1.487,18	1,51908	5,2408	1,6888	104,205
33	1276,30	356,326	1.487,66	1,53477	5,2300	1,6932	101,248
34	1313,90	361,195	1.488,13	1,55042	5,2193	1,6977	98,391
35	1352,20	366,072	1.488,57	1,56605	5,2086	1,7023	95,629
36	1391,50	370,957	1.488,99	1,58165	5,1980	1,7069	92,958
37	1431,50	375,851	1.489,39	1,59722	5,1874	1,7115	90,374
38	1472,40	380,754	1.489,76	1,61276	5,1768	1,7162	87,875
39	1514,30	385,666	1.489,10	1,62828	5,1663	1,7209	85,456
40	1557,00	390,587	1.490,42	1,64377	5,1558	1,7257	83,115
41	1600,60	395,519	1.490,71	1,65924	5,1453	1,7305	80,848
42	1645,10	400,462	1.490,98	1,67470	5,1349	1,7354	78,654
43	1690,60	405,416	1.491,21	1,69013	5,1244	1,7404	76,528
44	1737,00	410,382	1.491,41	1,70554	5,1140	1,7454	74,468
45	1784,30	415,362	1.491,58	1,72095	5,1036	1,7504	72,472
46	1832,60	420,358	1.491,72	1,73635	5,0932	1,7555	70,536
47	1881,90	425,369	1.491,83	1,75174	5,0827	1,7607	68,660
48	1932,20	430,399	1.491,88	1,76714	5,0723	1,7659	66,840
49	1983,50	435,450	1.491,91	1,78255	5,0618	1,7712	65,075
50	2035,90	440,523	1.491,89	1,79798	5,0514	1,7766	63,361
51	2089,20	445,623	1.491,83	1,81343	5,0409	1,7820	61,697
52	2143,60	450,751	1.491,73	1,82891	5,0303	1,7875	60,081
53	2199,10	455,913	1.491,58	1,84445	5,0198	1,7931	58,511
54	2255,60	461,112	1.491,38	1,86004	5,0092	1,7987	56,985
55	2313,20	466,353	1.491,12	1,87571	4,9985	1,8044	55,502

Tabla A.4. Dimensiones de tuberías de acero normalizadas

Número de catálogo	Diámetro nominal (pulgadas)	Diámetro exterior (cm)	Diámetro interior (cm)	Espesor de pared (cm)
40	1/8	1,029	0,683	0,173
80	1/8	1,029	0,546	0,241
40	1/4	1,372	0,925	0,224
80	1/4	1,372	0,767	0,302
40	3/8	1,715	1,252	0,231
80	3/8	1,715	1,074	0,320
40	1/2	2,134	1,580	0,277
80	1/2	2,134	1,387	0,373
40	3/4	2,667	2,093	0,287
80	3/4	2,667	1,885	0,391
40	1	3,340	2,664	0,338
80	1	3,340	2,431	0,455
40	1 1/4	4,216	3,505	0,356
80	1 1/4	4,216	3,246	0,485
40	1 1/2	4,826	4,089	0,368
80	1 1/2	4,826	3,810	0,508
40	2	6,033	5,250	0,391
80	2	6,033	4,925	0,554
40	2 1/2	7,303	6,271	0,516
80	2 1/2	7,303	5,900	0,701
40	3	8,890	7,793	0,549
80	3	8,890	7,366	0,762
40	3 1/2	10,16	9,012	0,574
80	3 1/2	10,16	8,545	0,808
40	4	11,43	10,226	0,602
80	4	11,43	9,718	0,856
40	5	14,23	12,819	0,655
80	5	14,13	12,225	0,953
40	6	16,83	15,405	0,711
80	6	16,83	14,633	1,097
40	8	21,91	20,272	0,818
80	8	21,91	19,368	1,270
40	10	27,31	25,451	0,927
80	10	27,31	24,287	1,509
40	12	32,39	30,323	1,031
80	12	32,39	28,890	1,748

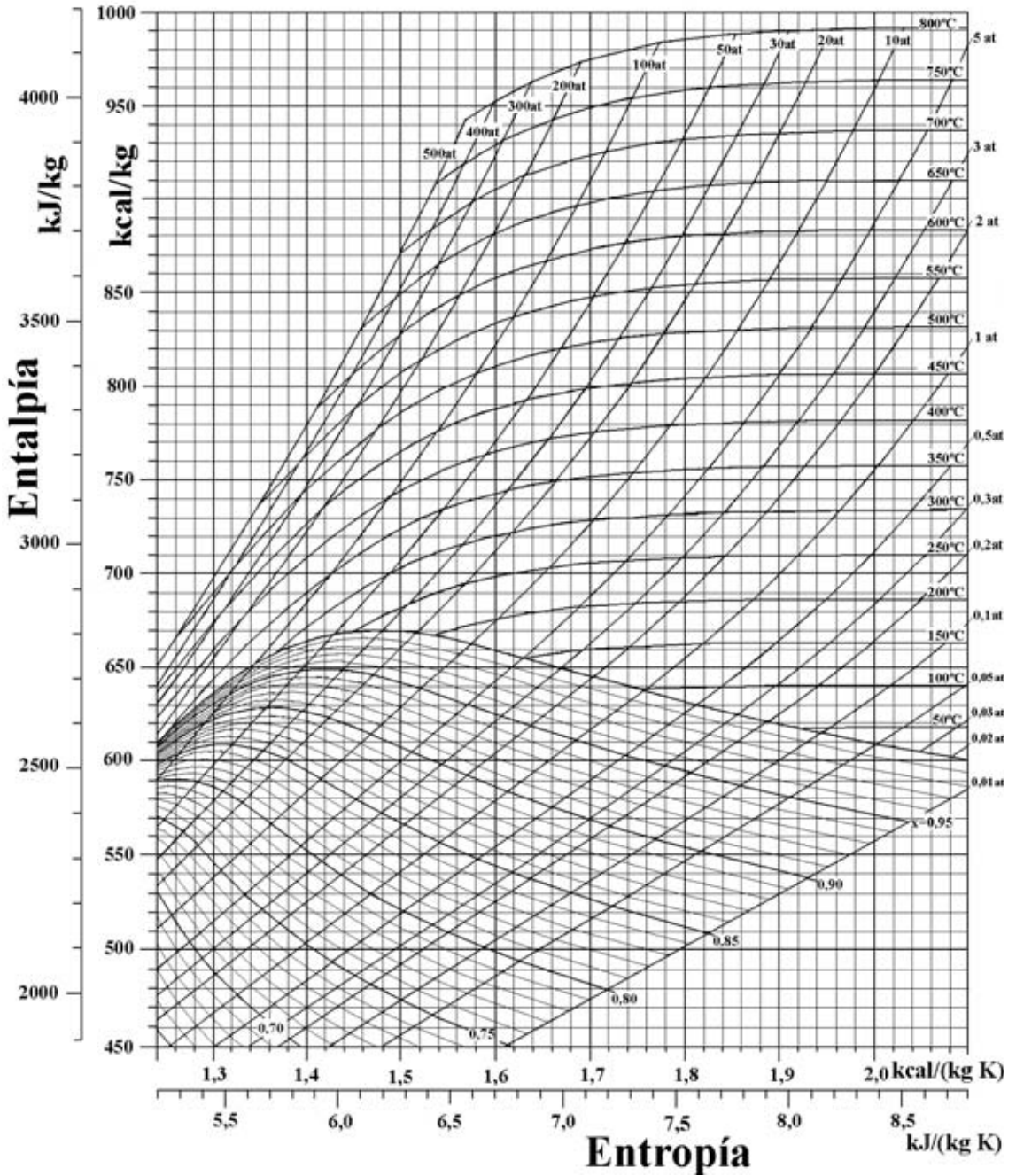


Figura A.1. Diagrama de Mollier.

Ediciones Mundi-Prensa

DISEÑO DE INDUSTRIAS AGROALIMENTARIAS

A. CASP VANACLOCHA

294 págs. Ilust. color. 2004. 38 €. ISBN: 84-8476-219-X



El problema del diseño de industrias agroalimentarias es mucho más complejo que el de otras industrias, debido a los componentes diferenciales que presentan los alimentos frente a otro tipo de productos. El diseño de la industria agroalimentaria adquiere un papel fundamental, en el que se deben conjugar los principios básicos del diseño, un plan eficiente de flujo de materiales y de personas, una distribución efectiva de las instalaciones y una eficiente operación del proceso, con el carácter biológico y perecedero de las materias primas y de los productos. El producto se convierte en la base del diseño de la planta y por lo tanto es importante también el proceso; el ingeniero debe ayudar al industrial a optimizar sus instalaciones, debe anticiparse a las demandas cada vez más exigentes en materia de calidad, de higiene, de seguridad y de protección del medio ambiente.

La concepción y diseño de una planta de procesamiento de alimentos conjugando todos estos aspectos, es la base para conseguir el éxito de la empresa.

PROCESOS DE CONSERVACIÓN DE ALIMENTOS

A. CASP VANACLOCHA y J. ABRIL REQUENA

494 págs. Ilust. color 2.^a ed. corregida 2003. 39,50 €
ISBN: 84-8476-169-X

CONTENIDO: BASES DE LA CONSERVACIÓN DE ALIMENTOS. Alteración de los alimentos. Métodos industriales de conservación de alimentos. MÉTODOS BIOLÓGICOS DE CONSERVACIÓN. Conservación por fermentación. CONSERVACIÓN POR CALOR. Fundamentos de los tratamientos térmicos. Pasteurización. Escaldado. Esterilización. Cocción. CONSERVACIÓN A TEMPERATURAS BAJAS. Utilización de bajas temperaturas en la conservación de alimentos. Refrigeración. Congelación. PROCESOS DE CONSERVACIÓN BASADOS EN LA REDUCCIÓN DEL CONTENIDO DE AGUA. Secado. Concentración. PROCESOS NO TÉRMICOS DE CONSERVACIÓN. Tecnologías emergentes en la conservación de alimentos.



CALIDAD ALIMENTARIA: RIESGOS Y CONTROLES EN LA AGROINDUSTRIA

J. L. LÓPEZ GARCÍA

316 págs. 1999. 24,50 €. ISBN: 84-7114-811-0

Esta obra está hecha pensando en todos los técnicos que tienen que intervenir en la cadena alimentaria, bien en la fabricación como en la distribución de los alimentos. Y principalmente en los Ingenieros Agrónomos, ya que la agricultura hoy no es sólo producir materia prima, sino aportar alimentos frescos y transformados al consumidor en una sociedad cada vez más compleja y más exigente. El ARPC (Análisis de Riesgos y Control de Puntos Críticos), sobre el que se basa esta obra, es un sistema de calidad preventivo y dinámico cuya implantación trae consigo un aumento de la calidad y seguridad de los alimentos repercutiendo en la salud colectiva y en el bien común. Constituye una sola base sobre la que asentar programas de higiene de los alimentos

que contemplen toda la cadena alimentaria, desde la obtención de la materia prima hasta el consumidor final. Aunque el ARPC se conocía desde hace algún tiempo, no ha sido hasta su introducción en la legislación y por tanto obligatoriedad cuando realmente ha empezado a interesar. La Unión Europea exige la implantación de este sistema de calidad de forma obligatoria y quien no siga esta normativa será penalizado. La Administración europea y nacional velan así cada vez más por la seguridad e higiene de los alimentos.

Ediciones Mundi-Prensa



TERMOTECNIA

Aplicaciones agroindustriales

P. AMIGO MARTÍN

386 págs. 2000. 29 €. ISBN: 84-7114-857-9

Este libro va dirigido a estudiantes y profesionales de la ingeniería agrónómica y a todas aquellas personas interesadas en el sector de la industria agroalimentaria.

En los primeros capítulos se recogen los fundamentos de la transmisión del calor y el intercambio térmico y se describen los equipos más modernos con los que se cuenta en la actualidad. Los tres capítulos siguientes se dedican al estudio de las propiedades de los materiales aislantes más utilizados y su puesta en obra, como herramienta para su empleo en el campo de la frigoconservación de los alimentos y la protección de las instalaciones ganaderas e industriales, y se resume la normativa vigente en materia de aislamiento térmico. Los capítulos 14 y 15 están dedicados al vapor de agua y a la descripción de las instalaciones necesarias para su utilización. Finalmente, en el último capítulo, se exponen las propiedades del aire húmedo y los diagramas utilizados en los cálculos relacionados con él, que sirven de base para que el lector pueda abordar las aplicaciones prácticas en las que este fluido interviene. El texto cuenta con numerosas ilustraciones de los equipos descritos, lo que hace la lectura más amena y facilita la comprensión de los mismos.

REFRIGERACIÓN, CONGELACIÓN Y ENVASADO DE LOS ALIMENTOS

A. MADRID VICENTE; J.M. GÓMEZ-PASTRANA; F. SANTIAGO; REGIDOR; J.M. MADRID VICENTE; J. MADRID CENZANO

303 págs. Enc. 2003. 30 €. ISBN: 84-8476-167-3

CONTENIDO: Características y propiedades de los distintos gases más frecuentemente utilizados en la elaboración, envasado y conservación de alimentos y bebidas. Refrigeración y congelación ultrarrápida de productos alimenticios de nitrógeno líquido. Aplicación de la congelación ultrarrápida en los distintos productos alimenticios. El frío mixto para la congelación de productos alimenticios. Inertización durante los procesos de fabricación de alimentos y bebidas. Conservación y acondicionamiento de los alimentos (envasado) mediante gases. Otras aplicaciones de los gases en alimentación. Condiciones de almacenamiento frigorífico de los alimentos. Condiciones del transporte terrestre de los alimentos a temperatura regulada. Norma general relativa a los alimentos ultracongelados destinados a la alimentación humana. Norma general de etiquetado, presentación y publicidad de los productos alimenticios. Ley de envases y residuos de envases. Bibliografía.



TECNOLOGÍA DE MATADEROS

R. LÓPEZ VÁZQUEZ / A. CASP VANACLOCHA

430 págs. Ilust. color. 2004. 45 €. ISBN: 84-8476-164-9

CONTENIDO: Prólogo. LA CARNE Y LOS ANIMALES DE ABASTO. Carne y músculo. Animales de abasto. TRANSPORTE Y BIENESTAR ANIMAL. Transporte a sacrificio. Manejo y bienestar animal. TECNOLOGÍA E INGENIERÍA FRIGORÍFICA. El frío y la carne. Instalaciones frigoríficas en mataderos. DESPOJOS Y SUBPRODUCTOS DE MATADERO. DISEÑO DE MATADEROS. AGUAS RESIDUALES. CALIDAD Y SEGURIDAD ALIMENTARIA. Calidad de la canal y de la carne. Microbiología de la carne. APPCC en mataderos. Trazabilidad y etiquetado de la carne. Higienización de mataderos. Legislación.





MANUAL DE TRATAMIENTO, RECICLADO, APROVECHAMIENTO Y GESTIÓN DE LAS AGUAS RESIDUALES DE LAS INDUSTRIAS AGROALIMENTARIAS

M. SEOÁÑEZ CALVO

465 págs. 2003. 38 €. ISBN: 84-8476-104-5

CONTENIDO: Introducción. Bases generales. La industria agroalimentaria. Procesos. Calidad y detección. Características básicas de las aguas residuales de las industrias agroalimentarias. Características específicas de las aguas residuales de las industrias agroalimentarias. Técnicas de tratamiento de las aguas residuales de las industrias agroalimentarias. Aprovechamiento. Problemas sanitarios. Efectos ecológicos. Legislación y normativa vigente sobre las aguas residuales de las industrias agroalimentarias. Bibliografía.

ECONOMÍA DE LA EMPRESA AGROALIMENTARIA

R. ALONSO SEBASTIÁN y A. SERRANO BERMEJO

383 págs. 2.^a ed. 2004. 26 €
ISBN: 84-8476-193-2

CONTENIDO: Conceptos generales en economía de la empresa agroalimentaria. Balance y cuenta de resultados. Análisis financiero de balances. Financiación y autofinanciación. Fuentes de financiación a largo plazo. Fuentes de financiación a corto plazo. Análisis y selección de inversiones. La producción en la empresa agroalimentaria. Los costes en los procesos de producción. Renovación de equipos. Programación lineal en la empresa agroalimentaria. La toma de decisiones en situación de incertidumbre. Bibliografía.



ADITIVOS ALIMENTARIOS

N. CUBERO, A. MONFERRER y J. VILLALTA

240 págs. 2002. 30 €.
ISBN: 84-8476-088-X



El libro Aditivos Alimentarios es más bien un manual de referencia, especialmente para aquellos que empiezan en el mundo de la tecnología alimentaria. Hemos intentado hacer una recopilación completa y exhaustiva de todos ellos y de sus características; agrupándolos según su principal función y tratando de presentar la información de una forma clara y escueta. Al inicio de cada capítulo se introduce el grupo de aditivos de una forma general, presentando sus características comunes como grupo. Seguidamente se exponen todos los aditivos que componen el grupo junto con sus características tecnológicas. Al

final del libro unos cuadros comparativos por grupos permiten compararlos fácilmente.



INTERNET, TRAZABILIDAD Y SEGURIDAD ALIMENTARIA

Coordinador: J. BRIZ

494 págs. 2003. 35 €. ISBN: 84-8476-140-1

CONTENIDO: PLANTEAMIENTOS GENERALES Y CONCEPTOS BASICOS. Funcionamiento y Gestión de la Cadena Alimentaria. Metodología de estudios de la Cadena Alimentaria. Seguridad Alimentaria y nuevas tecnologías de la Era de la Información. Normativas de control en la cadena alimentaria. Instituciones y Seguridad Alimentaria. Análisis histórico. ANALISIS REGIONAL. Control de calidad y trazabilidad alimentaria en la Unión Europea. Internet, comercio electrónico y control de calidad en la Cadena Alimentaria de Estados Unidos. Trazabilidad y Control de calidad en la Cadena Alimentaria en países en desa-

rollo. Caso de América Latina. ANALISIS DE LOS ESLABONES DE LA CADENA ALIMENTARIA. Internet en el mundo rural y gestión de calidad en la fase de producción. Internet, comercio electrónico y control de calidad en la Industria Alimentaria. Internet y comercio electrónico en la distribución alimentaria. APLICACIONES SECTORIALES. Aplicación de la trazabilidad al mundo empresarial. Modelos de negocios en la era de Internet: Aplicaciones a la Cadena Alimentaria.

El libro aborda con rigor profesional el problema de la Seguridad Sanitaria Alimentaria, a través de la Trazabilidad, en el nuevo marco de las tecnologías de la información y la comunicación, de forma específica, en Internet. Por ello es de especial interés para empresarios, funcionarios, académicos y estudiosos, que se enfrentan al reto de un funcionamiento adecuado de la cadena alimentaria, y confianza del consumidor. De forma pedagógica se exponen metodologías y conceptos, seguidas de una visión por áreas geográficas (UE, EE.UU., Latinoamérica), entrando posteriormente en detalle en cada uno de los eslabones de la cadena alimentaria, sin olvidar los aspectos específicos, tales como los modelos de negocios. En terminología de estrategia empresarial, podemos considerar que tiene un enfoque «global» es decir, una visión global del tema, combinada con la problemática local. Enriquece el contenido la exposición de los diversos autores, tanto nacionales, como internacionales, de diversa formación y profesión.

GESTIÓN DE LA SEGURIDAD ALIMENTARIA

Análisis de su aplicación efectiva

J.J. FRANCISCO POLLEDO

154 págs. 2002. 18 €. ISBN: 84-8476-081-2

La Seguridad Alimentaria (SA) se ha constituido en una exigencia social prioritaria y los fracasos en este área son juzgados con un alto nivel de intransigencia, tanto por los ciudadanos como por los mercados –propias de las sociedades occidentales que reclaman la consecución para ésta y para otras áreas, del riesgo cero–. Consecuentemente, alcanzar esos niveles requeridos se ha convertido en un objetivo estratégico, tanto para los operadores económicos que compiten en el mercado como para las instancias administrativas que tienen la obligación de garantizar la seguridad. Pero si, como se sostiene en esta obra, «la seguridad no es el espontáneo fruto de hacer lo obvio, sino la meritoria consecuencia de planificar un resultado–, necesitamos el concurso no sólo de los cuerpos de doctrina tradicionales –la epidemiología; la higiene, microbiología y tecnología de los alimentos; la agronomía; la química; la economía o el derecho administrativo, entre otras–, sino que, además, precisaremos instrumentos de gestión, es decir, de organizar alrededor de los objetivos de SA aquellos recursos humanos y materiales que las compañías y la Administración destinan a este fin.



Para la obtención industrial de alimentos de máxima calidad, cada una de las etapas que conforman un determinado proceso industrial debería estar diseñada de un modo adecuado. En este libro de *Operaciones Unitarias en la Ingeniería de Alimentos* se presentan de forma sistemática la información básica necesaria para diseñar toda una serie de procesos alimentarios y el equipo necesario para llevarlos a cabo. Cubre con detalle las operaciones unitarias más comunes de la ingeniería de alimentos, incluyendo el modo de llevar a cabo cálculos de diseño específicos. Los capítulos iniciales presentan aspectos básicos de la transferencia de materia, calor y cantidad de movimiento. Contiene un capítulo centrado en los balances macroscópicos de materia y energía, que son necesarios en el planteamiento del modelo matemático de las diferentes operaciones unitarias. Los capítulos posteriores presentan descripciones detalladas de las operaciones unitarias, tanto desde sus aspectos fundamentales como sus aplicaciones. Cada capítulo concluye con una serie de problemas resueltos como ejemplos aplicados de la teoría expuesta.

Características más importantes:

- Presenta los balances necesarios para plantear el modelo matemático de cualquier tipo de operación.
- Expone con detalle las operaciones unitarias más comunes de la ingeniería de alimentos.
- Discute el equipo utilizado en las operaciones de refrigeración, congelación, pasteurización, esterilización, evaporación y deshidratación.
- Proporciona información sobre las operaciones de destilación, absorción, adsorción, intercambio iónico y extracción sólido-líquido.
- Incluye una amplia colección de problemas resueltos.

De la misma colección: «Diseño de industrias agroalimentarias» (Casp), «Tecnología de mataderos» (López y Casp), «Calidad alimentaria. Riesgos y controles en la agroindustria» (López).



9 788484 761631

ISBN: 84-8476-163-0

www.mundiprensa.com

