UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1112 enero-marzo de 2004

Integrales impropias.

Ejercicios sugeridos para :

los temas de las clases del 4 y 9 de marzo de 2004.

Temas :
Otras formas indeterminadas. Integrales impropias.

1.- Calcule los siguientes límites aplicando (cuando sea conveniente) la regla de L'Hopîtal :

1a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\text{-sen}(x)}{x^3}$; **1b**) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\text{-sen}(x)}{(tg(x))^3}$; **1c**) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{arcsen}(x)\text{-}x}{x^3}$;

1d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x.\ln(x)$; **1e**) $\lim\limits_{x\to \infty} x.e^{-x}$; **1f**) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x}$;

1g) $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+\frac{1}{x})^x$; **1h**) $\lim\limits_{x\to -\infty} (1+\frac{1}{x})^x$; **2i**) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x).\ln(x+1)}{x.(1+\text{sen}(x))}$;

2j) $\lim\limits_{x\to \infty} (1+tg(x))^{ctg(x)}$; **1k**) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x\text{-}1}{x}$; **1m**) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \text{sen}(t^2)\,dt}{x\text{-sen}(x)}$.

2.- Calcule los siguientes límites aplicando (cuando sea conveniente) la regla de L'Hopîtal :

2a) $\lim\limits_{x\to +\infty} tgh(x)$; **2b)** $\lim\limits_{x\to -\infty} tgh(x)$; **2c)** $\lim\limits_{x\to +\infty} (1\text{-}tgh(x)^{(1/x)}$;

2d) $\lim\limits_{x\to -\infty} (1\text{-}tgh(x)^{(1/x)}$; **2e)** $\lim\limits_{x\to +\infty} (a.\cosh(cx))^{(b/x)}$; **2f)** $\lim\limits_{x\to -\infty} (a.\cosh(cx))^{(b/x)}$.

3.- Explique cual es el error en el siguiente procedimiento :

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x)+\text{sen}(x)}{1+2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)\text{-}2\text{sen}(x)}{0+2} = \frac{1}{2} \quad .$$

4.- Considere el siguiente procedimiento :

$f(x)= 5+x+ 2.\text{sen}(x)$; $g(x) = 1+7x\text{-}\cos(x)$;

$$\lim_{x\to \infty} \frac{5+x+2.\text{sen}(x)}{1+7x\text{-} \cos(x)} = \lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to \infty} \frac{f\,'(x)}{g\,'(x)} = \lim_{x\to \infty} \frac{1+2.\cos(x)}{7+\text{sen}(x)} = \text{no existe ?}$$

Explique!

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1112 enero-marzo de 2004

Integrales impropias.

5.- Calcule las siguientes integrales impropias (o demuestre que son divergentes) :

5a) $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$; **5b)** $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; **5c)** $\int_{e}^{e^4} \frac{dx}{2x-x.\ln(x)}$ dx; **5d)** $\int_{2}^{+\infty} \frac{3x^2-1}{x^4-x^2}$ dx ;

5e) $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x}$; **5f)** $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x dx}{1+e^x}$; **5g)** $\int_{0}^{+\infty} (1- \text{tgh}(x))\, dx$; **5h)** $\int_{-\infty}^{0} (\text{tgh}(x)+1)\, dx$;

5i) $\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - |\text{tgh}(x)|)\, dx$; **5j)** $\int_{2\pi/3}^{7\pi/3} \text{ctg}(x)dx$ [vea el ejercicio 2f de la práctica de la semana V].

6)- Para cada una de las siguientes integrales impropias, averigüe si es convergente o no:

6a) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{3+x^2+\text{sen}(x)}$; **6b)** $\int_{0}^{+\infty} \frac{\text{sen}^2(x)}{\sqrt{2}+x^2}$ dx ; **6c)** $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x.e^x}$;

6d) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x.e^x}$; **6e)** $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x.e^x}$; **6f)** $\int_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$.

7) Para cada una de las siguiente integrales impropias, halle, si posible, un valor de la constante k para el cual la integral sea convergente (y calcule la integral con el valor de k hallado) :

7a) $\int_{2}^{+\infty} \left(\frac{kx+1}{x^2+1} - \frac{x-3}{x^2-1} \right) dx$; **7b)** $\int_{0}^{+\infty} \frac{1+k.e^x}{1+3.e^x}$ dx ; **7c)** $\int_{1}^{+\infty} \frac{k\sqrt{x^2+1} - x}{x.\sqrt{x^2+1}}$ dx .

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1112 enero-marzo de 2004

Integrales impropias.

Respuestas

1a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\text{sen}(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(x)}{6x} = \dfrac{1}{6}$;

1b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\text{sen}(x)}{(\text{tg}(x))^3} = (\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\text{sen}(x)}{x^3})(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{(\text{tg}(x))^3}) = \dfrac{1}{6}.1 = \dfrac{1}{6}$;

1c) poniendo u=arcsen(x), x=sen(u) se tiene : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{arcsen}(x)-x}{x^3} = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{u-\text{sen}(u)}{(\text{sen}(u))^3} =$

$= (\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{u-\text{sen}(u)}{u^3})(\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{u^3}{(\text{sen}(u))^3}) = \dfrac{1}{6}.1 = \dfrac{1}{6}$;

1d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x.\ln(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{1/x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0$;

otra manera de proceder podría ser la siguiente, poniendo $u=\dfrac{1}{x}$:

$\lim\limits_{x\to 0^+} x.\ln(x) = \lim\limits_{u\to +\infty} \dfrac{\ln(1/u)}{u} = \lim\limits_{u\to +\infty} \dfrac{-\ln(u)}{u} = \lim\limits_{u\to +\infty} \dfrac{-1/u}{1} = 0$;

1e) $\lim\limits_{x\to \infty} x.e^{-x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$;

1f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1/(x+1)}{1} = 1$;

1g,h) poniendo $u=\dfrac{1}{x}$, se tiene : $\lim\limits_{x\to \pm\infty} (1+\dfrac{1}{x})^x$; $\lim\limits_{u\to 0\pm}(1+u)^{1/u} = \lim\limits_{u\to 0} e^{(1/u)\ln(1+u)} = e^1 = e$;

2i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x).\ln(x+1)}{x.(1+\text{sen}(x))} = \lim\limits_{x\to 0} (\dfrac{\ln(x+1)}{x})(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)}{1+\text{sen}(x)}) = 1$;

2j) $\lim\limits_{x\to \infty} (1+\text{tg}(x))^{\text{ctg}(x)}$= NO existe [tg(x) y ctg(x) son funciones periódicas] ;

1k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1} = 1$;

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1112 enero-marzo de 2004

Integrales impropias.

1m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \text{sen}(t^2)\,dt}{x-\text{sen}(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(x^2)}{1-\cos(x)} = \left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(x^2)}{x^2}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos(x)}\right) = 2$;

2a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{tgh}(x) = 1$; **2b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{tgh}(x) = -1$ [calcule estos dos límites poniendo u= e^x] ;

2c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-\text{tgh}(x))^{(1/x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{(1/x).\ln(1-\text{tgh}(x))} = e^{-2}$, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty} (1/x).\ln(1-\text{tgh}(x)) =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1-\text{tgh}(x))}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{e^{-x}}{\cosh(x)}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x-\ln(\cosh(x))}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1-\text{tgh}(x)}{1} = -2\ ;$$

2d) $\lim\limits_{x\to-\infty} (1-\text{tgh}(x))^{(1/x)} = 2^0 = 1$;

2e) $\lim\limits_{x\to+\infty} (a.\cosh(cx))^{(b/x)} = e^{bc}$, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{b.\ln(a.\cosh(cx))}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{bc.\text{tgh}(cx)}{1} = bc$;

2f) $\lim\limits_{x\to-\infty} (a.\cosh(cx))^{(b/x)} = e^{-bc}$.

3). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos(x)+\text{sen}(x)}{1+2x} = 2$ [ya que la función, f(x), de la cual se calcula el límite es continua en x=0, por lo cual su límite es f(0)];

ojo : la regla de L'Hopîtal se aplica a límites cuyo tipo de indeterminación es 0/0 o ∞/∞ .

4). La regla de L'Hopîtal permite calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ en el caso que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ **exista**;

como en el caso considerado el límite del cociente de las derivadas no existe, no es aplicable la regla de L'Hopîtal . Sin embargo se puede calcular directamente el límite dado :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5+x+2.\text{sen}(x)}{1+7x-\cos(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{x}+1+\frac{2.\text{sen}(x)}{x}}{\frac{1}{x}+7-\frac{\cos(x)}{x}} = \frac{0+1+0}{0+7+0} = \frac{1}{7}\ .$$

5a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \lim_{a\to-1^+} \int_{a}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \lim_{a\to-1^+} [\text{arsen}(0)-\text{arcsen}(a)] = 0-\text{arcsen}(-1) = \frac{\pi}{2}$.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1112 enero-marzo de 2004

Integrales impropias.

5b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} [\text{arctg}(b)\text{- arctg}(1)] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$;

5c) $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{dx}{2x\text{-}x.\ln(x)}$ dx; esta integral es impropia, debido a que $\displaystyle\lim_{x\to(e^2)^-} \left(\frac{dx}{2x\text{-}x.\ln(x)}\right) = +\infty$

[y además $\displaystyle\lim_{x\to(e^2)^+} \left(\frac{dx}{2x\text{-}x.\ln(x)}\right) = -\infty$] . La integral dada es convergente si y sólo si existen (finitos) los dos límites : $\displaystyle L_1 = \lim_{b\to(e^2)^-} \int_e^{b} \frac{dx}{2x\text{-}x.\ln(x)}\,dx$, $\displaystyle L_2 = \lim_{a\to(e^2)^+} \int_a^{e^4} \frac{dx}{2x\text{-}x.\ln(x)}\,dx$ y en tal caso se tiene $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{dx}{2x\text{-}x.\ln(x)}\,dx = L_1 + L_2$.

Como $\displaystyle L_1 = \lim_{b\to(e^2)^-} \int_e^{b} \frac{dx}{2x\text{-}x.\ln(x)}\,dx = \lim_{b\to(e^2)^-} [-\ln|2\text{-}\ln(b)| + \ln|2\text{-}\ln(e)|] = +\infty$, la integral impropia dada **no es convergente**;

5d) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{3x^2\text{-}1}{x^4\text{-}x^2}\,dx$; como $\displaystyle\frac{3x^2\text{-}1}{x^4\text{-}x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x\text{-}1} - \frac{1}{x+1}$, se tiene :

$$\int_2^{+\infty} \frac{3x^2\text{-}1}{x^4\text{-}x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{3x^2\text{-}1}{x^4\text{-}x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{b} + \ln\left|\frac{b\text{-}1}{b+1}\right| + \frac{1}{2} - \ln\left|\frac{2\text{-}1}{2+1}\right| \right] = \frac{1}{2} + \ln(3) ;$$

5e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x} = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{dx}{1+e^x} = \lim_{b\to\infty} \left[\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)\right]_0^b = \ln(1)\text{-}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$;

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1112 enero-marzo de 2004

Integrales impropias.

5f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x dx}{1+e^x} = \lim_{a\to-\infty} [\ln(e^x+1)]_a^0 = \ln(2)$;

5g) $\displaystyle\int_0^{+\infty}(1-\operatorname{tgh}(x))\,dx = \lim_{b\to\infty} [x-\ln(\cosh(x))]_0^b = \ln(2)$; **5h)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}(\operatorname{tgh}(x)+1)\,dx = \ln(2)$;

5i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(1-|\operatorname{tgh}(x)|)\,dx = \int_{-\infty}^{0}(\operatorname{tgh}(x)+1)\,dx + \int_0^{+\infty}(1-\operatorname{tgh}(x))\,dx = 2.\ln(2)$;

5j) $\displaystyle\int_{2\pi/3}^{7\pi/3}\operatorname{ctg}(x)dx$ es integral impropia debido a que $\displaystyle\lim_{x\to\pi}|\operatorname{ctg}(x)| = \infty$, $\displaystyle\lim_{x\to 2\pi}|\operatorname{ctg}(x)| = \infty$;

esta integral impropia es convergente (e igual a $L_1+L_2+L_3+L_4$), sólo en el caso que las siguientes cuatro integrales impropias existan :

$$L_1 = \int_{2\pi/3}^{\pi}\operatorname{ctg}(x)dx \ ,\ L_2 = \int_{\pi}^{3\pi/2}\operatorname{ctg}(x)dx \ ,\ L_3 = \int_{3\pi/2}^{2\pi}\operatorname{ctg}(x)dx \ ,\ L_4 = \int_{2\pi}^{7\pi/3}\operatorname{ctg}(x)dx \ ;$$

$$L_1 = \lim_{b\to\pi^-}\int_{2\pi/3}^{b}\operatorname{ctg}(x)dx;\ L_2 = \lim_{a\to\pi^+}\int_{a}^{3\pi/2}\operatorname{ctg}(x)dx \ ;\ L_3 = \lim_{b\to 2\pi^-}\int_{3\pi/2}^{b}\operatorname{ctg}(x)dx \ ;L_4 = \lim_{a\to 2\pi^+}\int_{a}^{7\pi/3}\operatorname{ctg}(x)dx;$$

como L_1 no es convergente, sigue que la integral $\displaystyle\int_{2\pi/3}^{7\pi/3}\operatorname{ctg}(x)dx$ no es convergente.

En efecto : $\displaystyle\lim_{b\to\pi^-}\int_{2\pi/3}^{b}\operatorname{ctg}(x)dx = \lim_{b\to\pi^-}[\ \ln|\operatorname{sen}(x)|\ ]_{2\pi/3}^{b} = \lim_{b\to\pi^-}(\ \ln|\operatorname{sen}(b)| - \ln(\sqrt{3}/2)\ ) = -\infty$.

6a) Como $3+x^2+\operatorname{sen}(x) \geq 1+x^2$, se tiene, para todo b :

$\displaystyle 0 \leq \int_1^b \frac{dx}{3+x^2+\operatorname{sen}(x)} \leq \int_1^b \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(b) - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$ y de esto sigue, [tomando en cuenta que

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1112 enero-marzo de 2004

Integrales impropias.

$F(b) = \int_1^b \frac{dx}{3+x^2+sen(x)}$ es función creciente de b] , $\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{3+x^2+sen(x)}$ = existe finito;

6b) $\int_0^{+\infty} \frac{sen^2(x)}{\sqrt{2}+x^2} dx$ es convergente , ya que $0 \le \frac{sen^2(x)}{\sqrt{2}+x^2} \le \frac{1}{1+x^2}$ etc.

6c) como e^x es función creciente, se tiene que para todo $x\in[0, 1]$ resulta $1=e^0 \le e^x \le e^1 < 3$,

luego, para todo $x\in[0, 1]$: $0 \le x.e^x \le 3x$, $\frac{1}{3x} \le \frac{1}{x.e^x}$; de esto sigue, para todo $a\in(0,1]$,

$\int_a^1 \frac{1}{3x} \le \int_a^1 \frac{dx}{x.e^x}$ y por consiguiente $\lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{x.e^x} = +\infty$,

ya que $\lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{3x} = \lim_{a\to 0^+} \frac{-1}{3} \ln(x) = +\infty$. Por lo tanto $\int_0^1 \frac{dx}{x.e^x}$ es divergente.

6d) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x.e^x}$ es convergente, ya que para $x \ge 1$ se tiene $0 \le \frac{1}{x.e^x} \le \frac{1}{e^x}$ etc.

6e) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x.e^x} = \int_0^1 \frac{dx}{x.e^x} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x.e^x}$ es divergente ya que $\int_0^1 \frac{dx}{x.e^x}$ es divergente.

6f) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \lim_{a\to 1^+} \int_a^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} =$

$\lim_{b\to 1^-} 3[\sqrt[3]{x-1}]_0^b + \lim_{a\to 1^+} 3[\sqrt[3]{x-1}]_a^2 = 3[0-(-1)]+3[1-0] = 6$; la integral es convergente.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1112 enero-marzo de 2004

Integrales impropias.

7a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left(\frac{kx+1}{x^2+1} - \frac{x-3}{x^2-1} \right) dx = \int_2^{+\infty} \left(\frac{k}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1} \right) dx =$

$= \displaystyle\lim_{b\to\infty} \left[\frac{k}{2} \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg}(x) + \ln|x-1| - 2.\ln|x+1| \right]_2^b =$

$= \displaystyle\lim_{b\to\infty} \left[\operatorname{arctg}(x) + \ln\left((x^2+1)^{k/2} |x-1| (x+1)^{-2} \right) \right]_2^b =$? para que este límite sea finito, el límite del argumento del logaritmo debe ser finito, así que debe ser : $2.\frac{k}{2}+1-2 = 0 \Rightarrow k=1$.

Con k=1 se tiene : $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left(\frac{kx+1}{x^2+1} - \frac{x-3}{x^2-1} \right)dx = \lim_{b\to\infty} \left[\operatorname{arctg}(x) + \ln\left((x^2+1)^{1/2} |x-1| (x+1)^{-2} \right)\right]_2^b =$

$= \dfrac{\pi}{2} + \ln(1) - \operatorname{arctg}(2) - \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}}{9}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(2) - \dfrac{1}{2}.\ln(5)+2.\ln(3)$.

7b) Poniendo $u=e^x$ se tiene : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+k.e^x}{1+3.e^x} dx = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{u} - \frac{1-\frac{k}{3}}{u+\frac{1}{3}} \right) du = \lim_{b\to\infty} \left[\ln\left(\frac{u}{(u+1/3)^{1-k/3}} \right)\right]_1^b$.

Este límite es finito si y sólo si $k = 0$. Con k= 0 se tiene : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+3.e^x} dx = \ln(1)-\ln(3/4) =$

$=2.\ln(2)-\ln(3)$.

7c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{k\sqrt{x^2+1} - x}{x.\sqrt{x^2+1}} dx = \int_1^{+\infty} \left(\frac{k}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx = \lim_{b\to\infty} \left[\ln\left(\frac{x^k}{x+\sqrt{x^2+1}} \right) \right]_1^b$.

Este límite es finito si y sólo si $k =1$. Con k= 1 se tiene : $\displaystyle\lim_{b\to\infty} \left[\ln\left(\frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}} \right) \right]_1^b =$

$= \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) - \ln\left(\dfrac{1}{3}\right) = \ln(3/2)$.