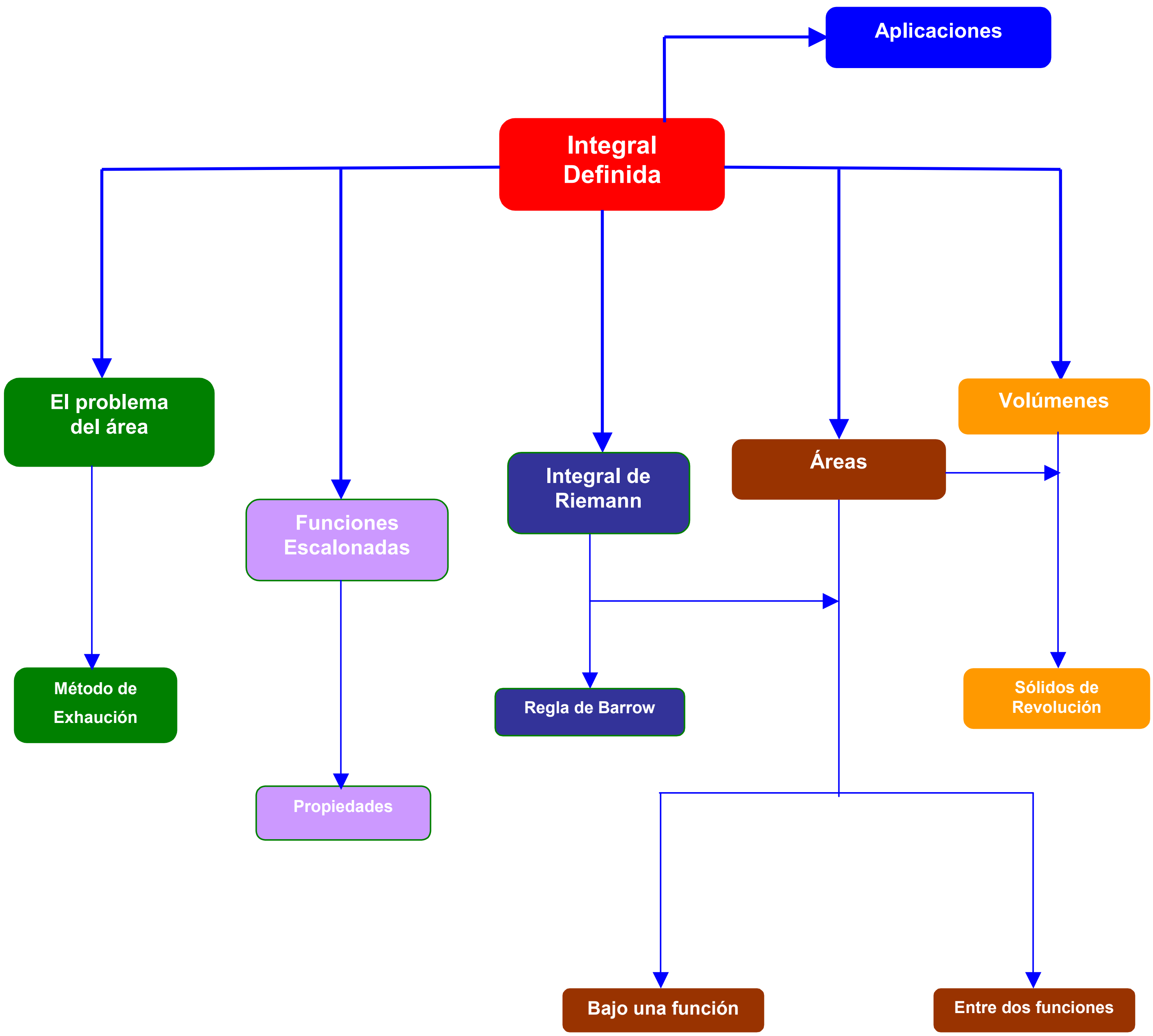
LA INTEGRAL DEFINIDA Y SUS APLICACIONES

Autores: Paco Martínez (jmartinezbos@uoc.edu), Patrici Molinàs (pmolinas@uoc.edu), Ángel A. Juan (ajuanp@uoc.edu).

ESQUEMA DE CONTENIDOS



Financiado por la Secretaría de Estado de Educación y Universidades (MECD)

INTRODUCCIÓN

En este *math-bock* trataremos el problema del cálculo del Área y su importancia en otras ramas de la ciencia para la resolución de situaciones reales, tales como puede ser el cálculo del espacio recorrido por un móvil en Física.

Le daremos un enfoque histórico y veremos algunos ejemplos que surgieron hace más de 2.000 años, cuando los griegos inventaron el método de exhaución para calcular áreas de figuras planas. Veremos la relación que hay entre el área y la integral definida y la regla de Barrow, conexión entre el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral.

Calcularemos también volúmenes de revolución, además de áreas, por medio de integrales definidas.

OBJETIVOS

1. Conocer y aplicar el método de exhaución.
2. Calcular integrales definidas de funciones escalonadas y saber sus propiedades.
3. Calcular el área encerrada por una función y el eje OX en un determinado intervalo.
4. Hallar la superficie encerrada entre dos curvas.
5. Saber utilizar la regla de Barrow para calcular integrales definidas y conocer la relación entre las derivadas y las integrales.
6. Calcular volúmenes de revolución engendrados por el giro alrededor del eje OX del recinto limitado por una o dos funciones.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

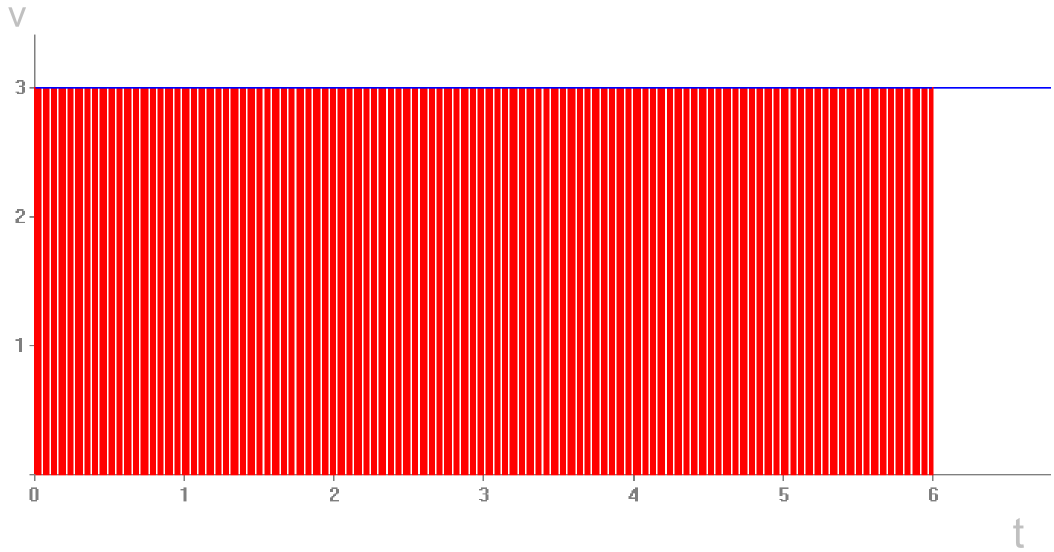
A fin de poder aprovechar al máximo esta unidad es recomendable tener conocimientos básicos sobre funciones de una variable, derivación e integración indefinida, y uso del programa Mathcad.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

El problema del cálculo del área

Uno de los problemas que más repercusión ha tenido en la historia de las matemáticas es el del estudio del área encerrada bajo una curva, pues tiene una aplicación inmediata en algunos problemas de física.

Ejemplo: Consideremos un cuerpo que se mueve con una velocidad constante de 3m/s. La gráfica velocidad-tiempo del cuerpo es la representada en el dibujo. Calcular el espacio recorrido por el cuerpo entre t = 0 y t = 6, con las fórmulas de física conocidas. Estudiar la relación que existe entre este resultado y el área encerrada por las rectas t = 0, t = 6, v = 0 y v = 3.

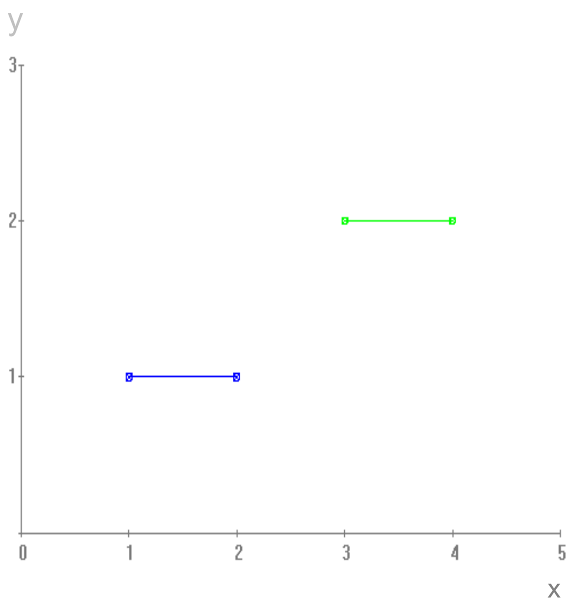


Solución:

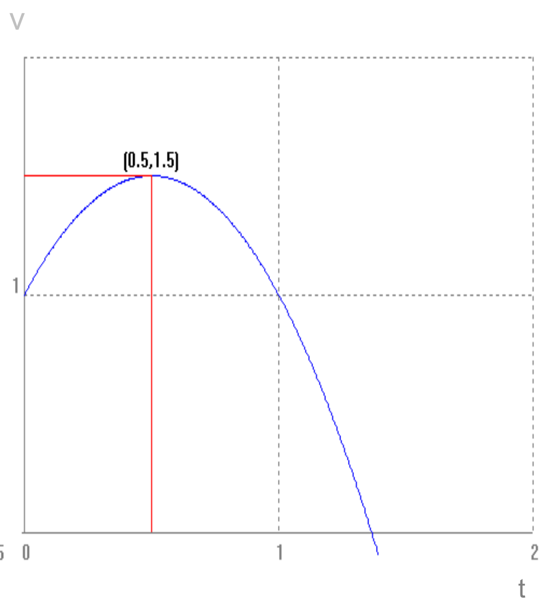
El hecho de que la velocidad sea constante nos indica que estamos en un caso de MRU, por lo que deberemos usar la fórmula e = v*t que nos da el espacio recorrido por el cuerpo si conocemos su velocidad y el tiempo transcurrido t. Por lo tanto, para calcular el espacio recorrido por el cuerpo desde t = 0 hasta t = 6 hacemos e = 3*6 = 18, que coincide con el área del rectángulo coloreado, y que es al mismo tiempo el área encerrada por las rectas:
t = 0, t = 6, v = O y v = 3.

Hasta ahora hemos calculado el área encerrada por funciones continuas pero ¿qué haríamos para calcular el área encerrada bajo la función del dibujo 1 entre x = 1 y x = 4?, ¿es siempre posible descomponer la figura encerrada bajo una curva en figuras cuya área conocemos?

Para investigarlo, consideremos la gráfica velocidad-tiempo del dibujo 2, y calculemos el espacio recorrido entre t = 0 y t = 1. ¿Cómo calcularíamos, aproximadamente, el área encerrada bajo esta función entre t = 0 y t = 1?. Acotaremos dicha área superior e inferiormente, utilizando rectángulos. ¿Cómo podríamos hacer que estas acotaciones fuesen cada vez más exactas?



Dibujo 1. Gráfica función escalonada



Dibujo 2. Gráfica $v(t) = -2t^2 + 2t + 1$

Es intuitivo que el área encerrada por la función del dibujo 1 se calcula sumando las áreas de los rectángulos que define la función entre dichos puntos. Este tipo de funciones cuya gráfica en un intervalo son tramos de rectas paralelas al eje de las x, se llaman funciones escalonadas, y las estudiaremos con más detalle más adelante.

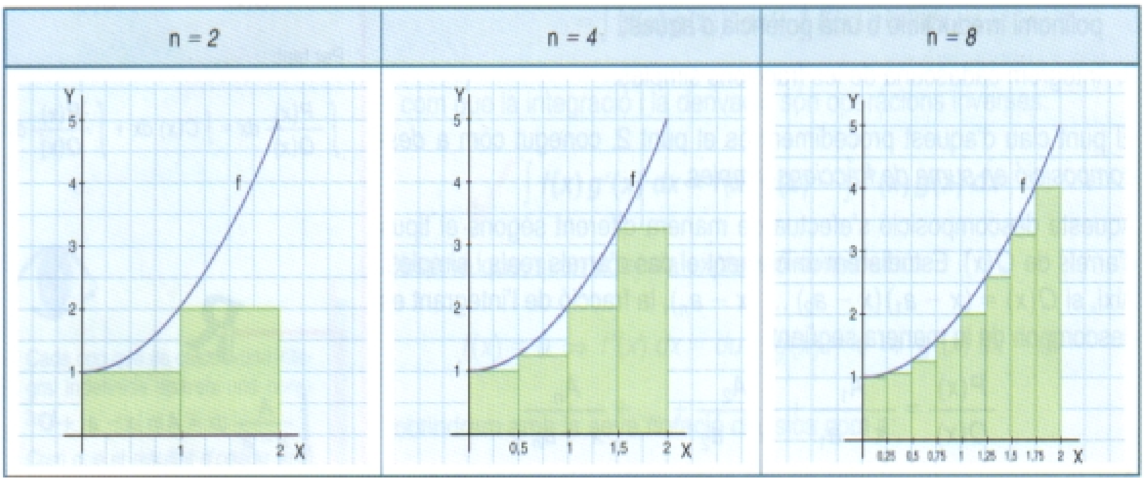
Como se ve en el dibujo 2, no siempre es posible descomponer el área encerrada bajo una curva, en figuras geométricas simples. En el caso del ejercicio, dicha área se encuentra comprendida entre un rectángulo de base 1 y altura 1, y un rectángulo de base 1 y altura 1.5, por lo tanto sabemos que se encuentra entre uno y uno y medio, pero no podemos decir con exactitud cuál es su valor. Para estos casos precisamente es para los que se ideó el método de exhaución.

El método de Exhaución.

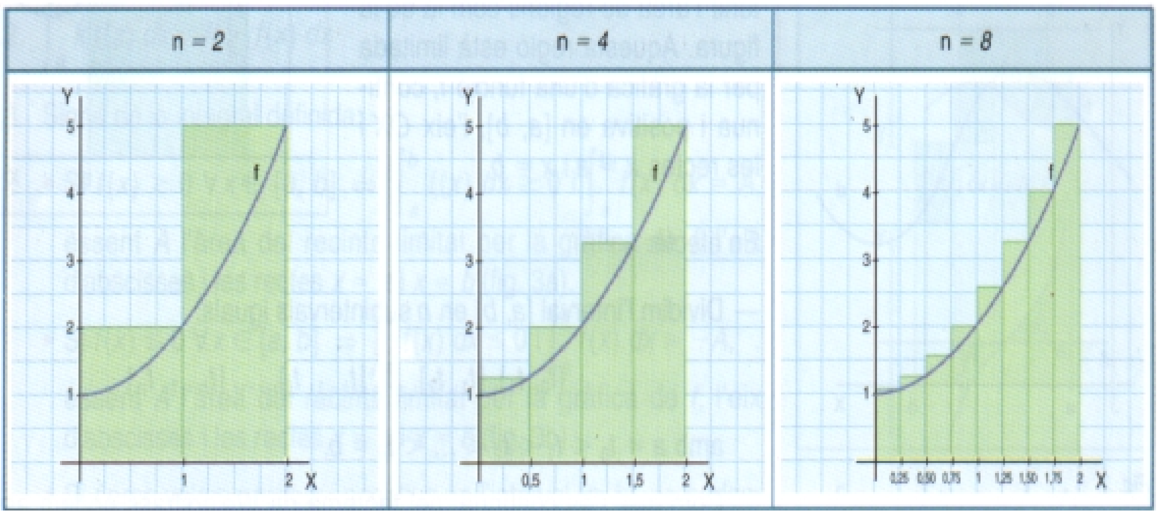
El **método de exhaución** fue ideado por el matemático griego Arquímedes para determinar el área de un recinto. Este método consiste en inscribir y circunscribir el recinto considerado en regiones poligonales cada vez más próximas a él, tendiendo a llenarlo y cuyas áreas se pueden calcular fácilmente. Así se obtienen valores mayores y menores que el área que deseamos calcular y que se aproximan, tanto más a dicho valor, cuanto mayor sea el número de lados de regiones poligonales inscritas y circunscritas.

Según el método de exhaución, para aproximar el área encerrada entre la función, el eje OX, y las rectas x = 0, x = 2, tomamos poligonales que inscriban y circunscriban dicho recinto. En este caso dichas poligonales son rectángulos y es evidente que el área se conocerá con mayor exactitud cuanto menor sea la base de los rectángulos tomados.

Consideremos primero rectángulos inscritos en el recinto. En este caso la suma de las áreas de los rectángulos es menor que el área del recinto, pero se van aproximando más a su valor según vayamos tomando rectángulos de menor base, como podemos ver en las aproximaciones de los dibujos.



Si consideramos ahora rectángulos que circunscriban al recinto, es evidente que la suma de las áreas de dichos rectángulos es mayor que el área que encierra la función, pero a medida que vamos tomando rectángulos cuyas bases sean menores, nuestra aproximación será más exacta.

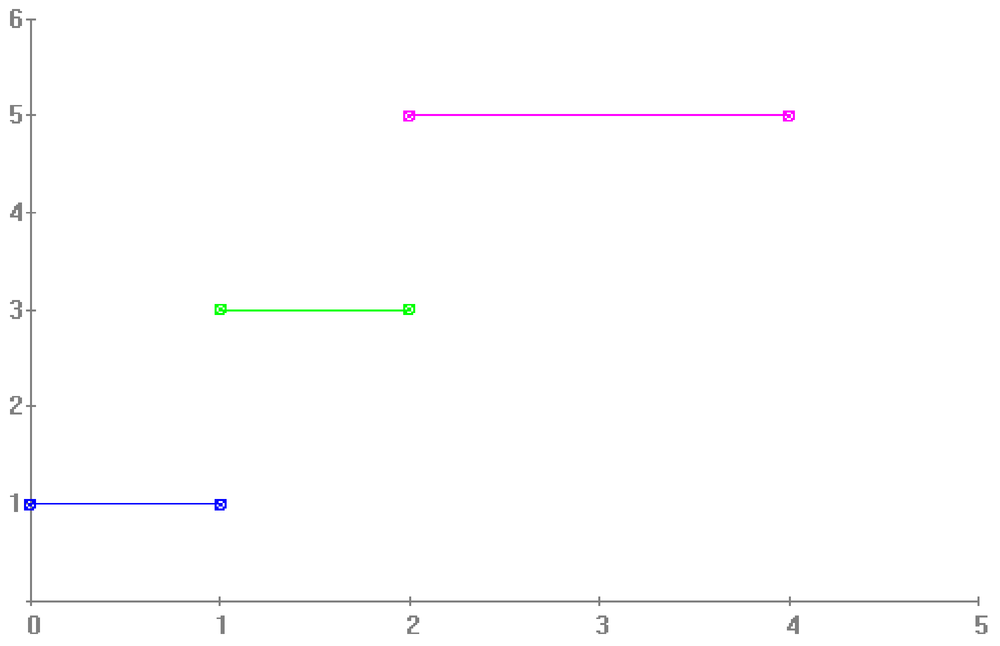


Todo ello pone de manifiesto que al dividir el intervalo [0,2] en un número infinitamente grande de intervalos iguales, el área por defecto coincide con el área por exceso y ambas con el área del recinto que se está calculando.

- ## Integral de una función escalonada. Propiedades.

Nos parece interesante, antes de definir la integral de una función cualquiera, estudiar la integral de funciones escalonadas, por dos razones: primera, y siguiendo nuestro principio de dar los conceptos de forma gradual según su nivel de dificultad, que son más intuitivas y fáciles, y todas las propiedades de estas integrales son las mismas que las de las integrales de funciones generales; y segunda, porque la definición que daremos de integral de una función general, será a partir de estas funciones. Las funciones escalonadas hacen de nexo entre el método de exhaución y las integrales definidas de cualquier función.

Ejemplo: Dada la función del dibujo, calcular a mano el área que delimitan f(x), las rectas x = 0, x = 5 y el eje OX.



Como vimos en el apartado 1, este tipo de funciones se llaman escalonadas. Nos interesa calcular el área que delimitan f(x), las rectas x = 0, x = 5 y el eje OX.

El área que nos interesa se puede descomponer en tres rectángulos: el "rectángulo" A cuya base es el intervalo [0,1], y altura 1; el rectángulo B de base [1,2], y altura 3; y el rectángulo C de base [2,4], y altura 5. Por lo tanto, para calcular el área total hemos de sumar el área de estos tres rectángulos. Si denotamos por x_0, x_1, x_2, x_3 los puntos que delimitan las bases de los rectángulos y por r_1, r_2, r_3 las alturas de dichos rectángulos tenemos que:

A_a = (1-O) * 1 = 1 = (x_1-x_0) * r_1

A_b = (2-1) * 3 = 4 = (x_2-x_1) * r_2

A_c = (4-2) * 5 = 2 = (x_3-x_2) * r_3

Luego: A = A_a + A_b + A_c = (x_1-x_0) * r_1 + (x_2-x_1) * r_2 + (x_3-x_2) * r_3 = $\sum_{k=1}^{3}(x_k - x_{k-1}) \cdot r_k$

<u>Definición</u>:

Una **función** f, definida en un intervalo [a, b], es **escalonada** cuando existe una partición del intervalo [a, b] de modo que f toma valores constantes en el interior de cada uno de los intervalos de la partición. Una **Partición** del intervalo [a, b] es una colección de intervalos contenidos en [a, b], disjuntos dos a dos (sin ningún punto en común) y cuya unión es [a,b]. Se denota por *P*: $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$.

Por lo tanto, en una función escalonada cualquiera, el área vendrá dada por la siguiente fórmula:

$$A = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \cdot r_k$$

Se define la <u>integral desde a hasta b</u> de la función escalonada f, y se denota $\int_a^b f(x)dx$, al número real

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \cdot r_k$$

Como se puede ver, la integral de una función escalonada desde a hasta b coincide con el área encerrada por dicha función, el eje OX y las rectas x = a, x = b.

<u>Propiedades</u>:

Veamos a continuación las propiedades que verifican las integrales de las funciones escalonadas. Estas propiedades son consecuencia inmediata de las propiedades del área de un conjunto, debido a la definición que hemos dado de integral de una función escalonada.

1. $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
2. $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad \forall k \in R$

3. Si $f(x) \geq 0 \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$
4. Si $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
6. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
7. $\int_a^a f(x)dx = 0$

Estas propiedades las verificará también la integral de una función cualquiera.

Integral de Riemann.

Vamos a definir la integral de una función cualquiera, f(x), en un intervalo [a, b], con la única condición de que esté acotada. Se toman todas las funciones escalonadas g(x) por defecto, y todas las funciones escalonadas h(x) por exceso, es decir, g(x) ≤ f(x) ≤ h(x) cuando x ∈ [a, b]. En estas condiciones, si existe un único número I que cumpla $\int_a^b g(x)dx \leq I \leq \int_a^b h(x)dx$, a este número I se le llama **integral de f(x) entre a y b**.

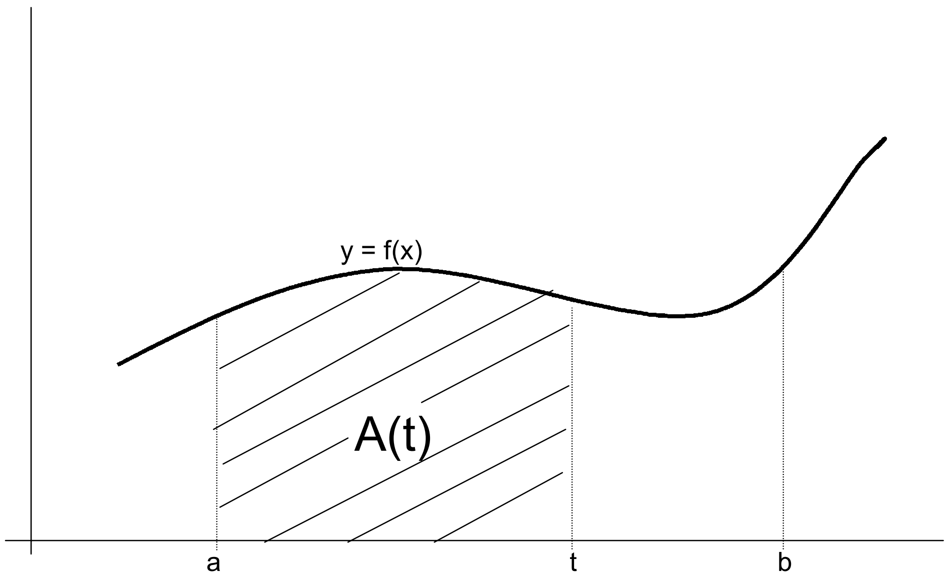
Se representa: $I = \int_a^b f(x)dx$ y se lee "integral desde a hasta b, de f(x), diferencial de x".

<u>Teorema</u>:

Toda función continua en un intervalo es integrable en dicho intervalo.

<u>Teorema Fundamental del Cálculo</u>

Si f(x) es integrable en el intervalo [a, b], su **función área**, A(t), se define de la siguiente forma: $A(t) = \int_a^t f(x)dx \quad \forall t \in [a,b]$. En estas condiciones, si f es continua en [a, b], la función A es una primitiva de la función f en [a, b].



Regla de Barrow:

Si f(x) es una función continua en [a, b], y F(x) una primitiva de f(x), es decir, F '(x) = f(x) para cualquier x $\in$ (a, b), entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

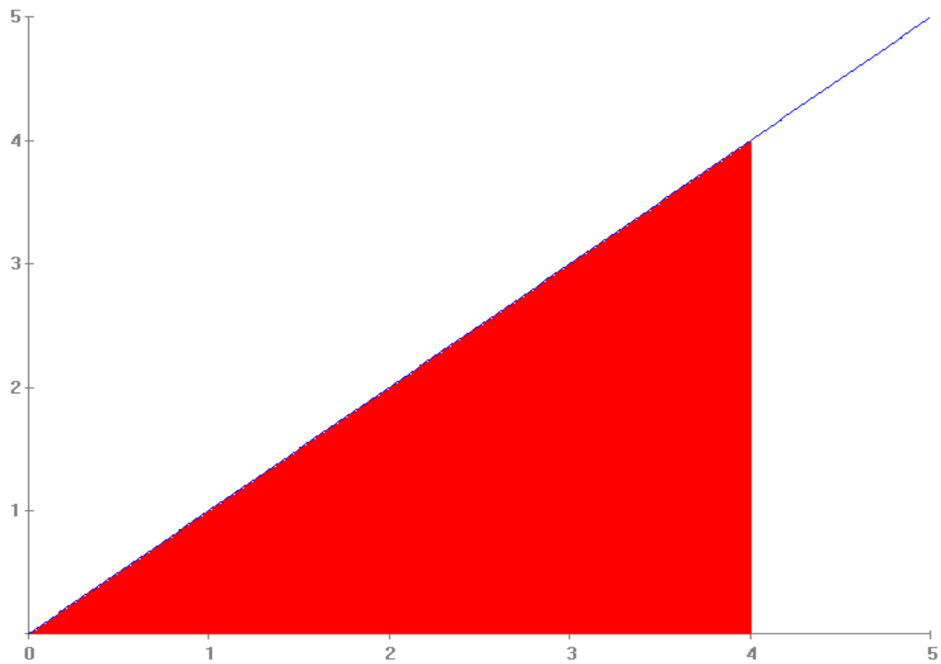
La importancia de la regla de Barrow es doble: Por una parte, es un método de cálculo de integrales definidas que no exige hallar funciones escalonadas; por otro lado, representa una conexión entre el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral.

Área del recinto limitado por una función en [a,b]

- **Área del recinto limitado por una función positiva en [a,b]**

Sabemos que la integral de una función escalonada entre x = a y x = b coincide con el área encerrada por dicha función, el eje y = 0, y las rectas x = a y x = b. Veamos que esta relación se cumple también con la integral definida de una función cualquiera, para ello, plantearemos el cálculo de áreas encerradas por funciones no escalonadas, y que se pueden calcular geométricamente, y la posterior comprobación de que dicha área coincide con el valor de la integral.

Ejemplo: Hallar el área del triángulo determinado por la bisectriz del primer cuadrante, el eje OX y la recta x = 4. Calcular esta área geométricamente, y comprobar que coincide con la integral entre x = 0 y x = 4 de la función f(x) = x (bisectriz).



Geométricamente tenemos un triángulo, cuya área vale: $A_T = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$

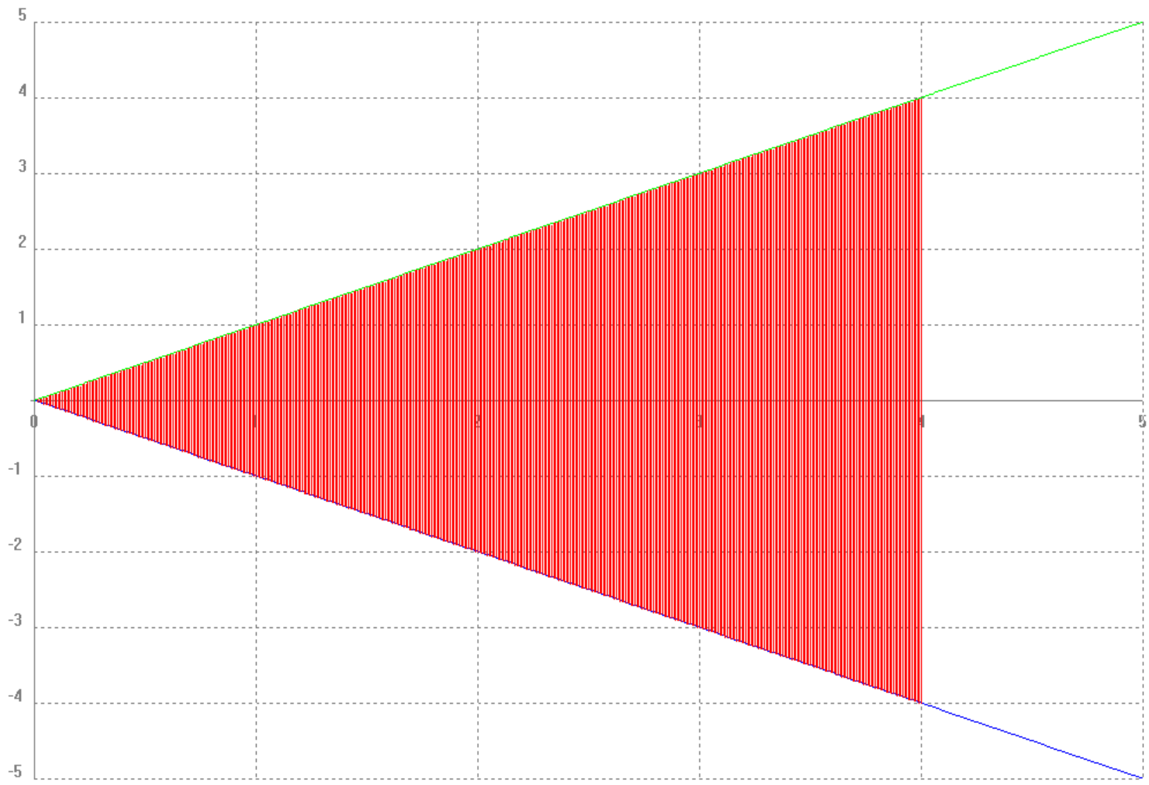
La integral entre 0 y 4 de la función f(x) = x vale: $\int_0^4 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 8$

Luego si una función positiva f(x), definida en un intervalo [a,b], es integrable, la integral $\int_a^b f(x)dx$ representa el área del recinto delimitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas x = a y x = b.

- **Área del recinto limitado por una función negativa en [a,b]**

Veamos la relación que hay entre los recintos limitados por las gráficas de f(x) (siendo ésta negativa) y -f(x), por medio de un ejemplo sencillo y calcularemos, en este ejemplo, el área del recinto determinado por dicha función negativa.

Ejemplo: Sea f(x) = -x y [a,b] = [0,4]. Hemos calculado, en el apartado anterior, el área que encierra f(x) = x entre 0 y 4.



Vemos, claramente, que el área del recinto limitado por una función negativa f(x) en [a,b] es la misma que la limitada por la gráfica de -f(x), cuya función es ya positiva y podemos calcular el área mediante una integral como en el apartado anterior.

La integral entre 0 y 4 de la función f(x) = -x vale:

$$\int_0^4 - xdx = -\left.\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = -\left[\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = -8$$

Comprobamos que si cambiamos el signo de la función, la integral simplemente cambia de signo, pero el valor absoluto es el mismo.

Luego, para funciones negativas: $\acute{A}rea = -\int_a^b f(x)dx$.

Conviene tener presente lo anterior para que los resultados sean correctos; esto pone de manifiesto que los conceptos de integral definida y área de un recinto son distintos.

En definitiva, tanto para funciones positivas como para las negativas, el área o superficie vendrá dada por: $S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

- **Área del recinto limitado por una función que cambia de signo en [a,b]**

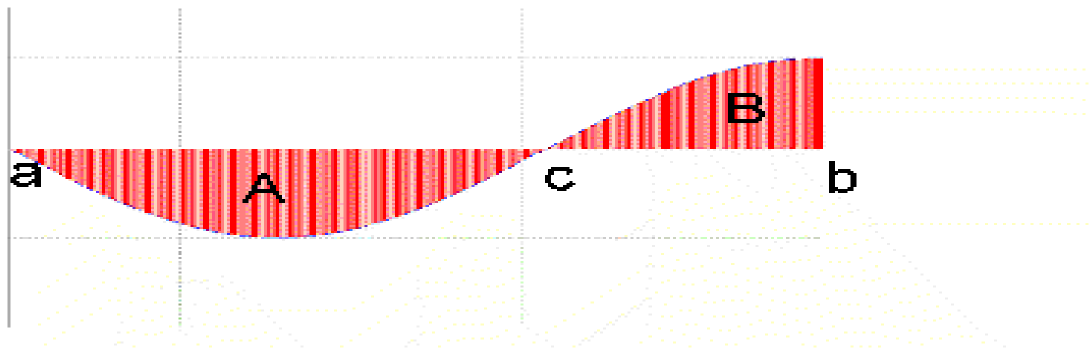
  Finalmente, si la gráfica de una función queda parte por encima, y parte por debajo del eje de abscisas, la integral se descompondrá en varios sumandos cuando se quiera calcular el área de la región que delimita con el eje de abscisas en el intervalo [a, b].

  Sabemos que:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Ahora bien, el área de la región A es $S_A = -\int_a^c f(x)dx$, y el área de la región B es $S_B = \int_a^b f(x)dx$. De todo esto se desprende que el área de la región rayada es:

$$S = S_A + S_B = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

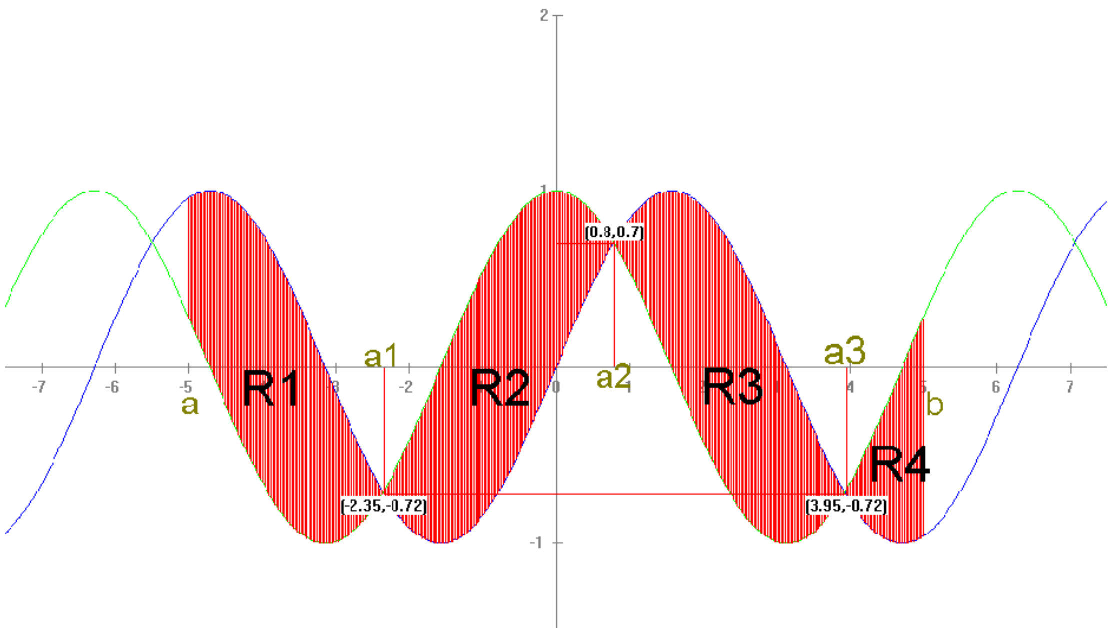


Si la función f se anula y cambia de signo en más puntos, se procede de forma análoga, calculando las áreas de cada uno de los recintos.

Área del recinto limitado por dos funciones

En este apartado vamos a calcular el área de recintos planos más generales que los estudiados en los apartados anteriores.

Uno de los problemas que suele plantearse es la determinación exacta de la región cuya área queremos calcular. Como norma conviene, siempre que sea posible, hacer una representación lo más aproximada posible de dicha región o recinto.



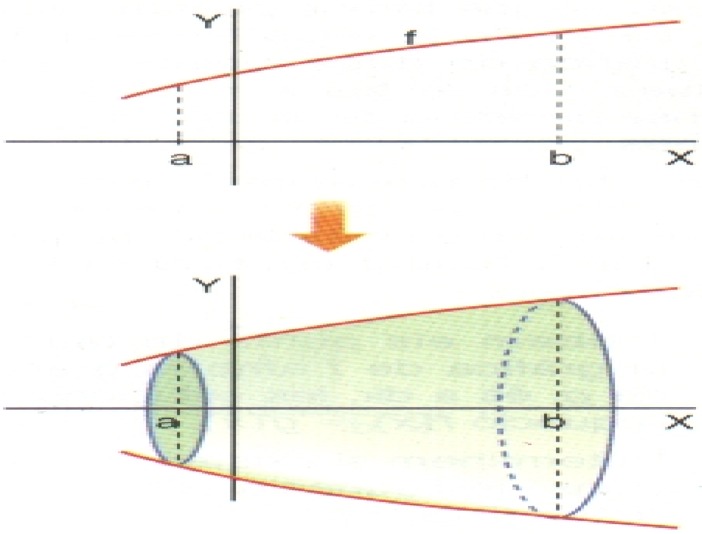
Sean f y g dos funciones continuas en [a,b]. Supongamos que sus gráficas se cortan en [a,b] para x = a_1, x = a_2, ..., x = a_n, con lo que determinan n+1 regiones R_1, R_2,..., R_{n+1}.

El área de cada región R_i es $\left|\int_{a_{i-1}}^{a_i} (f(x)-g(x))dx\right|$, luego el área limitada por las dos funciones en el intervalo [a,b] vale:

$$Área = R_1 + R_2 + \cdots + R_{n+1} = \left|\int_a^{a_1} (f(x)-g(x))dx\right| + \left|\int_{a_1}^{a_2} (f(x)-g(x))dx\right| + \cdots + \left|\int_{a_n}^{b} (f(x)-g(x))dx\right|$$

Cálculo de volúmenes

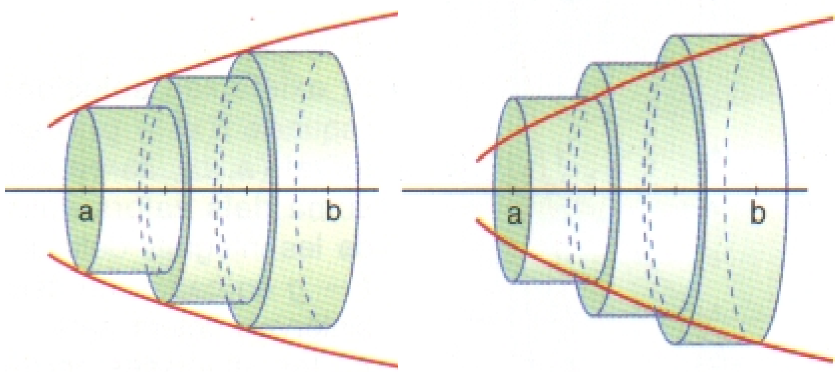
Dada una función f continua y R el recinto limitado por la gráfica de f y las rectas de ecuaciones x = a, x = b, y = 0, hacemos girar dicho recinto alrededor del eje OX, engendrando un cuerpo sólido de revolución.



Se trata ahora de hallar el volumen de este cuerpo engendrado por R. Para ello hay que seguir un proceso completamente análogo al realizado en la definición de integral definida.

Consideremos una partición cualquiera de [a,b]: $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$, y sea V(f;a,b) el volumen del sólido de revolución.

Tal como se observa en la figura el volumen V(f;a,b) del cuerpo de revolución está comprendido entre la suma de los volúmenes de los cilindros interiores y la suma de los volúmenes de los cilindros exteriores.



Teniendo en cuenta que el volumen de un cilindro es $\Pi r^2 h$, se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{n}\pi m_i^2(x_i-x_{i-1})\le V(f;a,b)\le\sum_{i=1}^{n}\pi M_i^2(x_i-x_{i-1})$$

donde $m_i = mín\{f(x)/x_{i-1}\le x\le x_i\}$ y $M_i = máx\{f(x)/x_{i-1}\le x\le x_i\}$, los cuales existen por ser la función f continua.

Si el número de puntos de la partición aumenta, las sumas inferiores y superiores tienden a la integral definida de la función Πf^2 en el intervalo [a,b]. Parece, pues, natural asignar al **volumen del sólido de revolución** la integral definida

$$\int_a^b \pi f^2(x)dx$$

es decir,

$$V(f;a,b) = \int_a^b \pi f^2(x)dx$$

Podemos hacer esta integral porque al ser f continua, también lo es Πf^2.

Nota: Si consideramos dos funciones f y g tales que f(x) ≥ g(x) ≥ 0 en [a,b], el volumen del sólido de revolución que generan al girar alrededor del eje OX es:

$$V = V(f;a,b) - V(g;a,b) = \int_a^b \pi f^2(x)dx - \int_a^b \pi g^2(x)dx = \int_a^b \pi\left[f^2(x) - g^2(x)\right]dx$$

Si la región R determinada por dos funciones no cumple las condiciones del enunciado siempre se podrán elegir intervalos en que sí se verifiquen; hecho esto, se calcularían por separado los volúmenes y se sumarían.

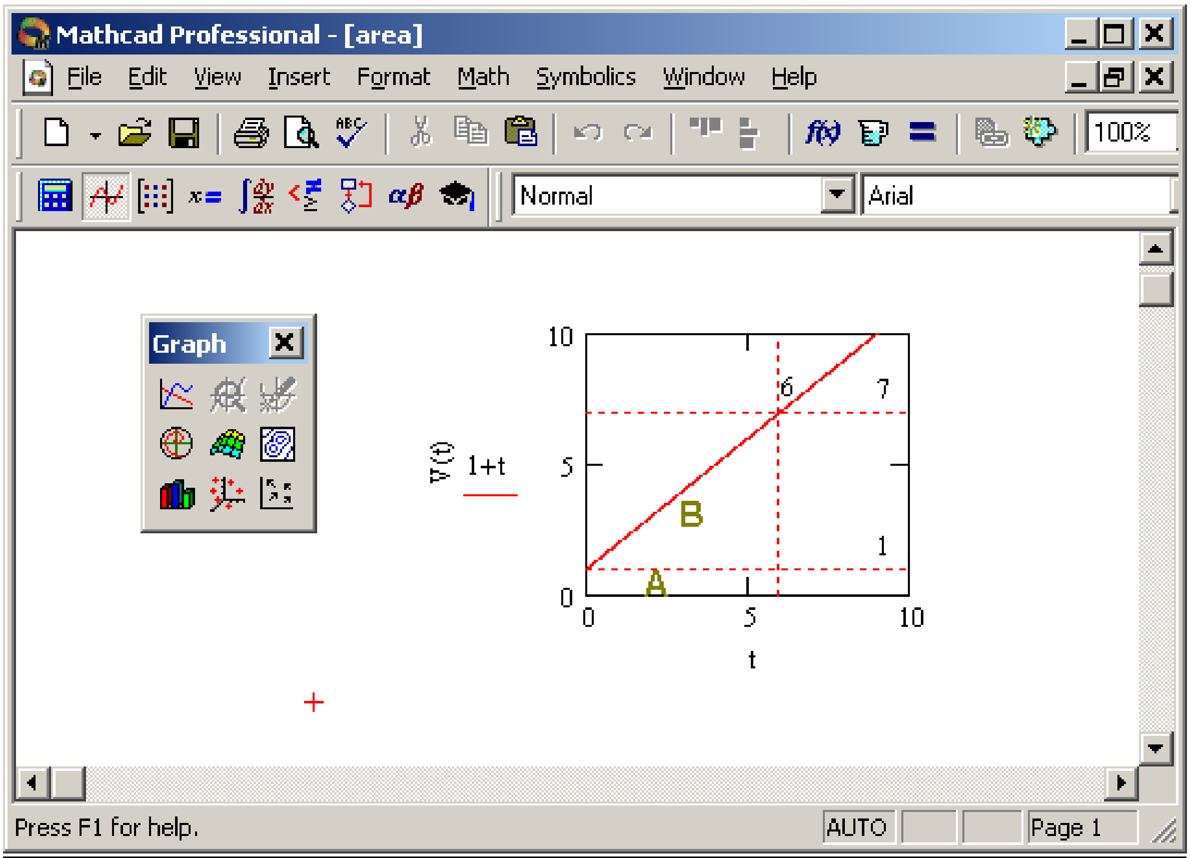
- **Ejemplo de relación área-espacio recorrido**

Calcular el espacio recorrido desde t = 0 hasta t = 6 por un cuerpo cuya gráfica v-t viene dada por la función v(t) = 1 + t.

Sabemos que el espacio recorrido coincide con el área encerrada por las rectas t = 0, t = 6, v = 0 y v = 1+ t.

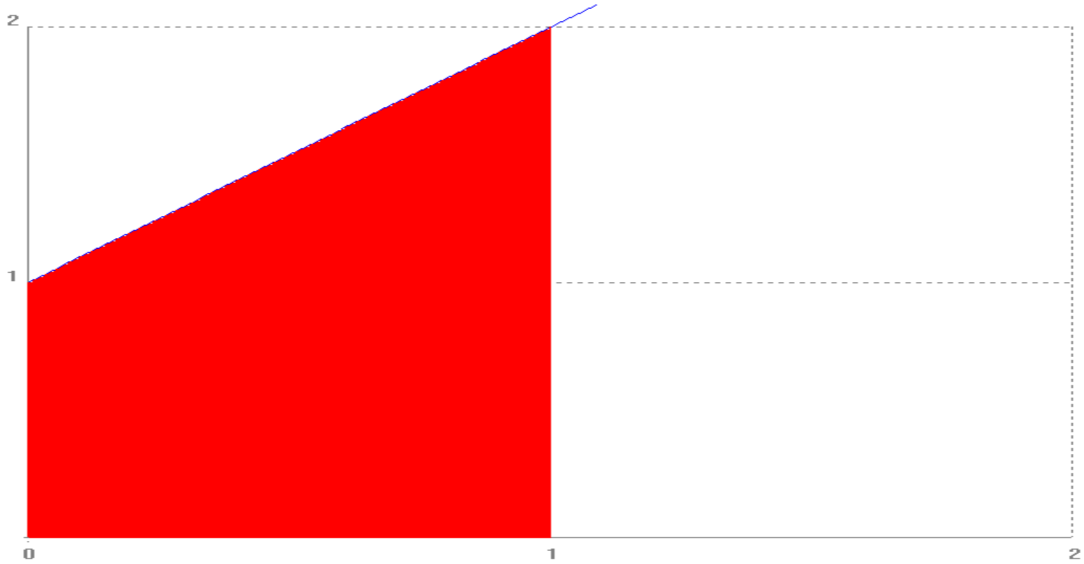
Para calcularla, descomponemos la figura en dos partes: A y B. Como se observa en la imagen, A es un rectángulo de base 6 y altura 1. Por lo tanto, su área es $A_a = 6*1 = 6$. Por su parte, B es un triángulo de base 6 y altura 6 y, consiguientemente, su área es $A_b = 1/2(6*6) = 36/2 = 18$.

Finalmente, el área total –i.e., el espacio recorrido- es la suma de dichas áreas $A_T = A_a + A_b = 6+18 = 24$.



Ejemplo de relación área-integral definida

Hallar el área del trapecio determinado por la recta de ecuación y = x + 1, el eje OX, la recta x = 0 y x = 1. Calcular esta área geométricamente y comprobar que coincide con el valor de la integral definida $\int_0^1 (x+1)dx$.

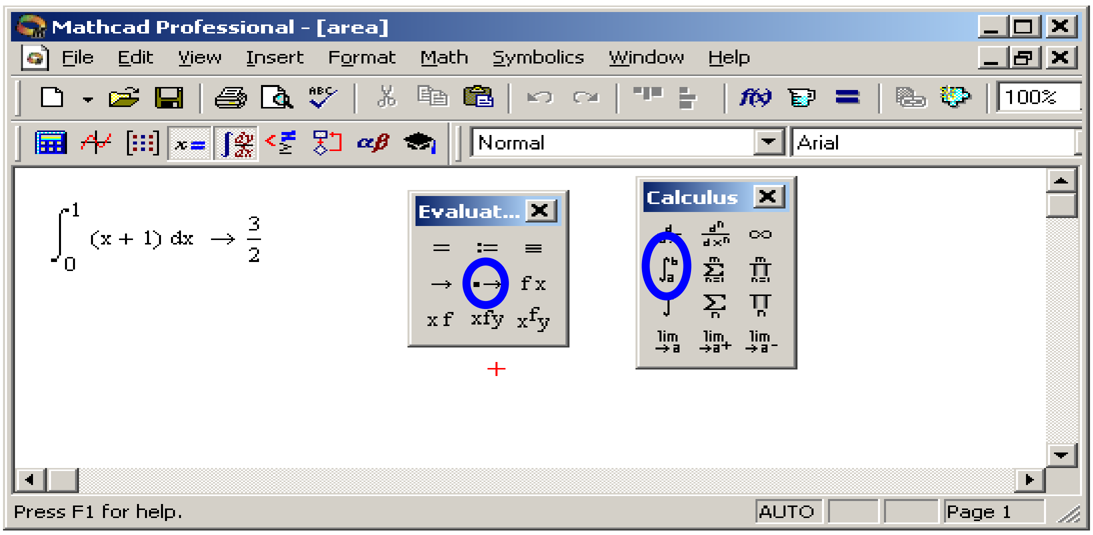


Geométricamente tenemos un trapecio, cuya área vale: $A_T = 1 \cdot 1 + \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{3}{2}$.

La integral entre 0 y 1 de la función f(x) = x + 1 vale:

$$\int_0^1 (x+1)dx = \left. \frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 = \left[\frac{1^2}{2} + 1 \right] - \left[\frac{0^2}{2} + 0 \right] = \frac{3}{2}$$

Con el Mathcad:



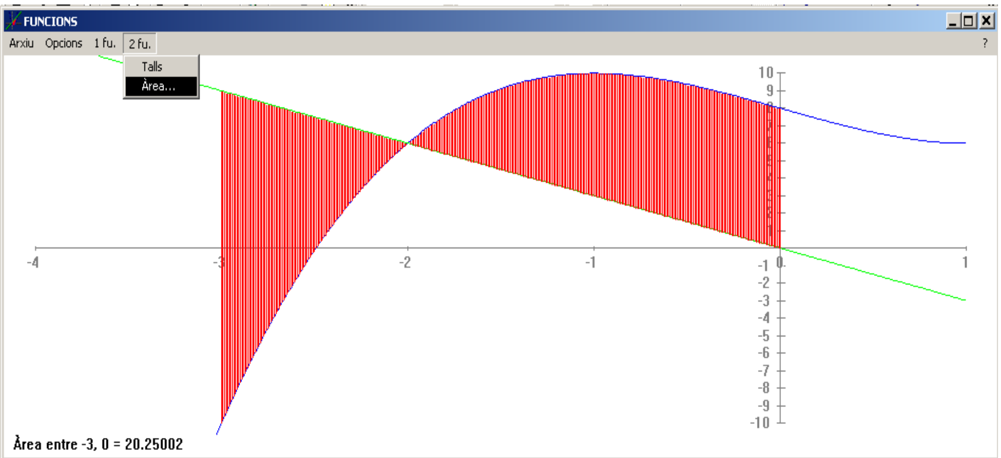
Ejemplo de área entre dos funciones

Determinar el área del recinto limitado por las curvas $f(x)=x^3-3x+8$ y $g(x)=-3x$ en el intervalo [-3,0].

Averigüemos si las dos curvas se cortan en algún punto del intervalo [-3,0]:

$$\left.\begin{array}{l} y=x^3-3x+8 \\ y=-3x \end{array}\right\} \Rightarrow x^3-3x+8=-3x \Rightarrow x^3=-8 \Rightarrow x=-2 .$$

La figura nos muestra el recinto considerado (esta figura es una pantalla de un programa que se llama **funciones para windows**).

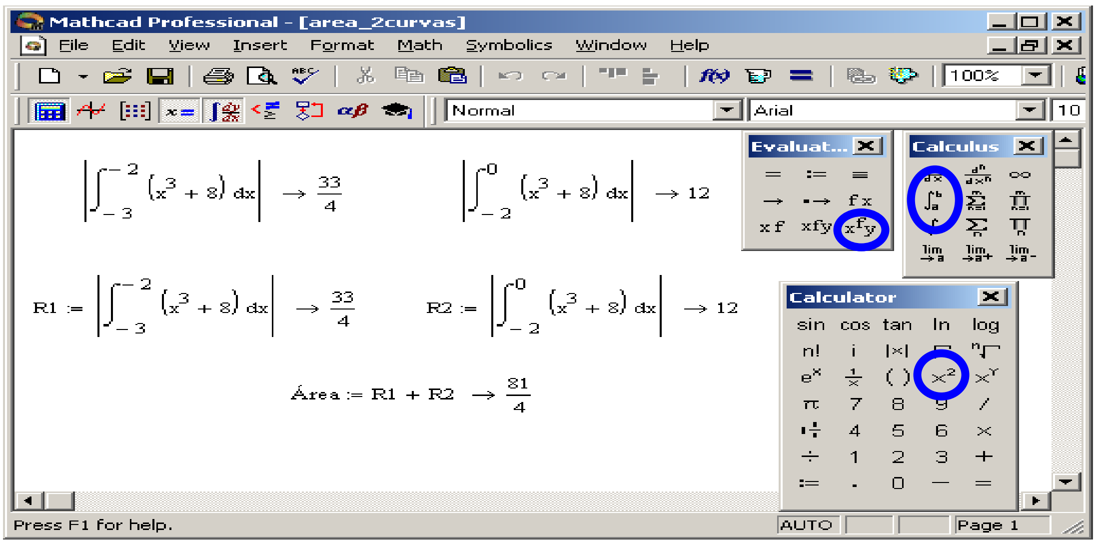


Tenemos dos regiones, así que:

$$Área = R_1 + R_2 = \left|\int_{-3}^{-2}(f(x)-g(x))dx\right| + \left|\int_{-2}^{0}(f(x)-g(x))dx\right| =$$

$$=\left|\int_{-3}^{-2}(x^3+8)dx\right| + \left|\int_{-2}^{0}(x^3+8)dx\right| == \left|\left[\frac{x^4}{4}+8x\right]_{-3}^{-2}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4}+8x\right]_{-2}^{0}\right| = \left|-12+\frac{15}{4}\right| + |12| = \frac{81}{4} = 20.25$$

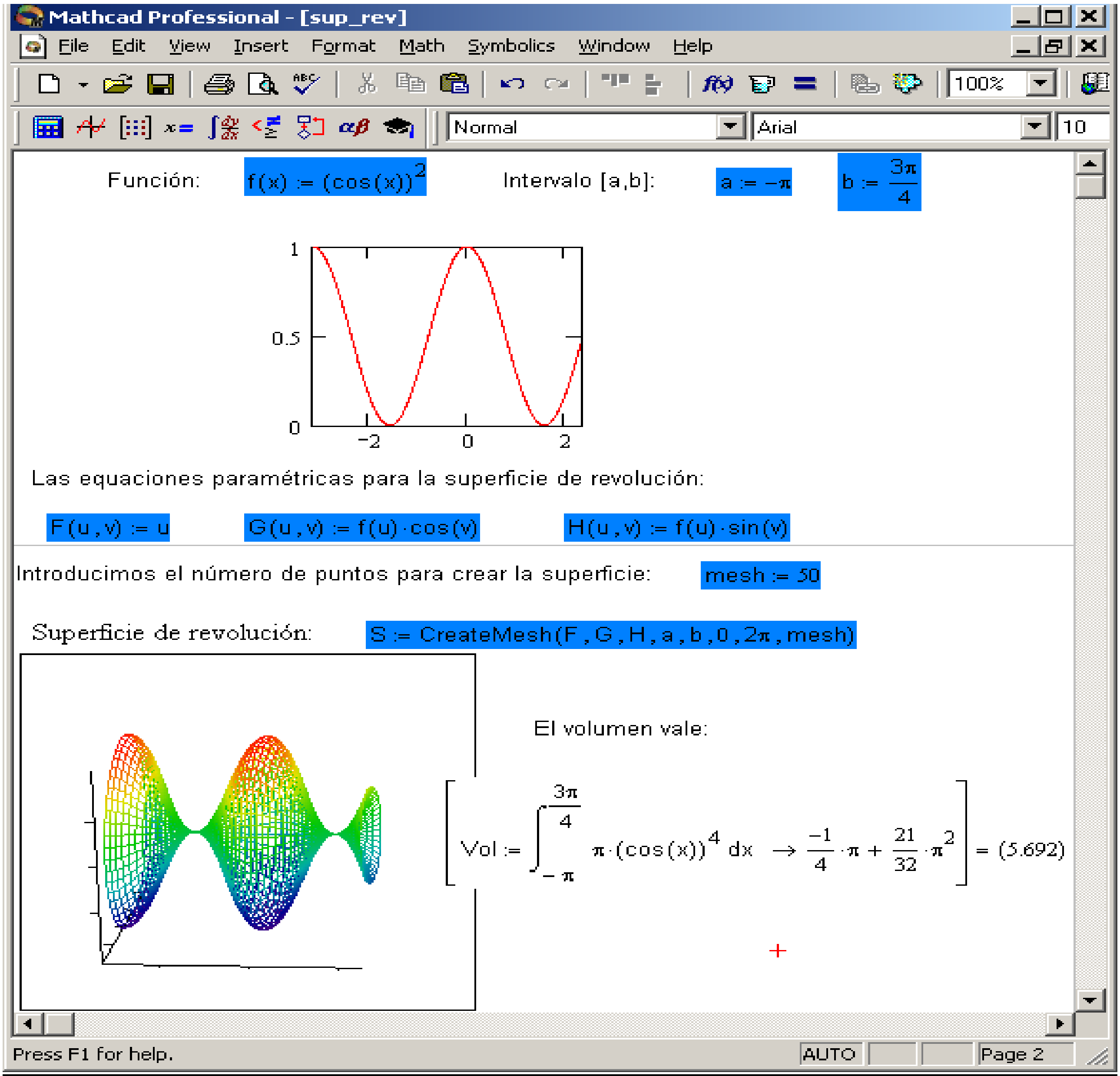
Con el Mathcad:



Ejemplo de cálculo de volúmenes

Calcular el volumen del sólido de revolución engendrado al girar -alrededor del eje OX- la gráfica de la función $f(x) = \cos^2(x)$ en el intervalo $[-\Pi, 3\Pi/4]$.

En la siguiente pantalla se muestran los cálculos realizados con ayuda de Mathcad y el resultado final:



BIBLIOGRAFÍA

[1] Benker, H. (1999): "Practical use of Mathcad. Solving mathematical problems with a computer algebra system", Springer-Verlag New York, Inc.

[2] Moreno, J.A.; Ser, D. (1999): "Mathcad 8. Manual de usuario y guía de referencia de Mathcad 8", ediciones Anaya Multimedia, S.A.

[3] Agulió, F.; Boadas, J.; Garriga, E.; Villalbí, R. (1991): “Temes clau de càlcul”. Barcelona: UPC.

[4] Courant, R.; John, F. (1971): “Introducción al cálculo y al análisis matemático”. México: Limusa.

[5] Vaquero, A.; Fernández, C. (1987): “La Informática Aplicada a la Enseñanza”. Eudema S.A. Madrid.P 37.

[6] Ortega J. (1990): “Introducció a l’anàlisi matemática”. Barcelona: Publicacions de la Universitat Autónoma de Barcelona.

[7] Tang, S. (1986): “Applied Calculus”. PWS Publishers.

[8] Burbulla, D.(1993): “Self-Tutor for Computer Calculus Using Maple”. Prentice Hall.

[9] Hunt, R. (1994): "Calculus". Ed. Harper Collins.

ENLACES

[W1] http://www.xtec.es/~jlagares/manualwinfun.cat/estractemanualfuncionsperawindows.htm

Página web sobre un articulo que ganó el segundo premio en el "*concurso de programas educativos para ordenador*", organizado por el M.E.C. en el año 1993. Trata sobre el programa “**funciones para windows**”, e incluye ejemplos gráficos. Este programa es capaz de representar funciones, calcular los puntos de corte entre ellas, hallar el área que encierran, etc. Un programa muy completo, interesante y fácil de manejar.

[W2] http://www.sectormatematica.cl/educsuperior.htm

Página web con ejercicios sobre todos los aspectos que abarca la integración definida, desde las funciones escalonadas hasta las aplicaciones de las integrales al cálculo de áreas y volúmenes. La página está estructurada en una guía de ejercicios, un enlace para resolver integrales en línea (INTEGRATOR) y otros contenidos que trata.

[W3] http://www.okmath.com/Catego2.asp?clave=17

Página web con problemas resueltos sobre la regla de Barrow y área bajo una función.

[W4] http://planetmath.org/encyclopedia/RiemannIntegral.html

Página web de la enciclopedia de PlanetMath.org sobre Integral de Riemann. También se pueden buscar en http://planetmath.org/encyclopedia otros conceptos como Partición, etc.

[W5] http://batllo.informatica.uma.es/matap/svera/docs/apuntesitt.html

Página web de Salvador Vera Ballesteros, profesor del Departamento de matemáticas aplicada de la universidad de Málaga. Contiene problemas, exámenes y apuntes sobre la integral definida y sus aplicaciones.

[W6] http://cariari.ucr.ac.cr/~cimm/calculo.html

Página web que trata sobre un curso de cálculo diferencial. Se introduce el concepto de área en el capitulo 4.3. En el capitulo 9.2 habla de la integración y la antiderivación. Hay teoría y ejercicios.

[W7] http://www.dma.fi.upm.es/docencia/primerciclo/calculo/grupo13m/

Página web del Departamento de matemáticas aplicada de la Universidad Politécnica de Madrid. Contiene ejercicios y exámenes sobre integración.

[W8] http://www.uco.es/organiza/departamentos/quimica-fisica/quimica-fisica/CD/CD0.htm

Página web que trata sobre un curso de aprendizaje de Mathcad. Hay ejemplos sobre funciones de varias variables.

[W9] http://www.terra.es/personal/jftjft/Home.htm

Página completa sobre todo lo relacionado con las matemáticas. Aparecen matemáticos famosos y aplicaciones de las matemáticas a diversos campos.