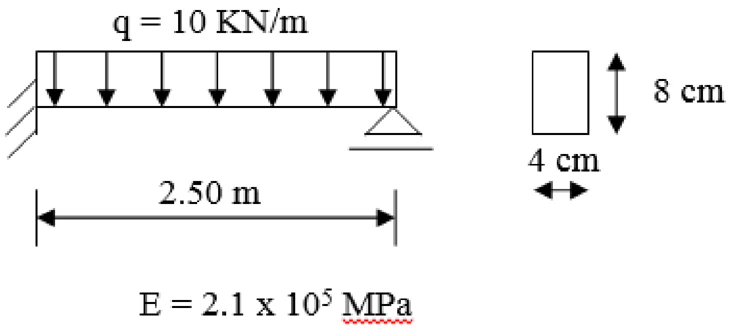
Ejercicios Prácticos Clase Capítulo 8

Ejercicio 1:

1) Dada la estructura de la Figura se pide:

   a) Integrando la ecuación de equilibrio (ecuación de la elástica), obtener y dibujar los diagramas de Momento flector y Corte (con sus correspondientes valores).



Datos:

$q := 10\ \frac{kN}{m}$ $\quad L := 2.50\ m$ $\quad E := 2.1 \cdot 10^{5}\ MPa$ $\quad b := 4\ cm$ $\quad h := 8\ cm$

$$I := \frac{b \cdot h^3}{12} = 170.67\ cm^4$$

Resolución:

Primeramente se integra cuatro veces la ecuación diferencial para obtener los desplazamientos:

$$\frac{d^4 \cdot v}{dx^4} = \frac{q(x)}{E \cdot I}$$

$$\frac{d^4 \cdot v}{dx^4} = \frac{-q}{E \cdot I}$$

$$\frac{d^3 \cdot v}{dx^3} = \frac{-q}{E \cdot I} \cdot x + C_1$$

$$\frac{d^2 \cdot v}{dx^2} = \frac{-q}{E \cdot I} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2$$

$$\frac{d \cdot v}{dx} = \frac{-q}{E \cdot I} \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 \cdot x + C_3$$

$$v = \frac{-q}{E \cdot I} \cdot \frac{x^4}{24} + C_1 \cdot \frac{x^3}{6} + C_2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4$$

Para obtener los valores de las constantes de integración, se utilizan las condiciones de borde.

Utilización de las condiciones de borde del extremo izquierdo:
Para x = 0 se tiene que v (x=0) = 0, por lo tanto:

$$\boxed{C_4 := 0}$$

Para x = 0 se tiene que ϕ (x=0) = 0, por lo tanto:

$$\boxed{C_3 := 0}$$

Para x = L se tiene que v (x=L) = 0, por lo tanto:

$$\frac{-q}{E \cdot I} \cdot \frac{L^4}{24} + C_1 \cdot \frac{L^3}{6} + C_2 \cdot \frac{L^2}{2} = 0$$

Para x = L se tiene que χ (x=L) = 0, por lo tanto:

$$\frac{-q}{E \cdot I} \cdot \frac{L^2}{2} + C_1 \cdot L + C_2 = 0$$

$$C_2 = \frac{q}{E \cdot I} \cdot \frac{L^2}{2} - C_1 \cdot L$$

Reemplanzando el valor de C_2 en la otra ecaución podemos despejar C_1.

$$\frac{-q}{E \cdot I} \cdot \frac{L^4}{24} + C_1 \cdot \frac{L^3}{6} + \left(\frac{q}{E \cdot I} \cdot \frac{L^2}{2} - C_1 \cdot L \right) \cdot \frac{L^2}{2} = 0$$

$$\frac{-q}{E \cdot I} \cdot \frac{L^4}{24} + \frac{q}{E \cdot I} \cdot \frac{L^4}{4} + C_1 \cdot \frac{L^3}{6} - C_1 \cdot \frac{L^3}{2} = 0$$

$$C_1 = \frac{\left(\frac{q}{E \cdot I} \cdot \frac{L^4}{24} - \frac{q}{E \cdot I} \cdot \frac{L^4}{4} \right)}{\left(\frac{L^3}{6} - \frac{L^3}{2} \right)}$$

Redefinición de datos para que sean definidos en unidades consistentes y se pueda prescindir de su uso:

$$q := 10 \qquad L := 2.50 \qquad E := 2.1 \cdot 10^8 \qquad b := 0.04 \qquad h := 0.08$$

$$I := \frac{b \cdot h^3}{12} = 1.7067 \cdot 10^{-6}$$

Valuación de las constantes de integración:

$$\boxed{C_1 := \frac{\left(\frac{q}{E \cdot I} \cdot \frac{L^4}{24} - \frac{q}{E \cdot I} \cdot \frac{L^4}{4} \right)}{\left(\frac{L^3}{6} - \frac{L^3}{2} \right)} = 0.0436}$$

$$\boxed{C_2 := \frac{q}{E \cdot I} \cdot \frac{L^2}{2} - C_1 \cdot L = -0.0218}$$

Las funciones de desplazamientos, giros y esfuerzos son las siguientes:

$$\boxed{v(x) := \frac{-q}{E \cdot I} \cdot \frac{x^4}{24} + C_1 \cdot \frac{x^3}{6} + C_2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4}$$

$v(0) = 0$

$v(L) = 4.15 \cdot 10^{-16}$ (valor nulo)

$v\left(\frac{L}{4}\right) = -0.00266$

$v\left(\frac{2 \cdot L}{4}\right) = -0.00568$

$v\left(\frac{3 \cdot L}{4}\right) = -0.00479$

$$\boxed{\phi(x) := \frac{-q}{E \cdot I} \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 \cdot x + C_3}$$

$\phi(0) = 0$

$\phi(L) = 0.0091$

$\phi\left(\frac{L}{4}\right) = -0.00624$

$\phi\left(\frac{2 \cdot L}{4}\right) = -0.00227$

$\phi\left(\frac{3 \cdot L}{4}\right) = 0.00511$

$$\boxed{M_f(x) := E \cdot I \cdot \left(\frac{-q}{E \cdot I} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2\right)}$$

$M_f(0) = -7.81$

$M_f(L) = 0$

$M_f\left(\frac{L}{4}\right) = 5.49 \cdot 10^{-14}$

$M_f\left(\frac{2 \cdot L}{4}\right) = 3.91$

$M_f\left(\frac{3 \cdot L}{4}\right) = 3.91$

$$\boxed{T(x) := -E \cdot I \cdot \left(\frac{-q}{E \cdot I} \cdot x + C_1\right)}$$

$T(0) = -15.62$

$T(L) = 9.38$

$T\left(\frac{L}{4}\right) = -9.37$

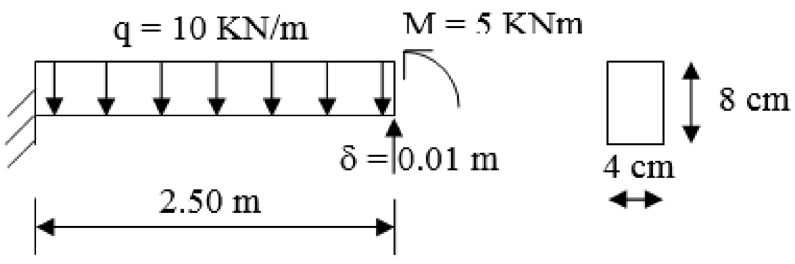
$T\left(\frac{2 \cdot L}{4}\right) = -3.12$

$T\left(\frac{3 \cdot L}{4}\right) = 3.13$

Ejercicio 2:

1) Dada la estructura de la Figura se pide:

   a) Integrando la ecuación de equilibrio (ecuación de la elástica), obtener y dibujar los diagramas de Momento flector y Corte (con sus correspondientes valores).



E = 2.1 x 10⁵ MPa

Datos:

$q := 10\ \frac{kN}{m}$ $\quad L := 2.50\ m$ $\quad E := 2.1 \cdot 10^5\ MPa$ $\quad b := 4\ cm$ $\quad h := 8\ cm$

$I := \frac{b \cdot h^3}{12} = 170.67\ cm^4$ $\quad M := 5\ kN\ m$ $\quad \delta := 0.01\ m$

Resolución:

Primeramente se integra cuatro veces la ecuación diferencial para obtener los desplazamientos:

$$\frac{d^4 \cdot v}{dx^4} = \frac{q(x)}{E \cdot I}$$

$$\frac{d^4 \cdot v}{dx^4} = \frac{-q}{E \cdot I}$$

$$\frac{d^3 \cdot v}{dx^3} = \frac{-q}{E \cdot I} \cdot x + C_1$$

$$\frac{d^2 \cdot v}{dx^2} = \frac{-q}{E \cdot I} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2$$

$$\frac{d \cdot v}{dx} = \frac{-q}{E \cdot I} \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 \cdot x + C_3$$

$$v = \frac{-q}{E \cdot I} \cdot \frac{x^4}{24} + C_1 \cdot \frac{x^3}{6} + C_2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4$$

Para obtener los valores de las constantes de integración, se utilizan las condiciones de borde.

Utilización de las condiciones de borde del extremo izquierdo:
Para x = 0 se tiene que v (x=0) = 0, por lo tanto:

$$\boxed{C_4 := 0}$$

Para x = 0 se tiene que ϕ (x=0) = 0, por lo tanto:

$$\boxed{C_3 := 0}$$

Para x = L se tiene que v (x=L) = δ, por lo tanto:

$$\frac{-q}{E\cdot I}\cdot\frac{L^4}{24}+C_1\cdot\frac{L^3}{6}+C_2\cdot\frac{L^2}{2}=\delta$$

Para x = L se tiene que χ (x=L) = M/(EI), por lo tanto:

$$\frac{-q}{E\cdot I}\cdot\frac{L^2}{2}+C_1\cdot L+C_2=\frac{M}{E\cdot I}$$

$$C_2=\frac{M}{E\cdot I}+\frac{q}{E\cdot I}\cdot\frac{L^2}{2}-C_1\cdot L$$

Reemplanzando el valor de C_2 en la otra ecaución podemos despejar C_1.

$$\frac{-q}{E\cdot I}\cdot\frac{L^4}{24}+C_1\cdot\frac{L^3}{6}+\left(\frac{M}{E\cdot I}+\frac{q}{E\cdot I}\cdot\frac{L^2}{2}-C_1\cdot L\right)\cdot\frac{L^2}{2}=\delta$$

$$\frac{-q}{E\cdot I}\cdot\frac{L^4}{24}+\frac{q}{E\cdot I}\cdot\frac{L^4}{4}+\frac{M}{E\cdot I}\cdot\frac{L^2}{2}+C_1\cdot\frac{L^3}{6}-C_1\cdot\frac{L^3}{2}=\delta$$

$$C_1=\frac{\left(\delta+\frac{q}{E\cdot I}\cdot\frac{L^4}{24}-\frac{q}{E\cdot I}\cdot\frac{L^4}{4}-\frac{M}{E\cdot I}\cdot\frac{L^2}{2}\right)}{\left(\frac{L^3}{6}-\frac{L^3}{2}\right)}$$

Redefinición de datos para que sean definidos en unidades consistentes y se pueda prescindir de su uso:

$q := 10 \qquad L := 2.50 \qquad E := 2.1\cdot 10^{8} \qquad b := 0.04 \qquad h := 0.08$

$I := \frac{b\cdot h^3}{12} = 1.7067\cdot 10^{-6} \qquad M := 5 \qquad \delta := 0.01$

Valuación de las constantes de integración:

$$\boxed{C_1 := \frac{\left(\delta+\frac{q}{E\cdot I}\cdot\frac{L^4}{24}-\frac{q}{E\cdot I}\cdot\frac{L^4}{4}-\frac{M}{E\cdot I}\cdot\frac{L^2}{2}\right)}{\left(\frac{L^3}{6}-\frac{L^3}{2}\right)} = 0.05005}$$

$$C_2 := \frac{M}{E \cdot I} + \frac{q}{E \cdot I} \cdot \frac{L^2}{2} - C_1 \cdot L = -0.02397$$

Las funciones de desplazamientos, giros y esfuerzos son las siguientes:

$$v(x) := \frac{-q}{E \cdot I} \cdot \frac{x^4}{24} + C_1 \cdot \frac{x^3}{6} + C_2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4$$

$v(0) = 0$

$v(L) = 0.01$

$v\left(\frac{L}{4}\right) = -0.00282$

$v\left(\frac{2 \cdot L}{4}\right) = -0.00528$

$v\left(\frac{3 \cdot L}{4}\right) = -0.00153$

$$\phi(x) := \frac{-q}{E \cdot I} \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 \cdot x + C_3$$

$\phi(0) = 0$

$\phi(L) = 0.0238$

$\phi\left(\frac{L}{4}\right) = -0.00634$

$\phi\left(\frac{2 \cdot L}{4}\right) = 4.95199 \cdot 10^{-5}$

$\phi\left(\frac{3 \cdot L}{4}\right) = 0.01237$

$$M_f(x) := E \cdot I \cdot \left(\frac{-q}{E \cdot I} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2\right)$$

$M_f(0) = -8.59$

$M_f(L) = 5$

$M_f\left(\frac{L}{4}\right) = 0.67$

$M_f\left(\frac{2 \cdot L}{4}\right) = 6.02$

$M_f\left(\frac{3 \cdot L}{4}\right) = 7.46$

$$T(x) := -E \cdot I \cdot \left(\frac{-q}{E \cdot I} \cdot x + C_1\right)$$

$T(0) = -17.94$

$T(L) = 7.06$

$T\left(\frac{L}{4}\right) = -11.69$

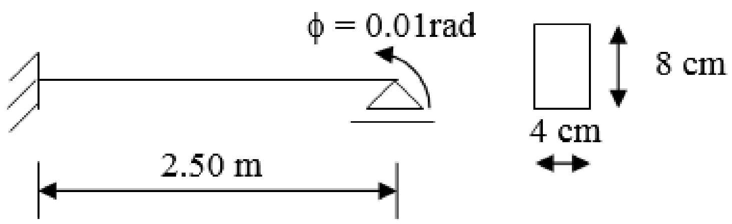
$T\left(\frac{2 \cdot L}{4}\right) = -5.44$

$T\left(\frac{3 \cdot L}{4}\right) = 0.81$

Ejercicio 3:

1) Dada la estructura de la Figura se pide:

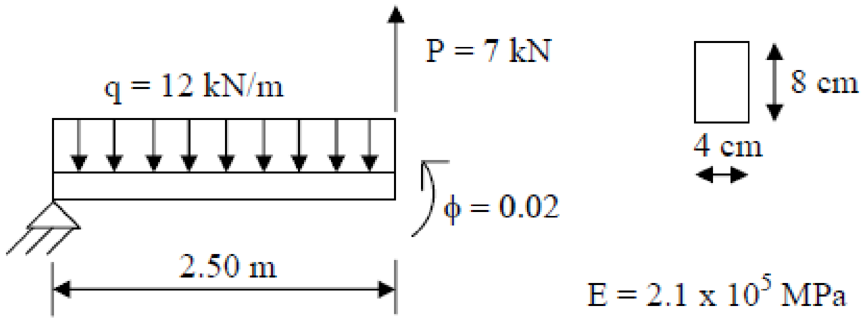
   Integrando la ecuación de equilibrio (ecuación de la elástica), obtener y dibujar los diagramas de Momento flector y Corte (con sus correspondientes valores). La viga está sometida a un giro en su extremo derecho.



$E = 2.1 \times 10^5$ MPa

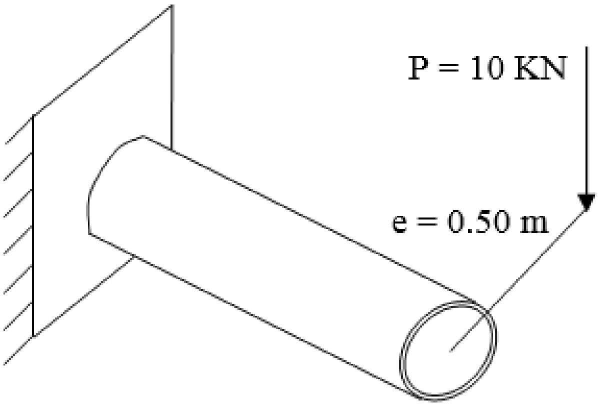
Ejercicio 4:

1) Dada la estructura de la Figura se pide:
   a) Integrando la ecuación de equilibrio (ecuación de la elástica), obtener y dibujar los diagramas de Momento flector y Corte (con sus correspondientes valores).



Ejercicio 5:

2) Dada la estructura de la Figura se pide:



Re = 5 cm
Ri = 4 cm
E = 2.1 x 10⁵ MPa
G = 0.85 x 10⁵ MPa
L = 3 m

a) Integrando la ecuación de equilibrio (sólo de torsión, no considerar flexión), obtener y dibujar el diagrama de Momento Torsor (con sus correspondientes valores) y el giro máximo (ϕmax).

Datos:

$P := 10\ kN$ $\quad e := 0.50\ m$ $\quad R_e := 5\ cm$ $\quad R_i := 4\ cm$ $\quad E := 2.1 \cdot 10^5\ MPa$

$G := 0.85 \cdot 10^5\ MPa$ $\quad L := 3\ m$ $\quad M := -P \cdot e = -5\ kN\ m$

Resolución:

Primeramente se integra dos veces la ecuación diferencial para obtener los giros:

$$\frac{d^2 \cdot \phi_x}{dx^2} = 0$$

$$\frac{d \cdot \phi_x}{dx} = C_1$$

$$\phi_x = C_1 \cdot x + C_2$$

Redefinición de variables en unidades consistentes para prescindir del uso de unidades:

$P := 10$ $\quad e := 0.50$ $\quad R_e := 0.05$ $\quad R_i := 0.04$ $\quad L := 3$ $\quad G := 8.5 \cdot 10^7$

$M := -P \cdot e = -5$ $\qquad I_t := \dfrac{\pi \cdot \left(R_e^{\,4} - R_i^{\,4}\right)}{2} = 5.8 \cdot 10^{-6}$

Para calcular las constantes de integración se utilizan las condiciones de borde:

Para x = 0 se tiene que ϕ (x=0) = 0, por lo tanto:

$$\boxed{C_2 := 0}$$

Para x = L se tiene que M_t = -Pe, por lo tanto:

$$\boxed{C_1 := \frac{M}{G \cdot I_t} = -0.01015}$$

Las funciones de giros y momentos torsores son iguales a:

$$\boxed{\phi_x(x) := C_1 \cdot x + C_2}$$

$$\phi_x(0) = 0$$

$$\phi_x(L) = -0.03045$$

$$\phi_x\left(\frac{L}{4}\right) = -0.00761$$

$$\phi_x\left(\frac{2 \cdot L}{4}\right) = -0.01522$$

$$\phi_x\left(\frac{3 \cdot L}{4}\right) = -0.02283$$

$$\boxed{M_t(x) := G \cdot I_t \cdot (C_1)}$$

$$M_t(0) = -5$$

$$M_t(L) = -5$$

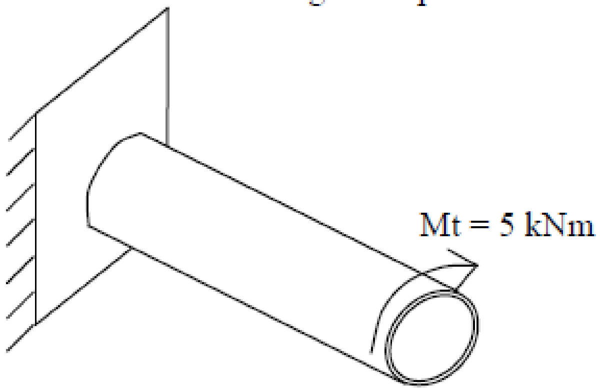
$$M_t\left(\frac{L}{4}\right) = -5$$

$$M_t\left(\frac{2 \cdot L}{4}\right) = -5$$

$$M_t\left(\frac{3 \cdot L}{4}\right) = -5$$

<u>Ejercicio 6:</u>

2) Dada la estructura de la Figura se pide:



Re = 5 cm
Ri = 4 cm
E = 2.1 x 10^5 MPa
G = 0.85 x 10^5 MPa
L = 3 m

a) Integrando la ecuación de equilibrio, obtener y dibujar el diagrama de Momento Torsor (con sus correspondientes valores) y el giro máximo (ϕmax).